На правах рукописи

Мажгихова Мадина Гумаровна

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Нальчик – 2023

Работа выполнена в отделе Дробного исчисления Института прикладной математики и автоматизации ФГБНУ «Федеральный научный центр «Кабардино-Балкарский научный центр Российской академии наук»

Научный руководитель:

Псху Арсен Владимирович
доктор физико-математических наук, доцент

Официальные оппоненты:

Кожанов Александр Иванович
доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник лаборатории дифференциальных и разностных уравнений Федерального государственного бюджетного учреждения науки «Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук»

Ситник Сергей Михайлович
доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Белгородский государственный национальный исследовательский университет»

Ведущая организация:

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Воронежский государственный университет», г. Воронеж

Защита диссертации состоится «1» марта 2024 г. в 13^{00} на заседании объединённого диссертационного совета 99.0.110.02, созданного на базе ФГБНУ Уфимский федеральный исследовательский центр Российской академии наук, ФГБОУ ВО «Уфимский университет науки и технологий», по адресу: 450008, г. Уфа, ул. К. Маркса, д. 12.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБОУ ВО «Уфимский университет науки и технологий» и на сайте https://uust.ru/.

Автореферат разослан «____» ________________ 2023 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
доктор физико-математических наук

Исаев Константин Петрович

Общая характеристика работы

В настоящей работе исследуются линейные обыкновенные дифференциальные уравнения дробного порядка вида

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha}u(t) - \lambda u(t) - \mu H(t-\tau)u(t-\tau) = f(t), \quad t > 0 \tag{1}$$

с постоянными и переменными запаздыванием τ и коэффициентами λ, μ, $H(t)$ – функция Хевисайда.

Актуальность темы исследования.

Дробное исчисление представляет собой обобщение классической теории дифференциального исчисления и связано с операциями интегрирования и дифференцирования нецелого порядка.

Уравнения, содержащие дробные производные, позволяют моделировать различные эффекты, часто встречающиеся в природных явлениях, и представляют собой хороший инструмент для описания эффекта памяти и наследственных свойств различных материалов и процессов. При протекании процессов происходит задержка времени. Задержка возникает в естественной системе, потому что всегда существует временная продолжительность некоторых скрытых процессов. Поэтому дифференциальные уравнения, содержащие как дробную производную, так и запаздывание аргумента, являются более реалистичными при описании математических моделей различных процессов.

Линейное обыкновенное дифференциальное уравнение дробного порядка

$$D^\alpha_{ax}y(x) - \lambda y(x) = f(x), \quad n-1 < \alpha \le n$$

одним из первых рассматривал Дж. Баррет в работе[1], в которой получено решение линейного обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка методом последовательных приближений. Майнарди Ф. и Горенфло Р. показана реализуемость метода Лапласа для решения уравнения дробного порядка и важность функции Миттаг-Леффлера в дробном исчислении[2]. А. В. Псху для обыкновенного дифференциального уравнения с дробной производной Римана–Лиувилля дискретно распределенного порядка

$$D^\alpha_{0x}u(x) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i D^{\alpha_i}_{0x}u(x) = f(x), \quad n-1 < \alpha \le n, \quad \alpha > \alpha_i$$

[1] *Barrett J. H.* Differential equations of non-integer order // Canadian J. Math. –1954. –Vol. 6, No. 4. –P. 529–541.

[2] *Mainardi F., Gorenflo R.* The Mittag-Leffler function in the Riemann–Liouville fractional calculus // Boundary value problems, special functions and fractional calculus (Ed. A.A.Kilbas). Belorussian State University, –Minsk. –1996. –P. 215–225.

получено явное представление решения и выписаны необходимые и достаточные условия разрешимости начальной задачи[3]. Работа I. Ozturk[4] посвящена исследованию краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения с дробной производной и со спектральным параметром. В работах А. М. Нахушева приведены постановки видоизмененных задач Коши и Неймана для уравнения второго порядка с дробной производной[5], а также исследована краевая задача для уравнения второго порядка с производной Римана–Лиувилля в группе младших членов[6]

$$y''(x) + a_0(x)y'(x) + \sum_{j=1}^{m} a_j(x) D_{0x}^{\alpha_j} \omega_j(x) y(x) + a_{m+1}(x) y(x) = f(x).$$

В работе[7] R. P. Agarwal, M. Benchohra и S. Hamani решена краевая задача для уравнения с производной Герасимова–Капуто третьего порядка.

Оператор дробного дифференцирования Джрбашяна–Нерсесяна впервые введен М. М. Джрбашяном и А. Б. Нерсесяном в работе[8], в которой для линейного дифференциального уравнения с производной Джрбашяна–Нерсесяна

$$D_{0x}^{\sigma_n} y(x) + p_0(x) D_{0x}^{\sigma_{n-1}} y(x) + \cdots + p_{n-1}(x) D_{0x}^{\sigma_0} y(x) + p_n(x) y(x) = f(x), \ \sigma_n = \sum_{j=0}^{n} \gamma_j - 1 > 0,$$

$0 < \gamma_j \leq 1$, доказано существование и единственность решения задачи Коши и получено представление решения. Однозначная разрешимость начальных задач для линейных уравнений в банаховых пространствах с композицией двух дробных производных исследована в работах[9],[10].

