На правах рукописи

Мухаметрахимова Альбина Ишбулдовна

Сходимость и асимптотики для задач в областях с непериодической перфорацией вдоль заданного многообразия

1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико–математических наук

УФА–2025

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы»

Научный руководитель: **Борисов Денис Иванович**,
доктор физико-математических наук

Официальные оппоненты: **Шамаев Алексей Станиславович**,
доктор физико-математических наук, профессор,
главный научный сотрудник лаборатории механики управляемых систем ФГБУН Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН

Дородный Марк Александрович,
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики и математической физики
ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет»

Ведущая организация: ФГБОУ ВО «Владимирский государственный университет имени А.Г. и Н.Г. Столетовых», г. Владимир

Защита состоится 24 декабря 2025 г. в 14-00 часов на заседании объединенного диссертационного совета 99.0.110.02, созданного на базе ФГБНУ Уфимский федеральный исследовательский центр Российской академии наук, ФГБОУ ВО «Уфимский университет науки и технологий», по адресу: 450008, г. Уфа, ул. К. Маркса, д. 12.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБОУ ВО «Уфимский университет науки и технологий» и на сайте https://uust.ru/

Автореферат разослан «_____» _______________ 2025 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
д.ф.-м.н. Исаев Константин Петрович

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность и степень разработанности темы. Одним из активно развивающихся направлений теории усреднения является изучение краевых задач в перфорированных областях. Опишем постановку таких задач. Рассматриваются многомерные области, необязательно ограниченные, в которых устраивается перфорация малыми отверстиями. Размеры отверстий и расстояния между ними контролируются одним или несколькими малыми параметрами. При уменьшении этих параметров отверстия располагаются гуще, уменьшаются размеры отверстий и расстояния между ними. Такая перфорация может устраиваться по всей рассматриваемой области или на некоторой её части. В такой перфорированной области рассматриваются краевые задачи для эллиптических уравнений. На границах отверстий ставится одно из классических граничных условий. Основной целью исследований является описание поведения решений рассматриваемых задач при измельчении перфорации.

Краевые задачи в перфорированных областях исследовались многими учеными. Не имея возможности их всех перечислить, для примера упомянем лишь некоторых: В. А. Марченко, Е. Я. Хруслов, В. В. Жиков, О. А. Олейник, Т. А. Шапошникова, F. Murat, D. Cioranescu и многие другие. Основные классические результаты, полученные для краевых задач в перфорированных областях, — доказательство сходимости решений рассматриваемых задач к решениям некоторых усредненных задач. Для каждой фиксированной правой части уравнения решение возмущенной задачи сходилось к решению усредненной в L_2 или W_2^1 в сильном или слабом смысле.

В настоящей диссертации рассматриваются краевые задачи в областях, перфорированных вдоль заданного многообразия. Подобные задачи также исследовались многими учеными, например, А. Г. Беляев, О. А. Олейник, А. Л. Пятницкий, Г. А. Чечкин, Т. А. Чечкина, Т. А. Шапошникова, Y. Amirat, O. Bodart, J. I. Diaz, D. Gomez, D. Gomez-Castro, A. Meidell, M. Lobo, L. E. Persson, M. E. Perez и другие.

На языке спектральной теории неограниченных операторов упомянутые выше классические результаты о сходимости решений означают наличие сильной или слабой резольвентной сходимости. В последние 20 лет в теории усреднения развивается новое направление исследований: появились работы, в которых для возмущенных задач была доказана более сильная, равномерная резольвентная сходимость и были установлены операторные оценки. Суть таких оценок заключались в том, что L_2- или W_2^1-норма разности решений возмущенной и усредненной задач оценивалась через L_2-норму правой части уравнения, умноженной на малую величину. Подобного сорта оценки для операторов с быстро осциллирующими коэффициентами были получены в работах М.Ш. Бирмана, В. В. Жикова, С. Е. Пастуховой, Т. А. Суслиной, Н. Н. Сеника, G. Griso, C. E. Kenig, F. Lin, Z. Shen. Для задач теории граничного усреднения вопросы равномерной резольвентной сходимости изучались в работах Д. И. Борисова.

Цели и задачи исследования. В диссертации рассматривается краевая задача для эллиптического уравнения второго порядка с переменными коэффициентами в многомерной области, перфорированной вдоль заданного многообразия. Размерность области не меньше трёх, при этом область может быть как ограниченной, так и неограниченной. Предполагается, что перфорация имеет существенно непериодическую структуру. На границах полостей ставятся условия Дирихле или Неймана, либо третье нелинейное краевое условие.

Основная цель — описать усредненные задачи для двух типичных случаев перфорации и заданных граничных условий на границах полостей, доказать сходимость решений, установив подходящую операторную оценку. В случае периодической перфорации целью является построение полной асимптотики решений.

Методология и методы исследования. Методика исследования основана на использовании теорем о повышении гладкости для эллиптических краевых задач, методе монотонных операторов, позволяющих доказать разрешимость краевых задач с нелинейным третьим краевым условием. Также используются интегральные тождества, соответсвующие возмущенной и усредненной задачам. На их основе для разности решений возмущенной и усредненной задач выписывается подходящее интегральное тождество с правой частью. При этом нередко используются специальные корректоры, чтобы удовлетворить краевым условиям Дирихле на границах полостей. Для оценки правых частей в интегральных тождествах используется серия локальных оценок для функций из пространств Соболева. Данные оценки минимально используют форму полостей, а также совсем не используют никакой информации об их расположении. Это и дает возможность рассмотреть непериодическую перфорацию.

В случае периодической перфорации асимптотические разложения решений строятся в два этапа. Вначале проводится формальное построение асимптотик, затем формальные асимптотики обосновываются. Формальное построение проводится на основе метода согласования асимптотических разложений, метода пограничного слоя и метода многих масштабов.

Положения, выносимые на защиту. Основные результаты диссертационной работы состоят в следующем:

1. Рассмотрена краевая задача для эллиптического уравнения второго порядка в многомерной области с произвольной непериодической перфорацией вдоль заданного многообразия; на границах полостей произвольно ставятся условие Дирихле и третье нелинейное краевое условие. Найдены достаточно слабые условия на формы всех полостей и распределение полостей с краевым условием Дирихле, гарантирующие, что при усреднении полости пропадают, а на многообразии возникает условие Дирихле. Доказана сходимость решения возмущенной задачи к решению усредненной в норме пространства W_2^1 равномерно по L_2–норме правой части уравнения и получена оценка скорости сходимости.

2. Рассмотрена краевая задача для эллиптического уравнения второго порядка в многомерной области с произвольной непериодической перфорацией вдоль заданного многообразия; на границах полостей ставятся третье нелинейное краевое условие. Найдены достаточно слабые условия на формы всех полостей и распределение полостей, гарантирующие, что при усреднении полости пропадают, а на многообразии возникает условие Неймана либо третье нелинейное краевое условие. В случае усредненного третьего краевого условия явно найдена нелинейная функция в этом условии. Во обоих случаях доказана сходимость решения возмущенной задачи к решению усредненной в норме пространства W_2^1 равномерно по L_2–норме правой части уравнения и получены соответствующие оценки скорости сходимости.

