

ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертационную работу Ижбердеевой Елизаветы Монировны «Исследование эволюционных уравнений с производной Джрбашяна–Нерсесяна», представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.2 – «Дифференциальные уравнения и математическая физика»

Диссертация посвящена исследованию актуальных вопросов теории дифференциальных уравнений дробного порядка в банаховых пространствах.

Теория дифференциальных уравнений дробного порядка является активно развивающейся областью современного анализа, служит источником новых задач и стимулирует развитие существующих и появление новых аналитических методов.

Существуют различные подходы к определению операций интегрирования и дифференцирования дробного порядка. В работе Ижбердеевой Е.М. развивается подход, при котором классические подходы, основанные на операторах Римана–Лиувилля и операторах Герасимова–Капуто, оказываются частными предельными случаями. Этот подход, связанный с рассмотрением операторов дробного дифференцирования Джрбашяна–Нерсесяна, обнаруживает много интересных и важных особенностей и открывает новое понимание различных явлений в дробном исчислении и теории дифференциальных уравнений дробного порядка.

Отметим также, что изучение абстрактных эволюционных уравнений позволяет с единой точки зрения рассматривать широкие классы дифференциальных уравнений разной природы, используя при этом общие подходы к их изучению, что важно с точки зрения приложений в теории уравнений в частных производных.

Кроме того, интегрирование и дифференцирование дробного порядка лежит в основе эффективных подходов к описанию физических процессов, протекающих в неоднородных средах и средах с памятью. Это ставит развитие аналитического аппарата дробного исчисления и теории дифференциальных уравнений с дробного порядка в ряд актуальных и важных задач.

Именно в этом ключе выполнена работа Е.М. Ижбердеевой. Поэтому актуальность и своевременность проведенных в работе исследований не вызывает сомнений.

В работе исследованы вопросы разрешимости начальных задач для линейных и нелинейных эволюционных уравнений с производными Джрбашяна–Нерсесяна в банаховых пространствах, а также их применения к решению начально-краевых задач для уравнений в частных производных.

Диссертация содержит три главы, введение и заключение, а также список используемой литературы и список обозначений и соглашений.

Во введении автор обосновывает актуальность затронутой тематики, проводит анализ истории развития, современного состояния и степени разработанности темы исследования диссертации и смежных вопросов, обозначает цели и задачи исследования, раскрывает научную новизну, теоретическую и практическую значимость работы, приводит краткое описание используемых методов, сведения об апробации результатов и краткое содержание работы.

Первая глава посвящена решению начальных задач для линейных и нелинейных уравнений, разрешенных относительно дробной производной, с ограниченным операторным коэффициентом при искомой функции. Доказаны теоремы существования и единственности решений, указаны достаточные условия однозначной разрешимости рассматриваемых задач. В линейном случае построены явные представления решений.

При этом, особо следует отметить результаты, изложенные в разделе 1.6. В частности, утверждение теоремы 1.6.1 о том, что любой секвенциальный оператор дробного дифференцирования является оператором Джрбашяна–Нерсесяна, имеет важное теоретико-методологическое значение.

Во второй главе решаются начальные задачи для линейных и квазилинейных уравнений с вырожденным оператором при старшей производной с условием спектральной ограниченности пары операторов. При этом исходная задача представляется как система задач на дополняющих друг друга подпространствах с вырождением и без. Рассмотрены вырожденные уравнения с тремя типами нелинейностей, для каждого из которых указаны условия, обеспечивающие однозначную разрешимость начальных задач. Также, особый интерес вызывают, рассмотренные в этой главе обратные задачи с интегральными условиями переопределения.

В третьей главе решены начальные задачи для уравнений с неограниченными операторами. Для неоднородных уравнений с вырожденным оператором при старшей дробной производной и с парой операторов, порождающей вырожденное аналитическое разрешающее семейство операторов, доказана однозначная разрешимость задач с условием

типа Шоуолтера–Сидорова. Решения построены в терминах разрешающих операторов.

К явным достоинствам работы следует отнести содержащиеся в каждой из трех главах приложения, демонстрирующие приложение полученных абстрактных результатов к решению начально-краевых задач для уравнений и систем в частных производных с операторами дробного дифференцирования по временной переменной.

Таким образом, в диссертационной работе Е.М. Ижбердеевой получены новые, имеющие заметную научную ценность, результаты о разрешимости начальных задач для линейных и квазилинейных эволюционных уравнений с операторами Джрбашяна–Нерсесяна в банаховых пространствах, а также их приложений к решению начально-краевых задач для широкого класса уравнений математической физики.

Следует отметить, что результаты, относящиеся к решению начальных задач для эволюционных уравнений с операторами Джрбашяна–Нерсесяна в случае неограниченных операторов, а также в случае вырождения, практически не имеют аналогов и их следует отнести к новым значимым достижениям в теории дифференциальных уравнений дробного порядка и уравнений в банаховых пространствах.