Приведем ряд работ, посвященных краевым задачам для дифференциальных уравнений (в том числе в частных производных) с производной Джрбашяна–Нерсеся-

[3] *Псху А. В.* Начальная задача для линейного обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка // Матем. сб. –2011. –Т. 202, № 4. –С. 111–122.

[4] *Ozturk I.* On the theory of frational differential equation // Reports of Adyghe (Cirassian) International Academy of Sciences. –1998. –Vol. 3, No 2. –P. 35–39.

[5] *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение. –М.: Физматлит, 2003. –272 с.

[6] *Нахушев А. М.* Задача Штурма–Лиувилля для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с дробными производными в младших членах // ДАН СССР. –1977. –Т. 234, № 2. –С. 308–311.

[7] *Agarwal R.P., Benchohra M., Hamani S.* Boundary value problems for fractional differential equations // Georgian Mathematical Journal. –2009. –Vol. 16, No. 3. –P 401–411.

[8] *Джрбашян М. М., Нерсесян А. Б.* Дробные производные и задача Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка // Изв. Акад. Наук Арм. ССР. –1968. –Т. 3, № 1. –С. 3–29.

[9] *Волкова А. Р., Ижбердеева Е. М., Федоров В. Е.* Начальные задачи для уравнений с композицией дробных производных. Челябинский физико-математический журнал. –2021. –Т. 6, №. 3. –С. 269–277.

[10] *Fedorov V. E, Plekhanova M. V, Izhberdeeva E. M.* Initial value problems of linear equations with the Dzhrbashyan–Nersesyan derivative in Banach spaces // Symmetry. –2021. –Vol. 13, No. 6. –P. 1058. https://doi.org/10.3390/sym13061058.

на. Исследованию краевой задачи типа Штурма–Лиувилля посвящена работа[11], где приведено доказательство теоремы существования и единственности решения для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка. Ф. Т. Богатыревой доказана теорема о влиянии распределения параметров оператора Джрбашяна–Нерсесяна на постановки задач[12].

Важным классом дифференциальных уравнений являются уравнения с запаздывающим аргументом. Постановки начальной и краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом

$$x^{(n)}(t) = \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{j=1}^{m} a_{pj}(t) x^p(t - \tau_j(t)) + f(t)$$

приведены и исследованы в работе [13] С. Б. Норкиным и в работе[14] А. М. Зверкиным, Г. А. Каменским, С. Б. Норкиным и Л. Э. Эльсгольцем.

Решение дифференциального уравнения с производной Герасимова–Капуто порядка $0 < \alpha \leq 1$ с постоянными коэффициентами и постоянным запаздыванием получено в работах[15],[16]. В случае производной Римана–Лиувилля решение начальной задачи получено R. Agarwal, S. Hristova, D. O'Regan в работе[17] и X. Zhang в работе[18].

Цель работы. Основной целью диссертационной работы является исследование начальных и краевых задач для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений дробного порядка с запаздывающим аргументом и развитие методов исследования задач для таких уравнений.

Методы исследования. Результаты работы получены с использованием методов теории дробного исчисления, теории специальных функций, функции Грина,

---

[11] *Джрбашян М. М.* Краевая задача для дифференциального оператора дробного порядка типа Штурма–Лиувилля // Изв. АН Армянской ССР. –1970. –Т. 5, № 2. –С. 71–96.

[12] *Богатырева Ф. Т.* Краевые задачи для уравнения в частных производных первого порядка с операторами Джрбашяна–Нерсесяна // Челябинский физико-математический журнал. –2021. –Т. 6, № 4. –С. 403–416.

[13] *Норкин С. Б.* О решениях линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом // Успехи математических наук. –1959. –Т. 14, № 1(85). –С. 199–206.

[14] *Зверкин А. М., Каменский Г. А., Норкин С. Б., Эльсгольц Л. Э.* Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом // УМН. –1962. –Т. 72, № 2(104). –С. 77–164.

[15] *Garrappa R., Kaslik E.* On initial conditions for fractional delay differential equations // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. –2020. –Vol. 90. 105359.

[16] *Naifar O., Nagy A. M., Makhlouf A. B., Kharrat M., Hammami M. A.* Finite-time stability of linear fractional-order time-delay systems // Int J Robust Nonlinear Control. –2019. –29. –P. 180–187.

[17] *Agarwal R., Hristova S., O'Regan D.* Explicit solutions of initial value problems for linear scalar Riemann–Liouville fractional differential equations with a constant delay // Mathematics. –2020. –Vol. 32, No. 8(1).

[18] *Zhang X.* Some results of linear fractional order time-delay system // Appl. Math. Comp. –2008. –Vol. 197, No. 1. –P. 407–411.

теории интегральных уравнений, метода шагов (метода последовательного интегрирования).

Научная новизна. В работе для исследуемых уравнений построено фундаментальное решение, доказана теорема об асимптотическом поведении фундаментального решения, доказана теорема существования и единственности решения начальной задачи, в том числе в случае уравнения с переменными коэффициентами и с переменным запаздыванием, получены решения обобщенной краевой задачи типа Штурма, обобщенной краевой задачи Дирихле–Неймана, задачи с условием типа Штурма–Лиувилля, а также нелокальных краевых задач.

