ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ НАУЧНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ "ФЕДЕРАЛЬНЫЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР "КАБАРДИНО-БАЛКАРСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК"

На правах рукописи

МАЖГИХОВА МАДИНА ГУМАРОВНА

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук

Псху Арсен Владимирович

Нальчик - 2023

Оглавление

Введение

В настоящей работе исследуются линейные обыкновенные дифференциальные уравнения дробного порядка с запаздывающим аргументом и изучаются методы решения начальных и краевых задач для этих уравнений.

Актуальность темы исследования.

Дробное исчисление представляет собой обобщение классической теории дифференциального исчисления и связано с операциями интегрирования и дифференцирования нецелого (дробного) порядка.

В настоящее время количество работ, посвященных дифференциальным уравнениям дробного порядка, заметно растет. Интерес исследователей вызван тем, что количество областей науки, в которых используются уравнения, содержащие дробные производные, варьируется от биологии и медицины до теории управления, инженерии, финансов, а также оптики, физики и так далее. Дробные производные и интегралы не являются локальными операторами. Все дробные операторы учитывают всю историю рассматриваемого процесса, что позволяет моделировать различные эффекты, часто встречающиеся в природных явлениях и представляют собой хороший инструмент для описания памяти и наследственных свойств различных материалов и процессов. Поэтому основная причина успешности применения дробного исчисления заключается в том, что математические модели, содержащие дробные операторы, часто более точны, чем модели, содержащие производные целого порядка.

На сегодняшний день имеется обширный список монографий и статей, посвященных теории дробного исчисления. Приведем сначала ряд монографий, где можно найти наиболее общую информацию по теории дробного интегро-дифференцирования: М. М. Джрбашян [13], K. B. Oldham, J. Spanier [80], С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев [40], I. Podlubny [82], А. М. Нахушев [24], А. В. Псху [32], А. В. Псху [35], A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo [72], В. В. Учайкин [44], М. О. Мамчуев [20], J. Antonio и T. Machado [69].

Одной из первых работ, посвященных обыкновенным дифференциальным уравнениям дробного порядка, является работа J. H. Barrett [58], в которой было получено решение линейного дифференциального уравнения дробного порядка методом последовательных приближений. R. Gorenflo и F. Mainardi в работе [68] показана реализуемость метода Лапласа для решения уравнения дробного порядка и важность функции Миттаг-Леффлера в дробном исчислении [76].

А. В. Псху в работе [34] для обыкновенного дифференциального уравнения с дробной производной Римана – Лиувилля дискретно распределенного порядка получено явное представление решения и получены необходимые и достаточные условия разрешимости начальной задачи. Общее представление решения уравнения с дробным дискретно распределенным оператором Герасимова – Капуто было получено Л. Х. Гадзовой в работе [10], где была доказана теорема существования и единственности решения начальной задачи. В работе [19] М. О. Мамчуевым получено решение начальной задачи для системы уравнений в частных производных с дробной производной Римана – Лиувилля.

Работа I. Ozturk [81] посвящена исследованию краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения с дробной производной и со спектральным параметром. А. П. Хромов в работе [48] исследовал разложение по собственным функциям задачи с затухающими краевыми условиями целого порядка.

Постановки видоизмененных задач Коши и Неймана для уравнения второго порядка с дробной производной приведены А. М. Нахушевым в работе [24], а также исследована краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с производной Римана – Лиувилля в группе младших членов в работе [25]. R. P. Agarwal, M. Benchohra и S. Hamani в работе [55] решается краевая задача для уравнения с производной Герасимова – Капуто третьего порядка.

Задачи Дирихле и Неймана для уравнения дискретно распределенного порядка исследованы Л. Х. Гадзовой в работе [65]. Краевые задачи со смещением для дифференциального уравнения с производной Джрбашяна – Нерсесяна и для уравнения с оператором дискретно распределенного дифференцирования исследованы в работах Ф. Т. Богатыревой [60] и Л. Х. Гадзовой [10].

Краевые задачи для уравнений и систем уравнений в частных производных дробного порядка исследованы в монографиях А. В. Псху [32] и М. О. Мамчуева [20].

Существует большое количество монографий, посвященных прикладным задачам, использующим методы дробного интегро-дифференцирования. Подробное описание применения дробного исчисления к различным областям науки и техники на современном этапе дано в монографиях K. B. Oldham, J. Spanier [80], I. Podlubny [82] и В. В. Учайкина [44] и [89], а также R. Хилфера [71], R. L. Bagley и P. J. Torvik [56], В. Е. Тарасова [88] и др.

С развитием теории дробного исчисления увеличивается и количество работ, посвященных исследованию уравнений с различными дробными операторами. А. М. Нахушевым в работе [28] впервые был введен оператор непрерывного (континуального) дифференцирования.

А. В. Псху в работе [37] для дифференциального уравнения с континуальной производной получено фундаментальное решение и изучены его свойства. В работах [33] и [38] построен аналог формулы Ньютона – Лейбница и решена задача Коши.

Б. И. Эфендиевым в работах [51], [53] для дифференциального уравнения второго порядка с континуальной производной получено фундаментальное решение и найдено решение задачи Коши.

Оператор дробного дифференцирования Джрбашяна – Нерсесяна впервые введен М. М. Джрбашяном и А. Б. Нерсесяном в работе [15], в которой для линейного дифференциального уравнения с производной Джрбашяна – Нерсесяна доказано существование и единственность решения задачи Коши и получено представление решения.

Однозначная разрешимость начальных задач для линейных уравнений в банаховых пространствах с композицией двух дробных производных исследована А. Р. Волковой, Е. М. Ижбердеевой и В. Е. Федоровым в работе [8], а также В. Е. Федоровым, М. В. Плехановой и Е. М. Ижбердеевой в работе [64]. Явное представление решения начальной задачи для уравнения с производными Джрбашяна – Нерсесяна с постоянными коэффициентами получено Ф. Т. Богатыревой в работе [4].

Исследованию начальной задачи для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с матричным коэффициентом с оператором дробного дифференцирования Джрбашяна – Нерсесяна посвящена работа М. О. Мамчуева [77].

Приведем ряд работ, посвященных краевым задачам для дифференциальных уравнений, в том числе в частных производных, с производной Джрбашяна – Нерсесяна.

Исследованию краевой задачи типа Штурма – Лиувилля посвящена работа [14], где приведено доказательство теоремы существования и единственности решения для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка. Ф. Т. Богатыревой получено решение краевой задачи в прямоугольной области для уравнения в частных производных [6] и доказана теорема о влиянии распределения параметров оператора Джрбашяна – Нерсесяна на постановки задач.

Важным классом дифференциальных уравнений являются уравнения с запаздывающим аргументом. При протекании процессов происходит задержка времени. Задержка возникает в естественной системе, потому что всегда существует временная продолжительность некоторых скрытых процессов. Поэтому, дифференциальные уравнения, содержащие как дробную производную, так и запаздывание аргумента, являются более реалистичными при описании математических моделей различных процессов.

Дифференциальные уравнения с запаздыванием находят применение в таких областях науки, как популяционная динамика, эпидемиология, иммунология, физиология.

Например, при моделировании динамики распространения вируса гепатита C считается, что производная дробного порядка представляет собой долговременную иммунную память, необходимую для промежуточных клеточных взаимодействий. Временная задержка включается в модель для представления внутриклеточной задержки между начальным заражением клетки вирусом гепатита C и высвобождением новых вирусов [85].

Также, дифференциальные уравнения дробного порядка с запаздывающим аргументом могут быть полезны экономистам при расчете оптимальных инвестиционных стратегий [17].

Дифференциальным уравнениям с запаздывающим аргументом посвящены монографии R. E. Bellman и K. L. Cooke [59], Л. Э. Эльсгольца и С. Б. Норкина [49], А. Д. Мышкиса [22], [21], [11].

Дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом в литературе также называют функционально-дифференциальными уравнениями (см., например, J. K. Hale [47], работы Н. В. Азбелева с В. П. Максимовым [1], Н. В. Азбелева, В. П. Максимова, Л. Ф. Рахматуллиной [2], Л. А. Бекларян [3], В. Г. Пименова [31]).

Постановки начальной и краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом приведены и исследованы в работе [30] С. Б. Норкиным и в работе [16] А. М. Зверкиным, Г. А. Каменским, С. Б. Норкиным и Л. Э. Эльсгольцем. В работе [39] Р. К. Романовским и Е. М. Назаруком развит метод Ляпунова для линейных систем функционально-дифференциальных уравнений в пространстве Соболева.

Вопрос о разрешимости функционально-дифференциальных уравнений в пространствах Соболева рассматривал В. В. Власов [7]. Линейные уравнения соболевского типа с запаздыванием исследовали В. Е. Федоров с Е. А. Омельченко в работах [45] и [46]. В работе C. E. Falbo [62] приводится описание методов решения линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и с запаздывающим аргументом: метода шагов и метода характеристик. I. O. Rus и V. Darzu-Ilea предложен метод для решения краевой задачи для уравнения с запаздывающим и опережающим аргументами [86].

Явное представление решения дифференциального уравнения с производной Герасимова – Капуто порядка $0 < \alpha \leq 1$ с постоянными коэффициентами и постоянным запаздыванием получено R. Garrappa и E. Kaslik в работе [67], а в случае производной Римана – Лиувилля решение начальной задачи получено R. Agarwal, S. Hristova, D. O'Regan в работе [54] и X. Zhang в работе [93]. Для уравнения с матричным коэффициентом начальная задача исследовалась в работах M. Li, J. Wang [73] и [74]. В работе [79] авторами исследовано дифференциальное уравнение с дробной производной Герасимова – Капуто с запаздывающим аргументом и получены достаточные условия устойчивости решения. Отметим также работу [57], где предложен новый метод исследования нелинейных дифференциальных уравнений дробного порядка с запаздывающим аргументом путем сведения к интегральному уравнению типа Вольтерра – Стилтьеса.

Цель работы. Основной целью диссертационной работы является исследование начальных и краевых задач для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений дробного порядка с запаздывающим аргументом и развитие методов изучения задач для таких уравнений.

Методы исследования. Результаты работы получены с использованием методов теории дробного исчисления, теории специальных функций, метода функции Грина, теории интегральных уравнений, метода шагов (метода последовательного интегрирования).

Научная новизна. В работе для исследуемых уравнений построено фундаментальное решение, доказана теорема об асимптотическом поведении фундаментального решения, доказана теорема существования и единственности решения начальной задачи, в том числе в случае уравнения с переменными коэффициентами и с переменным запаздыванием, получены решения обобщенной краевой задачи типа Штурма, обобщенной краевой задачи Дирихле – Неймана, задачи с условием типа Штурма – Лиувилля, а также нелокальных краевых задач. Результаты, выносимые на защиту, являются новыми.

Положения, выносимые на защиту.

1. Теорема об общем преставлении фундаментального решения. Формула Лагранжа. Теорема об асимптотическом поведении.

2. Теоремы существования и единственности решений начальной задачи для уравнений с постоянными и переменными запаздыванием и коэффициентами.

3. Теоремы существования и единственности решений краевых задач Штурма и Дирихле – Неймана. Функция Грина задачи Дирихле – Неймана.

4. Теорема существования и единственности решения краевой задачи с условиями типа Штурма – Лиувилля и теорема о конечности числа вещественных собственных значений этой задачи.

5. Функция Грина нелокальных краевых задач типа Стеклова первого и второго классов и внутреннекраевой задачи.

Практическая и теоретическая ценность.

Результаты работы носят теоретической характер. Полученные результаты внесут вклад в развитие теории дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и в теорию уравнений дробного порядка. Практическая ценность обусловлена прикладной значимостью теории дифференциальных уравнений дробного порядка с запаздывающим аргументом в математическом моделировании и других областях.

Апробация работы.

Результаты работы обсуждались на научно-исследовательском семинаре по современному анализу, информатике и физике ИПМА КБНЦ РАН (руководители: д.ф.-м.н. Нахушев А. М., д.ф.-м.н. Псху А. В.), на междугородском научно-исследовательском семинаре «Неклассические задачи математической физики» (Институт математики им. С. Л. Соболева, Математический центр в Академгородке, АН Республики Саха-Якутия, Челябинский государственный университет) (руководители: А. И. Кожанов, И. Е. Егоров, С. В. Попов, В. Е. Федоров, А. П. Солдатов, С. Г. Пятков), на научном семинаре «Современные проблемы математической физики» Института математики имени В. И. Романовского АН Республики Узбекистан и ИПМА КБНЦ РАН (руководители: Ш. А. Алимов, А. В. Псху, Р. Р. Ашуров.), на заседаниях отдела Дробного исчисления ИПМА КБНЦ РАН (руководитель д.ф.-м.н. Псху А. В.), на научном семинаре «Дифференциальные уравнения и математическое моделирование» при Совете молодых ученых и специалистов ИПМА КБНЦ РАН (председатель д.ф.-м.н. Мамчуев М. О.), и докладывались на российских и международных конференциях: «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики» (Нальчик, 2018), «Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование» (Дивноморское, 2016), "Modern methods, problems and applications of operator theory and harmonic analysis – IX" (Rostov-on-Don, 2019), «Современные методы математической физики и их приложения» (Ташкент, 2020), «Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь дня науки республики Казахстан» (2022), «Актуальные проблемы прикладной математики» (Терскол, 2016–2018), «Математическое моделирование фрактальных процессов, родственные проблемы анализа и информатики» (Терскол, 2012), «Современные вопросы математической физики, математической биологии и информатики» (Нальчик, 2014), XIV Владикавказская молодежная математическая школа «Математический анализ и математическое моделирование» (Цей, 2018), на X–XIV Школах молодых ученых «Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатики» (Нальчик – Эльбрус, 2012–2016), «Уфимская осенняя математическая школа – 2023» (г. Уфа, 4-8 октября 2023).

Публикации. Основные результаты диссертации отражены в работах [94–110]. Из них [95, 100–103, 107–110] опубликованы в изданиях, входящих в перечень ВАК.

Личное участие автора в получении научных результатов. Все результаты, выносимые на защиту, опубликованы без соавторов и являются самостоятельным исследованием автора.

Структура и объем. Диссертация состоит из введения, вводных сведений, трех глав, объединяющих 12 пунктов, заключения и списка литературы, содержащего 131 наименований и изложена на 104 страницах.

Основное содержание работы

В **Введении** приводится краткий обзор работ, относящихся к теме диссертации, выписываются основные результаты, выносимые на защиту.

Во **Вводных сведениях** приводятся основные определения используемых операторов, специальных функций, их свойства, а также формулы из теории дробного интегро-дифференцирования, необходимые для изложения результатов диссертации.

Объектами исследования работы являются линейные обыкновенные дифференциальные уравнения дробного порядка вида

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha}u(t) - \lambda u(t) - \mu H(t-\tau)u(t-\tau) = f(t), \quad t > 0 \tag{1}$$

с постоянными и переменными запаздыванием τ и коэффициентами λ, μ, $H(t)$ – функция Хевисайда.

В **первой главе** исследуется уравнение с дробной производной Джрбашяна – Нерсесяна произвольного порядка

$$Lu \equiv D_{0t}^{\{\gamma_0,\ldots,\gamma_m\}}u(t) - \lambda u(t) - \mu H(t-\tau)u(t-\tau) = f(t), \quad t > 0, \tag{2}$$

где $H(t)$ – функция Хевисайда, λ, μ – произвольные постоянные, τ – фиксированное положительное число.

В **разделе 1.1** введена специальная функция

$$W_\nu(t) = W_\nu^\alpha(t;\tau,\lambda,\mu) \equiv \sum_{s=0}^{N(t)} \mu^s (t-s\tau)_+^{\alpha s+\nu-1} E_{\alpha,\alpha s+\nu}^{s+1}(\lambda(t-s\tau)_+^\alpha), \quad t > 0, \tag{3}$$

$$(z)_+^\rho = \begin{cases} z^\rho, & z > 0, \\ 0, & z \le 0, \end{cases}$$

$N(t) = \left\lceil \frac{t}{\tau} \right\rceil$, где $\lceil x \rceil = \min\{n \in \mathbb{Z} | n \ge x\}$ – ближайшее справа от числа x целое число (потолок числа).

Исследованы свойства функции (3) и доказана теорема о фундаментальном решении.

Определение. *Фундаментальным решением уравнения* (2) *назовем функцию* $v(t-\xi)$, *удовлетворяющую уравнению*

$$D_{t\xi}^{\{\gamma_m,\ldots,\gamma_0\}}v(t-\xi) - \lambda v(t-\xi) - \mu H(t-\xi-\tau)v(t-\xi-\tau) = 0 \tag{4}$$

и условиям

$$\begin{cases} \lim\limits_{\xi\to t} D_{t\xi}^{\gamma_m-1}v(t-\xi) = 1, \\ \lim\limits_{\xi\to t} D_{t\xi}^{\{\gamma_m,\ldots,\gamma_{k+1}\}}v(t-\xi) = 0, \qquad k = \overline{0, m-2}. \end{cases}$$

Теорема. *Функция* $W_{\gamma_m}(t-\xi)$ *является фундаментальным решением уравнения* (2).

В **разделе 1.2** для уравнения (2) получен аналог формулы Лагранжа

$$(Lu * v)(t) = \sum_{k=0}^{m-1} D_{t\xi}^{\{\gamma_m,\dots,\gamma_{k+1}\}} v(t-\xi) D_{0\xi}^{\{\gamma_0,\dots,\gamma_k\}} u(\xi)\Big|_0^t +$$

$$+ u(t) * \Big[D_{t\xi}^{\{\gamma_m,\dots,\gamma_0\}} v(t) - \lambda v(t) - \mu H(t-\tau) v(t-\tau) \Big],$$

$(u * v)(t)$ – свертка Лапласа функций u и v.

В **разделе 1.3** исследуется начальная задача для уравнения (2).

Задача. *Найти регулярное решение уравнения* (2), *удовлетворяющее условиям*

$$\lim_{t\to 0} D_{0t}^{\{\gamma_0,\dots,\gamma_i\}} u(t) = u_i, \quad i = \overline{0, m-1}, \tag{5}$$

где u_i *– заданные действительные числа.*

Теорема. *Пусть функция* $f(t) \in C(0,\infty)$ *представима в виде*

$$f(t) = D_{0t}^{\gamma_m - 1} g(t), \qquad g(t) \in L(0,\infty).$$

Тогда решение задачи (2), (5) *существует, единственно и имеет вид*

$$u(t) = \sum_{i=0}^{m-1} u_i W_{\rho_i}(t) + (f * W_\alpha)(t).$$

В **разделе 1.4** получены асимптотические формулы для функции $W_\nu(t)$ при $1 < \alpha < 2$:

при $\lambda \to +\infty$

$$W_\nu(t) = \lambda^{\frac{1-\nu}{\alpha}} e^{\lambda^{\frac{1}{\alpha}} t} + \frac{t^{\nu-\alpha-1}}{\lambda \Gamma(\nu-\alpha)} - \frac{t^{\nu-2\alpha-1}}{\lambda^2 \Gamma(\nu-2\alpha)} + O\left(\lambda^{-3}\right);$$

при $\lambda \to -\infty$

$$W_\nu(t) = \frac{t^{\nu-\alpha-1}}{|\lambda| \Gamma(\nu-\alpha)} - \frac{t^{\nu-2\alpha-1}}{|\lambda|^2 \Gamma(\nu-2\alpha)} + O\left(|\lambda|^{-3}\right).$$

В **разделе 1.5** исследуется начальная задача для уравнения с переменными коэффициентами и переменным запаздыванием

$$D_{0t}^{\{\gamma_0,\gamma_1\}} u(t) - \lambda(t) u(t) - \mu(t) u(t-\tau(t)) = f(t), \tag{6}$$

где $0 < \gamma_0, \gamma_1 \le 1$, причем $\gamma_0 + \gamma_1 > 1$, $\lambda(t), \mu(t)$ – непрерывные функции, функция $\tau(t)$ – непрерывно-дифференцируемая функция, обладающая следующими свойствами:

1) функция $\tau(t) > 0$ для всех $t \in [0, \infty)$;

2) для любого $c \geq -\tau(0)$ функция $\tau(t)$ пересекается с прямой $t - c$ ровно в одной точке.

Задача. *Найти регулярное решение $u(t)$ уравнения (6), удовлетворяющее условию*

$$u(t) = \varphi_0(t), \quad -\tau(0) \leq t \leq 0, \quad \lim_{t \to 0} D_{0t}^{\gamma_0 - 1} u = a, \tag{7}$$

где $\varphi_0(t)$ – заданная непрерывно-дифференцируемая функция.

Теорема. *Пусть функции $\lambda(t)$, $\mu(t) \in H^{\varepsilon}$, $\varepsilon > \gamma_0$, и для функции $f(t) \in C[0, \infty)$ справедливо интегральное представление*

$$f(t) = D_{0t}^{\gamma_1 - 1} g(t).$$

Тогда существует регулярное решение $u(t)$ уравнения (6), удовлетворяющее условию (7) при всех $t > 0$, и оно единственно.

Во **второй главе** исследуются локальные двухточечные краевые задачи для уравнения с запаздывающим аргументом с дробной производной Римана – Лиувилля

$$D_{0t}^{\alpha} u(t) - \lambda u(t) - \mu H(t - \tau) u(t - \tau) = f(t), \quad 0 < t < 1. \tag{8}$$

В **разделе 2.1** для уравнения (8) порядка $n - 1 < \alpha \leq n$ получено решение краевой задачи с обобщенными краевыми условиями Штурма.

Задача. *Найти регулярное решение уравнения (8), удовлетворяющее условиям*

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik} \lim\limits_{t \to 0} D_{0t}^{\alpha - k} u(t) = c_i, \quad i = \overline{1, p}, \\ \sum\limits_{k=1}^{n} b_{jk} \lim\limits_{t \to 1} D_{0t}^{\alpha - k} u(t) = c_{p+j}, \quad j = \overline{1, q}, \end{cases} \tag{9}$$

где $p + q = n$, $a_{ik}, b_{jk}, c_i, c_{p+j}$ – заданные постоянные.

Теорема. *Пусть функция* $f(t) \in L(0,1) \cap C(0,1)$ *и выполнено условие*

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pn} \\ \sum\limits_{s=1}^{n} b_{1s}W_s(\lambda) & \sum\limits_{s=1}^{n} b_{1s}W_{s-1}(\lambda) & \dots & \sum\limits_{s=1}^{n} b_{1s}W_{s-n+1}(\lambda) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum\limits_{s=1}^{n} b_{qs}W_s(\lambda) & \sum\limits_{s=1}^{n} b_{qs}W_{s-1}(\lambda) & \dots & \sum\limits_{s=1}^{n} b_{qs}W_{s-n+1}(\lambda) \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (10)$$

Тогда: 1) существует регулярное решение задачи (8), (9), *которое имеет вид*

$$u(t) = \frac{1}{\triangle} \sum_{s=1}^{n} W_{\alpha-s+1}(t) \left[\sum_{i=1}^{p} c_i M_{is} + \sum_{j=1}^{q} c_{p+j} M_{p+j,s} \right] +$$

$$+ \int_0^1 f(\xi) \Big[H(t-\xi) W_\alpha(t-\xi) - \frac{1}{\triangle} \sum_{s=1}^{n} W_{\alpha-s+1}(t) \sum_{j=1}^{q} M_{p+j,s} \sum_{k=1}^{n} b_{jk} W_k(1-\xi) \Big] d\xi;$$

2) решение задачи (8), (9) *единственно тогда и только тогда, когда выполнено условие* (10).

Здесь, M_{ij} – алгебраическое дополнение к элементу определителя (10).

В **разделе 2.2** для уравнения (8) при $1 < \alpha \leq 2$ исследована краевая задача с однородными условиями типа Штурма – Лиувилля.

Задача. *Найти регулярное решение уравнения* (8), *удовлетворяющее условиям*

$$\begin{aligned} a \lim_{t \to 0} D_{0t}^{\alpha-1} u(t) + b \lim_{t \to 0} D_{0t}^{\alpha-2} u(t) = 0, \\ c \lim_{t \to 1} D_{0t}^{\alpha-1} u(t) + d \lim_{t \to 1} D_{0t}^{\alpha-2} u(t) = 0, \end{aligned} \qquad (11)$$

где a, b, c, d *– заданные постоянные, причем* $a^2 + b^2 \neq 0$ *и* $c^2 + d^2 \neq 0$.

Лемма. *Функция*

$$G(t,\xi) = H(t-\xi) W_\alpha(t-\xi) + \frac{1}{\triangle} \Big(c W_1(1-\xi) + d W_2(1-\xi) \Big) \Big(b W_\alpha(t) - a W_{\alpha-1}(t) \Big),$$

определенная для тех λ *и* μ, *для которых выполнено условие*

$$\triangle = ac(\lambda W_\alpha(1) + \mu W_\alpha(1-\tau)) + (ad - bc) W_1(1) - bd W_2(1) \neq 0, \qquad (12)$$

является функцией Грина задачи (8), (11).

Теорема. *Пусть* $f(t) \in L(0,1) \cap C(0,1)$ *и выполнено условие* (12). *Тогда: 1) существует регулярное решение задачи* (8), (11), *которое имеет вид*

$$u(t) = \int\limits_0^1 f(\xi) G(t,\xi) d\xi;$$

2) решение задачи (8), (11) *единственно тогда и только тогда, когда выполняется условие* (12).

В **разделе 2.3** исследована задача Дирихле – Неймана для уравнения (8) при $n-1 < \alpha \le n$.

Задача. *Найти регулярное решение уравнения* (8), *удовлетворяющее краевым условиям*

$$\begin{cases} \lim\limits_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha-\beta_i} u(t) = a_i, & i = \overline{1,p}, \\ \lim\limits_{t\to 1} D_{0t}^{\alpha-\delta_j} u(t) = b_j, & j = \overline{1,q}, \end{cases} \tag{13}$$

причем $p+q=n$, a_i, b_j *– заданные постоянные,* β_i, δ_j *– элементы из множества* $\{1,2,\ldots,n\}$.

Лемма. *Функция*

$$G(t,\xi) = H(t-\xi) W_\alpha(t-\xi) - \frac{1}{\triangle} \sum_{s=1}^{q} W_{\alpha-\beta_{s+p}+1}(t) \sum_{j=1}^{q} D_{js} W_{\delta_j}(1-\xi), \tag{14}$$

определенная для тех λ *и* μ, *для которых выполняется условие*

$$\triangle = \begin{vmatrix} W_{\delta_1-\beta_{1+p}+1}(1) & W_{\delta_1-\beta_{2+p}+1}(1) & \ldots W_{\delta_1-\beta_{q+p}+1}(1) \\ W_{\delta_2-\beta_{1+p}+1}(1) & W_{\delta_2-\beta_{2+p}+1}(1) & \ldots W_{\delta_2-\beta_{q+p}+1}(1) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ W_{\delta_q-\beta_{1+p}+1}(1) & W_{\delta_q-\beta_{2+p}+1}(1) & \ldots W_{\delta_q-\beta_{q+p}+1}(1) \end{vmatrix} \neq 0, \tag{15}$$

является функцией Грина задачи (8), (13).

В формуле (14) D_{ij} – алгебраическое дополнение к элементу определителя (15).

Теорема. *Пусть функция* $f(t) \in C(0,1) \cap L(0,1)$ *и выполнено условие* (15). *Тогда: 1) решение задачи* (8), (13) *существует, единственно и имеет вид*

$$u(t)=\sum_{i=1}^{p}(-1)^{\beta_i-1}a_i\left[\frac{\partial^{\beta_i-1}}{\partial\xi^{\beta_i-1}}G(t,\xi)\right]_{\xi=0}-$$

$$-\sum_{j=1}^{q}(-1)^{\delta_j-1}b_j\left[\frac{\partial^{\delta_j-1}}{\partial\xi^{\delta_j-1}}G(t,\xi)\right]_{\xi=1}+\int\limits_0^1 f(\xi)G(t,\xi)d\xi;$$

2) решение задачи (8), (13) *единственно тогда и только тогда, когда выполняется условие* (15).

В **разделе 2.4** исследованы спектральные свойства задачи (8), (11).

Определение. *Собственными значениями задачи* (8), (11) *назовем значения* λ, *при которых задача* (8), (11) *имеет регулярное решение, тождественно не равное нулю.*

Теорема. *Задача* (8), (11) *имеет лишь конечное число вещественных собственных значений.*

В третьей главе для уравнения (8) при $1<\alpha\leq 2$ рассматриваются нелокальные краевые задачи типа Стеклова первого и второго классов и внутреннекраевая задача с условиями, связывающими значение искомой функции на граничной точке со значениями во внутренних точках.

В **разделе 3.1** исследуется краевая задача типа Стеклова первого класса.

Задача. *Найти регулярное решение уравнения* (8), *удовлетворяющее условиям:*

$$\begin{aligned} D_{0t}^{\alpha-1}u(t)\big|_{t=0}&=c_1D_{0t}^{\alpha-2}u(t)\big|_{t=0}+c_2D_{0t}^{\alpha-2}u(t)\big|_{t=1},\\ D_{0t}^{\alpha-1}u(t)\big|_{t=1}&=c_3D_{0t}^{\alpha-2}u(t)\big|_{t=0}+c_4D_{0t}^{\alpha-2}u(t)\big|_{t=1}.\end{aligned}\tag{16}$$

Теорема. *Пусть* $f(t)\in L(0,1)\cap C(0,1)$ *и выполнено условие*

$$\triangle=A_1B_2-A_2B_1\neq 0.\tag{17}$$

Тогда: 1) решение задачи (8), (16) *существует и имеет вид*

$$u(t)=\int\limits_0^1 f(\xi)G(t,\xi)d\xi;\tag{18}$$

2) решение задачи (8), (16) *единственно тогда и только тогда, когда выпол-*

нено условие (17). В формуле (17)

$$A_1 = c_2 W_2(1) - 1, \quad A_2 = c_2 W_1(1) + c_1,$$

$$B_1 = W_1(1) - c_4 W_2(1), \quad B_2 = \lambda W_\alpha(1) + \mu W_\alpha(1-\tau) - c_4 W_1(1) - c_3.$$

Доказано, что функция

$$G(t,\xi) = H(t-\xi) W_\alpha(t-\xi) + \frac{W_\alpha(t)}{\triangle}\Big[A_2 W_1(1-\xi) - W_2(1-\xi)[c_4 A_2 + c_2 B_2]\Big] -$$

$$- \frac{W_{\alpha-1}(t)}{\triangle}\Big[A_1 W_1(1-\xi) - W_2(1-\xi)[c_4 A_1 + c_2 B_1]\Big]$$

является функций Грина задачи (8), (16).