3. В условиях двух предыдущих пунктов отдельно рассмотрен случай, когда перфорация строго периодическая и производится вдоль гиперплоскости. В таком предположении построена строится полное асимптотическое разложение решения как для случая усредненного условия Дирихле, так и для случаев усредненных условий Ней-

мана или нелинейного третьего краевого условия.

Научная новизна. Основные научные результаты диссертации являются новыми.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты диссертации носят теоретический характер и могут быть использованы при изучении задач математической физики. Методика исследования, применявшаяся в диссертации, может быть использована при изучении других краевых задач в теории усреднения.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на конференциях: Международная математическая конференция по теории функций (Уфа, 2017 г.), Международная конференция "Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения" (оз. Яктыкуль (Банное) 2018 г., 2019 г. и 2021 г.), Международная конференция "Спектральная теория и смежные вопросы" (Уфа, 2018 г.), IX Международная школа–конференция "Фундаментальная математика и её приложения в естествознании" (Уфа, 2020 г.), XXVII и XXVIII Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов–2020" и "Ломоносов–2021" (Москва, 2020 г. и 2021 г.), Международная конференция "Дифференциальные уравнения, математическое моделирование и вычислительные алгоритмы" (Белгород, 2021 г.), Конференция И. Г. Петровского "Дифференциальные уравнения и смежные вопросы" (Москва, 2021 г.), 14–ая Санкт–Петербургская конференция по спектральной теории, посвящённая памяти М.Ш. Бирмана (Санкт–Петербург, 2023 г.).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1], [2], [3], [4], [5].

Личный вклад автора. В статье [1] Борисову Д.И. принадлежит постановка задачи и утверждение в основных теоремах о точности по порядку доказанных операторных оценок. Диссертанту принадлежат результаты об операторных W_2^1–оценках. В статье [2] Борисову Д.И. принадлежит постановка задачи и доказательство вспомогательных лемм 3.1, 4.4. Остальная часть результатов работы [2] принадлежит диссертанту. В статье [3] Борисову Д.И. принадлежит постановка задачи и доказательство вспомогательной леммы 7.4. Остальная часть результатов работы [3] принадлежит диссертанту. В статье [4] Д.И. Борисову принадлежит постановка задачи и доказательство L_2–операторных оценок. Остальная часть результатов работы [4] принадлежит диссертанту.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, пяти глав, разбитых в совокупности на 18 параграфов и списка литературы, содержащего 75 наименований. Общий объем диссертации – 195 страниц.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — декартовы координаты в $\mathbb{R}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — область с границей класса C^2. Область Ω может быть как ограниченной, так и неограниченной. Обозначим через $S \subset \Omega$ ориентируемое многообразие без края класса C^3 коразмерности 1 без самопересечений, которое либо замкнуто, либо бесконечно. Пусть ε — малый положительный параметр, $\eta = \eta(\varepsilon)$ — некоторая функция, удовлетворяющая неравенству $0 < \eta(\varepsilon) \leqslant 1$.

В окрестности многообразия S произвольно выберем точки M_k^ε, $k \in \mathbb{M}^\varepsilon$, где множество индексов $\mathbb{M}^\varepsilon$ не более, чем счётно, а для самих точек выполнено условие

$$\operatorname{dist}(M_k^\varepsilon, S) \leqslant R_0\varepsilon, \tag{1}$$

с положительной константой R_0, не зависящей от k и ε. Пусть $\omega_{k,\varepsilon} \subset \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{M}^\varepsilon$ — ограниченные области с границами класса C^2; допускается зависимость этих областей от ε. Обозначим:

$$\omega_k^\varepsilon := \big\{x : \ (x - M_k^\varepsilon)\varepsilon^{-1}\eta^{-1}(\varepsilon) \in \omega_{k,\varepsilon}\big\}, \qquad \theta^\varepsilon := \bigcup_{k \in \mathbb{M}^\varepsilon} \omega_k^\varepsilon.$$

Из области Ω вырежем полости ω_k^ε, $k \in \mathbb{M}^\varepsilon$ и такую область обозначим через Ω^ε, то есть, $\Omega^\varepsilon := \Omega \setminus \theta^\varepsilon$. Пример перфорированной области приведен на рис. 1.

Введённая область Ω^ε содержит перфорацию малыми полостями ω_k^ε, расположенными вдоль многообразия S. На размеры, форму и расположение этих полостей в диссертации налагается несколько естественных условий общего характера. Точные формулировки этих условий мы приведём позднее, пока лишь отметим, что все полости ω_k^ε мы считаем попарно непересекающимися с минимальным расстоянием между ними порядка $O(\varepsilon)$. Перейдём к постановке рассматриваемой задачи.

Через $A_{ij}=A_{ij}(x)$, $A_i=A_i(x)$, $A_0=A_0(x)$ обозначим функции, заданные в Ω и удовлетворяющие условиям

$$
\begin{aligned}
&A_{ij}\in W^1_\infty(\Omega), \qquad A_j, A_0\in L_\infty(\Omega),\\
&A_{ij}=A_{ji}, \qquad\qquad i,j=1,\ldots,n,\\
&\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x) z_i\overline{z_j}\geqslant c_0|z|^2, \qquad x\in\Omega, \qquad z=(z_1\ldots,z_n)\in\mathbb{C}^n,
\end{aligned}
\tag{2}
$$

где $c_0>0$ — некоторая константа, не зависящая от x и z. Функции A_{ij} считаем вещественнозначными, а функции A_j, A_0 — комплекснозначными. Пусть $a=a(x,u)$ — комплекснозначная функция, заданная для $u\in\mathbb{C}$ и $x\in\Sigma:=\{x:\,\operatorname{dist}(x,S)\leqslant\tau_0\}$, где $\tau_0>0$ — некоторое фиксированное число. Будем считать, что функция a кусочно–непрерывна по $(x,u)\in\Sigma\times\mathbb{C}$ и удовлетворяет условиям

$$
|a(x,u_1)-a(x,u_2)|\leqslant a_0|u_1-u_2|, \qquad a(x,0)=0, \tag{3}
$$

где a_0 — некоторая константа, не зависящая от $x\in\Sigma$ и $u_1,u_2\in\mathbb{C}$. Пусть f — произвольная функция из $L_2(\Omega)$, а λ — вещественное число.