Положения, выносимые на защиту.

1. Теорема об общем преставлении фундаментального решения. Формула Лагранжа. Теорема об асимптотическом поведении.

2. Теоремы существования и единственности решений начальной задачи для уравнений с постоянными и переменными запаздыванием и коэффициентами.

3. Теоремы существования и единственности решений краевых задач Штурма и Дирихле–Неймана. Функция Грина задачи Дирихле–Неймана.

4. Теорема существования и единственности решения краевой задачи с условиями типа Штурма–Лиувилля и теорема о конечности числа вещественных собственных значений этой задачи.

5. Функция Грина нелокальных краевых задач типа Стеклова первого и второго классов и внутреннекраевой задачи.

Практическая и теоретическая ценность.

Результаты работы носят теоретической характер. Полученные результаты внесут вклад в развитие теории дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и в теорию уравнений дробного порядка. Практическая ценность обусловлена прикладной значимостью теории дифференциальных уравнений дробного порядка с запаздывающим аргументом в математическом моделировании и других областях.

Апробация работы.

Результаты работы обсуждались на научно-исследовательском семинаре по современному анализу, информатике и физике ИПМА КБНЦ РАН (руководители: д.ф.-м.н. Нахушев А. М., д.ф.-м.н. Псху А. В.), на междугородском научно-исследовательском семинаре «Неклассические задачи математической физики» (Институт математики им. С. Л. Соболева, Математический центр в Академгородке, АН Республики Саха-Якутия, Челябинский государственный университет) (руководители: А. И. Кожанов, И. Е. Егоров, С. В. Попов, В. Е. Федоров, А. П. Солдатов, С. Г. Пятков), на научном семинаре «Современные проблемы математической физики» Института математики имени В. И. Романовского АН Республики Узбекистан и

ИПМА КБНЦ РАН (руководители: Ш. А. Алимов, А. В. Псху, Р. Р. Ашуров.), на заседаниях отдела Дробного исчисления ИПМА КБНЦ РАН (руководитель: д.ф.-м.н. Псху А. В.), на научном семинаре «Дифференциальные уравнения и математическое моделирование» при Совете молодых ученых и специалистов ИПМА КБНЦ РАН (председатель д.ф.-м.н. Мамчуев М. О.), и докладывались на российских и международных конференциях: «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики» (Нальчик, 2018), «Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование» (Дивноморское, 2016), "Modern methods, problems and applications of operator theory and harmonic analysis – IX"(Rostov-on-Don, 2019), «Современные методы математической физики и их приложения» (Ташкент, 2020), «Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь дня науки республики Казахстан» (2022), «Актуальные проблемы прикладной математики» (Терскол, 2016–2018), «Математическое моделирование фрактальных процессов, родственные проблемы анализа и информатики» (Терскол, 2012), «Современные вопросы математической физики, математической биологии и информатики» (Нальчик, 2014), XIV Владикавказская молодежная математическая школа «Математический анализ и математическое моделирование» (Цей, 2018), на X–XIV Школах молодых ученых «Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатики» (Нальчик – Эльбрус, 2012–2016), «Уфимская осенняя математическая школа – 2023» (Уфа, 4-8 октября 2023).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 18 статьях, в том числе 12 статей в изданиях, входящих в перечень ВАК. Список статей приводится в конце автореферата.

Личное участие автора в получении научных результатов. Все результаты, выносимые на защиту, опубликованы без соавторов и являются самостоятельным исследованием автора.

Структура и объем. Диссертация состоит из введения, вводных сведений, трех глав, объединяющих 12 пунктов, заключения и списка литературы, содержащего 131 наименований, и изложена на 103 страницах.

Основное содержание работы

В **Введении** приводится краткий обзор работ, относящихся к теме диссертации, выписываются основные результаты, выносимые на защиту.

Во **Вводных сведениях** приводятся основные определения используемых операторов, специальных функций, их свойства, а также формулы из теории дробного интегро-дифференцирования, необходимые для изложения результатов диссертации.

В **первой главе** исследуется уравнение с дробной производной Джрбашяна–Нерсесяна произвольного порядка

$$Lu \equiv D_{0t}^{\{\gamma_0,\ldots,\gamma_m\}}u(t) - \lambda u(t) - \mu H(t-\tau)u(t-\tau) = f(t), \quad t > 0, \tag{2}$$

где $H(t)$ – функция Хевисайда, λ, μ – произвольные постоянные, τ – фиксированное положительное число.