В **разделе 3.2** исследуется краевая задача типа Стеклова второго класса.

Задача. *Найти регулярное решение* $u(t)$ *уравнения* (8), *удовлетворяющее условиям*

$$\begin{cases} D_{0t}^{\alpha-2} u(t)\big|_{t=1} = d_1 D_{0t}^{\alpha-2} u(t)\big|_{t=0}, \\ D_{0t}^{\alpha-1} u(t)\big|_{t=1} = d_2 D_{0t}^{\alpha-2} u(t)\big|_{t=0} + d_3 D_{0t}^{\alpha-1} u(t)\big|_{t=0}. \end{cases} \tag{19}$$

Теорема. *Пусть функция* $f(t) \in L(0,1) \cap C(0,1)$ *и выполнено условие*

$$\triangle = A_1 B_2 - A_2 B_1 \neq 0. \tag{20}$$

Тогда: 1) решение задачи (8), (19) *существует и имеет вид*

$$u(t) = \int\limits_0^1 f(\xi) G(t,\xi) d\xi;$$

2) решение задачи (8), (19) *единственно тогда и только тогда, когда выполнено условие* (20). В формуле (20)

$$A_1 = W_2(1), \quad A_2 = W_1(1) - d_1,$$

$$B_1 = W_1(1) - d_3, \quad B_2 = \lambda W_\alpha(1) + \mu W_\alpha(1-\tau) - d_2.$$

Доказано, что функция

$$G(t,\xi) = H(t-\xi)W_\alpha(t-\xi) + \frac{W_\alpha(t)}{\triangle}\Big[A_2W_1(1-\xi) - B_2W_2(1-\xi)\Big] -$$

$$- \frac{W_{\alpha-1}(t)}{\triangle}\Big[A_1W_1(1-\xi) - B_1W_2(1-\xi)\Big]$$

является функцией Грина задачи (8), (19).

В **разделе 3.3** для уравнения (8) исследуется внутреннекраевая задача.

Задача. *Найти регулярное решение* $u(t)$ *уравнения* (8), *удовлетворяющее условиям*

$$\lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha-2}u(t) = c_1, \quad \lim_{t\to 1} D_{0t}^{\alpha-2}u(t) - a\sum_{k=1}^{n}\lim_{t\to t_k} D_{0t}^{\alpha-2}u(t) = c_2, \tag{21}$$

где $0 < t_k < 1, n \in \mathbb{N}$.

Теорема. *Пусть функция* $f(t) \in L(0,1) \cup C(0,1)$ *и выполнено условие*

$$\triangle = W_2(1) - a\sum_{k=1}^{n} W_2(t_k) \neq 0. \tag{22}$$

Тогда: 1) регулярное решение задачи (8), (21) *существует и имеет вид*

$$u(t) = -c_1G_\xi(t,\xi)\Big|_{\xi=0} + c_2G_\xi(t,\xi)\Big|_{\xi=1} + \int\limits_0^1 f(\xi)G(t,\xi)d\xi;$$

2) решение задачи (8), (21) *единственно тогда и только тогда, когда выполнено условие* (22).

Доказано, что функция

$$G(t,\xi) = H(t-\xi)W_\alpha(t-\xi) - \frac{W_\alpha(t)}{\triangle}\left[W_2(1-\xi) - a\sum_{k=1}^{n} H(t_k-\xi)W_2(t_k-\xi)\right]$$

является функцией Грина задачи (8), (21).

0.1 Специальные функции

Последние десятилетия функция Миттаг-Леффлера привлекает все большее внимание исследователей из-за ее роли в решении задач, связанных с интегральными и дифференциальными уравнениями дробного порядка.

Функция типа Миттаг-Леффлера определяется с помощью ряда [13, с. 117], [72]

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}, \quad z, \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \ Re(\alpha) > 0, \tag{0.1}$$

где $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера, которая определяется по формуле:

$$\Gamma(z) = \int\limits_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \qquad \operatorname{Re} z > 0. \tag{0.2}$$

Для гамма-функции справедливы соотношения:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \tag{0.3}$$

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{0.4}$$

Для функции Миттаг-Леффлера справедливы следующие свойства [72]:

1) формула автотрансформации:

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} + zE_{\alpha,\beta+\alpha}(z);$$

2) формула дифференцирования целого порядка:

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^n \left[z^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(z)\right] = z^{\beta-n-1} E_{\alpha,\beta-n}(z);$$

3) формула дифференцирования дробного порядка:

$$D_{0t}^{\gamma}\left[z^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\lambda z^{\alpha})\right] = z^{\beta-\gamma-1} E_{\alpha,\beta-\gamma}(\lambda z^{\alpha}).$$

В последние годы повышенное внимание исследователей привлекает обобщенная функция Миттаг-Леффлера, которая определяется по формуле [72],

[84]

$$E^{\rho}_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\rho)_k z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)k!}, \quad z, \alpha, \beta, \rho \in \mathbb{C},\ Re(\alpha) > 0, \tag{0.5}$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $Re\,\alpha > 0$, $(\rho)_k = \Gamma(\rho+k)/\Gamma(\rho)$ – символ Похгаммера.

Функцию (0.5) в литературе называют также функцией Прабхакара или трехпараметрической функцией Миттаг-Леффлера.

Для функции (0.5) справедливы следующие формулы дифференцирования целого порядка [87]

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^n E^{\rho}_{\alpha,\beta}(z) = (\rho)_n E^{\rho+n}_{\alpha,\alpha n+\beta}(z); \tag{0.6}$$

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^n \left[z^{\beta-1} E^{\rho}_{\alpha,\beta}(z^{\alpha})\right] = z^{\beta-n-1} E^{\rho}_{\alpha,\beta-n}(z^{\alpha}); \tag{0.7}$$

формула дробного интегро-дифференцирования [66]

$$D^{\gamma}_{0t}\left[z^{\beta-1} E^{\rho}_{\alpha,\beta}(\lambda z^{\alpha})\right] = z^{\beta-\gamma-1} E^{\rho}_{\alpha,\beta-\gamma}(\lambda z^{\alpha}) \tag{0.8}$$

и формула автотрансформации [87]

$$E^{\rho}_{\alpha,\beta}(z) - E^{\rho-1}_{\alpha,\beta}(z) = z E^{\rho}_{\alpha,\alpha+\beta}(z). \tag{0.9}$$

Имеет место соотношение, связывающее обобщенную функцию Миттаг-Леффлера и производную по параметру от функции Миттаг-Леффлера [87]

$$\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^n \left[z^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\lambda z^{\alpha})\right] = n! z^{\alpha n+\beta-1} E^{n+1}_{\alpha,\alpha n+\beta}(\lambda z^{\alpha}).$$

Обобщенная функция Райта [90] определяется с помощью ряда

$${}_p\Psi_q\left[\begin{array}{c}(\alpha_r,\beta_r)\\(\rho_r,\mu_r)\end{array}\middle| z\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\prod_{r=1}^{p}\Gamma(\beta_r+\alpha_r k)}{\prod_{r=1}^{q}\Gamma(\mu_r+\rho_r k)} \frac{z^k}{k!}. \tag{0.10}$$

Обобщенную функцию Миттаг-Леффлера можно записать в терминах обобщенной функции Райта в виде [72]:

$$E^{\rho}_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{\Gamma(\rho)}\,{}_1\Psi_1\left[\begin{array}{c}(\rho,1)\\(\beta,\alpha)\end{array}\middle| z\right]. \tag{0.11}$$

Пусть $0 < \varkappa < 2$, $|\zeta| \le \min(\pi, \frac{3}{2}\pi\varkappa - \varepsilon) - \varepsilon$ и $|\eta| \le \pi$. Тогда для обобщенной функции Райта справедлива асимптотическая формула

$$ {}_p\Psi_q(z) = I(Z) + J(-z), \tag{0.12} $$

$$ I(Z) = Z^v e^Z \left[\sum_{m=0}^{M-1} A_m Z^{-m} + O\left(Z^{-M}\right) \right], $$

где $Z = \varkappa(h|z|)^{1/\varkappa} e^{i\zeta/\varkappa}$, $\zeta = \arg(z)$, $\eta = \arg(-z)$, $\varkappa = 1 + \rho_1 + \cdots + \rho_q - \alpha_p$, $h = \left(\prod\limits_{r=1}^{p} \alpha_r^{\alpha_r}\right)\left(\prod\limits_{r=1}^{q} \rho_r^{\rho_r}\right)$, $v = \sum\limits_{r=1}^{p} \beta_r - \sum\limits_{r=1}^{q} \mu_r + \frac{1}{2}(p-q)$, $M \in \mathbb{N}$, A_m определяются из неравенства

$$ \left| \frac{\prod_{r=1}^{p} \Gamma(\beta_r + \alpha_r k)}{(h\varkappa^{\varkappa})^k \Gamma(k+1) \prod_{r=1}^{q} \Gamma(\mu_r + \rho_r k)} - \sum_{m=0}^{M-1} \frac{A_m}{\Gamma(\varkappa k - v + m + 1)} \right| < $$

$$ < \frac{K}{\Gamma(\varkappa k - v + M + 1)}, \; K > 0, $$

$$ J(-z) = H(-z) + O\left(z^{-N+\delta}\right), \quad H(-z) = \sum_{r=1}^{p} \sum_{l=0}^{l_r} P_{r,l} (-z)^{-(l+\beta_r)/\alpha_r}, $$

где $L_r + \beta_r < N < L_r + \beta_r + 1$, $P_{r,l}(-z)^{-(l+\beta_r)/\alpha_r}$ – вычет функции

$$ \Gamma(-k)(-z)^k \frac{\prod_{r=1}^{p} \Gamma(\beta_r + \alpha_r k)}{\prod_{r=1}^{q} \Gamma(\mu_r + \rho_r k)} $$

в точках $-(l + \beta_r)/\alpha_r$.

В случае $0 < \varkappa < 2$, $|\eta| \le \frac{\pi}{2}(2 - \varkappa) - \varepsilon$ для обобщенной функции Райта справедлива асимптотическая формула [90], [91], [92]

$$ {}_p\Psi_q(z) = J(-z). \tag{0.13} $$

0.2 Операторы интегро-дифференцирования дробного порядка

Оператор дробного интегро-дифференцирования в смысле Римана – Лиувилля определяется по формуле [24, с. 9]:

$$D_{st}^{\alpha}g(t)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sign}(t-s)}{\Gamma(-\alpha)}\int\limits_{s}^{t}\dfrac{g(\xi)d\xi}{|t-\xi|^{\alpha+1}}, & \alpha<0;\\ g(t), & \alpha=0;\\ \operatorname{sign}^{n}(t-s)\dfrac{d^{n}}{dt^{n}}D_{st}^{\alpha-n}g(t), & n-1<\alpha\le n, n\in\mathbb{N},\end{cases} \tag{0.14}$$

$\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера (0.2).

Для функции $u(t)$ такой, что $D_{st}^{\beta-k}\in AC[a,b]$, $a\le s,t\le b$, $k=1,\dots,m$, справедлива обобщенная формула Ньютона – Лейбница

$$D_{st}^{\alpha}D_{st}^{\beta}u(t)=D_{st}^{\alpha+\beta}u(t)-\sum_{k=1}^{m}\frac{|s-t|^{-\alpha-k}}{\Gamma(1-\alpha-k)}\lim_{t\to s}D_{st}^{\beta-k}u(t), \tag{0.15}$$

где $\alpha\in\mathbb{R}$, $m-1<\beta\le m$, $m\in\mathbb{N}$.

В случае произвольного $\alpha\in\mathbb{R}$ и $\beta\le 0$ композиция дробных операторов равна

$$D_{st}^{\alpha}D_{st}^{\beta}u(t)=D_{st}^{\alpha+\beta}u(t),\ u(t)\in L[0,l]. \tag{0.16}$$

Пусть $\alpha\le 0$, $p,q\ge 1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\le 1-\alpha$. Тогда для функции $g(t)\in L^{p}[a,b]$ и $h(t)\in L^{q}[a,b]$ справедлива формула дробного интегрирования по частям [24], [35], [75]

$$\int\limits_{a}^{b}g(t)D_{at}^{\alpha}h(t)dt=\int\limits_{a}^{b}h(t)D_{bt}^{\alpha}g(t)dt. \tag{0.17}$$

Для степенных функций справедлива формула дробного интегрирования и дифференцирования

$$D_{st}^{\alpha}|t-s|^{\mu-1}=\frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu-\alpha)}|t-s|^{\mu-\alpha-1},\quad \mu>0.$$

Оператор дробного дифференцирования Джрбашяна – Нерсесяна определяется соотношением [15]

$$D_{st}^{\{\gamma_0,\dots,\gamma_m\}}u(t)=D_{st}^{\gamma_m-1}D_{st}^{\gamma_{m-1}}\dots D_{st}^{\gamma_0}u(t), \tag{0.18}$$

$\alpha = \sum\limits_{k=0}^{m} \gamma_k - 1,\ 0 < \gamma_k \leq 1,\ \gamma_0 + \gamma_m > 1.$

В случае $\gamma_0 = \alpha - m + 1, \gamma_k = 1, (k = \overline{1, m})$ оператор Джрбашяна – Нерсесяна понимается в смысле дробного оператора Римана – Лиувилля

$$D_{st}^{\{\alpha-m+1,1,\dots,1\}} u(t) = D_{st}^{\alpha} u(t), \quad m-1 < \alpha \leq m.$$

Оператор дробного дифференцирования Джрбашяна – Нерсесяна связан с дробным оператором Римана – Лиувилля следующим соотношением [36]

$$D_{0t}^{\{\gamma_0,\dots,\gamma_m\}} u(t) = D_{0t}^{\alpha} u(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^{\rho_k - \alpha - 1}}{\Gamma(\rho_k - \alpha)} \left[D_{0t}^{\{\gamma_0,\dots,\gamma_k\}} u(t) \right]_{t=0}, \tag{0.19}$$

где

$$\rho_k = \sum_{i=1}^{k} \gamma_i, \quad k = \overline{0, m}. \tag{0.20}$$

В случае $\gamma_m = \alpha - m + 1, \gamma_k = 1, (k = \overline{0, m-1})$ оператор Джрбашяна – Нерсесяна переходит в производную Герасимова – Капуто (регуляризованная дробная производная)

$$D_{st}^{\{1,\dots,1,\alpha-m+1\}} u(t) = \partial_{st}^{\alpha} u(t), \quad m-1 < \alpha \leq m,$$

где дробная производная Герасимова – Капуто определяется равенством

$$\partial_{st}^{\alpha} u(t) = \operatorname{sign}^m (t-s) D_{st}^{\alpha-m} u^{(m)}(t), \quad m-1 < \alpha \leq m, \quad m \in \mathbb{N}, \tag{0.21}$$

и связана с производной Римана – Лиувилля следующим соотношением [35]:

$$\partial_{st}^{\alpha} u(t) = D_{st}^{\alpha} u(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{u^{(k)}(s)}{\Gamma(k - \alpha + 1)} |t-s|^{k-\alpha}. \tag{0.22}$$

Свертка Лапласа функций $u(x),\, v(x) \in L[0, l]\, (l > 0)$ представляется в виде интеграла [23]

$$(u * v)(t) = \int_0^t u(s) v(t-s) ds. \tag{0.23}$$

Справедлива формула дробного дифференцирования в смысле Римана – Лиувилля от свертки функций $u(x)$, $v(x) \in L[0,l]$ $(l>0)$ и $D_{0t}^{\alpha-1}v(t) \in AC[0,l]$ [82, с. 99]

$$D_{0t}^{\alpha}(u * v)(t) = (u * D_{0t}^{\alpha}v)(t) + u(t)\lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha-1}v(t). \tag{0.24}$$

Глава 1

Общее представление решений

В этой главе рассматривается линейное обыкновенное дифференциальное уравнение с оператором дробного дифференцирования Джрбашяна – Нерсесяна с запаздывающим аргументом

$$Lu \equiv D_{0t}^{\{\gamma_0,\dots,\gamma_m\}}u(t) - \lambda u(t) - \mu H(t-\tau)u(t-\tau) = f(t), \quad t > 0, \tag{1.0.1}$$

$D_{0t}^{\{\gamma_0,\dots,\gamma_m\}}$ – оператор дробного дифференцирования Джрбашяна – Нерсесяна (0.18) порядка

$$\alpha = \sum_{k=0}^{m}\gamma_k - 1,\ 0 < \gamma_k \leq 1,\, \gamma_0 + \gamma_m > 1,$$

λ, μ – произвольные постоянные, τ – фиксированное положительное число, $H(t)$ – функция Хевисайда

$$H(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ 1, & t > 0. \end{cases}$$

Для уравнения (1.0.1) построено фундаментальное решение, получена формула Лагранжа, доказана теорема существования и единственности решения начальной задачи.

В случае переменного запаздывания $\tau(t)$ и переменных коэффициентов $\lambda(t)$ и $\mu(t)$ решение начальной задачи получено методом шагов.

1.1 Фундаментальное решение

В этом пункте введем специальную функцию $W_\nu(t)$ и покажем справедливость ее свойств. Для уравнения (1.0.1) докажем теорему о фундаментальном решении.

Определение 1.1.1. *Регулярным решением уравнения* (1.0.1) *назовем функцию* $u = u(t)$ *такую, что* $D_{0t}^{\{\gamma_0,\dots,\gamma_k\}}u(t) \in AC[0,\infty)$, $k = \overline{0, m-1}$, *и удовлетворяющую уравнению* (1.0.1) *для всех* $t > 0$.

Введем в рассмотрение функцию

$$W_\nu(t) = W_\nu^\alpha(t;\tau,\lambda,\mu) \equiv \sum_{s=0}^{N(t)} \mu^s (t-s\tau)_+^{\alpha s+\nu-1} E_{\alpha,\alpha s+\nu}^{s+1}(\lambda(t-s\tau)_+^\alpha),\ t > 0, \tag{1.1.1}$$

где $\alpha > 0$, $\nu \in \mathbb{R}$, $\tau \geq 0$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$(z)_+^\rho = \begin{cases} z^\rho, & z > 0 \\ 0, & z \leq 0, \end{cases} \tag{1.1.2}$$

$$N(t) = \left\lceil \frac{t}{\tau} \right\rceil, \tag{1.1.3}$$

где $\lceil x \rceil = \min\{n \in \mathbb{Z} | n \geq x\}$ – потолок числа x.

Далее, так как по всему тексту диссертационной работы параметр α обозначает порядок уравнения, τ – запаздывание аргумента, λ, μ – коэффициенты уравнения, то в записи $W_\nu^\alpha(t;\tau,\lambda,\mu)$ будем опускать эти параметры и писать $W_\nu(t)$.

Функция (1.1.1) возникает при решении начальной задачи для уравнения (1.0.1) с помощью преобразования Лапласа. Мы опускаем ее получение, так как в дальнейшем будем изучать ее свойства, в том числе будем показывать, что функция $W_\nu(t)$ является решением специального уравнения (см. (1.1.8)).

Для функции (1.1.1) справедливы следующие свойства:

1. Функция (1.1.1) *в точках* $t = (k+1)\tau$ $(k = 0, ..., N-1)$ *непрерывна при* $\nu > 1-\alpha$, *а во внутренних точках* $t \in (k\tau, (k+1)\tau)$ $W_\nu(t)$ *непрерывна для любых* ν.

Непрерывность функции (1.1.1) в точках $t \in (k\tau, (k+1)\tau)$ следует из представления функции $W_\nu(t)$.

В точках $t = (k+1)\tau$ ($k = 0, ..., N-1$) предел справа отличается от предела слева наличием одного лишнего слагаемого

$$\mu^{k+1}(t-(k+1)\tau)_+^{\alpha k+\alpha+\nu-1} E_{\alpha,\alpha k+\alpha+\nu}^{k+2}(\lambda(t-(k+1)\tau)_+^\alpha),$$

которое при $\nu > 1-\alpha$ равно нулю.

2. Для функции (1.1.1) *справедлива формула интегрирования дробного порядка:*

$$D_{0t}^{-\alpha} W_\nu(t) = W_{\nu+\alpha}(t). \tag{1.1.4}$$

Действительно, из определения дробного интеграла (0.14), представления функции $W_\nu(t)$ (1.1.1) и из формулы дифференцирования обобщенной функции Миттаг-Леффлера (0.8) получаем, что

$$D_{0t}^{-\alpha} W_\nu(t) = \sum_{s=0}^{N} \mu^s D_{s\tau,t}^{-\alpha} (t-s\tau)_+^{\alpha s+\nu-1} E_{\alpha,\alpha s+\nu}^{s+1}(\lambda(t-s\tau)_+^\alpha) =$$

$$= \sum_{s=0}^{N} \mu^s (t-s\tau)_+^{\alpha s+\nu-1} E_{\alpha,\alpha s+\nu}^{s+1}(\lambda(t-s\tau)_+^\alpha) * \frac{(t-s\tau)_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} =$$

$$= \sum_{s=0}^{N} \mu^s (t-s\tau)_+^{\alpha s+\alpha+\nu-1} E_{\alpha,\alpha s+\alpha+\nu}^{s+1}(\lambda(t-s\tau)_+^\alpha) = W_{\nu+\alpha}(t).$$

3. Для функции (1.1.1) *справедлива формула дифференцирования целого порядка n при $\nu > 0$:*

$$\frac{d^n}{dt^n} W_\nu(t) = W_{\nu-n}(t). \tag{1.1.5}$$

Действительно, используя формулу дифференцирования целого порядка обобщенной функции Миттаг-Леффлера (0.7) имеем соотношение

$$\frac{d^n}{dt^n} W_\nu(t) = \sum_{s=0}^{N} \mu^s \frac{d^n}{dt^n} (t-s\tau)_+^{\alpha s+\nu-1} E_{\alpha,\alpha s+\nu}^{s+1}(\lambda(t-s\tau)_+^\alpha) =$$

$$= \sum_{s=0}^{N} \mu^s (t-s\tau)_+^{\alpha s-n+\nu-1} E_{\alpha,\alpha s-n+\nu}^{s+1}(\lambda(t-s\tau)_+^\alpha) = W_{\nu-n}(t),$$

и при $\nu > n - \alpha + 1$ функция $W_{\nu-n}(t)$ непрерывна.

4. Для функции (1.1.1) *справедлива формула дифференцирования дробного порядка* $\beta > 0$ *при* $\nu > 0$:

$$D_{0t}^{\beta} W_\nu(t) = W_{\nu-\beta}(t). \tag{1.1.6}$$

Действительно, используя формулу дробного интегрирования (1.1.4) и формулу дифференцирования целого порядка (1.1.5), имеем:

$$D_{0t}^{\beta} W_\nu(t) = \frac{d^n}{dt^n} D_{0t}^{\beta-n} W_\nu(t) = \frac{d^n}{dt^n} W_{\nu-\beta+n}(t) = W_{\nu-\beta}(t).$$

5. Функция $W_\nu(t)$ *удовлетворяет уравнению:*

$$W_\nu(t) = \lambda W_{\nu+\alpha}(t) + \mu W_{\nu+\alpha}(t-\tau) + \frac{t^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)}, \qquad \nu \in \mathbb{R}. \tag{1.1.7}$$

Действительно, в силу (0.9) имеем:

$$W_\nu(t) = \sum_{s=0}^{N} \mu^s (t - s\tau)_+^{\alpha s+\nu-1} E_{\alpha,\alpha s+\nu}^{s+1}(\lambda(t-s\tau)_+^{\alpha}) =$$

$$= \sum_{s=0}^{N} \mu^s (t - s\tau)_+^{\alpha s+\nu-1} \left[\lambda(t-s\tau)_+^{\alpha} E_{\alpha,\alpha s+\nu+\alpha}^{s+1}(\lambda(t-s\tau)_+^{\alpha}) + E_{\alpha,\alpha s+\nu}^{s}(\lambda(t-s\tau)_+^{\alpha})\right] =$$

$$= \lambda W_{\nu+\alpha}(t) + \frac{t^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} + \sum_{m=1}^{N} \mu^m (t-m\tau)_+^{\alpha m+\nu-1} E_{\alpha,\alpha m+\nu}^{m}(\lambda(t-m\tau)_+^{\alpha}) =$$

$$= \lambda W_{\nu+\alpha}(t) + \mu W_{\nu+\alpha}(t-\tau) + \frac{t^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)}.$$

6. Из свойств (1.1.6) *и* (1.1.7) *следует, что*

$$D_{0t}^{\alpha} W_\nu(t) - \lambda W_\nu(t) - \mu W_\nu(t-\tau) = \frac{t^{\nu-\alpha-1}}{\Gamma(\nu-\alpha)}, \ \nu > 0. \tag{1.1.8}$$

Справедлива лемма:

Лемма 1.1.1. *Для функции* $W_k(t)$ *справедливо соотношение* $(k - i > 1 - \alpha)$

$$W_k^{(i)}(0) = \begin{cases} 0, & k \neq i+1, \\ 1, & k = i+1. \end{cases} \tag{1.1.9}$$

Доказательство. Действительно, из формул (1.1.1) и (1.1.5) следует, что при $k \neq i+1$

$$\lim_{t\to 0} W_k^{(i)}(t) = \lim_{t\to 0} W_{k-i}(t) =$$

$$= \lim_{t\to 0} \left[t^{k-i-1} E_{\alpha,k-i}(\lambda t^{\alpha}) + \mu (t-\tau)_+^{\alpha+k-i-1} E^2_{\alpha,\alpha+k-i}(\lambda (t-\tau)_+^{\alpha}) + ... \right] = 0,$$

и при $k = i+1$

$$\lim_{t\to 0} W_k^{(i)}(t) = \lim_{t\to 0} W_1(t) = \lim_{t\to 0} \left[E_{\alpha,1}(\lambda t^{\alpha}) + \mu (t-\tau)_+^{\alpha} E^2_{\alpha,\alpha+1}(\lambda (t-\tau)_+^{\alpha}) + ... \right] = 1.$$

□

Определение 1.1.2. *Фундаментальным решением уравнения* (1.0.1) *назовем функцию* $v(t-\xi)$, *удовлетворяющую уравнению*

$$D_{t\xi}^{\{\gamma_m,\dots,\gamma_0\}} v(t-\xi) - \lambda v(t-\xi) - \mu H(t-\xi-\tau) v(t-\xi-\tau) = 0 \qquad (1.1.10)$$

и условиям

$$\begin{cases} \lim\limits_{\xi\to t} D_{t\xi}^{\gamma_m-1} v(t-\xi) = 1, \\ \lim\limits_{\xi\to t} D_{t\xi}^{\{\gamma_m,\dots,\gamma_{k+1}\}} v(t-\xi) = 0, \qquad k = \overline{0, m-2}. \end{cases} \qquad (1.1.11)$$

Теорема 1.1.1. *Функция* $W_{\gamma_m}(t-\xi)$ *является фундаментальным решением уравнения* (1.0.1).

Доказательство. Пусть $t - \xi = s$ в уравнении (1.1.10). Тогда приходим к уравнению

$$D_{0s}^{\{\gamma_m,\dots,\gamma_0\}} v(s) - \lambda v(s) - \mu H(s-\tau) v(s-\tau) = 0. \qquad (1.1.12)$$

Из формул (1.1.6) и (1.1.7) имеем

$$D_{0s}^{\gamma_0-1} \dots D_{0s}^{\gamma_m} W_{\gamma_m}(s) = D_{0s}^{\gamma_0-1} \dots D_{0s}^{\gamma_m} \left(\lambda W_{\alpha+\gamma_m}(s) + \mu W_{\alpha+\gamma_m}(s-\tau) + \frac{t^{\gamma_m-1}}{\Gamma(\gamma_m)} \right) =$$

$$= \lambda W_{\alpha+\gamma_m-\gamma_0-\dots-\gamma_m+1}(s) + \mu W_{\alpha+\gamma_m-\gamma_0-\dots-\gamma_m+1}(s-\tau) =$$

$$= \lambda W_{\gamma_m}(s) + \mu W_{\gamma_m}(s-\tau),$$

а справедливость условий (1.1.11) следует из формул (1.1.6) и (1.1.9):

$$\lim_{s\to 0} D_{0s}^{\gamma_m-1} W_{\gamma_m}(s) = \lim_{s\to 0} W_1(s) = W_1(0) = 1;$$

$$\lim_{s\to 0} D_{0s}^{\{\gamma_m,\dots,\gamma_{k+1}\}} W_{\gamma_m}(s) = \lim_{s\to 0} (\lambda W_{\rho_k+\gamma_m}(s) + W_{\rho_k+\gamma_m}(s-\tau)) = 0, \quad k = \overline{0, m-2}.$$

Таким образом, показали, что функция $W_{\gamma_m}(t)$ является фундаментальным решением уравнения (1.0.1). □

В случае, когда оператор Джрбашяна – Нерсесяна в уравнении (1.0.1) переходит в оператор Римана – Лиувилля

$$D_{0t}^{\alpha} u(t) - \lambda u(t) - \mu H(t-\tau) u(t-\tau) = f(t), \quad t > 0, \tag{1.1.13}$$

то есть при $\gamma_0 = \alpha - m + 1$, $\gamma_k = 1, (k = \overline{1, m})$, фундаментальное решение (1.1.13) определяется следующим образом:

Определение 1.1.3. *Фундаментальным решением уравнения* (1.1.13) *назовем функцию* $v(t-\xi)$, *удовлетворяющую уравнению*

$$\partial_{t\xi}^{\alpha} v(t-\xi) - \lambda v(t-\xi) - \mu H(t-\xi-\tau) v(t-\xi-\tau) = 0 \tag{1.1.14}$$

и условиям

$$\begin{cases} \lim\limits_{\xi\to t} v(t-\xi) = 1, \\ \lim\limits_{\xi\to t} \frac{\partial^{m-k-1}}{\partial \xi^{m-k-1}} v(t-\xi) = 0, \qquad k = \overline{0, m-2}. \end{cases}$$

Справедлива теорема.