Разобъем все полости произвольным образом на два типа:

$$
\theta^\varepsilon=\theta^\varepsilon_{\mathrm{D}}\cup\theta^\varepsilon_{\mathrm{R}}, \qquad \theta^\varepsilon_\natural=\bigcup_{k\in\mathbb{M}^\varepsilon_\natural}\omega^\varepsilon_k, \qquad \natural\in\{\mathrm{D},\mathrm{R}\},
$$

где $\mathbb{M}^\varepsilon_{\mathrm{D}}\cap\mathbb{M}^\varepsilon_{\mathrm{R}}=\emptyset$, $\mathbb{M}^\varepsilon_{\mathrm{D}}\cup\mathbb{M}^\varepsilon_{\mathrm{R}}=\mathbb{M}^\varepsilon$, то есть, $\mathbb{M}^\varepsilon_{\mathrm{D}}$ и $\mathbb{M}^\varepsilon_{\mathrm{R}}$ — некоторое произвольное разбиение множества $\mathbb{M}^\varepsilon$.

Основной объект исследования настоящей диссертации — краевая задача

$$
\begin{aligned}
&(\hat{\mathcal{H}}-\lambda)u_\varepsilon=f \quad \text{в} \quad \Omega^\varepsilon, \qquad u_\varepsilon=0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega,\\
&u_\varepsilon=0 \quad \text{на} \quad \partial\theta^\varepsilon_{\mathrm{D}}, \qquad \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial\mathrm{n}}+a(\,\cdot\,,u_\varepsilon)=0 \quad \text{на} \quad \partial\theta^\varepsilon_{\mathrm{R}},
\end{aligned}
\tag{4}
$$

где дифференциальное выражение и производная по конормали заданы формулами

$$
\begin{aligned}
&\hat{\mathcal{H}}:=-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}A_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}+\sum_{j=1}^{n}A_j\frac{\partial}{\partial x_j}+A_0,\\
&\frac{\partial}{\partial\mathrm{n}}=\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}\nu_i\frac{\partial}{\partial x_j},
\end{aligned}
\tag{5}
$$

ν_i — i–ая компонента единичной нормали ν к $\partial\theta^\varepsilon$, направленная внутрь множества θ^ε.

Целью диссертации является изучение асимптотического поведения решения задачи (4) при $\varepsilon \to 0$. Такое поведение существенно зависит от геометрии перфорации и соотношения между размерами полостей и расстояний между ними, а именно, оно определяется распределением точек M_k^ε, формами областей $\omega_{k,\varepsilon}$ и поведением функции $\eta(\varepsilon)$ при малых ε. В диссертации мы рассмотрим два типичных случаях перфорации и для каждого из них опишем асимптотическое поведение решения. Каждый из случаев описывается определенными ограничениями на перфорацию, которые мы сформулируем ниже.

Начнем с общих, достаточно естественных геометрических ограничений на перфорацию, которые будут предполагаться выполненнными всюду в работе. На многообразии S зафиксируем сторону и соответствующее непрерывное поле нормалей. Через τ обозначим расстояние от точки до S, измеренное вдоль нормали, а через s — какие–нибудь локальные переменные на многообразии S. При таком определении переменная τ положительна для точек, расположенных со стороны многообразия S, определяемой выбранным полем нормалей.

Наше первое условие описывает регулярность многообразия S.

A1. Переменные (τ, s) корректно определены по крайней мере в области Σ. В этой же области равномерно ограничены якобианы перехода от переменных x к переменным (τ, s) и обратно, а также производные x по (τ, s) и производные (τ, s) по x вплоть до второго порядка.

Пусть $B_r(M)$ — открытый шар в $\mathbb{R}^n$ с центром в точке M радиуса r. На размеры и взаимное расположение полостей ω_k^ε наложим следующее условие.

A2. Существуют точки $M_{k,\varepsilon} \in \omega_{k,\varepsilon}$, $k \in \mathbb{M}^\varepsilon$, и числа $0 < R_1 < R_2$, $b > 1$, не зависящие от ε, такие что для достаточно малых ε выполнено:

$$\begin{aligned} &B_{R_1}(M_{k,\varepsilon}) \subset \omega_{k,\varepsilon} \subset B_{R_2}(0), && k \in \mathbb{M}^\varepsilon, \\ &B_{bR_2\varepsilon}(M_k^\varepsilon) \cap B_{bR_2\varepsilon}(M_i^\varepsilon) = \emptyset, && i, k \in \mathbb{M}^\varepsilon, \quad i \neq k. \end{aligned} \tag{6}$$

Для всех k и ε множества $B_{R_2}(0) \setminus \omega_{k,\varepsilon}$ связны.

В окрестности границ областей $\omega_{k,\varepsilon}$ введём локальную переменную ρ — расстояние от точки до границы $\partial\omega_{k,\varepsilon}$, измеренное в направлении внешней нормали. Следующее условие касается форм областей $\partial\omega_{k,\varepsilon}$.

A3. Существуют фиксированные константы $\rho_0 > 0$ и локальные переменные ς на $\partial\omega_{k,\varepsilon}$ такие, что переменные (ρ,ς) корректно определены по крайней мере на множествах

$$\{x:\, \mathrm{dist}(x,\partial\omega_{k,\varepsilon}) \leqslant \rho_0\} \setminus \omega_{k,\varepsilon} \subseteq B_{b_* R_2}(0), \qquad b_* := \frac{b+1}{2},$$

одновременно для всех $k \in \mathbb{M}^\varepsilon$, и на данных множествах равномерно ограничены якобианы перехода от переменных x к переменным (ρ,ς) и обратно, а также производные x по (ρ,ς) и производные (ρ,ς) по x.

Решение краевой задачи (4) будем понимать в обобщенном смысле. Обобщенным решением задачи (4) называется функция $u_\varepsilon \in W_2^1(\Omega^\varepsilon)$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\mathfrak{h}_a(u_\varepsilon, v) - \lambda(u_\varepsilon, v)_{L_2(\Omega^\varepsilon)} = (f, v)_{L_2(\Omega^\varepsilon)}$$

для любых $v \in \mathring{W}_2^1(\Omega^\varepsilon, \partial\Omega \cup \partial\theta_{\mathrm{D}}^\varepsilon)$, где

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{h}_a(u_\varepsilon, v) := \mathfrak{h}_0(u_\varepsilon, v) + (a(\,\cdot\,, u_\varepsilon), v)_{L_2(\partial\theta^\varepsilon)}, \\
&\mathfrak{h}_0(u_\varepsilon, v) := \sum_{i,j=1}^{n} \left(A_{ij}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}, \frac{\partial v}{\partial x_i}\right)_{L_2(\Omega^\varepsilon)} + \sum_{j=1}^{n}\left(A_j \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}, v\right)_{L_2(\Omega^\varepsilon)} \\
&\qquad + (A_0 u_\varepsilon, v)_{L_2(\Omega^\varepsilon)}
\end{aligned} \tag{7}$$

и $\mathring{W}_2^1(\Omega^\varepsilon, \partial\Omega \cup \partial\theta_{\mathrm{D}}^\varepsilon)$ — подпространство функций из $W_2^1(\Omega)$, обращающихся в нуль на $\partial\Omega$ и $\partial\theta_{\mathrm{D}}^\varepsilon$. Интеграл по границе $\partial\theta_{\mathrm{R}}^\varepsilon$ понимается в смысле следов. Далее будет показано, что благодаря условиям A1, A2, A3 такой след определён корректно.