Оператор дробного дифференцирования Джрбашяна–Нерсесяна порядка $\alpha = \sum\limits_{k=0}^{m} \gamma_k - 1\,(0 < \gamma_k \leq 1, \gamma_0 + \gamma_m > 1)$ определяется как композиция

$$D_{at}^{\{\gamma_0,\ldots,\gamma_m\}} u(t) = D_{at}^{\gamma_m - 1} D_{at}^{\gamma_{m-1}} \ldots D_{at}^{\gamma_0} u(t) \tag{3}$$

операторов интегро-дифференцирования Римана–Лиувилля, которые определяются следующим образом:

$$D_{at}^{\alpha} g(t) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sign}(t-a)}{\Gamma(-\alpha)} \int\limits_{a}^{t} \dfrac{g(\xi)d\xi}{|t-\xi|^{\alpha+1}}, & \alpha < 0; \\ g(t), & \alpha = 0; \\ \operatorname{sign}^n(t-a) \dfrac{d^n}{dt^n} D_{at}^{\alpha-n} g(t), & n-1 < \alpha \leq n, n \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{4}$$

В **разделе 1.1** введена специальная функция

$$W_\nu(t) = W_\nu^\alpha(t; \tau, \lambda, \mu) \equiv \sum_{s=0}^{N(t)} \mu^s (t - s\tau)_+^{\alpha s + \nu - 1} E_{\alpha, \alpha s + \nu}^{s+1}(\lambda(t - s\tau)_+^\alpha), \quad t > 0, \tag{5}$$

где $\alpha > 0$, $\nu \in \mathbb{R}$, $\tau \geq 0$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$(z)_+^\rho = \begin{cases} z^\rho, & z > 0 \\ 0, & z \leq 0, \end{cases}$$

$N(t) = \left\lceil \frac{t}{\tau} \right\rceil$, где $\lceil x \rceil = \min\{n \in \mathbb{Z} | n \geq x\}$ – ближайшее справа от числа x целое число (потолок числа). Исследованы свойства функции (5) и доказана теорема о фундаментальном решении.

Определение 1 *Фундаментальным решением уравнения* (2) *назовем функцию* $v(t-\xi)$, *удовлетворяющую уравнению*

$$D_{t\xi}^{\{\gamma_m,\ldots,\gamma_0\}} v(t-\xi) - \lambda v(t-\xi) - \mu H(t-\xi-\tau) v(t-\xi-\tau) = 0$$

и условиям

$$\begin{cases} \lim\limits_{\xi \to t} D_{t\xi}^{\gamma_m - 1} v(t-\xi) = 1, \\ \lim\limits_{\xi \to t} D_{t\xi}^{\{\gamma_m,\ldots,\gamma_{k+1}\}} v(t-\xi) = 0, \qquad k = \overline{0, m-2}. \end{cases}$$

Теорема 1 *Функция* $W_{\gamma_m}(t-\xi)$ *является фундаментальным решением уравнения* (2).

В **разделе 1.2** для уравнения (2) получен аналог формулы Лагранжа

$$(Lu*v)(t) = \sum_{k=0}^{m-1} D_{t\xi}^{\{\gamma_m,\dots,\gamma_{k+1}\}} v(t-\xi) D_{0\xi}^{\{\gamma_0,\dots,\gamma_k\}} u(\xi)\Big|_0^t +$$

$$+ u(t) * \left[D_{t\xi}^{\{\gamma_m,\dots,\gamma_0\}} v(t) - \lambda v(t) - \mu H(t-\tau) v(t-\tau) \right],$$

$(u*v)(t)$ – свертка Лапласа функций u и v.

В **разделе 1.3** исследуется начальная задача для уравнения (2).

Определение 2 *Регулярным решением уравнения* (2) *назовем функцию* $u = u(t)$ *такую, что* $D_{0t}^{\{\gamma_0,\dots,\gamma_k\}} u(t) \in AC[0,1]$, $k = \overline{0, m-1}$, *и удовлетворяющую уравнению* (2) *для всех* $t > 0$.

Задача 1 *Найти регулярное решение уравнения* (2), *удовлетворяющее условиям*

$$\lim_{t\to 0} D_{0t}^{\{\gamma_0,\dots,\gamma_i\}} u(t) = u_i, \quad i = \overline{0, m-1}, \tag{6}$$

где u_i *– заданные действительные числа.*

Теорема 2 *Пусть функция* $f(t) \in C(0,\infty)$ *представима в виде*

$$f(t) = D_{0t}^{\gamma_m - 1} g(t), \qquad g(t) \in L(0,\infty).$$

Тогда решение задачи (2), (6) *существует, единственно и имеет вид*

$$u(t) = \sum_{i=0}^{m-1} u_i W_{\rho_i}(t) + (f * W_\alpha)(t), \quad \rho_i = \sum_{k=0}^{i} \gamma_k.$$

В **разделе 1.4** получены асимптотические формулы для функции $W_\nu(t)$ при $1 < \alpha < 2:$ если $\lambda \to +\infty$, то

$$W_\nu(t) = \lambda^{\frac{1-\nu}{\alpha}} e^{\lambda^{\frac{1}{\alpha}} t} + \frac{t^{\nu-\alpha-1}}{\lambda \Gamma(\nu-\alpha)} - \frac{t^{\nu-2\alpha-1}}{\lambda^2 \Gamma(\nu - 2\alpha)} + O\left(\lambda^{-3}\right),$$

и если же $\lambda \to -\infty$

$$W_\nu(t) = \frac{t^{\nu-\alpha-1}}{|\lambda| \Gamma(\nu-\alpha)} - \frac{t^{\nu-2\alpha-1}}{|\lambda|^2 \Gamma(\nu-2\alpha)} + O\left(|\lambda|^{-3}\right).$$

В **разделе 1.5** исследуется начальная задача для уравнения с переменными коэффициентами и переменным запаздыванием

$$D_{0t}^{\{\gamma_0,\gamma_1\}}u(t) - \lambda(t)u(t) - \mu(t)u(t-\tau(t)) = f(t), \tag{7}$$

где $0 < \gamma_0, \gamma_1 \le 1$, причем $\gamma_0 + \gamma_1 > 1$, $\lambda(t), \mu(t)$ – непрерывные функции, функция $\tau(t)$ – непрерывно-дифференцируемая функция, обладающая следующими свойствами:

1) функция $\tau(t) > 0$ для всех $t \in [0, \infty)$;

2) для любого $c \ge -\tau(0)$ функция $\tau(t)$ пересекается с прямой $t - c$ ровно в одной точке.