Теорема 1.1.2. *Функция* $W_1(t-\xi)$ *является фундаментальным решением уравнения* (1.1.13).

Доказательство. Справедливость этой теоремы следует из доказательства теоремы (1.1.1). □

1.2 Формула Лагранжа

В этом пункте докажем справедливость формулы Лагранжа.

Теорема 1.2.1. *Пусть функции* $u(t)$ *и* $v(t) \in L(0, l)$, $l > 0$, *такие, что*

$$D_{0t}^{\{\gamma_0,\dots,\gamma_k\}} u(t) \in AC[0, l], \quad D_{0t}^{\{\gamma_m,\dots,\gamma_{k+1}\}} v(t) \in AC[0, l], \quad k = 0, \dots, m-1.$$

Тогда справедлива формула Лагранжа

$$\int\limits_0^t Lu(\xi) v(t-\xi) d\xi = \sum_{k=0}^{m-1} D_{t\xi}^{\{\gamma_m,\dots,\gamma_{k+1}\}} v(t-\xi)\, D_{0\xi}^{\{\gamma_0,\dots,\gamma_k\}} u(\xi)\Big|_0^t +$$

$$+\int\limits_0^t u(\xi)L^*v(t-\xi)d\xi, \tag{1.2.1}$$

где

$$L^*v(t-\xi)=D_{t\xi}^{\{\gamma_m,\dots,\gamma_0\}}v(t-\xi)-\lambda v(t-\xi)-\mu H(t-\xi-\tau)v(t-\xi-\tau). \tag{1.2.2}$$

Доказательство. Домножим дифференциальное выражение $Lu(\xi)$ на функцию $v(t-\xi)$ и проинтегрируем по ξ от 0 до t. Тогда получим

$$\int\limits_0^t Lu(\xi)v(t-\xi)d\xi=\int\limits_0^t v(t-\xi)D_{0\xi}^{\{\gamma_0,\dots,\gamma_m\}}u(\xi)d\xi-\lambda\int\limits_0^t v(t-\xi)u(\xi)d\xi-$$

$$-\mu\int\limits_0^t H(\xi-\tau)v(t-\xi)u(\xi-\tau)d\xi. \tag{1.2.3}$$

Используя определение производной Джрбашяна – Нерсесяна (0.18) и формулу дробного интегрирования по частям (0.17), проинтегрируем m раз первый интеграл в правой части (1.2.3):

$$\int\limits_0^t v(t-\xi)D_{0\xi}^{\{\gamma_0,\dots,\gamma_m\}}u(\xi)d\xi=\int\limits_0^t D_{t\xi}^{\gamma_m-1}v(t-\xi)D_{0\xi}^{\gamma_{m-1}}\dots D_{0\xi}^{\gamma_0}u(\xi)d\xi=$$

$$=D_{t\xi}^{\gamma_m-1}v(t-\xi)D_{0\xi}^{\gamma_{m-1}-1}\dots D_{0\xi}^{\gamma_0}u(\xi)\Big|_0^t+$$

$$+\int\limits_0^t D_{t\xi}^{\gamma_{m-1}-1}D_{t\xi}^{\gamma_m}v(t-\xi)D_{0\xi}^{\gamma_{m-2}}\dots D_{0\xi}^{\gamma_0}u(\xi)d\xi=$$

$$=\dots=\sum_{k=0}^{m-1}D_{t\xi}^{\{\gamma_m,\dots,\gamma_{m-k}\}}v(t-\xi)\;D_{0\xi}^{\{\gamma_0,\dots,\gamma_{m-k-1}\}}u(\xi)\Big|_0^t+$$

$$+\int\limits_0^t D_{t\xi}^{\gamma_1}\dots D_{t\xi}^{\gamma_m}v(t-\xi)D_{0\xi}^{\gamma_0-1}u(\xi)d\xi=$$

$$=\sum_{k=0}^{m-1}D_{t\xi}^{\{\gamma_m,\dots,\gamma_{k+1}\}}v(t-\xi)\;D_{0\xi}^{\{\gamma_0,\dots,\gamma_k\}}u(\xi)\Big|_0^t+\int\limits_0^t u(\xi)D_{t\xi}^{\{\gamma_m,\dots,\gamma_0\}}v(t-\xi)d\xi.$$

Подставим полученное выражение в (1.2.3):

$$\int\limits_0^t Lu(\xi)v(t-\xi)d\xi = \sum_{k=0}^{m-1} D_{t\xi}^{\{\gamma_m,\dots,\gamma_{k+1}\}}v(t-\xi)\ D_{0\xi}^{\{\gamma_0,\dots,\gamma_k\}}u(\xi)\Big|_0^t +$$

$$+\int\limits_0^t u(\xi)D_{t\xi}^{\{\gamma_m,\dots,\gamma_0\}}v(t-\xi)d\xi - \lambda\int\limits_0^t v(t-\xi)u(\xi)d\xi -$$

$$-\mu\int\limits_0^t v(t-\xi)H(\xi-\tau)u(\xi-\tau)d\xi. \tag{1.2.4}$$

Заменяя $\xi-\tau$ на ξ в последнем интеграле равенства (1.2.4) получим, что

$$\int\limits_0^t H(\xi-\tau)u(\xi-\tau)v(t-\xi)d\xi = \int\limits_0^t H(t-\xi-\tau)u(\xi)v(t-\xi-\tau)d\xi. \tag{1.2.5}$$

Тогда, учитывая (1.2.5), приходим к формуле (1.2.1). □

1.3 Решение задачи Коши

Далее сформулируем задачу Коши для уравнения (1.0.1):

Задача 1.3.1. *Найти регулярное решение уравнения* (1.0.1), *удовлетворяющее начальным условиям*

$$\lim_{t\to 0} D_{0t}^{\{\gamma_0,\dots,\gamma_i\}}u(t) = u_i, \quad i=\overline{0,m-1}. \tag{1.3.1}$$

Справедлива следующая

Теорема 1.3.1. *Пусть функция* $f(t)\in C(0,\infty)$ *представима в виде*

$$f(t) = D_{0t}^{\gamma_m-1}g(t), \qquad g(t)\in L(0,\infty). \tag{1.3.2}$$

Тогда решение задачи (1.0.1), (1.3.1) *существует, единственно и имеет вид*

$$u(t) = \sum_{i=0}^{m-1} u_i W_{\rho_i}(t) + (f*W_\alpha)(t). \tag{1.3.3}$$

В формуле (1.3.3) $\rho_i = \sum\limits_{k=0}^{i}\gamma_k$.

Доказательство. Покажем, что решение (1.3.3) удовлетворяет уравнению (1.0.1). Для этого, учитывая определение оператора Джрбашяна – Нерсесяна, представление функции $f(t)$ (1.3.2) и формулу дробного интегрирования по частям (0.17), вычислим значение выражения:

$$D_{0t}^{\{\gamma_0,\dots,\gamma_m\}}u(t) = D_{0t}^{\gamma_m-1}D_{0t}^{\gamma_{m-1}}\dots D_{0t}^{\gamma_0}\left[\sum_{i=0}^{m-1}u_iW_{\rho_i}(t) + D_{0t}^{\gamma_m-1}g(t)*W_\alpha(t)\right] =$$

$$= D_{0t}^{\gamma_m-1}D_{0t}^{\gamma_{m-1}}\dots\frac{d}{dt}D_{0t}^{\gamma_0-1}\left[\sum_{i=0}^{m-1}u_iW_{\rho_i}(t) + g(t)*W_{\alpha-\gamma_m+1}(t)\right].$$

Далее, используя формулу автотрансформации (1.1.7) функции $W_\nu(t)$ имеем:

$$D_{0t}^{\gamma_m-1}D_{0t}^{\gamma_{m-1}}\dots D_{0t}^{\gamma_1}\frac{d}{dt}\Bigg[u_0\Big(\lambda W_{\alpha+1}(t)+\mu W_{\alpha+1}(t-\tau)+1\Big)+\sum_{i=1}^{m-1}u_iW_{\rho_i-\gamma_0+1}(t)$$

$$+g(t)*W_{\alpha-\gamma_m-\gamma_0+2}(t)\Bigg] = D_{0t}^{\gamma_m-1}D_{0t}^{\gamma_{m-1}}\dots\frac{d}{dt}D_{0t}^{\gamma_1-1}\Bigg[u_0\Big(\lambda W_\alpha(t)+\mu W_\alpha(t-\tau)\Big)+$$

$$+\sum_{i=1}^{m-1}u_iW_{\rho_i-\gamma_0}(t)+g(t)*W_{\alpha-\gamma_m-\gamma_0+1}(t)\Bigg] = \dots =$$

$$= D_{0t}^{\gamma_m-1}\frac{d}{dt}\Bigg[\sum_{i=0}^{m-2}u_i\Big(\lambda W_{\alpha+\rho_i-\rho_{m-1}+1}(t)+\mu W_{\alpha+\rho_i-\rho_{m-1}+1}(t-\tau)\Big)+$$

$$+u_{m-1}[\lambda W_{\alpha+1}(t)+\mu W_{\alpha+1}(t-\tau)+1]+g(t)*(\lambda W_{\alpha+1}(t)+\mu W_{\alpha+1}(t-\tau)+1)\Bigg] =$$

$$= D_{0t}^{\gamma_m-1}\Bigg[\sum_{i=0}^{m-1}u_i\Big(\lambda W_{\alpha+\rho_i-\rho_{m-1}}(t)+\mu W_{\alpha+\rho_i-\rho_{m-1}}(t-\tau)\Big)+$$

$$+g(t)*[\lambda W_\alpha(t)+\mu W_\alpha(t-\tau)]+g(t)\Bigg] =$$

$$= \sum_{i=0}^{m-1}u_i\Big(\lambda W_{\rho_i}(t)+\mu W_{\rho_i}(t-\tau)\Big)+D_{0t}^{\gamma_m-1}g(t)*[\lambda W_\alpha(t)+\mu W_\alpha(t-\tau)]+$$

$$+D_{0t}^{\gamma_m-1}g(t) = f(t)+\lambda u(t)+\mu u(t-\tau).$$

Из формулы (1.1.9) следует, что решение (1.3.3) удовлетворяет начальным условиям (1.3.1):

$$D_{0t}^{\gamma_i-1}D_{0t}^{\gamma_{i-1}}\dots D_{0t}^{\gamma_0}u(t)\Big|_{t=0}=\sum_{i=0}^{m-1}u_iD_{0t}^{\gamma_i-1}D_{0t}^{\gamma_{i-1}}\dots D_{0t}^{\gamma_0}W_{\gamma_0+\gamma_1+\dots+\gamma_i}(t)\Big|_{t=0}=$$

$$=u_iW_1(t)\Big|_{t=0}=u_i.$$

Рассмотрим однородную задачу, соответствующую задаче (1.0.1), (1.3.1)

$$\begin{gathered}D_{0t}^{\{\gamma_0,\dots,\gamma_m\}}u(t)-\lambda u(t)-\mu H(t-\tau)u(t-\tau)=0,\\ \lim_{t\to 0}D_{0t}^{\{\gamma_0,\dots,\gamma_i\}}u(t)=0,\quad i=\overline{0,m-1}.\end{gathered}\tag{1.3.4}$$

Используя соотношение, связывающее дробную производную Джрбашяна – Нерсесяна с производной Римана – Лиувилля (0.19) и учитывая однородные начальные условия, из задачи (1.3.4) приходим к следующей

$$D_{0t}^{\alpha}u(t)-\lambda u(t)-\mu H(t-\tau)u(t-\tau)=0,\quad \lim_{t\to 0}D_{0t}^{\alpha-i}u(t)=0,\quad i=\overline{0,m-1},$$

которая имеет только тривиальное решение. Значит, решение неоднородной задачи (1.0.1), (1.3.1) единственно.

Покажем, что функция (1.3.3) является регулярным решением задачи, т.е. $D_{0t}^{\{\gamma_0,\dots,\gamma_k\}}u(t)\in AC[0,\infty)$, $k=\overline{0,m-1}$. Используя интегральное представление функции $f(t)$ (1.3.2) и формулу автотрансформации функции $W_\nu(t)$ (1.1.7) запишем:

$$D_{0t}^{\{\gamma_0,\dots,\gamma_k\}}u(t)=D_{0t}^{\gamma_k-1}D_{0t}^{\gamma_{k-1}}\dots D_{0t}^{\gamma_0}\left[\sum_{i=0}^{m-1}u_iW_{\rho_i}(t)+(D_{0t}^{\gamma_m-1}g*W_\alpha)(t)\right]=$$

$$=D_{0t}^{\gamma_k-1}D_{0t}^{\gamma_{k-1}}\dots\frac{d}{dt}D_{0t}^{\gamma_0-1}\left[\sum_{i=0}^{m-1}u_iW_{\rho_i}(t)+(g*W_{\alpha-\gamma_m+1})(t)\right]=$$

$$=D_{0t}^{\gamma_k-1}D_{0t}^{\gamma_{k-1}}\dots\frac{d}{dt}D_{0t}^{\gamma_1-1}\Big[u_0(\lambda W_\alpha(t)+\mu W_\alpha(t-\tau))+\sum_{i=1}^{m-1}u_iW_{\rho_i-\gamma_0}(t)+$$

$$+(g*W_{\alpha-\gamma_m-\gamma_0+1})(t)\Big]=\dots=u_k+\sum_{i=0}^{k}u_i\Big(\lambda W_{\alpha+\rho_i-\rho_k+1}(t)+\mu W_{\alpha+\rho_i-\rho_k+1}(t-\tau)\Big)+$$

$$+\sum_{i=k+1}^{m-1}u_iW_{\rho_i-\rho_k+1}+(g*W_{\alpha-\gamma_m-\rho_k+2})(t)=D_{0t}^{-1}(g*W_{\alpha-\gamma_m-\rho_k+1})(t)+u_k+$$

$$+\sum_{i=0}^{k} u_i D_{0t}^{-1}[\lambda W_{\alpha+\rho_i-\rho_k}(t)+\mu W_{\alpha+\rho_i-\rho_k}(t-\tau)]+\sum_{i=k+1}^{m-1} u_i D_{0t}^{-1} W_{\rho_i-\rho_k}(t).$$

В случае $k=m-1$ вторая сумма отсутствует в последнем выражении.

Получили [40, с. 21], что функция $D_{0t}^{\{\gamma_0,\ldots,\gamma_k\}}u(t)\in AC[0,\infty)$. □

Частными случаями задачи (1.0.1), (1.3.1) являются начальные задачи для уравнения с производной Римана – Лиувилля и уравнения с производной Герасимова – Капуто:

Задача 1.3.2. *Найти регулярное решение уравнения*

$$D_{0t}^{\alpha}u(t)-\lambda u(t)-\mu H(t-\tau)u(t-\tau)=f(t),\quad t>0, \tag{1.3.5}$$

удовлетворяющее условиям

$$\lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha-k}u(t)=u_k,\qquad k=1,2,\ldots,n; \tag{1.3.6}$$

Задача 1.3.3. *Найти регулярное решение уравнения*

$$\partial_{0t}^{\alpha}u(t)-\lambda u(t)-\mu H(t-\tau)u(t-\tau)=f(t),\quad t>0, \tag{1.3.7}$$

удовлетворяющее условиям

$$u^{(k-1)}(0)=u_k,\qquad k=1,2,\ldots,n. \tag{1.3.8}$$

Теорема 1.3.2. *Пусть функция* $f(t)\in L(0,l)\cap C(0,l)$. *Тогда решение задачи* (1.3.5), (1.3.6) *существует, единственно и имеет вид*

$$u(t)=\sum_{k=1}^{n} u_k W_{\alpha-k+1}(t)+\int\limits_0^t f(\xi)W_{\alpha}(t-\xi)d\xi. \tag{1.3.9}$$

Теорема 1.3.3. *Пусть функция* $f(t)\in C(0,1)$ *представима в виде*

$$f(t)=D_{0t}^{\alpha-n}g(t),\qquad g(t)\in L(0,1).$$

Тогда решение задачи (1.3.7), (1.3.8) *существует, единственно и имеет вид*

$$u(t)=\sum_{k=1}^{n} u_k W_k(t)+\int\limits_0^t f(\xi)W_{\alpha}(t-\xi)d\xi. \tag{1.3.10}$$

В решениях (1.3.9) и (1.3.10) функция $W_{\nu}(t)$ определяется рядом (1.1.1).

1.4 Асимптотика фундаментального решения

В этом пункте для функции $W_\nu(t)$, которая является фундаментальным решением, доказываются теоремы об асимптотических представлениях.

Теорема 1.4.1. *Для функции* $W_\nu(t)$ *при* $0<\alpha<2$ *справедливы асимптотические формулы:*

при $\lambda\to+\infty$

$$W_\nu(t)=\lambda^{\frac{1-\nu}{\alpha}}e^{\lambda^{\frac{1}{\alpha}}t}+\frac{t^{\nu-\alpha-1}}{\lambda\Gamma(\nu-\alpha)}-\frac{t^{\nu-2\alpha-1}}{\lambda^2\Gamma(\nu-2\alpha)}+O\left(\lambda^{-3}\right), \qquad (1.4.1)$$

и при $\lambda\to-\infty$

$$W_\nu(t)=\frac{t^{\nu-\alpha-1}}{|\lambda|\Gamma(\nu-\alpha)}-\frac{t^{\nu-2\alpha-1}}{|\lambda|^2\Gamma(\nu-2\alpha)}+O\left(|\lambda|^{-3}\right). \qquad (1.4.2)$$

Доказательство. Используя формулу, связывающую обобщенную функцию Миттаг-Леффлера с обобщенной функцией Райта (0.11) перепишем функцию $W_\nu(t)$ в виде:

$$W_\nu(t)=\sum_{s=0}^{N(t)}\frac{\mu^s}{s!}(t-s\tau)_+^{\alpha s+\nu-1}{}_1\Psi_1\left[\begin{matrix}(s+1,1)\\(\alpha s+\nu,\alpha)\end{matrix}\middle|\lambda(t-s\tau)_+^{\alpha}\right]. \qquad (1.4.3)$$

Запишем асимптотические формулы для функции ${}_1\Psi_1\left[\begin{smallmatrix}(s+1,1)\\(\alpha s+\nu,\alpha)\end{smallmatrix}\middle|\lambda(t-s\tau)_+^{\alpha}\right]$ при $\lambda\to+\infty$ и $\lambda\to-\infty$ используя формулы (0.12) и (0.13). Для этого запишем сначала

$$I(Z)=\left[\lambda^{\frac{1}{\alpha}}(t-s\tau)_+\right]^{s+1-\alpha s-\nu}e^{\lambda^{\frac{1}{\alpha}}(t-s\tau)_+}\left\{\alpha^{-s}+O\left(\left[\lambda^{\frac{1}{\alpha}}(t-s\tau)_+\right]^{-1}\right)\right\};$$

$$J(-z)=\sum_{l=0}^{L_r}\frac{(-1)^l(s+l)!|\lambda(t-s\tau)_+^{\alpha}|^{-(l+s+1)}}{l!\Gamma(\nu-\alpha(l+1))}+O\left(|\lambda|^{-M+\delta}\right).$$

Тогда,

$${}_1\Psi_1(\lambda(t-s\tau)_+^{\alpha})=\alpha^{-s}\left[\lambda^{\frac{1}{\alpha}}(t-s\tau)_+\right]^{s+1-\alpha s-\nu}e^{\lambda^{\frac{1}{\alpha}}(t-s\tau)_+}+$$

$$+\sum_{l=0}^{L_r}\frac{(-1)^l(s+l)!|\lambda(t-s\tau)_+^{\alpha}|^{-(l+s+1)}}{l!\Gamma(\nu-\alpha(l+1))}+O\left(|\lambda|^{-M+\delta}\right)\text{ при }\lambda\to+\infty, \quad (1.4.4)$$

откуда и следует формула (1.4.1).

При $\lambda \to -\infty$ асимптотическая формула для функции ${}_1\Psi_1(\lambda(t-s\tau)_+)$ имеет вид (0.13):

$$
{}_1\Psi_1(\lambda(t-s\tau)_+) = \sum_{l=0}^{L_r} \frac{(-1)^l (s+l)! |\lambda(t-s\tau)_+^\alpha|^{-(l+s+1)}}{l!\Gamma(\nu-\alpha(l+1))} + O\left(|\lambda|^{-M+\delta}\right).
$$

Тогда

$$
W_\nu(t) = \sum_{s=0}^{N(t)} \frac{\mu^s}{s!}(t-s\tau)_+^{\alpha s+\nu-1} \left[\sum_{l=0}^{L_r} \frac{(-1)^l (s+l)! |\lambda(t-s\tau)_+^\alpha|^{-(l+s+1)}}{l!\Gamma(\nu-\alpha(l+1))} + \right.
$$

$$
\left. + O\left(|\lambda(t-s\tau)_+^\alpha|^{-M+\delta}\right) \right] = t^{\nu-1} \left[\sum_{l=0}^{L_r} \frac{(-1)^l |\lambda t^\alpha|^{-(l+1)}}{\Gamma(\nu-\alpha(l+1))} + O\left(|\lambda|^{-M+\delta}\right) \right] =
$$

$$
= \frac{t^{\nu-\alpha-1}}{|\lambda|\Gamma(\nu-\alpha)} - \frac{t^{\nu-2\alpha-1}}{|\lambda|^2\Gamma(\nu-2\alpha)} + O\left(|\lambda|^{-3}\right).
$$

$\square$

1.5 Уравнение с переменными коэффициентами. Метод шагов

В этом пункте исследуется начальная задача для уравнения с оператором дробного дифференцирования Джрбашяна – Нерсесяна (0.18) с переменными коэффициентами и переменным запаздыванием

$$
D_{0t}^{\{\gamma_0,\gamma_1\}} u(t) - \lambda(t)u(t) - \mu(t)u(t-\tau(t)) = f(t), \quad t > 0, \tag{1.5.1}
$$

где $0 < \gamma_0, \gamma_1 \leq 1$, причем $\gamma_0 + \gamma_1 > 1$, $\lambda(t), \mu(t)$ – непрерывные функции, функция $\tau(t)$ – непрерывно-дифференцируемая функция, обладающая следующими свойствами:

1) функция $\tau(t) > 0$ для всех $t \in [0, \infty)$;

2) для любого $c \geq -\tau(0)$ функция $\tau(t)$ пересекается с прямой $t - c$ ровно в одной точке.

Построим последовательность точек t_k таких, что $t_0 = 0$, t_{k+1} определяются как решения уравнения

$$
t - \tau(t) = t_k,
$$

то есть из соотношения

$$t_{k+1} = t_k + \tau(t_{k+1}), \quad k = 0, 1, \dots$$

Из свойств, наложенных на функцию $\tau(t)$, следует, что $t_k \to \infty$ при $k \to \infty$.

Разобьем луч $(0, \infty)$ точками t_k

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < \dots \qquad (1.5.2)$$

Регулярным решением уравнения (1.5.1) назовем функцию $u(t) \in C([-\tau(0), 0] \cup (0, \infty))$ и $D_{0t}^{\gamma_0 - 1} u(t) \in AC[0, \infty)$, которая удовлетворяет этому уравнению для всех $t > 0$.

Задача 1.5.1. *Найти регулярное решение $u(t)$ уравнения* (1.5.1), *удовлетворяющее условию*

$$u(t) = \varphi_0(t), \quad -\tau(0) \le t \le 0, \quad \lim_{t \to 0} D_{0t}^{\gamma_0 - 1} u = a, \qquad (1.5.3)$$

где $\varphi_0(t)$ – заданная непрерывно-дифференцируемая функция.

Подействуем оператором $D_{0t}^{-\alpha}$ на обе части уравнения (1.5.1), приведём его к интегральному виду:

$$u(t) - D_{0t}^{-\alpha} \lambda(t) u(t) - D_{0t}^{-\alpha} \mu(t) u(t - \tau(t)) = D_{0t}^{-\alpha} f(t) + a \frac{t^{\gamma_0 - 1}}{\Gamma(\gamma_0)}. \qquad (1.5.4)$$

Решение задачи будем искать методом шагов. На первом шаге $t \in (0, t_1]$. Тогда $t - \tau(t) \in [-\tau(0), 0]$, а $u(t - \tau(t)) = \varphi_0(t - \tau(t))$, и уравнение (1.5.4) сводится к следующему уравнению

$$u(t) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \lambda(\xi)(t - \xi)^{\alpha - 1} u(\xi) d\xi = F_0(t), \qquad (1.5.5)$$

где

$$F_0(t) = D_{0t}^{-\alpha} \mu(t) \varphi_0(t - \tau(t)) + D_{0t}^{-\alpha} f(t) + a \frac{t^{\gamma_0 - 1}}{\Gamma(\gamma_0)}.$$

На втором шаге $t \in [t_1, t_2]$, а $t - \tau(t) \in [0, t_1]$. С учетом этого уравнение (1.5.4) сводится к уравнению

$$u(t) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^t \lambda(\xi)(t - \xi)^{\alpha - 1} u(\xi) d\xi = F_1(t),$$

где

$$F_1(t) = D_{0t}^{-\alpha} f(t) + a\frac{t^{\gamma_0 - 1}}{\Gamma(\gamma_0)} +$$

$$+ D_{0t}^{-\alpha} \mu(t)\varphi_1(t - \tau(t)) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^{t_1} \lambda(\xi)\varphi_1(\xi)(t - \xi)^{\alpha - 1} d\xi.$$

Продолжая метод шагов, на $(k+1)$-ом шаге при $t \in [t_k, t_{k+1}]$, $u(t-\tau(t)) = = \varphi_k(t - \tau(t))$ уравнение (1.5.4) запишем в виде

$$u(t) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{t_k}^{t} \lambda(\xi)(t - \xi)^{\alpha - 1} u(\xi) d\xi = F_k(t), \tag{1.5.6}$$

где

$$F_k(t) = D_{0t}^{-\alpha} f(t) + a\frac{t^{\gamma_0 - 1}}{\Gamma(\gamma_0)} +$$

$$+ D_{0t}^{-\alpha} \mu(t)\varphi_k(t - \tau(t)) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{n=0}^{k-1} \int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} \lambda(\xi)\varphi_{n+1}(\xi)(t - \xi)^{\alpha - 1} d\xi. \tag{1.5.7}$$

Таким образом, решение задачи (1.5.1), (1.5.3) на каждом шаге сводится к решению интегрального уравнения Вольтерра.

Проверим непрерывность решения $u(t)$ в каждой точке t_k:

$$\lim_{t \to t_k - 0} u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k - 0} \lambda(\xi) u(\xi)(t_k - \xi)^{\alpha - 1} d\xi +$$

$$+ \left[D_{0t}^{-\alpha} f(t) + a\frac{t^{\gamma_0 - 1}}{\Gamma(\gamma_0)} + D_{0t}^{-\alpha} \mu(t) u(t - \tau(t)) \right]_{t = t_k - 0} +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^{t_{k-1}} \lambda(\xi) u(\xi)(t_k - \xi)^{\alpha - 1} d\xi =$$

$$= D_{0t_k}^{-\alpha}\lambda(t)u(t) + \left[D_{0t}^{-\alpha}f(t) + a\frac{t^{\gamma_0-1}}{\Gamma(\gamma_0)} + D_{0t}^{-\alpha}\mu(t)u(t-\tau(t))\right]_{t=t_k};$$

$$\lim_{t\to t_k+0} u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{t_k}^{t_k+0}\lambda(\xi)u(\xi)(t_k-\xi)^{\alpha-1}d\xi +$$

$$+\left[D_{0t}^{-\alpha}f(t) + a\frac{t^{\gamma_0-1}}{\Gamma(\gamma_0)} + D_{0t}^{-\alpha}\mu(t)u(t-\tau(t))\right]_{t=t_k+0} +$$

$$+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{0}^{t_k}\lambda(\xi)u(\xi)(t_k-\xi)^{\alpha-1}d\xi =$$

$$= \left[D_{0t}^{-\alpha}f(t) + a\frac{t^{\gamma_0-1}}{\Gamma(\gamma_0)} + D_{0t}^{-\alpha}\mu(t)u(t-\tau(t))\right]_{t=t_k} + D_{0t_k}^{-\alpha}\lambda(t)u(t).$$

Обозначим через $H^{\varepsilon}[0,\infty)$ класс функций, удовлетворяющих условию Гёльдера порядка ε. Справедлива теорема.