Опишем первый случай. Здесь предполагаем, что ε и η связаны следующим соотношением:

$$\frac{\varepsilon}{\eta^{n-2}(\varepsilon)} \to +0, \qquad \varepsilon \to +0. \tag{8}$$

На распределение полостей из множества $\theta_{\mathrm{D}}^\varepsilon$ наложим следующее условие.

A4. Существует число $R_3 > bR_2$ такое, что

$$\Xi^\varepsilon \subset \bigcup_{k\in\mathbb{M}_{\mathrm{D}}^\varepsilon} B_{R_3\varepsilon}(M_k^\varepsilon), \qquad \Xi^\varepsilon := \{x : |\tau| < bR_2\varepsilon\}.$$

Введем еще одну краевую задачу:

$$(\hat{\mathcal{H}} - \lambda)u_0 = f \quad \text{в} \quad \Omega \setminus S, \qquad u_0 = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega \cup S. \tag{9}$$

Далее мы покажем, что она является усреднённой для задачи (4) при выполнении условий A4 и (8). Её решение также понимаем в обобщенном смысле. А именно, это функция $u_0 \in \mathring{W}_2^1(\Omega, \partial\Omega \cup S)$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\mathfrak{h}_0(u_0, v) - \lambda(u_0, v)_{L_2(\Omega)} = (f, v)_{L_2(\Omega)}$$

для любых $v \in \mathring{W}_2^1(\Omega, \partial\Omega \cup S)$.

Основным результатом диссертации об усреднении в первом случае является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть выполнены предположения A1, A2, A3, A4 и условие (8). Тогда существует λ_0, не зависящее от ε, η и f, такое, что при $\lambda < \lambda_0$ задачи (4), (9) однозначно разрешимы для всех $f \in L_2(\Omega)$ и верно неравенство*

$$\|u_\varepsilon - u_0\|_{W_2^1(\Omega^\varepsilon)} \leqslant C \left(\frac{\varepsilon}{\eta^{n-2}(\varepsilon)}\right)^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L_2(\Omega)}, \tag{10}$$

где константа C не зависит от ε, η и f, но зависит от λ.

Переходим ко второму случаю. Здесь предполагаем, что $\mathbb{M}_{\mathrm{D}}^\varepsilon = \emptyset$. Также считаем, что функция a удовлетворяет более жёстким условиям

$$\begin{gathered} \left|\frac{\partial a}{\partial \operatorname{Re} u}(x,u)\right| + \left|\frac{\partial a}{\partial \operatorname{Im} u}(x,u)\right| \leqslant a_0, \\ a(x,0) = 0, \qquad |\nabla_x a(x,u)| \leqslant a_1|u|, \end{gathered} \tag{11}$$

где a_0 и a_1 — некоторые константы, не зависящие от x и u.

Пусть $\zeta = \zeta(t)$, $t \in [0,1]$ — бесконечно дифференцируемая срезающая функция, принимающая значения из отрезка $[0,1]$, равная нулю при $|t| > 1$ и удовлетворяющая условию

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \zeta(|t|)\, dt = 1. \tag{12}$$

Через $M^\varepsilon_{k,\perp}$ обозначим проекции точек M^ε_k на поверхность S. На поверхности S определим функцию

$$\alpha^\varepsilon(x) = \begin{cases} \dfrac{\eta^{n-1}(\varepsilon)|\partial\omega_{k,\varepsilon}|}{R_2^{n-1}}\zeta\left(\dfrac{|x-M^\varepsilon_{k,\perp}|}{\varepsilon R_2}\right) & \text{при} \quad |x-M^\varepsilon_{k,\perp}|<\varepsilon R_2, \quad k\in\mathbb{M}^\varepsilon, \\ 0 & \text{в остальных точках} \quad S. \end{cases} \tag{13}$$

Обозначим: $\varpi := \left\{x\in\mathbb{R}^n : 0<\tau<\frac{\tau_0}{2}\right\}$. Пусть Φ — произвольная функция, заданная на S и являющаяся следом некоторой функции из $W_2^1(\varpi)$, то есть, $\Phi\in W_2^{\frac{1}{2}}(S)$. Ясно, что следующие две задачи однозначно разрешимы в $W_2^1(\varpi)$:

$$\begin{gathered} -\Delta U_\Phi^N + U_\Phi^N = 0 \quad \text{в} \quad \varpi, \\ \frac{\partial U_\Phi^N}{\partial\tau} = -\Phi \quad \text{на} \quad S, \qquad \frac{\partial U_\Phi^N}{\partial\nu} = 0 \quad \text{на} \quad \partial\varpi\setminus S, \end{gathered} \tag{14}$$

и

$$\begin{gathered} -\Delta U_\Phi^D + U_\Phi^D = 0 \quad \text{в} \quad \varpi, \\ U_\Phi^D = \Phi \quad \text{на} \quad S, \qquad \frac{\partial U_\Phi^D}{\partial\nu} = 0 \quad \text{на} \quad \partial\varpi\setminus S, \end{gathered} \tag{15}$$

где ν — единичная нормаль к поверхности $\partial\varpi\setminus S$, внешняя к области ϖ. Далее будет показано (см. лемму **??**), что следующая норма определена корректно по крайней мере на пространстве $L_\infty(S)$:

$$\|\alpha\|_S^2 := \sup_{\substack{\Phi\in W_2^{\frac{1}{2}}(S) \\ \Phi\neq 0}} \frac{\|U^N_{\alpha\Phi}\|^2_{W_2^1(\varpi)}}{\|U^D_\Phi\|^2_{W_2^1(\varpi)}}, \tag{16}$$

где α — произвольная функция из $L_\infty(S)$.

На функцию α^ε, определённую в (13), наложим следующее условие.

A5. Существуют ограниченная измеримая функция α^0, заданная на S и принадлежащая $W^1_\infty(S)$, и функция $\kappa=\kappa(\varepsilon)\to+0$ при $\varepsilon\to+0$ такие, что для всех достаточно малых ε верна оценка

$$\|\alpha^\varepsilon-\alpha^0\|_S \leqslant \kappa(\varepsilon).$$

Если выполнены условия A1, A2, A3 и одно из условий $a\equiv 0$ или $\eta(\varepsilon)\to 0$, $\varepsilon\to 0$, то при усреднении полости пропадают вместе с многообразием S, и усреднённая задача для (4) имеет вид:

$$(\hat{\mathcal{H}}-\lambda)u_0 = f \quad \text{в} \quad \Omega, \qquad u_0 = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega. \tag{17}$$

Если же η не стремится к нулю, а функция a произвольна, то при выполнении условий A1, A2, A3, A5 усреднённая задача для (4) имеет вид

$$(\hat{\mathcal{H}}-\lambda)u_0 = f \quad \text{в} \quad \Omega, \qquad u_0 = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega, \tag{18}$$

$$[u_0]_S = 0, \qquad \left[\frac{\partial u_0}{\partial \mathrm{n}}\right]_S - \alpha a(\,\cdot\,, u_0)\big|_S = 0, \tag{19}$$

где $[u]_S := u|_{\tau=+0} - u|_{\tau=-0}$ — скачок функции u на S. Производная по конормали здесь задается формулой из (5), в которой в качестве ν берется упомянутое выше поле нормалей на S. Отметим, что граничное условие (19) описывает нелинейное дельта–взаимодействие на поверхности S.