Задача 2 *Найти регулярное решение* $u(t)$ *уравнения* (7), *удовлетворяющее условию*

$$u(t) = \varphi_0(t), \quad -\tau(0) \le t \le 0, \quad \lim_{t\to 0} D_{0t}^{\gamma_0-1}u = a. \tag{8}$$

Обозначим через $H^{\varepsilon}[0,\infty)$ класс функций, удовлетворяющих условию Гёльдера порядка ε. Справедлива теорема.

Теорема 3 *Пусть функции* $\lambda(t)$, $\mu(t) \in H^{\varepsilon}$, $\varepsilon > \gamma_0$, *и для функции* $f(t) \in C[0,\infty)$ *справедливо интегральное представление*

$$f(t) = D_{0t}^{\gamma_1-1}g(t).$$

Тогда существует регулярное решение $u(t)$ *уравнения* (7), *удовлетворяющее условию* (8) *при всех* $t > 0$, *и оно единственно.*

Во **второй главе** исследуются локальные двухточечные краевые задачи для уравнения с запаздывающим аргументом с дробной производной Римана–Лиувилля

$$D_{0t}^{\alpha}u(t) - \lambda u(t) - \mu H(t-\tau)u(t-\tau) = f(t), \quad 0 < t < 1. \tag{9}$$

В **разделе 2.1** для уравнения (9) порядка $n-1 < \alpha \le n$ получено решение краевой задачи с обобщенными краевыми условиями Штурма.

Задача 3 *Найти регулярное решение уравнения* (9), *удовлетворяющее условиям*

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik} \lim\limits_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha-k}u(t) = c_i, & i = \overline{1,p}, \\ \sum\limits_{k=1}^{n} b_{jk} \lim\limits_{t\to 1} D_{0t}^{\alpha-k}u(t) = c_{p+j}, & j = \overline{1,q}, \end{cases} \tag{10}$$

где $p + q = n$, $a_{ik}, b_{jk}, c_i, c_{p+j}$ *– заданные постоянные.*

Теорема 4 *Пусть функция* $f(t) \in L(0,1) \cap C(0,1)$ *и выполнено условие*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pn} \\ \sum\limits_{s=1}^{n} b_{1s} W_s(\lambda) & \sum\limits_{s=1}^{n} b_{1s} W_{s-1}(\lambda) & \dots & \sum\limits_{s=1}^{n} b_{1s} W_{s-n+1}(\lambda) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum\limits_{s=1}^{n} b_{qs} W_s(\lambda) & \sum\limits_{s=1}^{n} b_{qs} W_{s-1}(\lambda) & \dots & \sum\limits_{s=1}^{n} b_{qs} W_{s-n+1}(\lambda) \end{vmatrix} \neq 0. \tag{11}$$

Тогда: 1) существует регулярное решение задачи (9), (10), *которое имеет вид*

$$u(t) = \frac{1}{\triangle} \sum_{s=1}^{n} W_{\alpha-s+1}(t) \left[\sum_{i=1}^{p} c_i M_{is} + \sum_{j=1}^{q} c_{p+j} M_{p+j,s} \right] +$$

$$+ \int\limits_0^1 f(\xi) \Big[H(t-\xi) W_\alpha(t-\xi) - \frac{1}{\triangle} \sum_{s=1}^{n} W_{\alpha-s+1}(t) \sum_{j=1}^{q} M_{p+j,s} \sum_{k=1}^{n} b_{jk} W_k(1-\xi) \Big] d\xi;$$

2) решение задачи (9), (10) *единственно тогда и только тогда, когда выполнено условие* (11).

Здесь, M_{ij} – алгебраическое дополнение к элементу определителя (11).

В **разделе 2.2** для уравнения (9) при $1 < \alpha \leq 2$ исследована краевая задача с однородными условиями типа Штурма–Лиувилля:

Задача 4 *Найти регулярное решение уравнения* (9), *удовлетворяющее условиям*

$$\begin{aligned} & a \lim_{t \to 0} D_{0t}^{\alpha-1} u(t) + b \lim_{t \to 0} D_{0t}^{\alpha-2} u(t) = 0, \\ & c \lim_{t \to 1} D_{0t}^{\alpha-1} u(t) + d \lim_{t \to 1} D_{0t}^{\alpha-2} u(t) = 0, \end{aligned} \tag{12}$$

где a, b, c, d *– заданные постоянные, причем* $a^2 + b^2 \neq 0$ *и* $c^2 + d^2 \neq 0$.