Теорема 1.5.1. *Пусть функции* $\lambda(t),\mu(t)\in H^{\varepsilon}[0,\infty)$, $\varepsilon>\gamma_0$, *и для функции* $f(t)\in C[0,\infty)$ *справедливо интегральное представление*

$$f(t) = D_{0t}^{\gamma_1-1}g(t). \tag{1.5.8}$$

Тогда существует регулярное решение $u(t)$ *уравнения* (1.5.1)*, удовлетворяющее условию* (1.5.3) *при всех* $t>0$, *и оно единственно.*

Замечание 1.5.1. Решение интегрального уравнения (1.5.4) при $t\in[t_k,t_{k+1}]$ $(k=0,1,\dots)$ имеет вид:

$$u(t) = F_k(t) + \int\limits_{t_k}^{t}F_k(\xi)\sum_{n=0}^{\infty}K_n(t,\xi)d\xi,$$

где

$$K_{n+1}(t,\xi) = D_{\xi t}^{-\alpha}\lambda(t)K_n(t,\xi),\ n=1,2,\dots,\ K_1(t,\xi)=\frac{(t-\xi)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\lambda(\xi).$$

Доказательство. Так как $\lambda(t)$ и $\mu(t)$ принадлежат классу Гёльдера и справедливо интегральное представление (1.5.8), перепишем функцию (1.5.7) в виде

$$F_k(t) = D_{0t}^{-\alpha} D_{0t}^{\gamma_1 - 1} g(t) + a\frac{t^{\gamma_0 - 1}}{\Gamma(\gamma_0)} +$$

$$+ D_{0t}^{-\alpha} D_{0t}^{\gamma_1 - 1} M(t) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{n=0}^{k-1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} (t-s)^{\alpha-1} D_{0s}^{\gamma_1 - 1} N(s) ds, \quad (1.5.9)$$

где

$$\begin{gathered} D_{0t}^{\gamma_1 - 1} M(t) = \mu(t)\varphi_k(t - \tau(t)), \quad M(t) \in L[0,\infty), \\ D_{0t}^{\gamma_1 - 1} N(t) = \lambda(t)\varphi_{n+1}(t),\ n = 0, ..., k-1,\ N(t) \in L[0,\infty). \end{gathered} \quad (1.5.10)$$

Применяя формулу композиции операторов Римана – Лиувилля (0.16) и формулу дробного интегрирования по частям (0.17), из (1.5.9) получаем

$$F_k(t) = D_{0t}^{-\gamma_0} g(t) + a\frac{t^{\gamma_0 - 1}}{\Gamma(\gamma_0)} +$$

$$+ D_{0t}^{-\gamma_0} M(t) + \frac{1}{\Gamma(\gamma_0)} \sum_{n=0}^{k-1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} N(s)(t-s)^{\gamma_0 - 1} ds. \quad (1.5.11)$$

Тогда, запишем решение задачи в виде

$$u(t) = D_{0t}^{-\gamma_0} g(t) + a\frac{t^{\gamma_0 - 1}}{\Gamma(\gamma_0)} + D_{0t}^{-\gamma_0} M(t) + \frac{1}{\Gamma(\gamma_0)} \sum_{n=0}^{k-1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} N(s)(t-s)^{\gamma_0 - 1} ds +$$

$$+ \int_{t_k}^{t} D_{0\xi}^{\gamma_1 - 1} F_k^*(\xi) \left[\frac{(t-\xi)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + D_{\xi t}^{-\alpha} \lambda(t) \frac{(t-\xi)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \right.$$

$$\left. + D_{\xi t}^{-\alpha} \lambda(t) D_{\xi t}^{-\alpha} \lambda(t) \frac{(t-\xi)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \ldots \right] d\xi,$$

где

$$D_{0\xi}^{\gamma_1 - 1} F_k^*(\xi) = \lambda(\xi) D_{0\xi}^{\gamma_1 - 1} \left[D_{0\xi}^{-\alpha} g(\xi) + D_{0\xi}^{-\alpha} M(\xi) + a\frac{\xi^{\alpha - 1}}{\Gamma(\alpha)} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{n=0}^{k-1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} N(s)(\xi - s)^{\alpha - 1} ds \right]. \quad (1.5.12)$$

Используя формулу дробного интегрирования по частям (0.17) перепишем последнее выражение для $u(t)$:

$$u(t) = D_{0t}^{-\gamma_0} g(t) + a\frac{t^{\gamma_0-1}}{\Gamma(\gamma_0)} + D_{0t}^{-\gamma_0} M(t) + \frac{1}{\Gamma(\gamma_0)} \sum_{n=0}^{k-1} \int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} N(s)(t-s)^{\gamma_0-1} ds +$$

$$+ \int\limits_{t_k}^{t} F_k^*(\xi) \left[\frac{(t-\xi)^{\gamma_0-1}}{\Gamma(\gamma_0)} + D_{\xi t}^{-\gamma_0} \lambda(t) \frac{(t-\xi)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \right.$$

$$\left. + D_{\xi t}^{-\gamma_0} \lambda(t) D_{\xi t}^{-\alpha} \lambda(t) \frac{(t-\xi)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \ldots \right] d\xi.$$

Подействуем оператором $D_{0t}^{\gamma_0-1}$ на $u(t)$

$$D_{0t}^{\gamma_0-1} u(t) = D_{0t}^{-1} g(t) + D_{0t}^{-1} M(t) + a + \sum_{n=0}^{k-1} \int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} N(s) ds +$$

$$+ \int\limits_{t_k}^{t} F_k^*(\xi) \left[1 + D_{\xi t}^{-1} \lambda(t) \frac{(t-\xi)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + D_{\xi t}^{-1} \lambda(t) D_{\xi t}^{-\alpha} \lambda(t) \frac{(t-\xi)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \ldots \right] d\xi.$$

Из последнего выражения следует, что функция $D_{0t}^{\gamma_0-1} u(t)$ является абсолютно непрерывной [40]. Найдем далее производную от $D_{0t}^{\gamma_0-1} u(t)$:

$$\frac{d}{dt} D_{0t}^{\gamma_0-1} u(t) = g(t) + M(t) + F_k^*(t) +$$

$$+ \int\limits_{t_k}^{t} F_k^*(\xi) \lambda(t) \left[\frac{(t-\xi)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + D_{\xi t}^{-\alpha} \lambda(t) \frac{(t-\xi)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \ldots \right] d\xi.$$

Применим теперь к последнему соотношению оператор $D_{0t}^{\gamma_1-1}$. Получаем:

$$D_{0t}^{\gamma_1-1} \frac{d}{dt} D_{0t}^{\gamma_0-1} u(t) = D_{0t}^{\{\gamma_0,\gamma_1\}} u(t) = D_{0t}^{\gamma_1-1} g(t) + D_{0t}^{\gamma_1-1} M(t) + D_{0t}^{\gamma_1-1} F_k^*(t) +$$

$$+ \lambda(t) \int\limits_{t_k}^{t} D_{0\xi}^{\gamma_1-1} F_k^*(\xi) \left[\frac{(t-\xi)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + D_{\xi t}^{-\alpha} \lambda(t) \frac{(t-\xi)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \ldots \right] d\xi.$$

Из последнего выражения, ввиду обозначений (1.5.10) и (1.5.12), получаем:

$$D_{0t}^{\{\gamma_0,\gamma_1\}}u(t) = f(t) + \mu(t)u(t-\tau(t)) + \lambda(t)u(t).$$

□

Замечание 1.5.2. Отметим, что случай, когда метод шагов не может быть продолжен далее некоторой точки t_k, называется особым и может наступить при $\tau(t_k) = 0$, когда в окрестности справа от точки t_k функция $\tau(t)$ растет медленнее, чем t. Особый случай заведомо не может наступить, если $\inf \tau(t) > 0$ [49, с. 21].

Замечание 1.5.3. В случае, когда $\gamma_0 = 1$, $\gamma_1 = \alpha$ и λ, μ – произвольные постоянные, из уравнения (1.5.1) следует уравнение с производной Герасимова – Капуто порядка $0 < \alpha \leq 1$

$$\partial_{0t}^{\alpha}u(t) - \lambda u(t) - \mu u(t-\tau(t)) = f(t), \quad t > 0,$$

и решение начальной задачи для него запишется в следующем виде для всех $t \in [t_k, t_{k+1}]$, $k = 0, 1, \ldots$:

$$u(t) = u(t_k)E_{\alpha,1}(\lambda(t-t_k)^{\alpha}) +$$

$$+\int\limits_{t_k}^{t}\left[f(\xi) + \mu u(\xi-\tau(\xi)) - \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_{0}^{t_k}\frac{u'(s)ds}{(\xi-s)^{\alpha}}\right](t-\xi)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-\xi)^{\alpha})d\xi.$$

Замечание 1.5.4. В случае, когда $\gamma_0 = \alpha$, $\gamma_1 = 1$ и λ, μ – произвольные постоянные, из уравнения (1.5.1) следует уравнение с производной Римана – Лиувилля порядка $0 < \alpha \leq 1$

$$D_{0t}^{\alpha}u(t) - \lambda u(t) - \mu u(t-\tau(t)) = f(t), \quad t > 0,$$

и решение начальной задачи для него запишется в следующем виде для всех $t \in (t_k, t_{k+1}]$, $k = 0, 1, \ldots$:

$$u(t) = F_k(t) + \lambda\int\limits_{t_k}^{t}F_k(\xi)(t-\xi)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-\xi)^{\alpha}),$$

где

$$F_k = D_{0t}^{-\alpha}f(t) + \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}D_{0t}^{\alpha-1}u(t)\Big|_{t=0} +$$

$$+ D_{0t}^{-\alpha}\mu(t)u(t-\tau(t)) + \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{0}^{t_k}u(\xi)(t-\xi)^{\alpha-1}d\xi.$$

Глава 2

Двухточечные краевые задачи

Данная глава посвящена краевым задачам для линейного обыкновенного уравнения с дробной производной Римана – Лиувилля с запаздывающим аргументом

$$D_{0t}^{\alpha}u(t)-\lambda u(t)-\mu H(t-\tau)u(t-\tau)=f(t),\quad 0<t<1, \tag{2.0.1}$$

где $D_{0t}^{\alpha}u(t)$ – дробная производная Римана – Лиувилля (0.14), $\alpha\in(n-1,n]$, λ,μ – произвольные постоянные, τ – фиксированное положительное число.

Строится решение задачи с обобщенными краевыми условиями типа Штурма. В случае $n=2$ реализуется метод функции Грина. Доказывается теорема о конечности числа вещественных собственных значений.

Исследуется обобщенная краевая задача Дирихле – Неймана, для которой доказывается теорема существования и единственности и построена функция Грина.

2.1 Задача с условиями типа Штурма

Определение 2.1.1. *Регулярным решением уравнения* (2.0.1) *назовем функцию* $u(t)$ *из класса* $D_{0t}^{\alpha-n}u(t)\in C^n(0,1)$, $u(t)\in L(0,1)$, *и удовлетворяющую этому уравнению.*

Задача 2.1.1. *Найти регулярное решение уравнения* (2.0.1), *удовлетворяю-*

щее условиям

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik} \lim\limits_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha-k}u(t) = c_i, \quad i=\overline{1,p}, \\ \sum\limits_{k=1}^{n} b_{jk} \lim\limits_{t\to 1} D_{0t}^{\alpha-k}u(t) = c_{p+j}, \quad j=\overline{1,q}, \end{cases} \tag{2.1.1}$$

причем $p+q=n$, $a_{ik}, b_{jk}, c_i, c_{p+j}$ *– заданные постоянные.*

Из решения задачи Коши (1.3.9) для уравнения (2.0.1) имеем, что

$$D_{0t}^{\alpha-k}u(t)\Big|_{t=1} = \sum_{s=1}^{n} D_{0t}^{\alpha-s}u(t)\Big|_{t=0} W_{k-s+1}(1) + (f*W_k)(1), \quad k=\overline{1,n},$$

$(f*W_k)(1)$ – свертка Лапласа (0.23). С учетом этого перепишем краевые условия задачи (2.1.1) в виде:

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik} \lim\limits_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha-k}u(t) = c_i, \\ \sum\limits_{k=1}^{n} \lim\limits_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha-k}u(t) \sum\limits_{s=1}^{n} b_{js} W_{s-k+1}(1) = c_{p+j} - \sum\limits_{k=1}^{n} b_{jk}(f*W_k)(1), \end{cases} \tag{2.1.2}$$

$i=\overline{1,p}$, $j=\overline{1,q}$. Систему уравнений (2.1.2) будем решать методом Крамера [18]. Определитель этой системы равен

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pn} \\ \sum\limits_{s=1}^{n} b_{1s}W_s(\lambda) & \sum\limits_{s=1}^{n} b_{1s}W_{s-1}(\lambda) & \dots & \sum\limits_{s=1}^{n} b_{1s}W_{s-n+1}(\lambda) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum\limits_{s=1}^{n} b_{qs}W_s(\lambda) & \sum\limits_{s=1}^{n} b_{qs}W_{s-1}(\lambda) & \dots & \sum\limits_{s=1}^{n} b_{qs}W_{s-n+1}(\lambda) \end{vmatrix} \neq 0. \tag{2.1.3}$$

Вычислим определители $\triangle_s$, которые получаются путем замены s-го столбца на столбец свободных членов системы (2.1.2):

$$\triangle_s = \sum_{i=1}^{p} c_i M_{is} + \sum_{j=1}^{q} c_{p+j} M_{p+j,s} - \sum_{k=1}^{n} (f*W_k)(1) \sum_{j=1}^{q} b_{jk} M_{p+j,s}, \quad s=\overline{1,n}.$$

В последнем соотношении через M_{ij} обозначено алгебраическое дополнение к элементу матрицы определителя (2.1.3), стоящему на пересечении i-ой строки и j-го столбца. Тогда решение системы (2.1.2) имеет вид:

$$D_{0t}^{\alpha-s}u(t)\Big|_{t=0} = \frac{\triangle_s}{\triangle}, \quad s = \overline{1,n}. \tag{2.1.4}$$

Подставим в решение задачи Коши (1.3.9) полученные значения (2.1.4). Тогда получим:

$$u(t) = \sum_{s=1}^{n} \frac{\triangle_s}{\triangle} W_{\alpha-s+1}(t) + (f * W_\alpha)(t)$$

или

$$u(t) = \frac{1}{\triangle} \sum_{s=1}^{n} W_{\alpha-s+1}(t) \left[\sum_{i=1}^{p} c_i M_{is} + \sum_{j=1}^{q} c_{p+j} M_{p+j,s} \right] +$$

$$+ \int\limits_0^1 f(\xi) \Big[H(t-\xi) W_\alpha(t-\xi) -$$

$$- \frac{1}{\triangle} \sum_{s=1}^{n} W_{\alpha-s+1}(t) \sum_{j=1}^{q} M_{p+j,s} \sum_{k=1}^{n} b_{jk} W_k(1-\xi) \Big] d\xi. \tag{2.1.5}$$

Полученный результат сформулируем в виде теоремы:

Теорема 2.1.1. *Пусть функция* $f(t) \in L(0,1) \cap C(0,1)$ *и выполнено условие* (2.1.3). *Тогда:*

1) существует регулярное решение задачи (2.0.1), (2.1.1), *которое имеет вид* (2.1.5)*;*

2) решение задачи (2.0.1), (2.1.1) *единственно тогда и только тогда, когда выполнено условие* (2.1.3).

2.2 Метод функции Грина

В этом разделе методом функции Грина строится решение уравнения (2.0.1) при $1 < \alpha \le 2$, удовлетворяющее краевым условиям

$$\begin{aligned} a \lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha-1} u(t) + b \lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha-2} u(t) = 0, \\ c \lim_{t\to 1} D_{0t}^{\alpha-1} u(t) + d \lim_{t\to 1} D_{0t}^{\alpha-2} u(t) = 0, \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

где a, b, c, d – заданные постоянные, причем $a^2+b^2 \neq 0$ и $c^2+d^2 \neq 0$.

Определение 2.2.1. *Функцией Грина задачи* (2.0.1), (2.2.1) *назовем функцию* $G(t,\xi)$, *удовлетворяющую свойствам:*

1) функция $G(t,\xi)$ *непрерывна для всех* t *и* ξ *из отрезка* $[0,1]$;

2) функция $G(t,\xi)$ *удовлетворяет соотношению*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[D_{0t}^{\alpha-2}G_\xi(t,\xi)|_{\xi=t+\varepsilon} - D_{0t}^{\alpha-2}G_\xi(t,\xi)|_{\xi=t-\varepsilon}\right] = 1; \tag{2.2.2}$$

3) функция $G(t,\xi)$ *является решением сопряженного уравнения*

$$\partial_{1\xi}^{\alpha}G(t,\xi) - \lambda G(t,\xi) - \mu H(1-\tau-\xi)G(t,\xi+\tau) = 0 \tag{2.2.3}$$

в интервалах $(0,t)$ *и* $(t,1)$;

4) функция $G(t,\xi)$ *удовлетворяет краевым условиям*

$$\begin{cases} a\lim\limits_{\xi\to 0} D_{0t}^{\alpha-2}G_\xi(t,\xi) + b\lim\limits_{\xi\to 0} D_{0t}^{\alpha-2}G(t,\xi) = 0, \\ c\lim\limits_{\xi\to 1} D_{0t}^{\alpha-2}G_\xi(t,\xi) + d\lim\limits_{\xi\to 1} D_{0t}^{\alpha-2}G(t,\xi) = 0. \end{cases} \tag{2.2.4}$$

Имеет место следующая лемма.

Лемма 2.2.1. *Функция*

$$G(t,\xi) = H(t-\xi)W_\alpha(t-\xi) +$$

$$+\Big(cW_1(1-\xi) + dW_2(1-\xi)\Big)\frac{bW_\alpha(t) - aW_{\alpha-1}(t)}{\triangle}, \tag{2.2.5}$$

заданная для таких λ *и* μ, *которые удовлетворяют условию*

$$\triangle = ac(\lambda W_\alpha(1) + \mu W_\alpha(1-\tau)) + (ad-bc)W_1(1) - bdW_2(1) \neq 0, \tag{2.2.6}$$

является функцией Грина задачи (2.0.1), (2.2.1).

Доказательство. Докажем, что функция $G(t,\xi)$ удовлетворяет свойствам 1-4 из определения 2.2.1.

Справедливость первого свойства следует из представления (2.2.5) функции $G(t,\xi)$, а также из условия (2.2.6).

Далее вычислим значение выражения $D_{0t}^{\alpha-2}G_\xi(t,\xi)$:

$$D_{0t}^{\alpha-2}G_\xi(t,\xi) = -H(t-\xi)W_1(t-\xi) -$$

$$-\Big(c\lambda W_\alpha(1-\xi) + c\mu W_\alpha(1-\xi-\tau) + dW_1(1-\xi)\Big)\frac{bW_2(t) - aW_1(t)}{\triangle}. \tag{2.2.7}$$

Подставляя (2.2.7) в свойство (2.2.2) при $\xi = t+\varepsilon$ и $\xi = t-\varepsilon$ и устремляя $\varepsilon \to 0$ приходим к тождеству.

Покажем справедливость свойства (2.2.3). Используя определение производной Герасимова – Капуто (0.21) $\partial_{1\xi}^{\alpha} G(t,\xi) = D_{1\xi}^{\alpha-2} G_{\xi\xi}(t,\xi)$, определение (2.2.5) функции $G(t,\xi)$, свойства дифференцирования (1.1.6) и автотрансформации (1.1.7) функции $W_\nu(t)$ (1.1.1), имеем:

$$D_{1\xi}^{\alpha-2} G_{\xi\xi}(t,\xi) = D_{1\xi}^{\alpha-2}\Big[H(t-\xi)\{\lambda W_{2\alpha-2}(t-\xi)+\mu W_{2\alpha-2}(t-\xi-\tau)\}+$$
$$+\Big(c\{\lambda W_{\alpha-1}(1-\xi)+\mu W_{\alpha-1}(1-\xi-\tau)\}+$$
$$+d\{\lambda W_{\alpha}(1-\xi)+\mu W_{\alpha}(1-\xi-\tau)\}\Big)\frac{bW_\alpha(t)-aW_{\alpha-1}(t)}{\triangle}\Big] =$$
$$= \lambda\left[H(t-\xi)W_\alpha(t-\xi)+(cW_1(1-\xi)+dW_2(1-\xi))\frac{bW_\alpha(t)-aW_{\alpha-1}(t)}{\triangle}\right]+$$
$$+\mu\Big[H(t-\xi)W_\alpha(t-\xi-\tau)+$$
$$+(cW_1(1-\xi-\tau)+dW_2(1-\xi-\tau))\,\frac{bW_\alpha(t)-aW_{\alpha-1}(t)}{\triangle}\Big] =$$
$$= \lambda G(t,\xi)+\mu G(t,\xi+\tau).$$

Справедливость условий (2.2.4) также следует из свойств функции $W_\nu(t)$ (1.1.6) – (1.1.9). Найдем сначала значения выражений $D_{0t}^{\alpha-2}G_\xi(t,\xi)\Big|_{\xi=0}$ и $D_{0t}^{\alpha-2}G(t,\xi)\Big|_{\xi=0}$:

$$D_{0t}^{\alpha-2}G_\xi(t,\xi)\Big|_{\xi=0} = -W_1(t)-\Big(c\{\lambda W_\alpha(1)+\mu W_\alpha(1-\tau)\}+dW_1(1)\Big)\times$$
$$\times\frac{bW_2(t)-aW_1(t)}{\triangle};$$

$$D_{0t}^{\alpha-2}G(t,\xi)\Big|_{\xi=0} = W_2(t)+\Big(cW_1(1)+dW_2(1)\Big)\frac{bW_2(t)-aW_1(t)}{\triangle}.$$

Тогда, подставляя последние два выражения в первое из условий (2.2.4) получаем:

$$-aW_1(t)+bW_2(t)+\frac{bW_2(t)-aW_1(t)}{\triangle}\times$$
$$\times\Big[b\Big(cW_1(1)+dW_2(1)\Big)-ac\{\lambda W_\alpha(1)+\mu W_\alpha(1-\tau)\}-adW_1(1)\Big] =$$

$$= -aW_1(t) + bW_2(t) + \frac{bW_2(t) - aW_1(t)}{\triangle}(-\triangle) = 0.$$

Аналогично, для доказательства второго краевого условия находим сначала значения выражений $D_{0t}^{\alpha-2}G_\xi(t,\xi)\Big|_{\xi=1}$ и $D_{0t}^{\alpha-2}G(t,\xi)\Big|_{\xi=1}$:

$$D_{0t}^{\alpha-2}G_\xi(t,\xi)\Big|_{\xi=1} = -d\frac{bW_2(t) - aW_1(t)}{\triangle},$$

$$D_{0t}^{\alpha-2}G(t,\xi)\Big|_{\xi=1} = c\frac{bW_2(t) - aW_1(t)}{\triangle},$$

подставляя которые во второе из условий (2.2.4) получаем, что

$$-cd\frac{bW_2(t) - aW_1(t)}{\triangle} + dc\frac{bW_2(t) - aW_1(t)}{\triangle} = 0.$$

$\square$

Справедлива теорема.

Теорема 2.2.1. *Пусть* $f(t) \in L(0,1) \cap C(0,1)$ *и выполнено условие* (2.2.6). *Тогда:*

1) существует регулярное решение задачи (2.0.1), (2.2.1), *которое имеет вид*

$$u(t) = \int_0^1 f(\xi)G(t,\xi)d\xi; \tag{2.2.8}$$

2) решение задачи (2.0.1), (2.2.1) *единственно тогда и только тогда, когда выполняется условие* (2.2.6).

Доказательство. Покажем, что решение задачи (2.0.1), (2.2.1) имеет вид (2.2.8). Для этого, умножим уравнение (2.0.1) на функцию $D_{0t}^{\alpha-2}G(t,\xi)$ и проинтегрируем его по переменной ξ от ε до $1-\varepsilon$:

$$\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} D_{0t}^{\alpha-2}G(t,\xi)D_{0\xi}^{\alpha}u(\xi)d\xi - \lambda\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} u(\xi)D_{0t}^{\alpha-2}G(t,\xi)d\xi -$$

$$-\mu\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} H(t-\tau)u(\xi-\tau)D_{0t}^{\alpha-2}G(t,\xi)d\xi = \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} f(\xi)D_{0t}^{\alpha-2}G(t,\xi)d\xi. \tag{2.2.9}$$

Будем интегрировать по частям первое слагаемое равенства (2.2.9):

$$\int\limits_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} D_{0t}^{\alpha-2}G(t,\xi)D_{0\xi}^{\alpha}u(\xi)d\xi = D_{0t}^{\alpha-2}G(t,\xi)D_{0\xi}^{\alpha-1}u(\xi)\Big|_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} -$$

$$-\int\limits_{\varepsilon}^{t-\varepsilon} D_{0t}^{\alpha-2}G_{\xi}(t,\xi)D_{0\xi}^{\alpha-1}u(\xi)d\xi - \int\limits_{t+\varepsilon}^{1-\varepsilon} D_{0t}^{\alpha-2}G_{\xi}(t,\xi)D_{0\xi}^{\alpha-1}u(\xi)d\xi =$$

$$= D_{0t}^{\alpha-2}G(t,\xi)D_{0\xi}^{\alpha-1}u(\xi)\Big|_{\xi=1-\varepsilon} - D_{0t}^{\alpha-2}G(t,\xi)D_{0\xi}^{\alpha-1}u(\xi)\Big|_{\xi=\varepsilon} +$$

$$+ D_{0t}^{\alpha-2}u(t)\left[D_{0t}^{\alpha-2}G_{\xi}(t,\xi)\Big|_{\xi=t+\varepsilon} - D_{0t}^{\alpha-2}G_{\xi}(t,\xi)\Big|_{\xi=t-\varepsilon}\right] +$$

$$+ D_{0t}^{\alpha-2}G_{\xi}(t,\xi)D_{0\xi}^{\alpha-2}u(\xi)\Big|_{\xi=\varepsilon} - D_{0t}^{\alpha-2}G_{\xi}(t,\xi)D_{0\xi}^{\alpha-2}u(\xi)\Big|_{\xi=1-\varepsilon} +$$

$$+ \int\limits_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} D_{0t}^{\alpha-2}G_{\xi\xi}(t,\xi)D_{0\xi}^{\alpha-2}u(\xi)d\xi. \quad (2.2.10)$$

Учитывая свойства (2.2.2), (2.2.4) функции (2.2.5), краевые условия задачи (2.2.1) и устремив $\varepsilon \to 0$ из (2.2.10) получаем:

$$\int\limits_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} D_{0t}^{\alpha-2}G(t,\xi)D_{0\xi}^{\alpha}u(\xi)d\xi = D_{0t}^{\alpha-2}u(t) + \int\limits_{0}^{1} D_{0\xi}^{\alpha-2}u(\xi)D_{0t}^{\alpha-2}G_{\xi\xi}(t,\xi)d\xi. \quad (2.2.11)$$

Заменяя $\xi-\tau$ на ξ в третьем интеграле левой части выражения (2.2.9), получаем

$$\int\limits_{0}^{1} H(\xi-\tau)u(\xi-\tau)D_{0t}^{\alpha-2}G(t,\xi)d\xi = \int\limits_{0}^{1} H(1-\tau-\xi)u(\xi)D_{0t}^{\alpha-2}G(t,\xi+\tau)d\xi. \quad (2.2.12)$$

Подставляя (2.2.11) и (2.2.12) в уравнение (2.2.9) и используя формулу дробного интегрирования по частям (0.17) приходим к соотношению

$$D_{0t}^{\alpha-2}u(t)+D_{0t}^{\alpha-2}\int\limits_0^1 u(\xi)\Big[D_{1\xi}^{\alpha-2}G_{\xi\xi}(t,\xi)-\lambda G(t,\xi)-$$

$$-\mu H(1-t-\xi)G(t,\xi+\tau)\Big]d\xi=D_{0t}^{\alpha-2}\int\limits_0^1 f(\xi)G(t,\xi)d\xi.$$

Действуя дифференциальным оператором $D_{0t}^{2-\alpha}$ на последнее равенство и учитывая свойство (2.2.3) функции $G(t,\xi),$ получаем соотношение (2.2.8).

Покажем далее, что функция (2.2.8) действительно является решением задачи (2.0.1), (2.2.1). Запишем функцию (2.2.8) в терминах функции $W_\nu(t)$:

$$u(t)=\int\limits_0^t f(\xi)W_\alpha(t-\xi)d\xi+$$

$$+\frac{bW_\alpha(t)-aW_{\alpha-1}(t)}{\triangle}\int\limits_0^1 f(\xi)\left(cW_1(1-\xi)+dW_2(1-\xi)\right)d\xi.$$

Используя свойства (1.1.6) и (1.1.7) функции $W_\nu(t),$ а также так как функция $f(t)\in L(0,1)\cap C(0,1),$ из последнего выражения приходим к следующему

$$D_{0t}^{\alpha}u(t)=f(t)+\lambda\int\limits_0^1 f(\xi)G(t,\xi)d\xi+\mu\int\limits_0^1 f(\xi)G(t,\xi-\tau)d\xi.$$

Докажем, что функция $u(t)$ удовлетворяет краевым условиям (2.2.1) (учитывая (1.1.9)):

$$a\lim_{t\to 0}D_{0t}^{\alpha-1}u(t)+b\lim_{t\to 0}D_{0t}^{\alpha-2}u(t)=\frac{1}{\triangle}\int\limits_0^1 f(\xi)\Big[cW_1(1-\xi)+dW_2(1-\xi)\Big]\times$$

$$\times\left[abW_1(0)-a^2\lambda W_\alpha(0)-a^2\mu W_\alpha(-\tau)+b^2W_2(0)-abW_1(0)\right]d\xi=0.$$

Аналогично получаем, что

$$c\lim_{t\to 1}D_{0t}^{\alpha-1}u(t)+d\lim_{t\to 1}D_{0t}^{\alpha-2}u(t)=\int\limits_0^1 f(\xi)\Big[cW_1(1-\xi)+dW_2(1-\xi)\Big]\times$$

$$\times\left[1+\frac{-ac(\lambda W_\alpha(1)+\mu W_\alpha(1-\tau))-(ad-cb)W_1(1)+bdW_2(1)}{\triangle}\right]d\xi=$$

$$=\int\limits_0^1 f(\xi)\Big[cW_1(1-\xi)+dW_2(1-\xi)\Big]\left(1-\frac{\triangle}{\triangle}\right)d\xi=0.$$

Для завершения доказательства теоремы покажем, что в случае, когда условие разрешимости (2.2.6) не выполняется

$$\triangle=ac(\lambda W_\alpha(1)+\mu W_\alpha(1-\tau))+(ad-bc)W_1(1)-bdW_2(1)=0,$$

решение задачи не единственно, то есть однородная задача

$$D_{0t}^\alpha u(t)-\lambda u(t)-\mu H(t-\tau)u(t-\tau)=0, \tag{2.2.13}$$

$$\begin{gathered} a\lim_{t\to 0}D_{0t}^{\alpha-1}u(t)+b\lim_{t\to 0}D_{0t}^{\alpha-2}u(t)=0,\\ c\lim_{t\to 1}D_{0t}^{\alpha-1}u(t)+d\lim_{t\to 1}D_{0t}^{\alpha-2}u(t)=0 \end{gathered} \tag{2.2.14}$$

имеет решение, отличное от нуля.