Решения задач (17) и (18), (19) также будем понимать в обобщенном смысле. Обобщенным решением краевой задачи (17) называется функция $u_0 \in \mathring{W}_2^1(\Omega, \partial\Omega)$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\mathfrak{h}_0(u_0, v) - \lambda(u_0, v)_{L_2(\Omega)} = (f, v)_{L_2(\Omega)}$$

для любых $v \in \mathring{W}_2^1(\Omega, \partial\Omega)$. Обобщенным решением краевой задачи (18), (19) называется функция $u_0 \in \mathring{W}_2^1(\Omega, \partial\Omega)$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\mathfrak{h}_0(u_0, v) - \lambda(u_0, v)_{L_2(\Omega)} + (\alpha a(\,\cdot\,, u_0), v)_{L_2(S)} = (f, v)_{L_2(\Omega)},$$

для любых $v \in \mathring{W}_2^1(\Omega, \partial\Omega)$.

Основные результаты диссертации об усреднении во втором случае сформулированы в следующих двух теоремах. Первая из них описывает ситуацию, когда при усреднении возникает задача (17).

Теорема 2. *Пусть выполнены предположения A1, A2, A3. Тогда существует λ_0, не зависящее от ε, такое, что при $\lambda < \lambda_0$ задачи (4) и (17) однозначно разрешимы для всех $f \in L_2(\Omega)$. Если дополнительно выполнено одно из условий*

$$a \equiv 0 \quad \text{или} \quad \eta(\varepsilon) \to 0, \quad \varepsilon \to 0, \tag{20}$$

то справедливы неравенства

$$\|u_\varepsilon - u_0\|_{W_2^1(\Omega^\varepsilon)} \leqslant C\big(\varepsilon\eta(\varepsilon) + \varepsilon^{\frac{1}{2}}\eta^{\frac{n}{2}}(\varepsilon)\big)\|f\|_{L_2(\Omega)}, \tag{21}$$

если $a \equiv 0$, *и*

$$\|u_\varepsilon - u_0\|_{W_2^1(\Omega^\varepsilon)} \leqslant C\big(\varepsilon\eta(\varepsilon) + \eta^{n-1}(\varepsilon)\big)\|f\|_{L_2(\Omega)}, \tag{22}$$

если $\eta(\varepsilon) \to 0$, $\varepsilon \to 0$, *где константы* C *не зависят от* ε *и* f, *но зависят от* λ.

Во второй теореме описывается ситуация, когда усреднение приводит к задаче (18), (19).

Теорема 3. *Пусть выполнены предположения A1, A2, A3, A5. Тогда существует* λ_0, *не зависящее от* ε, η *и* f, *такое, что при* $\lambda < \lambda_0$ *задачи (4) и (18), (19) однозначно разрешимы для всех* $f \in L_2(\Omega)$ *и имеет место неравенство:*

$$\|u_\varepsilon - u_0\|_{W_2^1(\Omega^\varepsilon)} \leqslant C\big(\varepsilon^{\frac{1}{2}} + \kappa(\varepsilon)\big)\|f\|_{L_2(\Omega)}, \tag{23}$$

где константа C *не зависит от* ε *и* f, *но зависит от* λ.

Вторая часть результатов диссертации посвящена построению асимптотического разложения решения задачи (4) в случае периодической перфорации. Пусть Ω — неограниченная область. Будем считать, что в окрестности гиперплоскости $x_n = 0$ эта область совпадает со слоем, а именно, существует $\tau_0 > 0$ такое, что

$$\Omega \cap \{x : |x_n| \leqslant \tau_0\} = \{x : |x_n| \leqslant \tau_0\}.$$

В качестве многообразия S возьмем гиперплоскость $\{x : x_n = 0\}$. Пусть M_{D}, M_{R} — некоторые фиксированные точки, ω_{D}, ω_{R} — некоторые фиксированные ограниченные множества с границей гладкости $C^{(2+\vartheta)}$ для некоторого фиксированного $\vartheta \in (0,1)$. Обозначим:

$$\Pi := \square \times \mathbb{R}, \qquad \square := \Big\{x : -\frac{b_i}{2} < x_i < \frac{b_i}{2},\, i = 1, \ldots, n-1\Big\},$$

где $b_i > 0$ — некоторые числа. Множества $\mathbb{M}_{\mathrm{D}}^\varepsilon$, $\mathbb{M}_{\mathrm{R}}^\varepsilon$ выберем следующим образом:

$$\mathbb{M}_\flat^\varepsilon := \Big\{\varepsilon(M_k + M_\flat),\ k \in \mathbb{Z}^{n-1}\Big\}, \qquad\qquad \flat \in \{\mathrm{R},\, \mathrm{D}\},$$

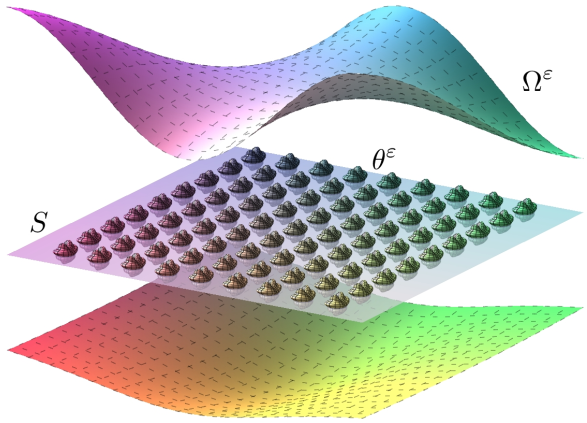

Рис. 1: Схематичный вид части области Ω^ε с периодической перфорацией.

$$M_k := (b_1 k_1, \dots, b_{n-1}k_{n-1}, 0), \qquad\qquad k := (k_1, \dots, k_{n-1}).$$

Точки M_k^ε из множества $\mathbb{M}_{\mathrm{D}}^\varepsilon$ пересчитываются мульти–индексом $k \in \mathbb{Z}^{n-1}$ и имеют вид $M_k^\varepsilon = \varepsilon(M_k + M_{\mathrm{D}})$ и аналогичные соотношения верны для точек из множества $\mathbb{M}_{\mathrm{R}}^\varepsilon$. Точкам $M_k^\varepsilon \in \mathbb{M}_{\mathrm{D}}^\varepsilon$ сопоставим множества $\omega_{k,\eta} := \omega_{\mathrm{D}}$, а точкам $M_k^\varepsilon \in \mathbb{M}_{\mathrm{R}}^\varepsilon$ — множества $\omega_{k,\eta} := \omega_{\mathrm{R}}$. Определим затем соответствующие множества $\theta_{\mathrm{D}}^\varepsilon$ и $\theta_{\mathrm{R}}^\varepsilon$. Пример перфорированной области приведен на рис. 1.1.