Лемма 1 *Функция*

$$G(t,\xi) = H(t-\xi) W_\alpha(t-\xi) + \frac{1}{\triangle} \Big(c W_1(1-\xi) + d W_2(1-\xi) \Big) \Big(b W_\alpha(t) - a W_{\alpha-1}(t) \Big),$$

определенная для тех λ *и* μ, *для которых выполнено условие*

$$\triangle = ac(\lambda W_\alpha(1) + \mu W_\alpha(1-\tau)) + (ad - bc) W_1(1) - bd W_2(1) \neq 0, \tag{13}$$

является функцией Грина задачи (9), (12).

Теорема 5 *Пусть* $f(t) \in L(0,1) \cap C(0,1)$ *и выполнено условие* (13). *Тогда:*
1) существует регулярное решение задачи (9), (12), *которое имеет вид*

$$u(t) = \int\limits_0^1 f(\xi) G(t,\xi) d\xi;$$

2) решение задачи (9), (12) *единственно тогда и только тогда, когда выполняется условие* (13).

В **разделе 2.3** исследована задача Дирихле–Неймана для уравнения (9) при $n-1 < \alpha \le n$.

Задача 5 *Найти регулярное решение уравнения* (9), *удовлетворяющее краевым условиям*

$$\begin{cases} \lim\limits_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha-\beta_i} u(t) = a_i, \quad i = \overline{1,p}, \\ \lim\limits_{t\to 1} D_{0t}^{\alpha-\delta_j} u(t) = b_j, \quad j = \overline{1,q}, \end{cases} \tag{14}$$

причем $p+q=n$, a_i, b_j *– заданные постоянные,* β_i, δ_j *– элементы из множества* $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Определение 3 *Функцией Грина задачи* (9), (14) *назовем функцию* $G(t,\xi)$, *удовлетворяющую свойствам:*

1. *Функция* $G(t,\xi)$ *непрерывна для всех* t *и* ξ *из отрезка* $[0,1]$;
2. *Функция* $G(t,\xi)$ *удовлетворяет соотношениям*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[D_{0t}^{\alpha-n} \frac{\partial^{n-1}}{\partial \xi^{n-1}} G(t,\xi)\Big|_{\xi=t-\varepsilon} - D_{0t}^{\alpha-n} \frac{\partial^{n-1}}{\partial \xi^{n-1}} G(t,\xi)\Big|_{\xi=t+\varepsilon} \right] = (-1)^{n-1};$$

3. *Функция* $G(t,\xi)$ *в интервалах* $(0,t)$ *и* $(t,1)$ *является решением однородного уравнения*

$$\partial_{1\xi}^{\alpha} G(t,\xi) - \lambda G(t,\xi) - \mu H(1-\xi-\tau) G(t,\xi+\tau) = 0,$$

где $\partial_{1\xi}^{\alpha} G = D_{1\xi}^{\alpha-n} \frac{d^n}{d\xi^n} G$ *– производная Герасимова–Капуто;*

4. *Функция* $G(t,\xi)$ *удовлетворяет краевым условиям*

$$D_{0t}^{\alpha-n} \frac{\partial^{\beta_s-1}}{\partial \xi^{\beta_s-1}} G(t,\xi)\Big|_{\xi=0} = 0, \quad s = \overline{p+1,n},$$

$$D_{0t}^{\alpha-n} \frac{\partial^{\delta_s-1}}{\partial \xi^{\delta_s-1}} G(t,\xi)\Big|_{\xi=1} = 0, \quad s = \overline{q+1,n}.$$

Лемма 2 *Функция*

$$G(t,\xi) = H(t-\xi)W_{\alpha}(t-\xi) - \frac{1}{\triangle}\sum_{s=1}^{q} W_{\alpha-\beta_{s+p}+1}(t)\sum_{j=1}^{q} D_{js}W_{\delta_j}(1-\xi), \qquad (15)$$

определенная для тех λ *и* μ, *для которых выполняется условие*

$$\triangle = \begin{vmatrix} W_{\delta_1-\beta_{1+p}+1}(1) & W_{\delta_1-\beta_{2+p}+1}(1) & \ldots W_{\delta_1-\beta_{q+p}+1}(1) \\ W_{\delta_2-\beta_{1+p}+1}(1) & W_{\delta_2-\beta_{2+p}+1}(1) & \ldots W_{\delta_2-\beta_{q+p}+1}(1) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ W_{\delta_q-\beta_{1+p}+1}(1) & W_{\delta_q-\beta_{2+p}+1}(1) & \ldots W_{\delta_q-\beta_{q+p}+1}(1) \end{vmatrix} \neq 0, \qquad (16)$$

является функцией Грина задачи (9), (14).

В формуле (15) D_{ij} – алгебраическое дополнение к элементу определителя (16).