Рассмотрим функцию вида

$$\bar u(t)=C_1W_\alpha(t)+C_2W_{\alpha-1}(t),$$

где C_1, C_2 – отличные от нуля константы.

Покажем, что функция $\bar u(t)$ удовлетворяет уравнению (2.2.13):

$$D_{0t}^\alpha\bar u(t)=D_{0t}^\alpha[C_1W_\alpha(t)+C_2W_{\alpha-1}(t)]=C_1[\lambda W_\alpha(t)+\mu W_\alpha(t-\tau)]+$$

$$+C_2[\lambda W_{\alpha-1}(t)+\mu W_{\alpha-1}(t-\tau)]=\lambda\bar u(t)+\mu\bar u(t-\tau).$$

Вычислив далее $D_{0t}^{\alpha-1}u(t)$ и $D_{0t}^{\alpha-2}u(t)$ при $t=0$ и $t=1$ и подставляя эти значения в краевые условия (2.2.14), приходим к системе

$$\begin{gathered} aC_1+bC_2=0,\\ C_1[cW_1(1)+dW_2(1)]+C_2[c\lambda W_\alpha(1)+c\mu W_\alpha(1-\tau)+dW_1(1)]=0. \end{gathered} \tag{2.2.15}$$

Определитель системы (2.2.15) равен

$$\begin{vmatrix} a & b\\ cW_1(1)+dW_2(1) & c\lambda W_\alpha(1)+c\mu W_\alpha(1-\tau)+dW_1(1)\end{vmatrix}=\triangle=0.$$

Таким образом, решение задачи (2.0.1), (2.2.1) единственно тогда и только тогда, когда выполнено условие (2.2.6).

$\square$

2.3 Задача Дирихле – Неймана

В этом пункте для уравнения (2.0.1) исследуется следующая задача с обобщенными краевыми условиями вида:

Задача 2.3.1. *Найти регулярное решение уравнения* (2.0.1), *удовлетворяющее краевым условиям*

$$\begin{cases} \lim\limits_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha-\beta_i}u(t) = a_i, \quad i=\overline{1,p}, \\ \lim\limits_{t\to 1} D_{0t}^{\alpha-\delta_j}u(t) = b_j, \quad j=\overline{1,q}, \end{cases} \tag{2.3.1}$$

причем $p+q=n$, a_i, b_j *– заданные постоянные,* β_i, δ_j *– элементы из множества* $\{1,\ldots,n\}$.

Определение 2.3.1. *Функцией Грина задачи* (2.0.1), (2.3.1) *назовем функцию* $G(t,\xi)$, *удовлетворяющую свойствам*

1. Функция $G(t,\xi)$ *непрерывна для всех* t *и* ξ *из отрезка* $[0,1]$;

2. Функция $G(t,\xi)$ *удовлетворяет соотношениям*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[D_{0t}^{\alpha-n}\frac{\partial^{n-1}}{\partial\xi^{n-1}}G(t,\xi)\Big|_{\xi=t-\varepsilon} - D_{0t}^{\alpha-n}\frac{\partial^{n-1}}{\partial\xi^{n-1}}G(t,\xi)\Big|_{\xi=t+\varepsilon}\right] = (-1)^{n-1}; \tag{2.3.2}$$

3. Функция $G(t,\xi)$ *в интервалах* $(0,t)$ *и* $(t,1)$ *является решением однородного уравнения*

$$\partial_{1\xi}^{\alpha}G(t,\xi) - \lambda G(t,\xi) - \mu H(1-\xi-\tau)G(t,\xi+\tau) = 0, \tag{2.3.3}$$

где $\partial_{1\xi}^{\alpha}$ *– производная Герасимова – Капуто* (0.21);

4. Функция $G(t,\xi)$ *удовлетворяет краевым условиям*

$$\begin{cases} D_{0t}^{\alpha-n}\frac{\partial^{\beta_s-1}}{\partial\xi^{\beta_s-1}}G(t,\xi)\Big|_{\xi=0} = 0, \quad s=\overline{p+1,n}, \\ D_{0t}^{\alpha-n}\frac{\partial^{\delta_s-1}}{\partial\xi^{\delta_s-1}}G(t,\xi)\Big|_{\xi=1} = 0, \quad s=\overline{q+1,n}. \end{cases} \tag{2.3.4}$$

Имеет место следующая лемма.

Лемма 2.3.1. *Функция*

$$G(t,\xi) = H(t-\xi)W_\alpha(t-\xi) - \frac{1}{\triangle}\sum_{s=1}^{q}W_{\alpha-\beta_{s+p}+1}(t)\sum_{j=1}^{q}D_{js}W_{\delta_j}(1-\xi), \tag{2.3.5}$$

определенная для тех λ *и* μ, *для которых выполняется условие*

$$\triangle = \begin{vmatrix} W_{\delta_1-\beta_{1+p}+1}(1) & W_{\delta_1-\beta_{2+p}+1}(1) & \ldots W_{\delta_1-\beta_{q+p}+1}(1) \\ W_{\delta_2-\beta_{1+p}+1}(1) & W_{\delta_2-\beta_{2+p}+1}(1) & \ldots W_{\delta_2-\beta_{q+p}+1}(1) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ W_{\delta_q-\beta_{1+p}+1}(1) & W_{\delta_q-\beta_{2+p}+1}(1) & \ldots W_{\delta_q-\beta_{q+p}+1}(1) \end{vmatrix} \neq 0, \tag{2.3.6}$$

D_{ij} *– алгебраические дополнения к элементам матрицы определителя* (2.3.6), *стоящим на пересечении* i *-ой строки и* j *-го столбца, является функцией Грина задачи* (2.0.1), (2.3.1).

Замечание 2.3.1. Справедливы формулы разложения определителя (2.3.6) по строкам

$$\triangle = \sum_{j=1}^{q} W_{\delta_k-\beta_{j+p}+1}(1)D_{kj}, \quad k=\overline{1,q} \tag{2.3.7}$$

и по столбцам

$$\triangle = \sum_{j=1}^{q} W_{\delta_j-\beta_{k+p}+1}(1)D_{jk}, \quad k=\overline{1,q}. \tag{2.3.8}$$

Доказательство. Для доказательства леммы 2.3.1 покажем, что функция $G(t,\xi)$ удовлетворяет свойствам 1-4.

Справедливость первого свойства следует из представления функции $G(t,\xi)$ и условия (2.3.6).

Для доказательства свойства (2.3.2) вычислим $D_{0t}^{\alpha-n}\frac{\partial^{n-1}}{\partial\xi^{n-1}}G(t,\xi)$ используя представление функции $G(t,\xi)$ (2.3.5) и свойства функции $W_\nu(t)$ (1.1.6) и (1.1.7):

$$D_{0t}^{\alpha-n}\frac{\partial^{n-1}}{\partial\xi^{n-1}}G(t,\xi) = (-1)^{n-1}H(t-\xi)W_1(t-\xi) - \frac{(-1)^{n-1}}{\triangle}\sum_{s=1}^{q} W_{n-\beta_{s+p}+1}(t)\times$$

$$\times\sum_{j=1}^{q} D_{js}[\lambda W_{\alpha-n+\delta_j+1}(1-\xi) + \mu W_{\alpha-n+\delta_j+1}(1-\xi-\tau)].$$

Подставляя полученное выражение в левую часть соотношения (2.3.2) и учитывая (1.1.9), получаем, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[D_{0t}^{\alpha-n}\frac{\partial^{n-1}}{\partial\xi^{n-1}}G(t,\xi)\Big|_{\xi=t-\varepsilon} - D_{0t}^{\alpha-n}\frac{\partial^{n-1}}{\partial\xi^{n-1}}G(t,\xi)\Big|_{\xi=t+\varepsilon}\right] =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}(-1)^{n-1}W_1(\varepsilon) = (-1)^{n-1}.$$

Далее, для доказательства третьего свойства (2.3.3) вычислим $\partial^{\alpha}_{1\xi}G(t,\xi)$ используя определение производной Герасимова – Капуто:

$$\partial^{\alpha}_{1\xi}G(t,\xi)=(-1)^n D^{\alpha-n}_{1\xi}\frac{\partial^n}{\partial\xi^n}G(t,\xi)=$$

$$=(-1)^n D^{\alpha-n}_{1\xi}\Big\{(-1)^n H(t-\xi)[\lambda W_{2\alpha-n}(t-\xi)+\mu W_{2\alpha-n}(t-\xi-\tau)]-$$

$$-\frac{(-1)^n}{\triangle}\sum_{s=1}^{q}W_{\alpha-\beta_{s+p}+1}(t)\sum_{j=1}^{q}D_{js}\Big[\lambda W_{\alpha+\delta_j-n}(1-\xi)+\mu W_{\alpha+\delta_j-n}(1-\xi-\tau)\Big]\Big\}=$$

$$=H(t-\xi)[\lambda W_{\alpha}(t-\xi)+\mu W_{\alpha}(t-\xi-\tau)]-\frac{1}{\triangle}\sum_{s=1}^{q}W_{\alpha-\beta_{s+p}+1}(t)\times$$

$$\times\sum_{j=1}^{q}D_{js}\Big[\lambda W_{\delta_j}(1-\xi)+\mu W_{\delta_j}(1-\xi-\tau)\Big].$$

Из последнего соотношения, группируя слагаемые с λ и μ (с учетом (2.3.5)), приходим к свойству (2.3.3).

Справедливость условий (2.3.4) для функции $G(t,\xi)$ также следует из представления $G(t,\xi)$ и свойств функции $W_{\nu}(t)$ (1.1.6) – (1.1.9).

Покажем справедливость свойств (2.3.4):

$$D^{\alpha-n}_{0t}\frac{\partial^{\delta_k-1}}{\partial\xi^{\delta_k-1}}G(t,\xi)\Big|_{\xi=1}=-\frac{(-1)^{\delta_k-1}}{\triangle}\sum_{s=1}^{q}W_{n-\beta_{s+p}+1}(t)\sum_{j=1}^{q}W_{\delta_j-\delta_k+1}(0)D_{js},$$

откуда, ввиду свойства (1.1.9) функции $W_{\nu}(t)$ приходим к справедливости второго из условий (2.3.4). Доказательство первого свойства проводится аналогично, используя (1.1.6) – (1.1.9) и замечание 2.3.1.

□

Справедлива теорема:

Теорема 2.3.1. *Пусть функция* $f(t)\in C(0,1)\cap L(0,1)$ *и выполнено условие* (2.3.6). *Тогда:*

решение задачи (2.0.1), (2.3.1) *существует, единственно и имеет вид*

$$u(t)=\sum_{i=1}^{p}(-1)^{\beta_i-1}a_i\frac{\partial^{\beta_i-1}}{\partial\xi^{\beta_i-1}}G(t,\xi)\Big|_{\xi=0}-$$

$$-\sum_{j=1}^{q}(-1)^{\delta_j-1}b_j\frac{\partial^{\delta_j-1}}{\partial\xi^{\delta_j-1}}G(t,\xi)\Big|_{\xi=1}+\int_0^1 f(\xi)G(t,\xi)d\xi;\quad (2.3.9)$$

решение задачи (2.0.1), (2.3.1) *единственно тогда и только тогда, когда выполнено условие* (2.3.6).

Доказательство. Покажем, что решение задачи (2.0.1), (2.3.1) имеет вид (2.3.9). Домножим уравнение (2.0.1) на $D_{0t}^{\alpha-n}G(t,\xi)$ и проинтегрируем по ξ, меняющейся от ε до $1-\varepsilon$ ($\varepsilon\to 0$):

$$\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} D_{0t}^{\alpha-n}G(t,\xi)D_{0\xi}^{\alpha}u(\xi)d\xi-\lambda\int_\varepsilon^{1-\varepsilon}u(\xi)D_{0t}^{\alpha-n}G(t,\xi)d\xi-$$

$$-\mu\int_\varepsilon^{1-\varepsilon}H(\xi-\tau)u(\xi-\tau)D_{0t}^{\alpha-n}G(t,\xi)d\xi=\int_\varepsilon^{1-\varepsilon}f(\xi)D_{0t}^{\alpha-n}G(t,\xi)d\xi.\qquad (2.3.10)$$

Вычислим первый интеграл в правой части равенства (2.3.10). После интегрирования $n-1$ раз по частям, имеем:

$$\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} D_{0t}^{\alpha-n}G(t,\xi)D_{0\xi}^{\alpha}u(\xi)d\xi=\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}D_{0t}^{\alpha-n}\frac{\partial^{k-1}}{\partial\xi^{k-1}}G(t,\xi)D_{0\xi}^{\alpha-k}u(\xi)\Big|_0^1+$$

$$+(-1)^{n-1}\int_\varepsilon^{1-\varepsilon}D_{0t}^{\alpha-n}\frac{\partial^{n-1}}{\partial\xi^{n-1}}G(t,\xi)D_{0\xi}^{\alpha-n+1}u(\xi)d\xi.$$

Далее, разбивая последний интеграл на два интеграла от ε до $t-\varepsilon$ и от $t+\varepsilon$ до $1-\varepsilon$, и интегрируя их по частям, получаем:

$$\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} D_{0t}^{\alpha-n}G(t,\xi)D_{0\xi}^{\alpha}u(\xi)d\xi=\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}D_{0t}^{\alpha-n}\frac{\partial^{k-1}}{\partial\xi^{k-1}}G(t,\xi)D_{0\xi}^{\alpha-k}u(\xi)\Big|_0^1+$$

$$+(-1)^{n-1}\Bigg[D_{0t}^{\alpha-n}\frac{\partial^{n-1}}{\partial\xi^{n-1}}G(t,\xi)D_{0\xi}^{\alpha-n}u(\xi)\Big|_\varepsilon^{t-\varepsilon}+D_{0t}^{\alpha-n}\frac{\partial^{n-1}}{\partial\xi^{n-1}}G(t,\xi)D_{0\xi}^{\alpha-n}u(\xi)\Big|_{t+\varepsilon}^{1-\varepsilon}\Bigg]+$$

$$+(-1)^n \int\limits_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} D_{0t}^{\alpha-n} \frac{\partial^n}{\partial \xi^n} G(t,\xi) D_{0\xi}^{\alpha-n} u(\xi) d\xi,$$

откуда, используя формулу дробного интегрирования по частям (0.17), определение производной Герасимова – Капуто (0.21), свойство (2.3.2) функции $G(t,\xi)$ и условия задачи (2.3.1), имеем:

$$\int\limits_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} D_{0t}^{\alpha-n} G(t,\xi) D_{0\xi}^{\alpha} u(\xi) d\xi = \int\limits_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} u(\xi) D_{0t}^{\alpha-n} \partial_{1\xi}^{\alpha} G(t,\xi) d\xi +$$

$$+D_{0t}^{\alpha-n} u(t) + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} D_{0t}^{\alpha-n} \frac{\partial^{k-1}}{\partial \xi^{k-1}} G(t,\xi) D_{0\xi}^{\alpha-k} u(\xi) \Big|_0^1,$$

или (с учетом условий задачи (2.3.1))

$$\int\limits_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} D_{0t}^{\alpha-n} G(t,\xi) D_{0\xi}^{\alpha} u(\xi) d\xi = \int\limits_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} u(\xi) D_{0t}^{\alpha-n} \partial_{1\xi}^{\alpha} G(t,\xi) d\xi +$$

$$+ D_{0t}^{\alpha-n} u(t) + \sum_{j=1}^{q} (-1)^{\delta_j-1} b_j D_{0t}^{\alpha-n} \frac{\partial^{\delta_j-1}}{\partial \xi^{\delta_j-1}} G(t,\xi) \Big|_{\xi=1} +$$

$$+ \sum_{k=q+1}^{n} (-1)^{\delta_k-1} D_{0t}^{\alpha-n} \frac{\partial^{\delta_k-1}}{\partial \xi^{\delta_k-1}} G(t,\xi) D_{0\xi}^{\alpha-\delta_k} u(\xi) \Big|_{\xi=1} -$$

$$- \sum_{i=1}^{p} (-1)^{\beta_i-1} a_i D_{0t}^{\alpha-n} \frac{\partial^{\beta_i-1}}{\partial \xi^{\beta_i-1}} G(t,\xi) \Big|_{\xi=0} -$$

$$- \sum_{k=p+1}^{n} (-1)^{\beta_k-1} D_{0t}^{\alpha-n} \frac{\partial^{\beta_k-1}}{\partial \xi^{\beta_k-1}} G(t,\xi) D_{0\xi}^{\alpha-\beta_k} u(\xi) \Big|_{\xi=0}.$$

Подставляя последнее выражение в (2.3.10) и действуя оператором $D_{0t}^{n-\alpha}$ (с учетом свойств $G(t,\xi)$ (2.3.3) и (2.3.4)), приходим к виду (2.3.9).

Докажем, что функция (2.3.9) удовлетворяет уравнению (2.0.1). Для этого используя определение функции Грина (2.3.5) запишем (2.3.9) в виде

$$u(t) = \int\limits_0^t f(\xi) W_\alpha(t-\xi) d\xi + P_1(t) + P_2(t),$$

где

$$P_1(t) = -\frac{1}{\triangle}\int\limits_0^1 f(\xi)\sum_{j=1}^{q} W_{\delta_j}(1-\xi)\sum_{s=1}^{q} D_{js}W_{\alpha-\beta_{s+p}+1}(t)d\xi,$$

$$P_2(t) = \sum_{i=1}^{p} a_i\left[W_{\alpha-\beta_i+1}(t) - \frac{1}{\triangle}\sum_{j=1}^{q} W_{\delta_j-\beta_i+1}(1)\sum_{s=1}^{q} D_{js}W_{\alpha-\beta_{s+p}+1}(t)\right] +$$

$$+\frac{1}{\triangle}\sum_{j=1}^{q} b_j\sum_{s=1}^{q} D_{js}W_{\alpha-\beta_{s+p}+1}(t).$$

Используя формулу дробного интегрирования по частям (0.17), свойства дифференцирования (1.1.6) и автотрансформации (1.1.7) функции $W_\nu(t)$, имеем:

$$D_{0t}^{\alpha}\int\limits_0^t f(\xi)W_\alpha(t-\xi)d\xi = \frac{d}{dt}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}D_{0t}^{\alpha-n}\int\limits_0^t f(\xi)W_\alpha(t-\xi)d\xi =$$

$$= \frac{d}{dt}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\int\limits_0^t f(\xi)W_n(t-\xi)d\xi = \frac{d}{dt}\int\limits_0^t f(\xi)W_1(t-\xi)d\xi.$$

Так как $f(t)\in L(0,1)\cap C(0,1)$, из последнего выражения получаем:

$$f(t) + \lambda\int\limits_0^t f(\xi)\frac{d}{dt}\Big(\lambda W_{\alpha+1}(t-\xi) + \mu W_{\alpha+1}(t-\xi-\tau)\Big)d\xi =$$

$$= f(t) + \lambda\int\limits_0^t f(\xi)W_\alpha(t-\xi)d\xi + \mu\int\limits_0^{t-\tau} f(\xi)W_\alpha(t-\xi-\tau)d\xi.$$

Найдем далее $D_{0t}^{\alpha}P_1(t)$ и $D_{0t}^{\alpha}P_2(t)$:

$$D_{0t}^{\alpha}P_1(t) = -\frac{1}{\triangle}\int\limits_0^1 f(\xi)\sum_{j=1}^{q} W_{\delta_j}(1-\xi)\times$$

$$\times D_{0t}^{\alpha}\sum_{s=1}^{q} D_{js}\left(\lambda W_{2\alpha-\beta_{s+p}+1}(t) + \mu W_{2\alpha-\beta_{s+p}+1}(t-\tau) + \frac{t^{\alpha-\beta_{s+p}}}{\Gamma(\alpha-\beta_{s+p}+1)}\right)d\xi =$$

$$= -\frac{1}{\triangle}\int_0^1 f(\xi)\sum_{j=1}^{q} W_{\delta_j}(1-\xi)\sum_{s=1}^{q} D_{js}\left(\lambda W_{\alpha-\beta_{s+p}+1}(t)+\mu W_{\alpha-\beta_{s+p}+1}(t-\tau)\right)d\xi =$$
$$= \lambda P_1(t)+\mu P_1(t-\tau),$$

и

$$D_{0t}^{\alpha}P_2(t) = \frac{1}{\triangle}D_{0t}^{\alpha}\sum_{j=1}^{q} b_j\sum_{s=1}^{q} D_{js}W_{\alpha-\beta_{s+p}+1}(t)+$$

$$+D_{0t}^{\alpha}\sum_{i=1}^{p} a_i\left[W_{\alpha-\beta_i+1}(t)-\frac{1}{\triangle}\sum_{j=1}^{q} W_{\delta_j-\beta_i+1}(1)\sum_{s=1}^{q} D_{js}W_{\alpha-\beta_{s+p}+1}(t)\right]=$$

$$=\frac{1}{\triangle}\sum_{j=1}^{q} b_j\sum_{s=1}^{q} D_{js}\left(\lambda W_{\alpha-\beta_{s+p}+1}(t)+\mu W_{\alpha-\beta_{s+p}+1}(t-\tau)\right)+$$

$$+\sum_{i=1}^{p} a_i\Big[\left(\lambda W_{\alpha-\beta_i+1}(t)+\mu W_{\alpha-\beta_i+1}(t-\tau)\right)-$$

$$-\frac{1}{\triangle}\sum_{j=1}^{q} W_{\delta_j-\beta_i+1}(1)\sum_{s=1}^{q} D_{js}(\lambda W_{\alpha-\beta_{s+p}+1}(t)+\mu W_{\alpha-\beta_{s+p}+1}(t-\tau))\Big]=$$
$$=\lambda P_2(t)+\mu P_2(t-\tau).$$

Получили, что функция (2.3.9) удовлетворяет уравнению (2.0.1). Проверим, что решение задачи удовлетворяет краевым условиям.

Используя формулу дифференцирования функции $W_\nu(t)$ (1.1.6), а также (1.1.9), имеем, что

$$D_{0t}^{\alpha-\beta_i}u(t)\Big|_{t=0}=\sum_{k=1}^{p} a_k\left[W_{\beta_i-\beta_k+1}(0)-\frac{1}{\triangle}\sum_{j=1}^{q} W_{\delta_j-\beta_k+1}(1)\sum_{s=1}^{q} D_{js}W_{\beta_i-\beta_{s+p}+1}(0)\right].$$

Так как произведение элементов любого столбца определителя на алгебраические дополнения элементов другого столбца равно нулю [18, с. 54], при $k=i$ $W_{\beta_i-\beta_s+1}(0)=W_1(0)=1$, и при $k\neq i$ $W_{\beta_i-\beta_s+1}(0)=0$, то

$$D_{0t}^{\alpha-\beta_i}u(t)\Big|_{t=0}=a_i.$$

Найдем далее значение $D_{0t}^{\alpha-\delta_j}u(t)$ при $t=1$. Справедливость второго условия покажем используя формулу разложения определителя (2.3.6) по столбцам (2.3.8) и свойство определителя о произведении элементов столбца на алгебраические дополнения элементов другого столбца. Получим:

$$D_{0t}^{\alpha-\delta_j}u(t)\Big|_{t=1} = \sum_{k=1}^{q} b_k \sum_{s=1}^{q} D_{ks} W_{\delta_j-\beta_{s+p}+1}(1),$$

откуда, при $k=j$, приходим ко второму условию (2.3.1). □

В случае $1<\alpha\leq 2$ задача Дирихле для уравнения (2.0.1) ставится следующим образом [101]:

Задача 2.3.2. *Найти регулярное решение* $u(t)$ *уравнения* (2.0.1), *удовлетворяющее условиям*

$$\lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha-2}u(t)=a, \qquad \lim_{t\to 1} D_{0t}^{\alpha-2}u(t)=b. \tag{2.3.11}$$

Справедлива теорема существования и единственности решения задачи (2.0.1), (2.3.11).

Теорема 2.3.2. *Пусть* $f(t)\in L(0,1)\cap C(0,1)$ *и выполнено условие*

$$W_2(1)\neq 0.$$

Тогда решение задачи (2.0.1), (2.3.11) *существует и имеет вид*

$$u(t) = -aG_{\xi}(t,0) + bG_{\xi}(t,1) + \int_0^1 f(\xi)G(t,\xi)d\xi. \tag{2.3.12}$$

Решение задачи (2.0.1), (2.3.11) *единственно тогда и только тогда, когда выполнено условие* $W_2(1)\neq 0$.

В решении (2.3.12) функция $G(t,\xi)$ определяется соотношением

$$G(t,\xi) = H(t-\xi)W_{\alpha}(t-\xi) - \frac{W_{\alpha}(t)}{W_2(1)}W_2(1-\xi), \tag{2.3.13}$$

и является функцией Грина задачи (2.0.1), (2.3.11).

Замечание 2.3.2. При

$$\lambda>0, \quad \mu>0 \tag{2.3.14}$$

функция (1.1.1) положительна. Значит, условие (2.3.14) обеспечивает выполнение условия $W_2(1)\neq 0$.

Замечание 2.3.3. При $\lambda = 0$ условие разрешимости $W_2(1) \neq 0$ примет вид

$$\sum_{s=0}^{N} \frac{\mu^s (1 - s\tau)_+^{\alpha s+1}}{\Gamma(\alpha s + 2)} \neq 0 \tag{2.3.15}$$

и заведомо выполняется при $\mu \geq 0$. Из того, что ряд (1.1.1) конечный следует, что (2.3.15) может нарушаться лишь для конечного числа μ.

В случае $1 < \alpha \leq 2$ задача Неймана для уравнения (2.0.1) ставится следующим образом [101]:

Задача 2.3.3. *Найти регулярное решение $u(t)$ уравнения* (2.0.1), *удовлетворяющее условиям*

$$\lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha-1} u(t) = a, \qquad \lim_{t\to 1} D_{0t}^{\alpha-1} u(t) = b, \tag{2.3.16}$$

где a, b – заданные постоянные.

Справедлива теорема существования и единственности решения задачи (2.0.1), (2.3.16).

Теорема 2.3.3. *Пусть $f(t) \in L(0,1) \cap C(0,1)$ и выполнено условие*

$$\lambda W_\alpha(1) + \mu W_\alpha(1-\tau) \neq 0.$$

Тогда решение задачи (2.0.1), (2.3.16) *существует и имеет вид*

$$u(t) = aQ(t,0) - bQ(t,1) + \int_0^1 f(\xi) Q(t,\xi) d\xi. \tag{2.3.17}$$

Решение задачи (2.0.1), (2.3.16) *единственно тогда и только тогда, когда выполнено условие $\lambda W_\alpha(1) + \mu W_\alpha(1-\tau) \neq 0$.*

В решении (2.3.17) функция $Q(t,\xi)$ определяется соотношением

$$Q(t,\xi) = H(t-\xi) W_\alpha(t-\xi) - \frac{W_{\alpha-1}(t)}{\lambda W_\alpha(1) + \mu W_\alpha(1-\tau)} W_1(1-\xi), \tag{2.3.18}$$

и является функцией Грина задачи (2.0.1), (2.3.16).

Замечание 2.3.4. При

$$\lambda > 0, \quad \mu > 0 \tag{2.3.19}$$

функция $W_\nu(t)$ (1.1.1) положительна. Значит, условие (2.3.19) обеспечивает выполнение условия $\lambda W_\alpha(1) + \mu W_\alpha(1-\tau) \neq 0$.

Замечание 2.3.5. При $\lambda = 0$ условие разрешимости $\lambda W_\alpha(1) + \mu W_\alpha(1-\tau) \neq 0$ примет вид

$$\sum_{s=0}^{N} \frac{\mu^{s+1}(1-(s+1)\tau)_+^{\alpha s+\alpha-1}}{\Gamma(\alpha s+\alpha)} \neq 0, \qquad (2.3.20)$$

и заведомо выполняется при $\mu > 0$. Из того, что ряд (1.1.1) конечный следует, что (2.3.20) может нарушаться лишь для конечного числа μ.

2.4 О вещественных собственных значениях

Здесь, для краевой задачи с условиями типа Штурма – Лиувилля при $1 < \alpha \leq 2$ (2.0.1), (2.2.1) исследуется вопрос о вещественных собственных значениях.