Пусть

$$f \in L_2(\Omega) \cap W_2^q(\Omega_{\tau_0}^+) \cap W_2^q(\Omega_{\tau_0}^-), \qquad \Omega_b^\pm := \{x : \ 0 < \pm x_n < b\}, \tag{24}$$

для всех $q \in \mathbb{N}$. Предполагаем, что $A_{ij} = 1$, $A_j = 0$, $A_0 = 0$ при $|x_n| \leqslant \tau_0$.

Через $\chi = \chi(x_n)$ обозначим бесконечно дифференцируемую срезающую функцию, равную нулю при $|x_n| < 1$ и единице при $|x_n| > 2$, и положим:

$$\chi^\varepsilon(x_n) = \begin{cases} \chi\left(x_n \varepsilon^{-\frac{1}{2}}\right), & |x_n| > \tau_0 \\ \quad 0, & |x_n| \leqslant \tau_0. \end{cases}$$

Отметим, что для введенной периодической перфорации выполнены условия A1, A2, A3, A4, A5. А именно, в качестве локальных переменных из условия A1 можно выбрать $\tau = x_n$, $s = x'$ и тогда условие A1 оказывается выполненным с произвольным τ_0. Так как все полости имеют одинаковые размеры, формы и их распределение вдоль S

периодические, то условия A2, A3, A4 также выполняются для рассматриваемого случая. В §1.3 будет показано, что условие A5 выполняется для локально–периодической перфорации. Если в рассматриваемом периодическом случае на границах полостей ставится только третье нелинейное граничное условие, то условие A5 выполняется, так как описанный выше случай строго периодического распределения полостей является частным случаем локально–периодической перфорации.

Асимптотика решения задачи (4) строится для двух описанных выше случаев перфорации. Опишем первый случай. Будем считать, что функция a не зависит от x, то есть, $a = a(u)$, и кроме того, эта функция является бесконечно дифференцируемой и удовлетворяет условию (3). Предположим, что для всех $\eta \in (0, 1]$ выполнено:

$$\begin{gathered}\overline{\omega_\flat^\eta} \subset \Pi, \qquad \operatorname{dist}(\omega_{\mathrm{D}}^\eta, \omega_{\mathrm{R}}^\eta) \geqslant R_4 > 0, \\ \omega_\flat^\eta := \big\{ x : \eta^{-1}(x - M_\flat) \in \omega_\flat \big\},\end{gathered} \tag{25}$$

где R_4 — некоторая фиксированная константа, не зависящая от η.

Рассмотрим систему краевых задач

$$\begin{aligned}&(\mathcal{L} - \lambda) u_m = 0 \quad \text{в} \quad \Omega \setminus S, \qquad u_m = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega, \quad m \in \mathbb{N}, \\ &u_m(x', +0, \eta) = \varphi_m^+(x', \eta), \quad x' \in \mathbb{R}^{n-1}, \\ &u_m(x', -0, \eta) = \varphi_m^-(x', \eta), \quad x' \in \mathbb{R}^{n-1},\end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned}&-\Delta_\xi v_1 = 0 \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^n \setminus \breve{\omega}^\eta, \qquad v_1 = 0 \quad \text{на} \quad \partial\omega_{\mathrm{D}}^\eta, \\ &\frac{\partial v_1}{\partial \nu_\xi} = 0 \quad \text{на} \quad \partial\breve{\omega}_{\mathrm{R}}^\eta,\end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned}&-\Delta_\xi v_m = f_m \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^n \setminus \breve{\omega}^\eta, \qquad v_m = 0 \quad \text{на} \quad \partial\breve{\omega}_{\mathrm{D}}^\eta, \\ &\frac{\partial v_m}{\partial \nu_\xi} = -\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial v_{m-1}}{\partial x_i} \nu_i - L_{m-1}(v_1, \ldots, v_{m-1}) \quad \text{на} \quad \partial\breve{\omega}_{\mathrm{R}}^\eta,\end{aligned} \tag{28}$$

$$v_m(\xi, x', \eta) = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j!} \frac{\partial^j u_{m-j}}{\partial x_n^j}(x', \pm 0, \eta) \xi_n^j + \varphi_m^\pm(x', \eta) + o(1), \qquad \xi_n \to \pm\infty, \tag{29}$$

$$f_m := \frac{\xi_n^{m-2}}{(m-2)!} \frac{\partial^{m-2} f}{\partial x_n^{m-2}}(x', 0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2 v_{m-1}}{\partial \xi_i \partial x_i} + (\Delta_{x'} + \lambda) v_{m-2}, \tag{30}$$

где $m \geqslant 2$, $v_0 := 0$,

$$\breve{\omega}_\flat^\eta = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}^{n-1}} \big\{ \xi : \eta^{-1}(\xi - M_k - M_\flat) \in \omega_\flat \big\}, \qquad \flat \in \{\mathrm{R}, \mathrm{D}\},$$

$\breve\omega^\eta := \breve\omega^\eta_{\mathrm{D}} \cup \breve\omega^\eta_{\mathrm{R}}$, ν_ξ — единичная нормаль к $\partial\omega^\eta_{\mathrm{R}}$, направленная внутрь ω^η_{R}, ν_i — компоненты вектора ν_ξ. Здесь L_m — некоторые фиксированные полиномы такие, что для каждого монома вида $Cv_1^{p_1}v_2^{p_2}\ldots v_m^{p_m}$ выполнено $p_1+2p_2+\ldots+mp_m=m$. Эти полиномы определяются как коэффициенты в формальном асимптотическом ряде

$$a(u_\varepsilon^{in}) = \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m L_m(v_1,\ldots,v_m), \tag{31}$$

В частности,

$$L_1(v_1)=a'(0)v_1, \qquad L_2(v_1,v_2)=a'(0)v_2+\frac{a''(0)}{2}v_1^2.$$

Следующая лемма будет доказана в §4.3.