Теорема 6 *Пусть функция* $f(t) \in C(0,1) \cap L(0,1)$ *и выполнено условие* (16). *Тогда:*
1) решение задачи (9), (14) *существует, единственно и имеет вид*

$$u(t) = \sum_{i=1}^{p}(-1)^{\beta_i-1}a_i\left[\frac{\partial^{\beta_i-1}}{\partial\xi^{\beta_i-1}}G(t,\xi)\right]_{\xi=0} -$$

$$-\sum_{j=1}^{q}(-1)^{\delta_j-1}b_j\left[\frac{\partial^{\delta_j-1}}{\partial\xi^{\delta_j-1}}G(t,\xi)\right]_{\xi=1} + \int_0^1 f(\xi)G(t,\xi)d\xi;$$

2) решение задачи (9), (14) *единственно тогда и только тогда, когда выполняется условие* (16).

В **разделе 2.4** исследованы спектральные свойства задачи (9), (12).

Определение 4 *Собственными значениями задачи* (9), (12) *назовем значения* λ, *при которых задача* (9), (12) *имеет регулярное решение, тождественно не равное нулю.*

Теорема 7 *Задача* (9), (12) *имеет лишь конечное число вещественных собственных значений.*

В третьей главе для уравнения (9) при $1 < \alpha \leq 2$ рассматриваются нелокальные краевые задачи типа Стеклова первого и второго классов и внутреннекраевая задача с условиями, связывающими значение искомой функции на граничной точке со значениями во внутренних точках.

В **разделе 3.1** исследуется краевая задача типа Стеклова первого класса.

Задача 6 *Найти регулярное решение уравнения* (9), *удовлетворяющее условиям:*

$$\begin{aligned} D_{0t}^{\alpha-1}u(t)\big|_{t=0} &= c_1 D_{0t}^{\alpha-2}u(t)\big|_{t=0} + c_2 D_{0t}^{\alpha-2}u(t)\big|_{t=1}, \\ D_{0t}^{\alpha-1}u(t)\big|_{t=1} &= c_3 D_{0t}^{\alpha-2}u(t)\big|_{t=0} + c_4 D_{0t}^{\alpha-2}u(t)\big|_{t=1}. \end{aligned} \tag{17}$$

Лемма 3 *Функция*

$$G(t,\xi) = H(t-\xi)W_\alpha(t-\xi) + \frac{W_\alpha(t)}{\triangle}\Big[A_2W_1(1-\xi) - W_2(1-\xi)[c_4A_2 + c_2B_2]\Big] -$$

$$- \frac{W_{\alpha-1}(t)}{\triangle}\Big[A_1W_1(1-\xi) - W_2(1-\xi)[c_4A_1 + c_2B_1]\Big],$$

определенная для тех λ *и* μ, *для которых выполнено условие*

$$\triangle = A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0, \tag{18}$$

является функцией Грина задачи (9), (17).

В формуле (18) коэффициенты $A_i, B_i,\ i = 1, 2,$ определены соотношениями

$$A_1 = c_2W_2(1) - 1, \quad A_2 = c_2W_1(1) + c_1,$$

$$B_1 = W_1(1) - c_4W_2(1), \quad B_2 = \lambda W_\alpha(1) + \mu W_\alpha(1-\tau) - c_4W_1(1) - c_3.$$

Теорема 8 *Пусть* $f(t) \in L(0,1) \cap C(0,1)$ *и выполнено условие* (18). *Тогда:*
1) решение задачи (9), (17) *существует и имеет вид*

$$u(t) = \int_0^1 f(\xi)G(t,\xi)d\xi;$$

2) решение задачи (9), (17) *единственно тогда и только тогда, когда выполнено условие* (18).

В **разделе 3.2** исследуется краевая задача типа Стеклова второго класса.

Задача 7 *Найти регулярное решение $u(t)$ уравнения* (9)*, удовлетворяющее условиям*

$$\begin{cases} D_{0t}^{\alpha-2}u(t)\big|_{t=1} = d_1 D_{0t}^{\alpha-2}u(t)\big|_{t=0}, \\ D_{0t}^{\alpha-1}u(t)\big|_{t=1} = d_2 D_{0t}^{\alpha-2}u(t)\big|_{t=0} + d_3 D_{0t}^{\alpha-1}u(t)\big|_{t=0}. \end{cases} \tag{19}$$

Теорема 9 *Пусть функция $f(t) \in L(0,1) \cap C(0,1)$ и выполнено условие*

$$\triangle = A_1 B_2 - A_2 B_1 \neq 0. \tag{20}$$

Тогда: 1) решение задачи (9), (19) *существует и имеет вид*

$$u(t) = \int\limits_0^1 f(\xi) G(t,\xi) d\xi;$$

2) решение задачи (9), (19) *единственно тогда и только тогда, когда выполнено условие* (20).

В решении (9) $G(t,\xi)$ – функция Грина задачи (9), (19), а в условии (20) через A_1, A_2, B_1, B_2 обозначены следующие соотношения:

$$A_1 = W_2(1), \quad A_2 = W_1(1) - d_1, \tag{21}$$

$$B_1 = W_1(1) - d_3, \quad B_2 = \lambda W_\alpha(1) + \mu W_\alpha(1-\tau) - d_2. \tag{22}$$

В **разделе 3.3** для уравнения (9) исследуется внутреннекраевая задача.