Определение 2.4.1. *Собственными значениями задачи* (2.0.1), (2.2.1) *назовем значения* λ, *при которых задача* (2.0.1), (2.2.1) *имеет регулярное решение, тождественно не равное нулю.*

Лемма 2.4.1. *Множество вещественных собственных значений задачи* (2.0.1), (2.2.1) *совпадает со множеством вещественных нулей функции*

$$\Phi(\lambda) \equiv ac(\lambda W_\alpha(1,\tau;\lambda,\mu) + \mu W_\alpha(1-\tau,\tau;\lambda,\mu)) +$$
$$+ (ad-bc)W_1(1,\tau;\lambda,\mu) - bdW_2(1,\tau;\lambda,\mu). \qquad (2.4.1)$$

Доказательство. Справедливость этой леммы следует из того, что согласно теореме 2.2.1, решение задачи (2.0.1), (2.2.1) единственно только при выполнении условия (2.2.6). Значит, вопрос существования собственных значений задачи (2.0.1), (2.2.1) эквивалентен вопросу существования вещественных нулей функции (2.4.1). □

Справедлива теорема:

Теорема 2.4.1. *Задача* (2.0.1), (2.2.1) *имеет лишь конечное число вещественных собственных значений.*

Доказательство. Ввиду свойства (1.1.3) функция $W_\nu(t)$ содержит конечное число слагаемых, поэтому $\Phi(\lambda)$ является целой функцией параметра λ. Исследуем ее свойства при $\lambda \to +\infty$ и $\lambda \to -\infty$.

Пусть N равно максимальному значению s, для которого выражение $(1-s\tau)>0$. Тогда асимптотическую формулу для формулы (2.4.1) получаем используя асимптотику функции $W_\nu(1)$ (1.4.1), которая неограниченно растет при $\lambda\to+\infty$.

При $\lambda\to-\infty$ из (1.4.3) и (1.4.2) имеем, что

$$\Phi(\lambda)=-ac\left[\frac{1}{|\lambda|\Gamma(-\alpha)}+\mu\frac{(1-\tau)^{-\alpha-1}}{|\lambda|^2\Gamma(-\alpha)}\right]+$$

$$+(ad-bc)\left[\frac{1}{|\lambda|\Gamma(1-\alpha)}-\frac{1}{|\lambda|^2\Gamma(1-2\alpha)}\right]-$$

$$-bd\left[\frac{1}{|\lambda|\Gamma(2-\alpha)}-\frac{1}{|\lambda|^2\Gamma(2-2\alpha)}\right]+O\big(|\lambda|^{-3}\big).$$

Перейдем к предельному соотношению

$$\lim_{\lambda\to-\infty}|\lambda|\Phi(\lambda)=\lim_{\lambda\to-\infty}\left\{-ac\left[\frac{1}{\Gamma(-\alpha)}+\mu\frac{(1-\tau)^{-\alpha-1}}{|\lambda|\Gamma(-\alpha)}\right]+\right.$$

$$\left.+(ad-bc)\left[\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}-\frac{1}{|\lambda|\Gamma(1-2\alpha)}\right]-bd\left[\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}-\frac{1}{|\lambda|\Gamma(2-2\alpha)}\right]\right\}=$$

$$=-ac\frac{1}{\Gamma(-\alpha)}+(ad-bc)\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}-bd\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}. \tag{2.4.2}$$

Так как $\Phi(\lambda)$ – целая функция, то из асимптотической формулы для $\Phi(\lambda)$ при $\lambda\to-\infty$ и соотношения (2.4.2) следует, что (2.4.1) может иметь только конечное число вещественных нулей. □

Замечание 2.4.1. При $\lambda=0$ условие (2.2.6) запишется в виде

$$\sum_{s=1}^{N}\mu^s\left[ac\frac{(1-s\tau)^{\alpha s-1}}{\Gamma(\alpha s)}+(ad-bc)\frac{(1-s\tau)^{\alpha s}}{\Gamma(\alpha s+1)}-bd\frac{(1-s\tau)^{\alpha s+1}}{\Gamma(\alpha s+2)}\right]+$$

$$+ac\mu^{N+1}\frac{(1-(N+1)\tau)^{\alpha(N+1)-1}}{\Gamma(\alpha(N+1))}\neq bc+bd-ad,$$

то есть условие (2.2.1) может нарушаться только для конечного числа значений μ.

Глава 3

Нелокальные краевые задачи

В этой главе для линейного обыкновенного дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом

$$D_{0t}^{\alpha}u(t) - \lambda u(t) - \mu H(t-\tau)u(t-\tau) = f(t), \quad 0 < t < 1, \tag{3.0.1}$$

где $D_{0t}^{\alpha}u(t)$ – дробная производная Римана – Лиувилля (0.14), $\alpha \in (1, 2]$, λ, μ – произвольные постоянные, $H(t)$ – функция Хевисайда, τ – фиксированное положительное число, исследуются нелокальные краевые задачи типа Стеклова первого и второго классов, а также нелокальная внутреннекраевая задача.

3.1 Задача типа Стеклова первого класса

Рассмотрим краевые условия общего вида

$$\begin{aligned} a_1 D_{0t}^{\alpha-2}u(t)\Big|_{t=0} + a_2 D_{0t}^{\alpha-1}u(t)\Big|_{t=0} + a_3 D_{0t}^{\alpha-2}u(t)\Big|_{t=1} + a_4 D_{0t}^{\alpha-1}u(t)\Big|_{t=1} = 0, \\ b_1 D_{0t}^{\alpha-2}u(t)\Big|_{t=0} + b_2 D_{0t}^{\alpha-1}u(t)\Big|_{t=0} + b_3 D_{0t}^{\alpha-2}u(t)\Big|_{t=1} + b_4 D_{0t}^{\alpha-1}u(t)\Big|_{t=1} = 0. \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

В случае выполнения условия

$$a_2 b_4 - a_4 b_2 \neq 0 \tag{3.1.2}$$

краевые условия (3.1.1) можно переписать в виде следующих условий [23],

[26], [41]

$$
\begin{aligned}
D_{0t}^{\alpha-1}u(t)\big|_{t=0} &= c_1 D_{0t}^{\alpha-2}u(t)\big|_{t=0} + c_2 D_{0t}^{\alpha-2}u(t)\big|_{t=1},\\
D_{0t}^{\alpha-1}u(t)\big|_{t=1} &= c_3 D_{0t}^{\alpha-2}u(t)\big|_{t=0} + c_4 D_{0t}^{\alpha-2}u(t)\big|_{t=1}.
\end{aligned} \tag{3.1.3}
$$

которые Стеклов В. А. отнес к первому классу нелокальных краевых условий [41], [42], [43]. В условиях (3.1.3) через c_1, c_2, c_3, c_4 обозначены следующие соотношения:

$$
\begin{aligned}
c_1 &= \frac{a_1b_2 - a_2b_1}{a_2b_4 - a_4b_2}, \quad c_2 = \frac{-a_2b_3 + a_3b_2}{a_2b_4 - a_4b_2},\\
c_3 &= \frac{-a_1b_4 + a_4b_1}{a_2b_4 - a_4b_2}, \quad c_4 = \frac{-a_3b_4 + a_4b_3}{a_2b_4 - a_4b_2}.
\end{aligned} \tag{3.1.4}
$$

Определение 3.1.1. *Регулярным решением уравнения* (3.0.1) *назовем функцию* $u(t)$ *из класса* $D_{0t}^{\alpha-2}u(t) \in C^2(0,1)$, $u(t) \in L(0,1)$ *и удовлетворяющую этому уравнению для всех* $t \in (0,1)$.

В этом пункте будем исследовать задачу:

Задача 3.1.1. *Найти регулярное решение уравнения* (3.0.1), *удовлетворяющее условиям* (3.1.3).

Определение 3.1.2. *Функцией Грина задачи* (3.0.1), (3.1.3) *назовем функцию* $G(t,\xi)$, *удовлетворяющую свойствам:*

1. *Функция* $G(t,\xi)$ *непрерывна для всех* t *и* ξ *из отрезка* $[0,1]$;
2. *Функция* $G(t,\xi)$ *удовлетворяет соотношению*

$$
\lim_{\varepsilon\to 0}[D_{0t}^{\alpha-2}G_\xi(t,\xi)|_{\xi=t+\varepsilon} - D_{0t}^{\alpha-2}G_\xi(t,\xi)|_{\xi=t-\varepsilon}] = 1; \tag{3.1.5}
$$

3. *Функция* $G(t,\xi)$ *является решением уравнения*

$$
\partial_{1\xi}^{\alpha}G(t,\xi) - \lambda G(t,\xi) - \mu H(1-\tau-\xi)G(t,\xi+\tau) = 0 \tag{3.1.6}
$$

в интервалах $(0,t)$ *и* $(t,1)$;

4. *Функция* $G(t,\xi)$ *удовлетворяет условиям*

$$
\begin{cases}
D_{0t}^{\alpha-2}G_\xi(t,\xi)\big|_{\xi=0} = c_1 D_{0t}^{\alpha-2}G(t,\xi)\big|_{\xi=0} - c_3 D_{0t}^{\alpha-2}G(t,\xi)\big|_{\xi=1},\\
D_{0t}^{\alpha-2}G_\xi(t,\xi)\big|_{\xi=1} = -c_2 D_{0t}^{\alpha-2}G(t,\xi)\big|_{\xi=0} + c_4 D_{0t}^{\alpha-2}G(t,\xi)\big|_{\xi=1}.
\end{cases} \tag{3.1.7}
$$

Лемма 3.1.1. *Функция*

$$G(t,\xi)=H(t-\xi)W_\alpha(t-\xi)+\frac{W_\alpha(t)}{\triangle}\Big[A_2W_1(1-\xi)-W_2(1-\xi)[c_4A_2+c_2B_2]\Big]-$$

$$-\frac{W_{\alpha-1}(t)}{\triangle}\Big[A_1W_1(1-\xi)-W_2(1-\xi)[c_4A_1+c_2B_1]\Big],\quad(3.1.8)$$

определенная для тех λ *и* μ, *для которых выполняется условие*

$$\triangle=A_1B_2-A_2B_1\neq 0,\quad(3.1.9)$$

является функцией Грина задачи (3.0.1), (3.1.3).

В соотношениях (3.1.8) и (3.1.9) коэффициенты A_i, B_i, $i=1,2$, определены формулами

$$A_1=c_2W_2(1)-1,\quad A_2=c_2W_1(1)+c_1,\quad(3.1.10)$$

$$B_1=W_1(1)-c_4W_2(1),\quad B_2=\lambda W_\alpha(1)+\mu W_\alpha(1-\tau)-c_4W_1(1)-c_3.\quad(3.1.11)$$

Доказательство. Из представления функции $G(t,\xi)$ и условия (3.1.9) следует справедливость свойства 1.

Для доказательства свойства 2 определим сначала $D_{0t}^{\alpha-2}G_\xi(t,\xi)$:

$$D_{0t}^{\alpha-2}G_\xi(t,\xi)=-H(t-\xi)W_1(t-\xi)-$$

$$-\frac{W_2(t)}{\triangle}\Big(A_2[\lambda W_\alpha(1-\xi)+\mu W_\alpha(1-\xi-\tau)]-[c_4A_2+c_2B_2]W_1(1-\xi)\Big)+$$

$$+\frac{W_1(t)}{\triangle}\Big(A_1[\lambda W_\alpha(1-\xi)+\mu W_\alpha(1-\xi-\tau)]-[c_4A_1+c_2B_1]W_1(1-\xi)\Big)$$

и подставим в (3.1.5) при $\xi=t+\varepsilon$ и $\xi=t-\varepsilon$ при $\varepsilon\to 0$. Получаем:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}[D_{0t}^{\alpha-2}G_\xi(t,\xi)|_{\xi=t+\varepsilon}-D_{0t}^{\alpha-2}G_\xi(t,\xi)|_{\xi=t-\varepsilon}]=W_1(0)=1.$$

Далее, из определения оператора Герасимова – Капуто (0.21) и представления функции $G(t,\xi)$, а также свойств (1.1.6) и (1.1.7) функции $W_\nu(t)$ находим

$$D_{1\xi}^{\alpha-2}G_{\xi\xi}(t,\xi)=H(t-\xi)[\lambda W_\alpha(t-\xi)+\mu W_\alpha(t-\xi-\tau)]+$$

$$+\frac{W_\alpha(t)}{\triangle}\Big(A_2[\lambda W_1(1-\xi)+\mu W_1(1-\xi-\tau)]-$$

$$-[c_4A_2+c_2B_2][\lambda W_2(1-\xi)+\mu W_2(1-\xi-\tau)]\Big)-$$

$$-\frac{W_{\alpha-1}(t)}{\triangle}\Big(A_1[\lambda W_1(1-\xi)+\mu W_1(1-\xi-\tau)]-$$

$$-[c_4A_1+c_2B_1][\lambda W_2(1-\xi)+\mu W_2(1-\xi-\tau)]\Big)=\lambda G(t,\xi)+\mu G(t,\xi+\tau).$$

Свойство (3.1.7) доказывается используя представление функции $G(t,\xi)$ и свойства функции $W_\nu(t)$. Найдем сначала значение $D_{0t}^{\alpha-2}G(t,\xi)$ при $\xi=0$ и $\xi=1$. Используя обозначения (3.1.10) и (3.1.11) получаем, что

$$D_{0t}^{\alpha-2}G(t,\xi)\Big|_{\xi=0}=W_2(t)+\frac{W_2(t)}{\triangle}\Big[A_2W_1(1)-W_2(1)[c_4A_2+c_2B_2]\Big]-$$

$$-\frac{W_1(t)}{\triangle}\Big[A_1W_1(1)-W_2(1)[c_4A_1+c_2B_1]\Big]=\frac{W_1(t)}{\triangle}B_1-\frac{W_2(t)}{\triangle}B_2;$$

$$D_{0t}^{\alpha-2}G(t,\xi)\Big|_{\xi=1}=-\frac{W_1(t)}{\triangle}A_1+\frac{W_2(t)}{\triangle}A_2.$$

Аналогично найдем значение $D_{0t}^{\alpha-2}G_\xi(t,\xi)$ при $\xi=0$ и $\xi=1$:

$$D_{0t}^{\alpha-2}G_\xi(t,\xi)\Big|_{\xi=0}=\frac{W_1(t)}{\triangle}\Big(c_3A_1+c_1B_1\Big)-\frac{W_2(t)}{\triangle}\Big(c_3A_2+c_1B_2\Big);$$

$$D_{0t}^{\alpha-2}G_\xi(t,\xi)\Big|_{\xi=1}=-\frac{W_1(t)}{\triangle}\Big(c_4A_1+c_2B_1)+\frac{W_2(t)}{\triangle}\Big(c_4A_2+c_2B_2\Big).$$

Подставляя полученные выражения в свойства (3.1.7) и группируя соответсвующие слагаемые приходим к тождеству.

□

Имеет место теорема.

Теорема 3.1.1. *Пусть функция* $f(t)\in L(0,1)\cap C(0,1)$ *и выполнено условие* (3.1.9).

Тогда регулярное решение задачи (3.0.1), (3.1.3) *существует и имеет вид*

$$u(t) = \int\limits_0^1 f(\xi)G(t,\xi)d\xi. \tag{3.1.12}$$

Решение задачи (3.0.1), (3.1.3) *единственно тогда и только тогда, когда выполнено условие* (3.1.9).

Доказательство. Покажем справедливость представления решения задачи (3.0.1), (3.1.3) в виде (3.1.12). Домножим обе части уравнения (3.0.1) на $D_{0t}^{\alpha-2}G(t,\xi)$ и проинтегрируем по ξ, меняющейся от ε до $1-\varepsilon$ ($\varepsilon \to 0$):

$$\int\limits_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} D_{0t}^{\alpha-2}G(t,\xi)D_{0\xi}^{\alpha}u(\xi)d\xi - \lambda\int\limits_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} u(\xi)D_{0t}^{\alpha-2}G(t,\xi)d\xi -$$

$$-\mu\int\limits_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} H(t-\tau)u(\xi-\tau)D_{0t}^{\alpha-2}G(t,\xi)d\xi = \int\limits_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} f(\xi)D_{0t}^{\alpha-2}G(t,\xi)d\xi. \tag{3.1.13}$$

Вычислим первый интеграл левой части равенства (3.1.13):

$$I = \int\limits_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} D_{0t}^{\alpha-2}G(t,\xi)D_{0\xi}^{\alpha}u(\xi)d\xi = D_{0t}^{\alpha-2}G(t,\xi)D_{0\xi}^{\alpha-1}u(\xi)\Big|_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} -$$

$$-\int\limits_{\varepsilon}^{t-\varepsilon} D_{0t}^{\alpha-2}G_{\xi}(t,\xi)D_{0\xi}^{\alpha-1}u(\xi)d\xi - \int\limits_{t+\varepsilon}^{1-\varepsilon} D_{0t}^{\alpha-2}G_{\xi}(t,\xi)D_{0\xi}^{\alpha-1}u(\xi)d\xi.$$

Интегрируя еще раз по частям интегралы в последнем выражении получаем:

$$I = D_{0t}^{\alpha-2}G(t,\xi)D_{0\xi}^{\alpha-1}u(\xi)\Big|_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} - D_{0t}^{\alpha-2}G_{\xi}(t,\xi)D_{0\xi}^{\alpha-2}u(\xi)\Big|_{\varepsilon}^{t-\varepsilon} -$$

$$-D_{0t}^{\alpha-2}G_{\xi}(t,\xi)D_{0\xi}^{\alpha-2}u(\xi)\Big|_{t+\varepsilon}^{1-\varepsilon} + \int\limits_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} D_{0t}^{\alpha-2}G_{\xi\xi}(t,\xi)D_{0\xi}^{\alpha-2}u(\xi)d\xi.$$

Учитывая краевые условия задачи (3.1.3) перепишем полученное соотношение в виде:

$$\int\limits_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} D_{0t}^{\alpha-2}G(t,\xi)D_{0\xi}^{\alpha}u(\xi)d\xi = \int\limits_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} D_{0t}^{\alpha-2}G_{\xi\xi}(t,\xi)D_{0\xi}^{\alpha-2}u(\xi)d\xi +$$

$$+D_{0t}^{\alpha-2}u(t)\left[D_{0t}^{\alpha-2}G_{\xi}(t,\xi)\Big|_{t+\varepsilon}-D_{0t}^{\alpha-2}G_{\xi}(t,\xi)\Big|_{t-\varepsilon}\right]+$$

$$+D_{0\xi}^{\alpha-2}u(\xi)\Big|_{\xi=0}\times$$

$$\times\left[D_{0t}^{\alpha-2}G_{\xi}(t,\xi)\Big|_{\xi=\varepsilon}-c_1D_{0t}^{\alpha-2}G(t,\xi)\Big|_{\xi=\varepsilon}+c_3D_{0t}^{\alpha-2}G(t,\xi)\Big|_{\xi=1-\varepsilon}\right]-$$

$$-D_{0\xi}^{\alpha-2}u(\xi)\Big|_{\xi=1}\times$$

$$\times\left[D_{0t}^{\alpha-2}G_{\xi}(t,\xi)\Big|_{\xi=1-\varepsilon}+c_2D_{0t}^{\alpha-2}G(t,\xi)\Big|_{\xi=\varepsilon}-c_4D_{0t}^{\alpha-2}G(t,\xi)\Big|_{\xi=1-\varepsilon}\right].$$

Применяя к последнему выражению свойства функции Грина (3.1.5) и (3.1.7), приходим к равенству

$$\int\limits_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}D_{0t}^{\alpha-2}G(t,\xi)D_{0\xi}^{\alpha}u(\xi)d\xi=D_{0t}^{\alpha-2}u(t)+\int\limits_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}D_{0t}^{\alpha-2}G_{\xi\xi}(t,\xi)D_{0\xi}^{\alpha-2}u(\xi)d\xi. \qquad (3.1.14)$$

В третьем интеграле левой части равенства (3.1.13) заменим $\xi-\tau$ на ξ. Получим:

$$\int\limits_0^1 H(\xi-\tau)u(\xi-\tau)G(t,\xi)d\xi=\int\limits_0^1 H(1-\tau-\xi)u(\xi)G(t,\xi+\tau)d\xi. \qquad (3.1.15)$$

Подставляя (3.1.14) и (3.1.15) в уравнение (3.1.13) (используя формулу дробного интегрирования по частям (0.17)) имеем равенство

$$D_{0t}^{\alpha-2}u(t)+D_{0t}^{\alpha-2}\int\limits_0^1 u(\xi)\left[D_{1\xi}^{\alpha}G_{\xi\xi}(t,\xi)-\lambda G(t,\xi)-\right.$$

$$\left.-\mu H(1-t-\xi)G(t,\xi+\tau)\right]d\xi=D_{0t}^{\alpha-2}\int\limits_0^1 f(\xi)G(t,\xi)d\xi,$$

действуя на которое оператором $D_{0t}^{2-\alpha}$ (принимая во внимание свойство (3.1.6) функции Грина) приходим к решению (3.1.12).

Далее покажем, что функция (3.1.12) является решением уравнения (3.0.1).

Решение задачи (3.1.12) запишем в следующем виде:

$$u(t) = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3,$$

где

$$\nu_1 = \int\limits_0^t f(\xi) W_\alpha(t-\xi)d\xi, \quad \nu_2 = \frac{A_1B_3 - A_3B_1}{\triangle} W_{\alpha-1}(t), \quad \nu_3 = \frac{A_3B_2 - A_2B_3}{\triangle} W_\alpha(t),$$

$$A_3 = -c_2 \int\limits_0^1 f(\xi) W_2(1-\xi)d\xi, \quad B_3 = \int\limits_0^1 f(\xi)[c_4 W_2(1-\xi) - W_1(1-\xi)]d\xi,$$

A_1, A_2, B_1, B_2 определены равенствами (3.1.10) и (3.1.11).

Вычислим $D_{0t}^\alpha \nu_1$, $D_{0t}^\alpha \nu_2$ и $D_{0t}^\alpha \nu_3$. Используя принадлежность функции $f(t)$ к классу $L(0,1) \cap C(0,1)$, а также свойства функции $W_\nu(t)$, имеем:

$$D_{0t}^\alpha \nu_1 = \frac{d}{dt} D_{0t}^{\alpha-1} \int\limits_0^t f(\xi) W_\alpha(t-\xi)d\xi = \frac{d}{dt} \int\limits_0^t f(\xi) W_1(t-\xi)d\xi =$$

$$= \int\limits_0^t f(\xi) \frac{d}{dt}(\lambda W_{\alpha+1}(t-\xi) + \mu W_{\alpha+1}(t-\xi-\tau))d\xi + f(t) =$$

$$= \int\limits_0^t f(\xi)(\lambda W_\alpha(t-\xi) + \mu W_\alpha(t-\xi-\tau))d\xi + f(t);$$

$$D_{0t}^\alpha \nu_2 = \frac{A_1B_3 - A_3B_1}{\triangle} \frac{d^2}{dt^2} D_{0t}^{\alpha-2} W_{\alpha-1}(t) = \frac{A_1B_3 - A_3B_1}{\triangle} \frac{d^2}{dt^2} W_1(t) =$$

$$= \frac{A_1B_3 - A_3B_1}{\triangle} \frac{d^2}{dt^2}(\lambda W_{\alpha+1}(t) + \mu W_{\alpha+1}(t-\tau)) =$$

$$= \frac{A_1B_3 - A_3B_1}{\triangle} (\lambda W_{\alpha-1}(t) + \mu W_{\alpha-1}(t-\tau));$$

$$D_{0t}^{\alpha}\nu_3 = \frac{A_3B_2 - A_2B_3}{\triangle}\frac{d}{dt}D_{0t}^{\alpha-1}W_\alpha(t) =$$

$$= \frac{A_3B_2 - A_2B_3}{\triangle}\frac{d}{dt}(\lambda W_{\alpha+1}(t) + \mu W_{\alpha+1}(t-\tau)) =$$

$$= \frac{A_3B_2 - A_2B_3}{\triangle}(\lambda W_\alpha(t) + \mu W_\alpha(t-\tau)).$$

Используя формулы (1.1.6) и (1.1.7) из последних равенств получаем, что

$$D_{0t}^{\alpha}u(t) = f(t) + \lambda\int\limits_0^1 f(\xi)G(t,\xi)d\xi + \mu\int\limits_0^1 f(\xi)G(t,\xi-\tau)d\xi,$$

или

$$D_{0t}^{\alpha}u(t) = f(t) + \lambda u(t) + \mu u(t-\tau).$$

Покажем, что полученное решение (3.1.9) удовлетворяет краевым условиям (3.1.3) задачи. Для этого найдем значения $D_{0t}^{\alpha-1}u(t)$ и $D_{0t}^{\alpha-2}u(t)$:

$$D_{0t}^{\alpha-1}u(t) = \int\limits_0^t f(\xi)W_1(t-\xi)d\xi + \frac{A_3B_2 - A_2B_3}{\triangle}W_1(t) +$$

$$+\frac{A_1B_3 - A_3B_1}{\triangle}\Big(\lambda W_\alpha(t) + \mu W_\alpha(t-\tau)\Big),$$

$$D_{0t}^{\alpha-2}u(t) = \int\limits_0^t f(\xi)W_2(t-\xi)d\xi + \frac{A_3B_2 - A_2B_3}{\triangle}W_2(t) + \frac{A_1B_3 - A_3B_1}{\triangle}W_1(t).$$

Из последних двух выражений применяя обозначения (3.1.10) и (3.1.11) находим:

$$D_{0t}^{\alpha-1}u(t)\Big|_{t=0} = \frac{A_3B_2 - A_2B_3}{\triangle},$$

$$D_{0t}^{\alpha-1}u(t)\Big|_{t=1} = \int\limits_0^1 f(\xi)W_1(1-\xi)d\xi + \frac{A_3B_2 - A_2B_3}{\triangle}W_1(1) +$$

$$+\frac{A_1B_3 - A_3B_1}{\triangle}\Big(\lambda W_\alpha(1) + \mu W_\alpha(1-\tau)\Big) = \int\limits_0^1 f(\xi)W_1(1-\xi)d\xi +$$

$$+\frac{A_3B_2-A_2B_3}{\triangle}W_1(1)+\frac{A_1B_3-A_3B_1}{\triangle}\Big(B_2+c_4W_1(1)+c_3\Big),$$

$$D_{0t}^{\alpha-2}u(t)\Big|_{t=0}=\frac{A_1B_3-A_3B_1}{\triangle},$$

$$D_{0t}^{\alpha-2}u(t)\Big|_{t=1}=\int\limits_0^1 f(\xi)W_2(1-\xi)d\xi+\frac{A_3B_2-A_2B_3}{\triangle}W_2(1)+\frac{A_1B_3-A_3B_1}{\triangle}W_1(1).$$

Подставляя полученные значения $D_{0t}^{\alpha-1}u(t)$ и $D_{0t}^{\alpha-2}u(t)$ при $t=0$ и $t=1$ в условия (3.1.3) приходим к тождеству.

3.2 Задача типа Стеклова второго класса

В данном пункте исследуется краевая задача типа Стеклова с условиями второго класса

$$\begin{cases} D_{0t}^{\alpha-2}u(t)\big|_{t=1}=d_1D_{0t}^{\alpha-2}u(t)\big|_{t=0}, \\ D_{0t}^{\alpha-1}u(t)\big|_{t=1}=d_2D_{0t}^{\alpha-2}u(t)\big|_{t=0}+d_3D_{0t}^{\alpha-1}u(t)\big|_{t=0}, \end{cases} \tag{3.2.1}$$

где

$$d_1=-\frac{b_1}{b_3},\quad d_2=\frac{a_3b_1-a_1b_3}{a_4b_3},\quad d_3=-\frac{a_2}{a_4}, \tag{3.2.2}$$

которые возникают из краевых условий (3.1.1) в случае выполнения требований [23]

$$a_2b_4-a_4b_2=0,\quad |a_2|+|a_4|>0,\quad a_4b_1+a_2b_3\neq 0. \tag{3.2.3}$$

Задача 3.2.1. *Найти регулярное решение уравнения* (3.0.1)*, удовлетворяющее условиям* (3.2.1)*.*

Определение 3.2.1. *Функцией Грина задачи* (3.0.1), (3.2.1) *назовем функцию* $G(t,\xi)$*, удовлетворяющую свойствам:*

1. Функция $G(t,\xi)$ *непрерывна для всех* t *и* ξ *из отрезка* $[0,1]$;

2. Функция $G(t,\xi)$ *удовлетворяет соотношению*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}[D_{0t}^{\alpha-2}G_\xi(t,\xi)|_{\xi=t+\varepsilon}-D_{0t}^{\alpha-2}G_\xi(t,\xi)|_{\xi=t-\varepsilon}]=1; \tag{3.2.4}$$

3. Функция $G(t,\xi)$ *в интервалах* $(0,t)$ *и* $(t,1)$ *является решением уравнения*

$$\partial_{1\xi}^{\alpha}G(t,\xi)-\lambda G(t,\xi)-\mu H(1-\tau-\xi)G(t,\xi+\tau)=0; \tag{3.2.5}$$

4. Функция $G(t,\xi)$ *удовлетворяет условиям*

$$\begin{cases} D_{0t}^{\alpha-2}G_\xi(t,\xi)\big|_{\xi=0}=d_1D_{0t}^{\alpha-2}G_\xi(t,\xi)\big|_{\xi=1}-d_2D_{0t}^{\alpha-2}G(t,\xi)\big|_{\xi=1},\\ D_{0t}^{\alpha-2}G(t,\xi)\big|_{\xi=0}=d_3D_{0t}^{\alpha-2}G(t,\xi)\big|_{\xi=1}. \end{cases} \tag{3.2.6}$$

Имеет место следующая лемма.

Лемма 3.2.1. *Функция*

$$G(t,\xi)=H(t-\xi)W_\alpha(t-\xi)+\frac{W_\alpha(t)}{\triangle}\Big[A_2W_1(1-\xi)-B_2W_2(1-\xi)\Big]-$$

$$-\frac{W_{\alpha-1}(t)}{\triangle}\Big[A_1W_1(1-\xi)-B_1W_2(1-\xi)\Big], \tag{3.2.7}$$

заданная для тех λ *и* μ, *удовлетворяющих условию*

$$\triangle=A_1B_2-A_2B_1\neq 0, \tag{3.2.8}$$

является функцией Грина задачи (3.0.1), (3.2.1).