Лемма 1. *Существуют единственные решения рекуррентной системы задач (26), (27), (28), (29). Данные решения имеют вид*

$$\begin{aligned} v_m(\xi,x',\eta) &= \sum_{j=1}^{N_m} \varphi_{mj}(x')v_{mj}(\xi,\eta),\\ u_m(x,\eta) &= \sum_{j=1}^{2N_m} u_{mj}(x)A_{mj}(\eta), \end{aligned} \tag{32}$$

где N_m — некоторые числа, φ_{mj}, v_{mj}, u_{mj}, A_{mj} — некоторые функции со следующими свойствами. При $|\xi_n|>R_6$ функции v_{mj} представляются в виде

$$\begin{aligned} v_{mj}(\xi,\eta) =& K_{mj}^{\pm}(\xi_n) + A_{mj}^{\pm}(\eta)\\ &+ \sum_{k\in\mathbb{Z}^{n-1}} Q_{mjk}^{\pm}(\xi_n,\eta)e^{-Z_k|\xi_n|}e^{2\pi\mathrm{i}\frac{k}{b}\cdot\xi'}, \qquad \pm\xi_n>R_6, \end{aligned} \tag{33}$$

где $K_{mj}^{\pm}$ — некоторые полиномы степени не выше m, причём $K_{mj}^{\pm}(0)=0$, а $Q_{mjk}^{\pm}$ — некоторые полиномы по ξ_n степени не выше $(m-1)$ с коэффициентами, $A_{mj}^{\pm}$ — некоторые функции. Справедливы оценки

$$|A_{mj}| + \|v_{mj}\|_{\mathfrak{H}} + \|v_{mj}\|_{C^1(\overline{\Pi^\eta})} + \eta^{\vartheta}\langle\nabla v_{mj}\rangle^{(\vartheta)}_{\Pi^\eta} \leqslant C\eta^{-m(n-2)}, \tag{34}$$

где константа C не зависит от η и j. Функции φ_{mj} принадлежат пространствам $W_2^q(\mathbb{R}^{n-1})$ для всех $q\in\mathbb{N}$, бесконечно дифференцируемы, и каждая их производная ограничена равномерно по $x'\in\mathbb{R}^{n-1}$. Верны равенства

$$\varphi_m^{\pm}(x',\eta) = \sum_{j=1}^{2N_m} A_{mj}^{\pm}(\eta)\varphi_{mj}(x') \tag{35}$$

Функции u_{mj} есть решения задачи (26) с краевыми условиями:

$$u_{mj}(x', +0) = \varphi_{mj}(x'), \qquad u_{mj}(x', -0) = 0, \qquad x' \in \mathbb{R}^{n-1}, \tag{36}$$

при $j = 1, \dots, N_m$, и

$$u_{mj}(x', +0) = 0, \qquad u_{mj}(x', -0) = \varphi_{mj-N_m}(x'), \qquad x' \in \mathbb{R}^{n-1}, \tag{37}$$

при $j = N_m + 1, \dots, 2N_m$. Функции u_{mj} принадлежат

$$W_2^q(\Omega^+_{\tau_0-\delta}) \cap W_2^q(\Omega^-_{\tau_0-\delta}) \cap W_2^1(\Omega)$$

для всех $q \in \mathbb{N}$ и всех $\delta > 0$, бесконечно дифференцируемы в $\Omega^\pm_{\tau_0}$ и для каждого $\delta > 0$ все их производные равномерно ограничены в каждой из областей $\overline{\Omega^\pm_{\tau_0-\delta}}$.

Основным результатом о построении асимптотик в первом случае является следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть выполнено условие (8), тогда асимптотика решения задачи (4) норме $W_2^1(\Omega^\varepsilon)$ имеет вид*

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(x, \eta) =& \chi^\varepsilon(x_n) \sum_{m=0}^{N} \varepsilon^m u_m(x, \eta) \\ &+ (1 - \chi^\varepsilon(x_n)) \sum_{m=1}^{N} \varepsilon^m v_m(x\varepsilon^{-1}, x', \eta) \\ &+ O\left(\varepsilon^{-\frac{1}{4}}\left((\varepsilon\eta^{-n+2})^{N+1} + \varepsilon^{\frac{N+1}{2}}\right)\right). \end{aligned} \tag{38}$$

Здесь N — произвольное натуральное число, функция u_0 — решение соответствующей усреднённой задачи (9), оставшиеся функции u_m — решения задач (26), функции v_m — решения задач (27), (28), (29), со свойствами, описанными в лемме 1. Верны соотношения:

$$\left\|\varepsilon^m(\chi^\varepsilon u_m + (1 - \chi^\varepsilon) v_m)\right\|_{W_2^1(\Omega^\varepsilon)} \leqslant C\varepsilon^{-\frac{1}{4}}\left((\varepsilon\eta^{-n+2})^m + \varepsilon^{\frac{m}{2}}\right), \tag{39}$$

где константа C не зависит от ε и η, но зависит от m.

Опишем второй случай. Предполагаем, что функция a является бесконечно дифференцируемой функцией и удовлетворяет условиям

$$a(u,0)=0, \qquad \left|\frac{\partial a}{\partial \operatorname{Re} u}(x,u)\right| + \left|\frac{\partial a}{\partial \operatorname{Im} u}(x,u)\right| \leqslant a_1, \tag{40}$$

$$\left|\frac{\partial^{|\beta|} a}{\partial x^\beta}(x,u)\right| \leqslant a_{\beta,0}|u|, \qquad \left|\frac{\partial^{|\beta|+\gamma_1+\gamma_2} a}{\partial x^\beta \partial(\operatorname{Re} u)^{\gamma_1}\partial(\operatorname{Im} u)^{\gamma_2}}(x,u)\right| \leqslant a_{\beta,\gamma}, \tag{41}$$

где $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$, $\gamma := (\gamma_1,\gamma_2) \in \mathbb{Z}_+^2 \setminus \{0\}$, а символы a_1, $a_{\beta,\gamma}$ обозначают некоторые константы, не зависящие от x и u. Рассмотрим систему краевых задач

$$\begin{gathered}
-\Delta_\xi v_m = f_m \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^n \setminus \theta_\eta, \qquad \frac{\partial v_m}{\partial \nu_\xi} = \psi_m \quad \text{на} \quad \partial\theta_\eta, \\
f_0 = 0, \qquad \psi_0 = 0, \qquad \theta_\eta = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}^{n-1}} \left\{\xi : \eta^{-1}(\xi - M_k) \in \omega\right\}, \\
f_m := \frac{\xi_n^{m-2}}{(m-2)!}\frac{\partial^{m-2} f}{\partial x_n^{m-2}}(x',0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2 v_{m-1}}{\partial \xi_i \partial x_i} + (\Delta_{x'}+\lambda)v_{m-2}, \\
\psi_m := -\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial v_{m-1}}{\partial x_i}\nu_i - T_m,
\end{gathered} \tag{42}$$

где ν_ξ — единичная нормаль к θ_η, направленная внутрь θ_η, ν_i — компоненты вектора ν_ξ, а функции $T_m = T_m(x', \xi_n, v_0, ..., v_m)$ возникают как коэффициенты в следующем асимптотическом равенстве:

$$a\left(x', \varepsilon\xi_n, \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^j v_m\right) = T_0(x'\xi_n, v_0) + \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m T_m(x', \xi_n, v_1, ..., v_m) \tag{43}$$

и $T_0(x', \xi_n, v_0) = a(x', 0, v_0)$.

Для произвольного положительного числа R обозначим $\Pi_R := \square \times (-R, R)$.