Задача 8 *Найти регулярное решение $u(t)$ уравнения* (9)*, удовлетворяющее условиям*

$$\lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha-2}u(t) = c_1, \quad \lim_{t\to 1} D_{0t}^{\alpha-2}u(t) - a\sum_{k=1}^{n} \lim_{t\to t_k} D_{0t}^{\alpha-2}u(t) = c_2, \quad 0 < t_k < 1, n \in \mathbb{N}. \tag{23}$$

Лемма 4 *Функция*

$$G(t,\xi) = H(t-\xi)W_\alpha(t-\xi) - \frac{W_\alpha(t)}{\triangle}\left[W_2(1-\xi) - a\sum_{k=1}^{n} H(t_k-\xi)W_2(t_k-\xi)\right],$$

определенная для тех λ и μ, для которых выполнено условие

$$\triangle = W_2(1) - a\sum_{k=1}^{n} W_2(t_k) \neq 0, \tag{24}$$

является функцией Грина задачи (9), (23) .

Теорема 10 *Пусть функция* $f(t) \in L(0,1) \cap C(0,1)$ *и выполнено условие* (24). *Тогда: 1) регулярное решение задачи* (9), (23) *существует и имеет вид*

$$u(t) = -c_1 G_\xi(t,\xi)\Big|_{\xi=0} + c_2 G_\xi(t,\xi)\Big|_{\xi=1} + \int\limits_0^1 f(\xi) G(t,\xi) d\xi;$$

2) решение задачи (9), (23) *единственно тогда и только тогда, когда выполнено условие* (24).

Заключение

В диссертации «Краевые задачи для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений дробного порядка с запаздывающим аргументом» получены следующие основные результаты:

1. Получено фундаментальное решение дифференциального уравнения с производной Джрбашяна–Нерсесяна. Исследованы свойства фундаментального решения и доказана теорема о его асимптотическом поведении.

2. Доказана теорема существования и единственности решения начальной задачи. Реализован метод шагов в случае переменного запаздывания.

3. Получено явное представление решения краевой задачи с условиями Штурма, которое является новым результатом в том числе в теории дифференциальных уравнений целого порядка. Реализован метод функции Грина для решения двухточечных краевых задач типа Штурма–Лиувилля и обобщенной задачи Дирихле–Неймана для уравнения произвольного порядка с дробной производной Римана–Лиувилля. Доказаны теоремы существования и единственности. Получены условия, гарантирующие однозначную разрешимость этих задач.

4. Исследованы спектральные свойства решения задачи с условиями типа Штурма–Лиувилля. Показано, что задача с условиями типа Штурма–Лиувилля может иметь лишь конечное число вещественных собственных значений.

5. Построены функции Грина нелокальных краевых задач типа Стеклова первого и второго классов, а также краевой задачи с условиями, связывающими значение искомой функции на граничной точке со значениями во внутренних точках. Доказаны теоремы существования и единственности решений.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи в изданиях, рекомендованных ВАК РФ для публикации основных результатов исследования

1. *Мажгихова М. Г.* Задача Дирихле для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка с запаздывающим аргументом // Дифференц. уравн. –2018. –Т. 54, № 2. –С. 187–194.
2. *Мажгихова М. Г.* Краевые задачи для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка с запаздывающим аргументом // Сиб. электрон. матем. изв. –2018. –Т. 15. –С. 685–695.
3. *Mazhgikhova M. G.* Generalized Sturm Problem for a Linear Fractional differential equation // Lobachevskii Journal of Mathematics. –2023. –Vol. 44, No. 2. –P. 629 – 633.
4. *Мажгихова М. Г.* Начальная и краевая задачи для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка с запаздывающим аргументом // Челябин. физ.-матем. журн. –2018. –Т. 3, № 1. –С. 27–37.
5. *Mazhgikhova M. G.* Green function method for a fractional–order delay differential equation // Bulletin of the Karaganda University. –2020. –Vol. 97, No. 1. –С. 15–20.
6. *Mazhgikhova M. G.* Steklov problem for a linear ordinary fractional delay differential equation with Riemann–Liouville derivative // Bulletin of the Karaganda University. –2022. –Vol. 106, No. 2. –P. 161–171.
7. *Мажгихова М. Г.* Краевая задача со смещением для дифференциального уравнения дробного порядка с запаздывающим аргументом // Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки. –2019. –Т. 28, № 3. –С. 16–25.
8. *Мажгихова М. Г.* Задача Стеклова первого класса для дифференциального уравнения дробного порядка с запаздывающим аргументом // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. –2021. –Т. 12, № 1. –С. 5–12.
9. *Мажгихова М. Г.* Задача Коши для уравнения с дробной производной Джрбашяна–Нерсесяна с запаздывающим аргументом // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. –2023. –Т. 42, № 1. –С. 98–107.
10. *Мажгихова М. Г.* Начальная задача для обыкновенного дифференциального уравнения с производной Римана–Лиувилля с запаздывающим аргументом // Ученые записки ОГУ. –2015. –Т. 67, № 4. –С. 46–47.
11. *Мажгихова М. Г.* Начальная задача для дифференциального уравнения дробного порядка с запаздывающим аргументом // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. –2014. –Т. 16, № 1. –С. 28–30.
12. *Мажгихова М. Г.* Задача Дирихле для дифференциального уравнения дробного порядка с запаздывающим аргументом // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. –2015. –Т. 17, № 2. –С. 42–47.