Здесь, через A_1,A_2,B_1,B_2 обозначены следующие соотношения:

$$A_1=W_2(1),\quad A_2=W_1(1)-d_1, \tag{3.2.9}$$

$$B_1=W_1(1)-d_3,\quad B_2=\lambda W_\alpha(1)+\mu W_\alpha(1-\tau)-d_2. \tag{3.2.10}$$

Доказательство. Из представления функции $G(t,\xi)$ и условия (3.2.8) следует справедливость свойства 1.

Для доказательства свойства 2 определим сначала $D_{0t}^{\alpha-2}G_\xi(t,\xi)$:

$$D_{0t}^{\alpha-2}G_\xi(t,\xi)=-H(t-\xi)W_1(t-\xi)-$$

$$-\frac{W_2(t)}{\triangle}\Big(A_2[\lambda W_\alpha(1-\xi)+\mu W_\alpha(1-\xi-\tau)]-B_2W_1(1-\xi)\Big)+$$

$$+\frac{W_1(t)}{\triangle}\Big(A_1[\lambda W_\alpha(1-\xi)+\mu W_\alpha(1-\xi-\tau)]-B_1W_1(1-\xi)\Big).$$

Подставим полученное выражение в свойство 2 при $\xi=t+\varepsilon$ и $\xi=t-\varepsilon$. Из свойства (1.1.9) функции $W_\nu(t)$ имеем, что $W_1(0)=1$, откуда следует справедливость (3.2.4).

Далее, из определения оператора Герасимова – Капуто (0.21), а также из свойств (1.1.6) и (1.1.7) функции $W_\nu(t)$ получаем выражение

$$D_{1\xi}^{\alpha-2}G_{\xi\xi}(t,\xi)=H(t-\xi)[\lambda W_\alpha(t-\xi)+\mu W_\alpha(t-\xi-\tau)]+$$

$$+\frac{W_\alpha(t)}{\triangle}\Big(A_2[\lambda W_1(1-\xi)+\mu W_1(1-\xi-\tau)]-B_2[\lambda W_2(1-\xi)+\mu W_2(1-\xi-\tau)]\Big)-$$

$$-\frac{W_{\alpha-1}(t)}{\triangle}\Big(A_1[\lambda W_1(1-\xi)+\mu W_1(1-\xi-\tau)]-B_1[\lambda W_2(1-\xi)+\mu W_2(1-\xi-\tau)]\Big),$$

из которого, согласно определению функции $G(t,\xi)$ (3.2.7), получаем

$$D_{1\xi}^{\alpha-2}G_{\xi\xi}(t,\xi)=\lambda G(t,\xi)+\mu G(t,\xi+\tau).$$

Покажем далее справедливость первого свойства (3.2.6). Для этого, используя представление функции $G(t,\xi)$ и свойства функции $W_\nu(t)$ находим:

$$d_1D_{0t}^{\alpha-2}G_\xi(t,\xi)\big|_{\xi=1}-d_2D_{0t}^{\alpha-2}G(t,\xi)\big|_{\xi=1}=$$

$$=\frac{d_1}{\triangle}\left(B_2W_2(t)-B_1W_1(t)\right)-\frac{d_2}{\triangle}\left(A_2W_2(t)-A_1W_1(t)\right)=$$

$$=\frac{W_1(t)}{\triangle}\left[A_1d_2-B_1d_1\right]-\frac{W_2(t)}{\triangle}\left[A_2d_2-B_2d_1\right].$$

Вычислим теперь $D_{0t}^{\alpha-2}G_\xi(t,\xi)\big|_{\xi=0}$:

$$D_{0t}^{\alpha-2}G_\xi(t,\xi)\big|_{\xi=0}=-W_1(t)-\frac{W_2(t)}{\triangle}\Big[A_2(\lambda W_\alpha(1)+\mu W_\alpha(1-\tau))-B_2W_1(1)\Big]+$$

$$+\frac{W_1(t)}{\triangle}\Big[A_1(\lambda W_\alpha(1)+\mu W_\alpha(1-\tau))-B_1W_1(1)\Big].$$

Используя соотношения (3.2.9) и (3.2.10), $\lambda W_\alpha(1)+\mu W_\alpha(1-\tau))$ и $W_1(1)$ заменим соответственно на B_2+d_2 и A_2+d_1. Получаем:

$$D_{0t}^{\alpha-2}G_\xi(t,\xi)\big|_{\xi=0}=-W_1(t)-\frac{W_2(t)}{\triangle}\Big[d_2A_2-d_1B_2\Big]+\frac{W_1(t)}{\triangle}\Big[\triangle+A_1d_2-B_1d_1\Big]=$$

$$=\frac{W_1(t)}{\triangle}\Big[A_1d_2-B_1d_1\Big]-\frac{W_2(t)}{\triangle}\Big[d_2A_2-d_1B_2\Big].$$

Аналогично покажем справедливость второго из свойств (3.2.6). Находим сначала значение $D_{0t}^{\alpha-2}G(t,\xi)\big|_{\xi=1}$:

$$D_{0t}^{\alpha-2}G(t,\xi)\big|_{\xi=1} = d_3A_2\frac{W_2(t)}{\triangle} - d_3A_1\frac{W_1(t)}{\triangle}.$$

Вычислим далее $D_{0t}^{\alpha-2}G(t,\xi)\big|_{\xi=0}$:

$$D_{0t}^{\alpha-2}G(t,\xi)\big|_{\xi=0} = W_2(t) + \frac{W_2(t)}{\triangle}\Big(A_2W_1(1) - B_2W_2(1)\Big) -$$

$$-\frac{W_1(t)}{\triangle}\Big(A_1W_1(1) - B_1W_2(1)\Big).$$

Используя обозначения (3.2.9) и (3.2.10), в последнем выражении заменим $W_2(1)$ и $W_1()$ соответственно на A_1 и $B_1 + d_3$. Получаем:

$$D_{0t}^{\alpha-2}G(t,\xi)\big|_{\xi=0} = W_2(t) + \frac{W_2(t)}{\triangle}\Big(-\triangle + d_3A_2\Big) - \frac{W_1(t)}{\triangle}d_3A_1 =$$

$$= d_3\left[\frac{W_2(t)}{\triangle}A_2 - \frac{W_1(t)}{\triangle}A_1\right].$$

Таким образом, получили, что функция $G(t,\xi)$ удовлетворяет условиям (3.2.6).

$\square$

Справедлива теорема.

Теорема 3.2.1. *Пусть функция* $f(t) \in L(0,1) \cap C(0,1)$ *и выполнено условие* (3.2.8).

Тогда решение задачи (3.0.1), (3.2.1) *существует и имеет вид*

$$u(t) = \int\limits_0^1 f(\xi)G(t,\xi)d\xi. \tag{3.2.11}$$

Решение задачи (3.0.1), (3.2.1) *единственно тогда и только тогда, когда выполнено условие* (3.2.8).

Доказательство. Справедливость представления решения задачи (3.0.1), (3.2.1) в виде (3.2.11) доказывается аналогично доказательству теоремы 3.1.1.

Покажем, что функция (3.2.11) удовлетворяет уравнению (3.0.1). Для этого запишем (3.2.11) в виде

$$u(t) = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3,$$

где

$$\nu_1(t)=\frac{A_3B_2-A_2B_3}{\triangle}W_\alpha(t),\quad \nu_2(t)=\frac{A_1B_3-A_3B_1}{\triangle}W_{\alpha-1}(t),$$

$$\nu_3(t)=\int\limits_0^t f(\xi)W_\alpha(t-\xi)d\xi,$$

$$A_3=-\int\limits_0^1 f(\xi)W_2(1-\xi)d\xi,\quad B_3=-\int\limits_0^1 f(\xi)W_1(1-\xi)d\xi,$$

A_1, A_2, B_1, B_2 определены соотношениями (3.2.9) и (3.2.10).

Действуя на $\nu_1(t)$ оператором D^α_{0t} (применяя свойства (1.1.6) и (1.1.7) функции $W_\nu(t)$) получим:

$$D^\alpha_{0t}\nu_1(t)=\frac{A_3B_2-A_2B_3}{\triangle}\frac{d^2}{dt^2}D^{\alpha-2}_{0t}W_\alpha(t)=\frac{A_3B_2-A_2B_3}{\triangle}\frac{d}{dt}W_1(t)=$$

$$=\frac{A_3B_2-A_2B_3}{\triangle}\frac{d}{dt}\Big(\lambda W_{\alpha+1}(t)+\mu W_{\alpha+1}(t-\tau)\Big)=$$

$$=\frac{A_3B_2-A_2B_3}{\triangle}\Big(\lambda W_\alpha(t)+\mu W_\alpha(t-\tau)\Big)=\lambda\nu_1(t)+\mu\nu_1(t-\tau).$$

Аналогично для $\nu_2(t)$ находим, что

$$D^\alpha_{0t}\nu_2(t)=\lambda\nu_2(t)+\mu\nu_2(t-\tau).$$

Вычислим теперь $D^\alpha_{0t}\nu_3(t)$ (с учетом того, что $f(t)\in L(0,1)\cap C(0,1)$):

$$D^\alpha_{0t}\nu_3=\frac{d}{dt}D^{\alpha-1}_{0t}\int\limits_0^t f(\xi)W_\alpha(t-\xi)d\xi=\frac{d}{dt}\int\limits_0^t f(\xi)W_1(t-\xi)d\xi=$$

$$=\int\limits_0^t f(\xi)\frac{d}{dt}\Big(\lambda W_{\alpha+1}(t-\xi)+\mu W_{\alpha+1}(t-\xi-\tau)\Big)d\xi+f(t)=$$

$$=\int\limits_0^t f(\xi)\Big(\lambda W_\alpha(t-\xi)+\mu W_\alpha(t-\xi-\tau)\Big)d\xi+f(t).$$

Таким образом, получили, что

$$D_{0t}^{\alpha}u(t) = f(t) + \lambda u(t) + \mu u(t-\tau).$$

Покажем далее, что функция (3.2.11) удовлетворяет условиям (3.2.1). Для этого, сначала запишем (3.2.11) в терминах функции $W_\nu(t)$ и найдем $D_{0t}^{\alpha-1}u(t)$ и $D_{0t}^{\alpha-2}u(t)$:

$$D_{0t}^{\alpha-1}u(t) = \int_0^t f(\xi)W_1(t-\xi)d\xi + W_1(t)\frac{A_3B_2 - A_2B_3}{\triangle} +$$
$$+\frac{A_1B_3 - A_3B_1}{\triangle}\Big(\lambda W_\alpha(t) + \mu W_\alpha(t-\tau)\Big), \tag{3.2.12}$$

и

$$D_{0t}^{\alpha-2}u(t) = \int_0^t f(\xi)W_2(t-\xi)d\xi + W_1(t)\frac{A_3B_2 - A_2B_3}{\triangle} +$$
$$+\frac{A_1B_3 - A_3B_1}{\triangle}W_1(t). \tag{3.2.13}$$

Подставляя выражения (3.2.12) и (3.2.13) при $t = 0$ и $t = 1$ в краевые условия (3.2.1) задачи и применяя обозначения (3.2.9) и (3.2.10) после подстановки, приходим к справедливости этих условий.

$\square$

Замечание 3.2.1. В случае

$$a_2 = a_4 = b_2 = b_4 = 0, a_1b_3 - a_3b_1 \neq 0 \tag{3.2.14}$$

условия (3.1.1) переходят в однородные условия задачи Дирихле:

$$\begin{aligned} D_{0t}^{\alpha-2}u(t)\big|_{t=0} = 0, \\ D_{0t}^{\alpha-2}u(t)\big|_{t=1} = 0, \end{aligned} \tag{3.2.15}$$

решение которой получено во второй главе, и при $1 < \alpha \leq 2$ имеет вид

$$u(t) = \int_0^1 f(\xi)G(t,\xi)d\xi,$$

где

$$G(t,\xi) = H(t-\xi)W_\alpha(t-\xi) - \frac{W_\alpha(t)}{W_2(1)}W_2(1-\xi)$$

является функцией Грина этой задачи.

3.3 Внутреннекраевая задача

В этом пункте для уравнения (3.0.1) исследуется задача с условиями, связывающими значение искомой функции на граничной точке со значениями во внутренних точках.

Задача 3.3.1. *Найти регулярное решение* $u(t)$ *уравнения* (3.0.1), *удовлетворяющее условиям*

$$\begin{cases} \lim\limits_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha-2}u(t) = c_1, \\ \lim\limits_{t\to 1} D_{0t}^{\alpha-2}u(t) - a\sum\limits_{k=1}^{n}\lim\limits_{t\to t_k} D_{0t}^{\alpha-2}u(t) = c_2, \end{cases} \tag{3.3.1}$$

где $0 < t_k < 1, n \in \mathbb{N}$.

Определение 3.3.1. *Функцией Грина задачи* (3.0.1), (3.3.1) *назовем функцию* $G(t,\xi)$, *удовлетворяющую свойствам:*

1. Функция $G(t,\xi)$ *непрерывна для всех* t *и* ξ *из отрезка* $[0,1]$;

2. Функция $G(t,\xi)$ *удовлетворяет соотношениям*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[D_{0t}^{\alpha-2}G_\xi(t,\xi)\Big|_{\xi=t+\varepsilon} - D_{0t}^{\alpha-2}G_\xi(t,\xi)\Big|_{\xi=t-\varepsilon}\right] = 1; \tag{3.3.2}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[D_{0t}^{\alpha-2}G_\xi(t,\xi)\Big|_{\xi=t_k+\varepsilon} - D_{0t}^{\alpha-2}G_\xi(t,\xi)\Big|_{\xi=t_k-\varepsilon}\right] = aD_{0t}^{\alpha-2}G_\xi(t,\xi)\Big|_{\xi=1}; \tag{3.3.3}$$

3. Функция $G(t,\xi)$ *в интервалах* $(0,t)$ *и* $(t,1)$ *является решением однородного уравнения*

$$\partial_{1\xi}^{\alpha}G(t,\xi) - \lambda G(t,\xi) - \mu H(1-\xi-\tau)G(t,\xi+\tau) = 0, \tag{3.3.4}$$

где $\partial_{1\xi}^{\alpha}$ *– производная Герасимова – Капуто* (0.21);

4. Функция $G(t,\xi)$ *удовлетворяет краевым условиям*

$$D_{0t}^{\alpha-2}G(t,0) = 0, \qquad D_{0t}^{\alpha-2}G(t,1) = 0. \tag{3.3.5}$$

Имеет место следующая лемма.

Лемма 3.3.1. *Функция*

$$G(t,\xi) = H(t-\xi)W_\alpha(t-\xi)-$$
$$-\frac{W_\alpha(t)}{\triangle}\left[W_2(1-\xi) - a\sum_{k=1}^{n} H(t_k-\xi)W_2(t_k-\xi)\right], \quad (3.3.6)$$

определенная для тех значений λ *и* μ, *для которых выполняется*

$$\triangle = W_2(1) - a\sum_{k=1}^{n} W_2(t_k) \neq 0, \quad (3.3.7)$$

является функцией Грина задачи (3.0.1), (3.3.1).

Доказательство. Для доказательства леммы 3.3.1 покажем справедливость свойств 1 – 4 из определения 3.3.1.

Справедливость свойства 1 следует из представления функции $G(t,\xi)$ (3.3.6) и условия (3.3.7).

Для доказательства свойств (3.3.2) и (3.3.3) вычислим сначала $D_{0t}^{\alpha-2}G_\xi(t,\xi)$:

$$D_{0t}^{\alpha-2}G_\xi(t,\xi) = -H(t-\xi)W_1(t-\xi)+$$
$$+\frac{W_2(t)}{\triangle}\left[W_1(1-\xi) - a\sum_{k=1}^{n} H(t_k-\xi)W_1(t_k-\xi)\right].$$

Тогда из (1.1.9) получаем, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[D_{0t}^{\alpha-2}G_\xi(t,\xi)\Big|_{\xi=t+\varepsilon} - D_{0t}^{\alpha-2}G_\xi(t,\xi)\Big|_{\xi=t-\varepsilon}\right] = \lim_{\varepsilon\to 0} W_1(\varepsilon) = 1.$$

Далее покажем справедливость (3.3.3):

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[D_{0t}^{\alpha-2}G_\xi(t,\xi)\Big|_{\xi=t_k+\varepsilon} - D_{0t}^{\alpha-2}G_\xi(t,\xi)\Big|_{\xi=t_k-\varepsilon}\right] =$$
$$= \frac{W_2(t)}{\triangle}\lim_{\varepsilon\to 0}\left[W_1(1-t_k+\varepsilon) - W_1(1-t_k-\varepsilon) + a\sum_{k=1}^{n} W_1(t_k-t_k+\varepsilon)\right] =$$
$$= a\frac{W_2(t)}{\triangle};$$

$$aD_{0t}^{\alpha-2}G_\xi(t,\xi)\Big|_{\xi=1} = -aH(t-1)W_1(t-1)+$$

$$+a\frac{W_2(t)}{\triangle}\left[W_1(0)-a\sum_{k=0}^{n}H(t_k-1)W_1(t_k-1)\right]=a\frac{W_2(t)}{\triangle}W_1(0)=a\frac{W_2(t)}{\triangle}.$$

Для доказательства свойства (3.3.4) вычислим $\partial_{1\xi}^{\alpha}G(t,\xi)$ используя определение производной Герасимова – Капуто (0.21) и функции $G(t,\xi)$, а также формулу дифференцирования (1.1.6) и автотрансформации (1.1.7) функции $W_\nu(t)$:

$$\partial_{1\xi}^{\alpha}G(t,\xi)=D_{1\xi}^{\alpha-2}G_{\xi\xi}(t,\xi)=H(t-\xi)\Big(\lambda W_2(t-\xi)+\mu W_2(t-\xi-\tau)\Big)-$$

$$-\frac{W_\alpha(t)}{\triangle}\Big[\Big(\lambda W_2(1-\xi)+\mu W_2(1-\xi-\tau)\Big)-$$

$$-a\sum_{k=1}^{n}H(t_k-\xi)\Big(\lambda W_2(t_k-\xi)+\mu W_2(t_k-\xi-\tau)\Big)\Big],$$

откуда, группируя слагаемые с λ и μ, получаем, что

$$\partial_{1\xi}^{\alpha}G(t,\xi)=\lambda G(t,\xi)+\mu G(t,\xi+\tau).$$

Покажем далее выполнимость свойства (3.3.5). Для этого, сначала найдем $D_{0t}^{\alpha-2}G(t,\xi)$:

$$D_{0t}^{\alpha-2}G(t,\xi)=$$

$$=H(t-\xi)W_2(t-\xi)-\frac{W_2(t)}{\triangle}\left(W_2(1-\xi)-a\sum_{k=1}^{n}H(t_k-\xi)W_2(t_k-\xi)\right).$$

При $\xi=0$ имеем:

$$D_{0t}^{\alpha-2}G(t,\xi)\Big|_{\xi=0}=W_2(t)-\frac{W_2(t)}{\triangle}\left(W_2(1)-a\sum_{k=1}^{n}W_2(t_k)\right)=$$

$$=W_2(t)-\frac{W_2(t)}{\triangle}\triangle=0.$$

При $\xi = 1$ используя свойство (1.1.9) функции $W_\nu(t)$, имеем:

$$D_{0t}^{\alpha-2}G(t,\xi)\Big|_{\xi=1} = H(t-1)W_2(t-1)-$$

$$-\frac{W_2(t)}{\triangle}\left[W_2(0) - a\sum_{k=1}^{n} H(t_k-1)W_2(t_k-1)\right] = 0.$$

$\square$

Справедлива теорема.

Теорема 3.3.1. *Пусть функция* $f(t) \in L(0,1) \cap C(0,1)$ *и выполнено условие* (3.3.7).

Тогда регулярное решение задачи (3.0.1), (3.3.1) *существует и имеет вид*

$$u(t) = -c_1 G_\xi(t,\xi)\Big|_{\xi=0} + c_2 G_\xi(t,\xi)\Big|_{\xi=1} + \int\limits_0^1 f(\xi)G(t,\xi)d\xi. \qquad (3.3.8)$$

Решение задачи (3.0.1), (3.3.1) *единственно тогда и только тогда, когда выполнено условие* (3.3.7).

Доказательство. Докажем, что решение задачи (3.0.1), (3.3.1) имеет вид (3.3.8). Домножим для этого уравнение (3.0.1) $(1 < \alpha \le 2)$, записанное в терминах переменной ξ, на функцию $D_{0t}^{\alpha-2}G(t,\xi)$ и проинтегрируем от 0 до 1 по переменной ξ:

$$\int\limits_\varepsilon^{1-\varepsilon} D_{0\xi}^{\alpha}u(\xi)D_{0t}^{\alpha-2}G(t,\xi)d\xi - \lambda\int\limits_0^1 u(\xi)D_{0t}^{\alpha-2}G(t,\xi)d\xi-$$

$$-\mu\int\limits_0^1 H(\xi-\tau)u(\xi-\tau)D_{0t}^{\alpha-2}G(t,\xi)d\xi = \int\limits_0^1 f(\xi)D_{0t}^{\alpha-2}G(t,\xi)d\xi. \qquad (3.3.9)$$

Проинтегрируем по частям первое слагаемое в равенстве (3.3.9) ($\varepsilon \to 0$):

$$\int\limits_\varepsilon^{1-\varepsilon} D_{0\xi}^{\alpha}u(\xi)D_{0t}^{\alpha-2}G(t,\xi)d\xi = D_{0\xi}^{\alpha-1}u(\xi)D_{0t}^{\alpha-2}G(t,\xi)\Big|_\varepsilon^{1-\varepsilon}-$$

$$-\int\limits_\varepsilon^{1-\varepsilon} D_{0\xi}^{\alpha-1}u(\xi)D_{0t}^{\alpha-2}G_\xi(t,\xi)d\xi.$$

Разобьем последний интеграл точками $\xi = t$ и $\xi = t_k$. Тогда

$$\int\limits_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} D_{0\xi}^{\alpha} u(\xi) D_{0t}^{\alpha-2} G(t,\xi) d\xi = D_{0\xi}^{\alpha-1} u(\xi) D_{0t}^{\alpha-2} G(t,\xi)\Big|_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} -$$

$$- \left(\int\limits_{\varepsilon}^{t_1-\varepsilon} + \int\limits_{t_1+\varepsilon}^{t_2-\varepsilon} + \dots + \int\limits_{t_n+\varepsilon}^{t-\varepsilon} + \int\limits_{t+\varepsilon}^{1-\varepsilon} \right) D_{0\xi}^{\alpha-1} u(\xi) D_{0t}^{\alpha-2} G_{\xi}(t,\xi) d\xi =$$

$$= D_{0\xi}^{\alpha-1} u(\xi) D_{0t}^{\alpha-2} G(t,\xi)\Big|_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} - D_{0\xi}^{\alpha-2} u(\xi) D_{0t}^{\alpha-2} G_{\xi}(t,\xi)\Big|_{\varepsilon}^{t_1-\varepsilon} -$$

$$- D_{0\xi}^{\alpha-2} u(\xi) D_{0t}^{\alpha-2} G_{\xi}(t,\xi)\Big|_{t_1+\varepsilon}^{t_2-\varepsilon} - \dots - D_{0\xi}^{\alpha-2} u(\xi) D_{0t}^{\alpha-2} G_{\xi}(t,\xi)\Big|_{t_n+\varepsilon}^{t-\varepsilon} -$$

$$- D_{0\xi}^{\alpha-2} u(\xi) D_{0t}^{\alpha-2} G_{\xi}(t,\xi)\Big|_{t+\varepsilon}^{1-\varepsilon} + \int\limits_{0}^{1} D_{0\xi}^{\alpha-2} u(\xi) D_{0t}^{\alpha-2} G_{\xi\xi}(t,\xi) d\xi =$$

$$= D_{0t}^{\alpha-2} u(t) \left[D_{0t}^{\alpha-2} G_{\xi}(t,\xi)\Big|_{\xi=t+\varepsilon} - D_{0t}^{\alpha-2} G_{\xi}(t,\xi)\Big|_{\xi=t-\varepsilon} \right] +$$

$$+ D_{0t_1}^{\alpha-2} u(t_1) \left[D_{0t}^{\alpha-2} G_{\xi}(t,\xi)\Big|_{\xi=t_1+\varepsilon} - D_{0t}^{\alpha-2} G_{\xi}(t,\xi)\Big|_{\xi=t_1-\varepsilon} \right] + \dots +$$

$$+ D_{0t_n}^{\alpha-2} u(t_n) \left[D_{0t}^{\alpha-2} G_{\xi}(t,\xi)\Big|_{\xi=t_n+\varepsilon} - D_{0t}^{\alpha-2} G_{\xi}(t,\xi)\Big|_{\xi=t_n-\varepsilon} \right] +$$

$$+ D_{0\xi}^{\alpha-1} u(\xi) D_{0t}^{\alpha-2} G(t,\xi)\Big|_{\xi=1} - D_{0\xi}^{\alpha-1} u(\xi) D_{0t}^{\alpha-2} G(t,\xi)\Big|_{\xi=0} +$$

$$+ D_{0\xi}^{\alpha-2} u(\xi) D_{0t}^{\alpha-2} G_{\xi}(t,\xi)\Big|_{\xi=0} - D_{0\xi}^{\alpha-2} u(\xi) D_{0t}^{\alpha-2} G_{\xi}(t,\xi)\Big|_{\xi=1} +$$

$$+\int\limits_0^1 D_{0t}^{\alpha-2}G_{\xi\xi}(t,\xi)D_{0\xi}^{\alpha-2}u(\xi)d\xi = D_{0t}^{\alpha-2}u(t)+$$

$$+\sum_{k=1}^{n} D_{0t_k}^{\alpha-2}u(t_k)\left[D_{0t}^{\alpha-2}G_{\xi}(t,\xi)\Big|_{\xi=t_k+\varepsilon} - D_{0t}^{\alpha-2}G_{\xi}(t,\xi)\Big|_{\xi=t_k-\varepsilon}\right]+$$

$$+c_1 D_{0t}^{\alpha-2}G_{\xi}(t,\xi)\Big|_{\xi=0} - D_{0\xi}^{\alpha-2}u(\xi)D_{0t}^{\alpha-2}G_{\xi}(t,\xi)\Big|_{\xi=1}+$$

$$+\int\limits_0^1 D_{0t}^{\alpha-2}G_{\xi\xi}(t,\xi)D_{0\xi}^{\alpha-2}u(\xi)d\xi.$$

Из условия (3.3.1) имеем, что

$$\lim_{t\to 1} D_{0t}^{\alpha-2}u(t) = a\sum_{k=1}^{n}\lim_{t\to t_k} D_{0t}^{\alpha-2}u(t) + c_2.$$

С учетом этого (и из свойств функции Грина (3.3.2) и (3.3.3)) имеем, что

$$\int\limits_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} D_{0t}^{\alpha-2}G(t,\xi)D_{0\xi}^{\alpha}u(\xi)d\xi = D_{0t}^{\alpha-2}u(t) + a\sum_{k=1}^{n} D_{0t_k}^{\alpha-2}u(t_k)D_{0t}^{\alpha-2}G_{\xi}(t,\xi)\Big|_{\xi=1}+$$

$$+c_1 D_{0t}^{\alpha-2}G_{\xi}(t,\xi)\Big|_{\xi=0} - \left[a\sum_{k=1}^{n} D_{0t_k}^{\alpha-2}u(t_k)+c_2\right] D_{0t}^{\alpha-2}G_{\xi}(t,\xi)\Big|_{\xi=1}+$$

$$+\int\limits_0^1 D_{0t}^{\alpha-2}G_{\xi\xi}(t,\xi)D_{0\xi}^{\alpha-2}u(\xi)d\xi = D_{0t}^{\alpha-2}u(t) + c_1 D_{0t}^{\alpha-2}G_{\xi}(t,\xi)\Big|_{\xi=0}-$$

$$-c_2 D_{0t}^{\alpha-2}G_{\xi}(t,\xi)\Big|_{\xi=1} + \int\limits_0^1 D_{0t}^{\alpha-2}G_{\xi\xi}(t,\xi)D_{0\xi}^{\alpha-2}u(\xi)d\xi. \tag{3.3.10}$$

Далее подставим (3.3.10) в соотношение (3.3.9):

$$D_{0t}^{\alpha-2}u(t) + c_1 D_{0t}^{\alpha-2}G_{\xi}(t,\xi)\Big|_{\xi=0} - c_2 D_{0t}^{\alpha-2}G_{\xi}(t,\xi)\Big|_{\xi=1}+$$

$$+\int\limits_0^1 D_{0t}^{\alpha-2}G_{\xi\xi}(t,\xi)D_{0\xi}^{\alpha-2}u(\xi)d\xi - \lambda\int\limits_0^1 u(\xi)D_{0t}^{\alpha-2}G(t,\xi)d\xi-$$

$$-\mu \int\limits_0^1 H(\xi-\tau)u(\xi-\tau)D_{0t}^{\alpha-2}G(t,\xi)d\xi = \int\limits_0^1 f(\xi)D_{0t}^{\alpha-2}G(t,\xi)d\xi.$$

Принимая во внимание формулу дробного интегрирования по частям (0.17), определение производной Герасимова – Капуто (0.21), и сделав замену $\xi-\tau=\xi$ в третьем интеграле

$$\int\limits_0^1 H(\xi-\tau)u(\xi-\tau)G(t,\xi)d\xi = \int\limits_0^1 H(1-\xi-\tau)u(\xi)G(t,\xi+\tau)d\xi,$$

а также с учетом свойства (3.3.4) функции Грина получаем соотношение

$$D_{0t}^{\alpha-2}u(t) + c_1 D_{0t}^{\alpha-2}G_\xi(t,\xi)\Big|_{\xi=0} - c_2 D_{0t}^{\alpha-2}G_\xi(t,\xi)\Big|_{\xi=1} = \int\limits_0^1 f(\xi)D_{0t}^{\alpha-2}G(t,\xi)d\xi,$$

подействовав на которое оператором $D_{0t}^{2-\alpha}$ приходим к равенству (3.3.8).