Теорема 5. *Пусть выполнено условие (20). Асимптотика решения задачи (4) в норме $W_2^1(\Omega^\varepsilon)$ имеет вид*

$$\begin{aligned}
u_\varepsilon(x) = & \chi^\varepsilon(x_n) \sum_{m=0}^{N} \varepsilon^m u_m(x,\eta) \\
& + (1-\chi^\varepsilon(x_n)) \sum_{m=0}^{N} \varepsilon^m v_m(x\varepsilon^{-1}, x', \eta) + O(\varepsilon^{\frac{N+1}{2}}),
\end{aligned} \tag{44}$$

где N — произвольное натуральное число. Функции v_m являются $\square$–периодическими по ξ' решениями задач (42) с асимптотиками

$$
\begin{aligned}
v_m(\xi,x',\eta)=&\sum_{j=2}^{m}\frac{1}{j!}\frac{\partial^j u_{m-j}}{\partial x_n^j}(x',\pm0,\eta)\xi_n^j\\
&+U_{m,1}^{\pm}(x',\eta)\xi_n+U_{m,0}^{\pm}(x',\eta)+O(e^{-c|\xi_n|}),
\end{aligned}
$$

при $\xi_n\to\pm\infty$, где $c>0$ — некоторая фиксированная константа, не зависящая от ξ', x', η, а $U_{m,i}^{\pm}$, $i=1,2$ — некоторые функции из $W_2^p(S)$ для всех $p\in\mathbb{N}$, бесконечно дифференцируемые по $\eta\in(0,1]$ и равномерно ограниченные по $\eta\in[0,1]$ в нормах указанных пространств. Для функций v_m справедливы представления

$$
v_m(\xi,x',\eta)=\sum_{j=1}^{N_m}\varphi_{mj}(x',\eta)v_{mj}(\xi,\eta)+v_m^{(0)}(x',\eta), \tag{45}
$$

где N_m — некоторые числа, $v_m^{(0)}$, φ_{mj}, v_{mj} — некоторые функции. Функции $v_m^{(0)}$, φ_{mj} принадлежат пространствам $W_2^p(S)$ для всех $p\in\mathbb{N}$, бесконечно дифференцируемы по $\eta\in(0,1]$ и равномерно ограничены по $\eta\in[0,1]$ в нормах указанных пространств. Функции v_{mj} являются $\square$–периодическими по ξ', бесконечно дифференцируемы в $\overline{\Pi}\setminus\omega^\eta$ для каждого $\eta\in(0,1]$ и равномерно ограничены по $\eta\in[0,1]$ в нормах $C^1(\Pi_R\setminus\theta_\eta)$ для каждого $R>0$. Функции v_{mj} бесконечно дифференцируемы по $\eta\in(0,1]$ в следующем смысле: для каждой точки $\eta_0\in(0,1]$ существует фиксированная окрестность B множества ω^{η_0}, так что функции v_{mj} бесконечно дифференцируемы по (ξ,η), где η — из малой окрестности точки η_0, а $\xi\in\overline{\Pi}\setminus\omega^{\eta_0}$. Одновременно функции $v_{mj}(\tilde{\xi}\eta\eta_0^{-1},\eta)$ бесконечно дифференцируемы по $(\tilde{\xi},\eta)$, где η — из малой окрестности точки η_0, а $\tilde{\xi}\in\overline{B}\setminus\omega^{\eta_0}$.

Функция u_0 является решением задачи (18), (19) с $\alpha=\eta^{n-1}$, а функции u_m — решения задач

$$
(\mathcal{L}-\lambda)u_m=0\quad\text{в}\quad\Omega\setminus S,\qquad u_m=0\quad\text{на}\quad\partial\Omega,\quad m\geqslant1, \tag{46}
$$

с краевыми условиями

$$
[u_m]_0=U_{m,0}^{+}-U_{m,0}^{-},\qquad \left[\frac{\partial u_m}{\partial x_n}\right]_0=U_{m,1}^{+}-U_{m,1}^{-}\qquad\text{на}\quad S.
$$

Верна оценка

$$\left\|\varepsilon^m(\chi^\varepsilon u_m + (1-\chi^\varepsilon)v_m)\right\|_{W_2^1(\Omega^\varepsilon)} \leqslant C\varepsilon^{\frac{m}{2}}, \tag{47}$$

где константа C не зависит от ε и η, но зависит от m.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертации рассмотрена эллиптическая краевая задача общего вида в многомерной области с мелкой перфорацией вдоль заданного многообразия. Основная особенность перфорации — ее существенная непериодичность, а именно, полости могут иметь произвольную форму и распределены произвольным образом. На полости и их распределение налагаются минимальные естественные геометрические условия. На границах полостей ставятся условия Дирихле или третье нелинейное краевое условие, причем на разных полостях можно ставить разные условия. Выписаны дополнительные, весьма слабые условия, которые гарантируют, что при усреднении полости пропадают, а на многообразии, вдоль которого они расположены, возникает условие Дирихле или третье нелинейное краевое условие. Показано, что решения возмущенных задач сходятся к решениям усредненных в W_2^1–норме равномерно по L_2–норме правой части уравнения и выписана соответствующая операторная оценка. Это является основным достижением диссертации по сравнению с известными результатами — удалось исследовать широкие классы существенно непериодических перфораций и одновременно доказать наилучшую возможную равномерную сходимость и соответствующие операторные оценки. Основа исследования — весьма точные локальные оценки в окрестности полостей различных норм, равномерные по форме и расположению полостей.

Отдельно рассмотрен случай строго периодической перфорации; здесь удалось построить полные асимптотические разложения решений возмущенных задач. Построение асимптотик проводилось на основе комбинации метода пограничного слоя, метода многих масштабов и метода согласования асимптотических разложений.

Полученные результаты являются существенным вкладом в современную теорию граничного усреднения, а разработанные методики можно применять при исследовании похожих задач.

Литература

[1] Борисов Д.И., Мухаметрахимова А.И. О равномерной резольвентной сходимости для эллиптических операторов в многомерных областях с малыми отверстиями // Пробл. мат. анал. — 2018. — Т.92. — С. 69–81.

[2] Борисов Д.И., Мухаметрахимова А.И. Равномерная сходимость и асимптотики для задач в областях с мелкой перфорацией вдоль заданного многообразия в случае усредненного условия Дирихле // Мат. сб. – 2021. – Т.212. № 8.– С. 33–88.

[3] Борисов Д.И., Мухаметрахимова А.И. Асимптотики для задач в перфорированных областях с третьим нелинейным краевым условием на границах полостей // Мат. сб. — 2022. — Т.213. № 10. — С. 3–59.

[4] Борисов Д.И., Мухаметрахимова А.И. Равномерная сходимость для задач с перфорацией вдоль заданного многообразия и третьим нелинейным краевым условием на границах полостей // Алгебра анал. — 2023. — Т.35. — С. 20–78.

[5] Мухаметрахимова А.И. Операторные оценки для непериодической перфорации вдоль границы: усредненное условие Дирихле // Уфимский мат. ж. — 2024. — Т.16. — С. 84–94.