Результаты диссертации являются теоретическими и вносят заметный вклад в развитие теории эволюционных уравнений дробного порядка в банаховых пространствах. Практическая значимость полученных результатов обусловлена высоким прикладным потенциалом теории дробного исчисления в физике и математическом моделировании, а также значимостью теории абстрактных дифференциальных уравнений в развитии методов решения начальных и краевых задач уравнений в частных производных.

В качестве замечаний и рекомендаций к работе отметим следующее:

1. Значение параметра σ_k сверху оценивается числом k , а не $k - 1$, как написано (стр. 21, строка 3 снизу).

2. При определении решений задачи (1.2.1), (1.2.2), а также задачи (3.1.1), (3.1.2) (текст после формулы (1.2.2) на стр. 24, а также абзац перед определением 3.1.1 на стр. 84) вместо ' $\dots \cap L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}_+; \dots$ ' следовало бы писать ' $\dots \cap L_{1,\text{loc}}(\overline{\mathbb{R}}_+; \dots$ '.

3. Лемма 1.3.2 содержит неточность. В левой части включения должен быть написан дробный интеграл с началом в точке $t = t_0$, а не J_t^β , которым, согласно принятому в работе определению, обозначается интеграл с началом в точке $t = 0$. Либо в правой части, вместо t_0 следует написать 0.

То же самое относится и к результатам, изложенным в разделах 2.3, 2.4 и 2.5. Очевидно, что в задачах (2.3.1), (2.3.2), (2.4.1), (2.4.3) и (2.5.1), (2.5.2), а также в теоремах 2.3.1, 2.4.1 и 2.5.1, вместо D^{σ_k} , должны присутствовать операторы дробного дифференцирования с началом в точке t_0 .

4. Условия на правую часть $f(t)$ задачи (1.4.1), (1.4.4) можно было бы немного ослабить (лемма 1.4.1, теорема 1.4.1, следствия 1.5.1, 1.5.2 и т.д.). Например, можно допустить наличие степенной особенности $f(t)$ в нуле. Кроме того, в случае $\alpha_n < 1$ вместо принадлежности C_γ^1 можно было бы потребовать представимости $f(t)$ в виде дробного интеграла, что также расширило бы класс допустимых правых частей.

В свою очередь, это позволило бы расширить соответствующие классы для коэффициентов в обратных задачах. Например, для коэффициента $\varphi(t)$ в задаче (2.9.1) - (2.9.3).

Отметим, что указанные замечания не влияют на общую положительную оценку работы.

Тема диссертации, рассматриваемые в ней вопросы, полученные результаты, а также использованные методы полностью соответствуют специальности 1.1.2 – «Дифференциальные уравнения и математическая физика». Положения и выводы диссертации обоснованы, снабжены строгими доказательствами и подкреплены сравнительным анализом с известными на сегодняшний день результатами.

Основные результаты диссертации опубликованы в 22 работах, 8 из которых в научных изданиях, рекомендованных ВАК и включенных в международные базы Web of Science и Scopus. Результаты диссертации прошли хорошую апробацию, докладывались и обсуждались на международных научных конференциях и на научных семинарах. Автореферат ясно и полно отражает содержание диссертации, суть проведенных исследований и полученных результатов, а также их место в современной теории дифференциальных уравнений.

Диссертация написана единолично, обладает внутренним единством и содержит новые научные результаты, свидетельствующие о личном вкладе автора в теорию дифференциальных уравнений дробного порядка в банаховых пространствах.

Диссертация удовлетворяет пункту 9 Положения о присуждении ученых степеней от 24 сентября 2013 года № 842, а именно является научно-квалификационной работой, в которой содержится разработка методов качественного исследования и решения начальных задач для линейных и нелинейных дифференциальных уравнений дробного порядка в банаховых

пространствах, имеющих существенное значение для развития теории дифференциальных уравнений дробного порядка.

Учитывая вышеизложенное, считаю, что диссертационная работа «Исследование эволюционных уравнений с производной Джрбашьяна–Нерсесяна» соответствует всем требованиям, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени кандидата наук, а ее автор, Ижбердеева Елизавета Монировна, заслуживает присуждения ей ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.2 — «Дифференциальные уравнения и математическая физика».

Официальный оппонент,

 Псху Арсен Владимирович

доктор физико-математических наук (01.01.02 – дифференциальные уравнения); доцент;

Кабардино-Балкарская Республика, 360000, Нальчик, ул. Шортанова 89А;

Тел.: (8662) 42-66-61; e-mail: ipma@niipma.ru;

Институт прикладной математики и автоматизации – филиал Федерального государственного бюджетного научного учреждения «Федеральный научный центр «Кабардино-Балкарский научный центр Российской академии наук» (ИПМА КБНЦ РАН); директор.

Подпись Псху А.В. ЗАВЕРЯЮ

Главный ученый секретарь КБНЦ РАН

к.ф.-м.н.



Ю.В. Савойский

26.08.2024