Доказательство того, что полученное решение (3.3.8) удовлетворяет уравнению (3.0.1) проводится аналогично доказательству в теоремах 3.1.1 и 3.2.1.

Покажем далее, что полученное решение удовлетворяет краевым условиям (3.3.1). Для этого, будем действовать оператором $D_{0t}^{\alpha-2}$ на решение задачи, записанное в терминах функции $W_\nu(t)$:

$$\lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha-2}u(t) = \lim_{t\to 0}\int\limits_0^1 f(\xi)\Big[H(t-\xi)W_2(t-\xi)-$$

$$-\frac{1}{\triangle}\left(W_2(t)\left(W_2(1-\xi) - a\sum_{k=1}^n H(t_k-\xi)W_2(t_k-\xi)\right)\right)\Bigg]d\xi +$$

$$+c_1\left[W_1(t) - \frac{1}{\triangle}\left(W_2(t)\Big(W_1(1) - a\sum_{k=1}^n W_1(t_k)\Big)\right)\right]_{t=0} + c_2\frac{W_2(t)}{\triangle}\Big|_{t=0}.$$

Переходя к пределу и учитывая свойство (1.1.9) функции $W_\nu(t)$ получаем, что

$$\lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha-2}u(t) = c_1 W_1(0) = c_1.$$

Аналогично проверяем выполнимость второго условия:

$$\lim_{t\to 1} D_{0t}^{\alpha-2}u(t) - a\sum_{k=1}^{n}\lim_{t\to t_k} D_{0t}^{\alpha-2}u(t) = \int\limits_0^1 f(\xi)\Bigg[W_2(1-\xi)-$$

$$-a\sum_{k=1}^{n}H(t_k-\xi)W_2(t_k-\xi) - \frac{1}{\triangle}\left(W_2(1-\xi) - a\sum_{k=1}^{n}H(t_k-\xi)W_2(t_k-\xi)\right)\times$$

$$\times\left(W_2(1-\xi) - a\sum_{k=1}^{n}H(t_k-\xi)W_2(t_k-\xi)\right)\Bigg]d\xi + c_1\left[W_1(1) - a\sum_{k=1}^{n}W_1(t_k)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\triangle}\sum_{k=1}^{n}\left(W_1(1) - a\sum_{k=1}^{n}W_1(t_k)\right)\left(W_2(1) - a\sum_{k=1}^{n}W_2(t_k)\right)\right]+$$

$$+\frac{c_2}{\triangle}\left[W_2(1) - a\sum_{k=1}^{n}W_2(t_k)\right] = c_2.$$

Далее покажем, что если условие (3.3.7) нарушается, то есть если

$$\triangle = W_2(1) - a\sum_{k=1}^{n}W_2(t_k) = 0,$$

то решение однородной задачи не единственно. Рассмотрим функцию

$$u(t) = CW_\alpha(t),$$

которая является решением однородной задачи

$$D_{0t}^{\alpha}u(t) - \lambda u(t) - \mu H(t-\tau)u(t-\tau) = 0,$$

$$\lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha-2}u(t) = 0, \quad \lim_{t\to 1} D_{0t}^{\alpha-2}u(t) - a\sum_{k=1}^{n}\lim_{t\to t_k} D_{0t}^{\alpha-2}u(t) = 0.$$

Но так как эта задача имеет только тривиальное решение, то соотвествующая ей неоднородная задача будет иметь единственное решение. $\square$

Заключение

В диссертации «Краевые задачи для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений дробного порядка с запаздывающим аргументом» получены следующие основные результаты:

1. Получено фундаментальное решение дифференциального уравнения с производной Джрбашяна – Нерсесяна. Исследованы свойства фундаментального решения и доказана теорема о его асимптотическом поведении.

2. Доказана теорема существования и единственности решения начальной задачи. Реализован метод шагов в случае переменного запаздывания.

3. Получено явное представление решения краевой задачи с условиями Штурма, которое является новым результатом в том числе в теории дифференциальных уравнений целого порядка. Реализован метод функции Грина для решения двухточечных краевых задач типа Штурма – Лиувилля и обобщенной задачи Дирихле – Неймана для уравнения произвольного порядка с дробной производной Римана – Лиувилля. Доказаны теоремы существования и единственности. Получены условия, гарантирующие однозначную разрешимость этих задач.

4. Исследованы спектральные свойства решения задачи с условиями типа Штурма – Лиувилля. Показано, что задача с условиями типа Штурма – Лиувилля может иметь лишь конечное число вещественных собственных значений.

5. Построены функции Грина нелокальных краевых задач типа Стеклова первого и второго классов, а также краевой задачи с условиями, связывающими значение искомой функции на граничной точке со значениями во внутренних точках. Доказаны теоремы существования и единственности решений.

Хочу выразить глубокую признательность и благодарность своему научному руководителю доктору физико-математических наук Арсену Владимировичу Псху за постановку задач, за помощь на всех этапах выполнения диссертации, за ценные замечания и советы, а также доктору физико-математических наук Мурату Османовичу Мамчуеву и кандидату физико-математических наук Беслану Игорьевичу Эфендиеву за очень полезные рекомендации и советы во время выполнения работы.

Литература

[1] *Азбелев Н. В., Максимов В. П.* Уравнения с запаздывающим аргументом // Дифференц. уравнения. –1982. –Т. 18, № 12. –С. 2027–2050.

[2] *Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. –М.: Наука, 1991. –277 с.

[3] *Бекларян Л. А.* К линейной теории функционально-дифференциальных уравнений: теоремы существования и проблема точечной полноты решений // Матем. сборник. –2011. –Т. 202, № 3. –С. 3–36.

[4] *Богатырева Ф. Т.* Начальная задача для уравнения дробного порядка с постоянными коэффициентами // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. –2016. –Т. 16, № 4-1. –С. 21–26.

[5] *Богатырева Ф. Т.* Краевые задачи для уравнения в частных производных первого порядка с операторами Джрбашяна – Нерсесяна // Челябинский физ.-мат. журнал. –2021. –Т. 6, № 4. –С. 403–416.

[6] *Богатырева Ф. Т.* Краевая задача для уравнения в частных производных с оператором дробного дифференцирования Джрбашяна – Нерсесяна // Известия КБНЦ РАН. –2018. –Вып. 61. –С. 10–14.

[7] *Власов В. В.* О разрешимости и оценках решений функционально-дифференциальных уравнений в пространствах Соболева // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. –1999. –Т. 227.

[8] *Волкова А. Р., Ижбердеева Е. М., Федоров В. Е.* Начальные задачи для уравнений с композицией дробных производных. Челябинский физ.-мат. журнал. –2021. –Т. 6, № 3. С. 269–277.

[9] *Гадзова Л. Х.* Краевая задача со смещением для линейного обыкновенного дифференциального уравнения с оператором дискретно распределенного дифференцирования // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. – 2018. –Т. 149. –С. 25–30.

[10] *Гадзова Л. Х.* Задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения с оператором дробного дискретно распределенного дифференцирования // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. –2018. –Т. 23, № 3. –С. 48–56.

[11] *Геворкян Э. А.* Дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом: Учебное пособие, руководство по изучению дисциплины, сборник задач по дисциплине, учебная программа по дисциплине. Московский государственный университет экономики, статистики и информатики. –М., 2004.

[12] *Гольцер Я. И., Зверкин А. М.* О существовании и единственности решений дифференциальных уравнений с запаздыванием в Банаховом пространстве // Дифференц. уравн. –1976. –Т. 12, № 9. –С. 1404–1409.

[13] *Джрбашян М. М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. –М.: Наука, 1966. –672 с.

[14] *Джрбашян М. М.* Краевая задача для дифференциального оператора дробного порядка типа Штурма – Лиувилля // Изв. АН Армянской ССР. –1970. –Т. 5, № 2. –С. 71–96.

[15] *Джрбашян М. М., Нерсесян А. Б.* Дробные производные и задача Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка // Изв. Акад. Наук Арм. ССР. –1968. –Т. 3, № 1. –С. 3–29.

[16] *Зверкин А. М., Каменский Г. А., Норкин С. Б., Эльсгольц Л. Э.* Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом // УМН. –1962. –Т. 72, № 2(104). –С. 77–164.

[17] *Куликов А. Н., Куликов Д. А.* Эффект запаздывания и экономические циклы // ТВИМ. – 2015. –Т. 27, № 2.

[18] *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры. –М.: Наука, 1965. –431 с.

[19] *Мамчуев М. О.* Задача Коши для системы уравнений счастными производными дробного порядка // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. –2018. –Т. 23, № 3. –С. 76–82.

[20] *Мамчуев М. О.* Краевые задачи для уравнений и систем уравнений с частными производными дробного порядка. –Нальчик: Изд-во КБНЦ РАН, 2013. –200 с.

[21] *Митропольский Ю. А.* Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом. –Киев, 1977.

[22] *Мышкис А. Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. –М.: Наука, 1972. –352 с.

[23] *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. –М.: Наука, 1969. –528 с.

[24] *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение. –М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. –272 с.

[25] *Нахушев А. М.* Задача Штурма – Лиувилля для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с дробными производными в младших членах // ДАН СССР. –1977. –Т. 234, № 2. –С. 308–311.

[26] *Нахушев А. М.* Задачи со смещением для уравнений в частных производных. –М.: Наука, 2006. –287 с.

[27] *Нахушев А. М.* Нагруженные уравнения и их применение. –М.: Наука, 2012. –232 с.

[28] *Нахушев А. М.* О непрерывных дифференциальных уравнениях и их разностных аналогах // Докл. АН СССР. –1988. –Т. 300, № 4, –С. 796–799.

[29] *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии. –М.: Высш. шк, 1995. –301 с.

[30] *Норкин С. Б.* О решениях линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом // УМН. –1959. –Т. 14, № 1(85). –С. 199–206.

[31] *Пименов В. Г.* Функционально-дифференциальные уравнения в биологии и медицине. Учебное пособие. –Екатеринбург, 2008. –92 с.

[32] *Псху А. В.* Краевые задачи для дифференциальных уравнений с частными производными дробного и континуального порядка. –Нальчик: Изд-во КБНЦ РАН, 2005. –185 с.

[33] *Псху А. В.* К теории оператора интегро-дифференцирования континуального порядка // Дифференц. уравнения. –2004. –Т. 40, № 1. –С. 120–127.

[34] *Псху А. В.* Начальная задача для линейного обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка // Матем. сб. –2011. –Т. 202, № 4. –С. 111–122.

[35] *Псху А. В.* Уравнения в частных производных дробного порядка. –М.: Наука, 2005. –199 с.

[36] *Псху А. В.* Фундаментальное решение диффузионно-волнового уравнения дробного порядка // Изв. РАН. Сер. матем. –2009. –Т. 73, вып. 2. –С. 141–182.

[37] *Псху А. В.* Фундаментальное решение обыкновенного дифференциального уравнения континуального порядка // Доклады АМАН. –2007. –Т. 9, №. 1. –С. 73–78.

[38] *Псху А. В.* Задача Коши для дифференциального уравнения континуального порядка // Доклады АМАН. –2005. –Т. 7, № 2. –С. 45–49.

[39] *Романовский Р. К., Назарук Е. М.* Прямой метод Ляпунова для линейных систем функционально-дифференциальных уравнений в пространстве Соболева // Сиб. матем. журн. –2014. –Т. 55, № 4. –С. 851–862.

[40] *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. –Минск.: Наука и техника, 1987. –688 с.

[41] *Стеклов В. А.* Основные задачи математической физики. –М.: Наука, 1983. –433 с.

[42] *Стеклов В. А.* Основные задачи математической физики. Ч. 1. Первое издание. –Петербург: Рос. гос. акад. тип, 1922. –285 с.

[43] *Стеклов В. А.* Основные задачи математической физики. Ч. 2. Первое издание. –Петербург: Рос. гос. акад. тип, 1923. –285 с.

[44] *Учайкин В. В.* Метод дробных производных. –Ульяновск: Изд. «Артишок», 2008. –512 с.

[45] *Федоров В. Е., Омельченко Е. А.* Линейные уравнения соболевского типа с интегральным оператором запаздывания // Изв. вузов. Матем. –2014. № 1. –С. 71–81.

[46] *Федоров В. Е., Омельченко Е. А.* Неоднородные линейные уравнения соболевского типа с запаздыванием // Сиб. матем. журн. –2012. –Т. 53, № 2. –С. 418–429.

[47] *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений: пер. с англ. –М.: Мир, 1984. –421 с.

[48] *Хромов А. П.* Разложение по собственным функциям обыкновенных линейных дифференциальных операторов в конечном интервале // Докл. АН СССР. –1962. –Т. 146, № 6. –С. 1294–1297.

[49] *Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. –М.: Наука, 1971. –296 с.

[50] *Эфендиев Б. И.* Задача Дирихле для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с оператором распределенного дифференцирования // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. –2019. –Т. 29, № 4. –С. 48–57.

[51] *Эфендиев Б. И.* Задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с континуальной производной. // Дифференц. уравнения. –2011. –Т. 47, № 9. –С. 1364–1368.

[52] *Эфендиев Б. И.* Задача Неймана для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с оператором распределенного дифференцирования // Известия КБНЦ РАН. –2019. № 5. –С. 30–37.

[53] *Эфендиев Б. И.* Начальная задача для непрерывного дифференциального уравнения второго порядка // Дифференц. уравнения. –2014. –Т. 50, № 4. С. 564–568.

[54] *Agarwal R., Hristova S., O'Regan D.* Explicit solutions of initial value problems for linear scalar Riemann – Liouville fractional differential equations with a constant delay // Mathematics. –2020. –Vol. 32, no. 8(1).

[55] *Agarwal R. P., Benchohra M., Hamani S.* Boundary value problems for fractional differential equations // Georgian Mathematical Journal. –2009. –Vol. 16, no. 3. –Pp. 401–411.

[56] *Bagley R. L.,Torvik P. J.* On the appearance of the fractional derivative in the behavior of real materials. Journal of applied mechanics. –1984. –Vol. 51. –Pp. 294–298.

[57] *Banas J., Zajac T.* A new approach to the theory of functional integral equations of fractional order // J. Math. Anal. Appl. –2011. –Vol. 375, no. 2. –Pp. 375–387.

[58] *Barrett J. H.* Differential equations of non-integer order // Canadian J. Math. –1954. –Vol. 6, no. 4. –Pp. 529–541.

[59] *Bellman R. E., Cooke K. L.*Differential-difference equations. –New York. London: Acad. Press, 1963. –462 p.

[60] *Bogatyreva F. T.* Boundary value problem with shift for an ordinary differential equation with the Dzhrbashyan-Nersesyan fractional differentiation operator // Differential equations. –2014. –Vol. 50, no. 2. –Pp. 162–168.

[61] *Caputo M.* Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent, Part II // Geophys. J. R. Astr. Soc. –1967. –Vol. 13. –Pp. 529–539.

[62] *Falbo C. E.* Some elementary methods for solving functional differential equations // Geophys. J. R. Astr. Soc. –1967. –Vol. 13. –Pp. 529–539.

[63] *Fedorov V. E., Omelchenko E. A.* On solvability of some classes of Sobolev type equations with delay // Functional diff. equat. –2011. –Vol. 18, no. 3–4. –Pp. 187–199.

[64] *Fedorov V. E, Plekhanova M. V, Izhberdeeva E. M.* Initial value problems of linear equations with the Dzhrbashyan–Nersesyan derivative in Banach spaces // Symmetry. –2021. –Vol. 13, no. 6. –Pp. 1058.

[65] *Gadzova L. Kh.* Dirichlet and Neumann problems for a fractional ordinary differential equation with constant coefficients // Differential equations. –2015. –Vol. 51, no. 12. –Pp. 1556–1562.

[66] *Garra R., Garrappa R.* The Prabhakar or three parameter Mittag-Leffler function: Theory and application // Commun Nonlinear Sci Numer Simulat. –2018. –Vol. 56. –Pp. 314–329.

[67] *Garrappa R., Kaslik E.* On initial conditions for fractional delay differential equations // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. –2020. –Vol. 90. 105359.

[68] *Gorenflo R., Mainardi F.* Fractional calculus: integral and differential equations of fractional order // A. Carpinteri, F. Mainardi (Eds.), Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics. –1997. –Pp. 223–276.

[69] *Handbook* of Fractional Calculus with Applications (edited by Jose Antonio, Tenreiro Machado). De Gruyter. 2019. URL: https://www.degruyter.com/document/doi/10.1515/9783110571622/pdf.

[70] *Heymans N., Podlubny I.* Physical interpretation of initial conditions for fractional differential equations with Riemann – Liouville fractional derivatives // Rheol Acta. –2006. –Vol. 45. –Pp. 765–771.

[71] *Hilfer R.* Applications of fractional calculus in physics. –Wspc, 2000. –472 p.

[72] *Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J.* Theory and applications of fractional differential equations // North-Holland Math. Stud., Elsevier, Amsterdam. –2006. –Vol. 204.

[73] *Li M., Wang J.* Finite time stability of fractional delay differential equations // Applied Mathematics Letters. –2017. –Vol. 64. –Pp. 170–176.

[74] *Li M., Wang J.* Representation of solution of a Riemann – Liouville fractional differential equation with pure delay // Applied Mathematics Letters. –2018. –Vol. 85. –Pp. 118–124.

[75] *Love E. R., Young L. C.* On fractional integration by parts // Proceedings of the London Mathematical Society. –1938. –Pp. 1–35.

[76] *Mainardi F., Gorenflo R.* The Mittag-Leffler function in the Riemann – Liouville fractional calculus // Boundary value problems, special functions and fractional calculus (Ed. A. A.Kilbas). Byelorussian State University. Minsk. –1996. –Pp. 215–225.

[77] *Mamchuev M. O.* Cauchy problem for a linear system of ordinary differential equations of the fractional order // Mathematics. –2020. –Vol. 8, no. 9. –Pp. 1475.

[78] *Miller K. S., Ross B.* An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. –New York: Wiley, 1993.

[79] *Naifar O., Nagy A. M., Makhlouf A. B., Kharrat M., Hammami M. A.* Finite-time stability of linear fractional-order time-delay systems // Int J Robust Nonlinear Control. –2019. –Vol. 29. –Pp. 180–187.

[80] *Oldham K. B., Spanier J.* The fractional calculus // –New York. London: Acad. press., 1974.

[81] *Ozturk I.* On the theory of frational differential equation // Reports of Adydhe (Circassian) International Academy of Sienses. –1998. –Vol. 3, No 2. –P. 35–39.

[82] *Podlubny I.* Fractional Differential Equations. Academic press. –1999. –Vol. 198.

[83] *Podlubny I.* Fractional derivatives: history, theory, application, symposium on applied fractional calculus. –Badajos, Spain, October 17–20, 2007.

[84] *Prabhakar T. R.* A singular integral equation with a generalized Mittag-Leffler function in the kernel // Yokohama Math. J. –1971. –Vol. 19. –Pp. 7–15.

[85] *Rihan F. A., Arafa A. A., Rakkiyappan R., Rajivganthi C., Xu Y.* Fractional-order delay differential equations for the dynamics of hepatitis C virus infection with $IFN-\alpha$ treatment // Alexandria Engineering Journal. –2021. –Vol. 60, no. 5. –Pp. 4761–4774.

[86] *Rus I. O., Darzu-Ilea V.* First order functional-differential equations with both advanced and retarted arguments // Fixed point theory. –2004. –Vol. 5, no. 1. –Pp. 103–115.

[87] *Shukla A. K., Prajapati J. C.* On a generalization of Mittag-Leffler function and its properties // J. Math. Anal. Appl. –2007. –Vol. 336. –Pp. 797–811.

[88] *Tarasov V. E.* Fractional dynamics: applications of fractional calculus to dynamics of particles, fields and media (Nonlinear physical science). Springer; 2011-th edition, 2011.

[89] *Uchaikin V. V.* Fractional derivatives for physicists and engineers // Higher Education Press, Springer. –Beijing, Berlin. 2013.

[90] *Wright E. M.* On the coefficients of power series having exponential singularities // J. London Math. Soc. –1933. –Vol. 8, no. 29. –Pp. 71–79.

[91] *Wright E. M.* The asymptotic expansion of the generalized hypergeometric function // J. London Math. Soc. –1935. –Vol. 10. –Pp. 286–293.

[92] *Wright E. M.* The generalized Bessel function of order greater than one // Quart. J. Math., Oxford Ser. –1940. –Vol. 11. –Pp. 36–48.

[93] *Zhang X.* Some results of linear fractional order time-delay system // Appl. Math. Comp. –2008. –Vol. 197, no. 1. –Pp. 407–411.

Публикации по теме диссертации

[94] *Мажгихова М. Г.* Начальная задача для дифференциального уравнения дробного порядка с запаздывающим аргументом // Доклады АМАН. –2014. –Т. 16, № 1. –С. 28–30.

[95] *Мажгихова М. Г.* Начальная задача для обыкновенного дифференциального уравнения с производной Римана – Лиувилля с запаздывающим аргументом // Ученые записки ОГУ. –2015. –Т. 67, № 4. –С. 46–47.

[96] *Мажгихова М. Г.* Задача Дирихле для дифференциального уравнения дробного порядка с запаздывающим аргументом // Доклады АМАН. –2015. –Т. 17, № 2. –С. 42–47.

[97] *Мажгихова М. Г.* Интегральные представления и асимптотические формулы для обобщенной функции Миттаг-Леффлера // Доклады АМАН. –2016. –Т. 18, № 1. –С. 6–10.

[98] *Мажгихова М. Г.* Задача Неймана для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка с запаздывающим аргументом // Известия КБНЦ РАН. –2016. –Т. 70, № 2. –С. 15–20.

[99] *Мажгихова М. Г.* Задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения с оператором Римана – Лиувилля с запаздывающим аргументом // Известия КБНЦ РАН. –2017. –Т. 75, № 1. –С. 24–28.

[100] *Мажгихова М. Г.* Задача Дирихле для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка с запаздывающим аргументом // Дифференц. уравнения. –2018. –Т. 54, № 2. –С. 187–194.

[101] *Мажгихова М. Г.* Краевые задачи для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка с запаздывающим аргументом // Сиб. электрон. матем. изв. –2018. –Т. 15. –С. 685–695.

[102] *Мажгихова М. Г.* Начальная и краевая задачи для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка с запаздывающим аргументом // Челябинский физ.-матем. журн. –2018. –Т. 3, № 1. –С. 27–37.

[103] *Мажгихова М. Г.* Краевая задача со смещением для дифференциального уравнения дробного порядка с запаздывающим аргументом // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. –2019. –Т. 28, № 3. –С. 16–25.

[104] *Mazhgikhova M. G.* Green function method for a fractional–order delay differential equation // Bulletin of the Karaganda University. –2020. –Vol. 97, no. 1. –Pp. 15–20.

[105] *Мажгихова М. Г.* Краевая задача со смещением для линейного обыкновенного дифференциального уравнения с производной Римана – Лиувилля с запаздывающим аргументом // Известия Чеченского государственного университета. –2020. –Т. 20, № 4. –С. 12–18.

[106] *Мажгихова М. Г.* Задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка с переменным запаздыванием // Доклады АМАН. –2021. –Т. 21, № 3. –С. 16–20.

[107] *Мажгихова М. Г.* Задача Стеклова первого класса для дифференциального уравнения дробного порядка с запаздывающим аргументом // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. –2021. –Т. 12, № 1. –С. 5–12.

[108] *Mazhgikhova M. G.* Steklov problem for a linear ordinary fractional delay differential equation with Riemann – Liouville derivative // Bulletin of the Karaganda University. –2022. –Vol. 106, no. 2. –Pp. 161–171.

[109] *Мажгихова М. Г.* Задача Коши для уравнения с дробной производной Джрбашяна – Нерсесяна с запаздывающим аргументом // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. –2023. –Т. 42, № 1. –С. 98–107.

[110] *Mazhgikhova M. G.* Generalized Sturm problem for a linear fractional differential equation // Lobachevskii Journal of Mathematics. –2023. –Vol. 44, no. 2. –Pp. 629–633.

[111] *Мажгихова М. Г.* Начальная задача для уравнения с переменными коэффициентами с производной Джрбашяна – Нерсесяна и с переменным запаздыванием // Доклады АМАН. –2023. –Т. 23, № 2. –С. 11–17.

Материалы конференций

[112] *Мажгихова М. Г.* Задача Коши для модельного уравнения дробного порядка с запаздывающим аргументом // X Школа молодых ученых «Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатики». –Эльбрус, 2012. –С. 76–79.

[113] *Мажгихова М. Г.* Начальная задача для дифференциального уравнения дробного порядка с сосредоточенным запаздыванием // Математическое моделирование фрактальных процессов, родственные проблемы анализа и информатики: Материалы Второй Всероссийской конференции молодых ученых. –Терскол, 2012. –С. 151.

[114] *Mazhgikhova M. G.* Initial value problem for differential equation of fraction order with delay // International Conference on Actual Problems of Mathematics and Informatics. –Baku, 2013. –P. 80.

[115] *Мажгихова М. Г.* Задача Штурма – Лиувилля для дифференциального уравнения дробного порядка с запаздывающим аргументом // XI Школа молодых ученых «Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатики». –Нальчик, 2013. –С. 45–46.

[116] *Мажгихова М. Г.* Краевая задача для дифференциального уравнения дробного порядка с запаздывающим аргументом // Всероссийская научная конференция молодых ученых «Современные вопросы математической физики, математической биологии и информатики». –Нальчик, 2014. –С. 82–83.

[117] *Мажгихова М. Г.* Начальная задача для дифференциального уравнения дробного порядка с запаздывающим аргументом // XII Школа молодых ученых «Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатики». –Нальчик, 2014. –С.49–51.

[118] *Mazhgikhova M. G.* The Dirichlet problem for an ordinary differential equation of fractional order with delay // International Russian-Chinese

Conference "On Actual Problems of Applied Mathematics and Physics" and School for Young Scientists "Nonlocal Boundary Problems and Modern Problems of Algebra, Analysis and Informatics". – Elbrus, 2015. –P. 134–135.

[119] *Мажгихова М. Г.* Задачи Дирихле и Неймана для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка с запаздывающим аргументом // XIII Международная научная конференция «Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование». –Дивноморское, 2016. –С. 127–129.

[120] *Мажгихова М. Г.* Задача Штурма – Лиувилля для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка с запаздывающим аргументом // Международная конференция «Актуальные проблемы прикладной математики и автоматизации» и XIV Школа молодых ученых «Нелокальные краевые задачи и современные проблемы анализа и информатики». –Терскол, 2016. –С. 188–190.

[121] *Мажгихова М. Г.* Задача Неймана для обыкновенного дифференциального уравнения с оператором Римана – Лиувилля с запаздывающим аргументом // Международная научная конференция «Актуальные проблемы прикладной математики и физики». –Нальчик-Терскол, 2017. –С. 139.

[122] *Мажгихова М. Г.* Задача Дирихле для обыкновенного дифференциального уравнения с оператором Римана – Лиувилля с запаздывающим аргументом // Ежегодная научная апрельская конференция Института математики и математического моделирования, посвященная дню науки, и Научный семинар «Дифференциальные операторы и моделирование сложных систем» (DOMCS-2017), посвященный 70-летнему юбилею профессора М. Т. Дженалиева. –Алматы, 2017. –С. 103–104.

[123] *Мажгихова М. Г.* Краевая задача с условиями третьего рода для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка с запаздывающим аргументом // IV Международная научная конференция «Акту-

альные проблемы прикладной математики». –Нальчик-Эльбрус, 2018. –С. 169.

[124] *Мажгихова М. Г.* Краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка с запаздывающим аргументом // XIV Владикавказской молодежной математической школы. –Н. Цей, 2018. –С. 37–38.

[125] *Мажгихова М. Г.* Краевая задача со смещением для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка с запаздывающим аргументом // Международная научно-практическая конференция «Современная математика и ее приложения». –Грозный, 2018. –С. 94–95.

[126] *Мажгихова М. Г.* Краевая задача со смещением для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка с запаздывающим аргументом // V Международная научная конференция «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики». –Нальчик, 2018. –С. 129.

[127] *Mazhgikhova M. G.* Boundary value problem for delay differential equation of fractional order // Modern methods, problems and applications of operator theory and harmonic analysis – IX. –Rostov-on-Don, 2019. –P. 64.

[128] *Мажгихова М. Г.* Краевая задача со смещением для линейного обыкновенного дифференциального уравнения с производной Римана – Лиувилля с запаздывающим аргументом // XV Владикавказская молодежная математическая школа «Современные проблемы математики и математического образования». 2020. –С. 223-224.

[129] *Мажгихова М. Г.* Краевая задача со смещением для линейного обыкновенного дифференциального уравнения с производной Римана – Лиувилля с запаздывающим аргументом // Математический форум (Итоги науки. Юг России). 2020. Т. 13. –С. 308–309.

[130] *Мажгихова М. Г.* Краевая задача со смещением для линейного обыкновенного дифференциального уравнения с производной Римана – Лиувилля с запаздывающим аргументом // Республиканская научная конференция с участием зарубежных ученых «Современные методы математической физики и их приложения». –Ташкент, 2020. –С. 148.

[131] *Мажгихова М. Г.* Начальная задача для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка с переменным запаздыванием // VI Международная научная конференция «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики». –Нальчик, 2021. –С. 127.