Министерство просвещения Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Башкирский государственный педагогический
университет им. М. Акмуллы»

На правах рукописи

Мухаметрахимова Альбина Ишбулдовна

Сходимость и асимптотики для задач в областях с непериодической перфорацией вдоль заданного многообразия

1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая
физика

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико–математических наук

Научный руководитель:
доктор физико–математических наук,
Борисов Денис Иванович

Уфа–2025

Оглавление

Введение

Одним из активно развивающихся направлений теории усреднения является изучение краевых задач в перфорированных областях. Опишем постановку таких задач. Рассматривается многомерная область, которая может быть как ограниченной, так и неограниченной, с достаточно гладкой границей. В такой области устраивается перфорация малыми полостями. Размеры полостей и расстояния между ними описываются одним или несколькими малыми параметрами. При стремлении этих параметров к нулю размеры полостей и расстояния между ними уменьшаются, то есть, полости становятся меньше, а располагаются они чаще. Такая перфорация может устраиваться по всей рассматриваемой области или на некоторой её части. В описанной перфорированной области рассматриваются краевые задачи для эллиптических уравнений. На границах полостей ставится одно из классических граничных условий. Основная цель исследований — описание поведения решений рассматриваемых задач при стремлении малых параметров к нулю.

Изучению краевых задач в перфорированных областях посвящено огромное количество работ. Не имея возможности их всех перечислить, для примера упомянем лишь монографии [29], [69], [20], [59]. Краевые задачи в перфорированных областях можно разделить на две группы: задачи с перфорацией во всей области и задачи с перфорацией вдоль некоторого многообразия. В большинстве работ рассматривались перфорации периодической или локально–периодической структуры. Основные классические результаты, полученные для таких задач, заключались в доказательстве сходимости решений рассматриваемых задач к решениям некоторых усредненных задач. Сходимость решения была доказана в следующем смысле: для каждой фиксированной правой части решение возмущенной задачи сходилось к решению усредненной в L_2 или W_2^1 в сильном или слабом смысле.

В настоящей диссертации рассматриваются краевые задачи в областях, перфорированных вдоль заданного многообразия. Пример такой области приведен на рис. 1. Исследованию подобных задач также посвящено огромное количество работ, для примера упомянем статьи [1], [56], [57], [68], [28], [61], [62], [45], [19], [58], [60]. В перечисленных работах перфорация описывалась малыми полостями, расположенными вдоль заданного многообразия или вдоль границы области. В задачах выделялись два малых параметра — размеры полостей и расстояния между ними. При стремлении этих параметров к нулю полости пропадали, а на многообразии возникало усредненное краевое условие. Вид краевого условия зависел от геометрии перфорации и структуры краевого условия на многообразии. Основные полученные результаты работ [1], [56], [57], [68], [28], [61], [62], [45], [19], [58], [60] — доказательство сходимости решений рассматриваемых задач к решениям усредненных задач в нормах пространств L_2 и W_2^1. Для того, чтобы дать общее представление о возможных постановках задач с перфорацией вдоль заданного многообразия, кратко опишем формулировки задач в перечисленных работах.

В [1] было исследовано уравнение Пуассона в двумерной ограниченной области, периодически перфорированной вдоль границы. На границе исходной области ставилось третье краевое условие, на границах полостей — условие Дирихле. Предполагалось, что размеры полостей намного меньше, чем расстояния между ними. Рассматривался случай, когда при усреднении возникает третье граничное условие, в котором имеется дополнительный коэффициент, порождаемый геометрией перфорации. В [56] изучалось уравнение Пуассона в области, непериодически перфорированной вдоль границы. На внешней границе задавалось условие Неймана, на границах полостей — условие Дирихле. Размеры полостей и

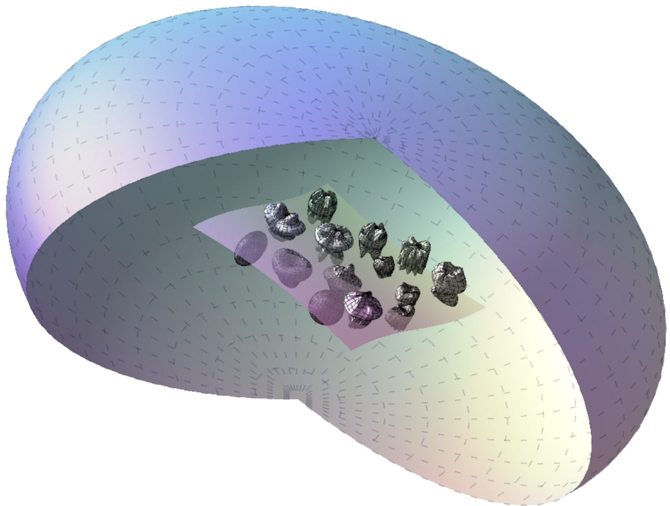

Рис. 1: Пример области, перфорированной вдоль многообразия

расстояния между ними были одного порядка. Рассмотрен случай, когда усреднение приводило к краевому условию Дирихле на границе области. В [57] было исследовано уравнение Лапласа в двумерной ограниченной области, случайно перфорированной вдоль границы. На границе исходной области ставилось условие Неймана, на границах полостей — условие Дирихле. Рассматривался случай, когда при усреднении возникало условие Дирихле. В [68], [28], [61] были изучены задачи для уравнения Пуассона в многомерных областях, периодически перфорированных вдоль многообразий. В [68] на границах полостей ставилось одно из классических граничных условий: условие Дирихле, условие Неймана или третье граничное условие. Рассматривался случай, когда перфорация в пределе не дает вклад в задачу, то есть, при усреднении полости пропадают вместе с многообразием, вдоль которого они расположены. В [62] исследовалось вариационное неравенство для оператора Лапласа в произвольной области, перфорированной вдоль заданного многообразия. В [28], [61], [62] на границах полостей ставилось третье нелинейное граничное условие. В этих работах были рассмотрены различные варианты соотношений размеров полостей и расстояний между ними. При усреднении менялся характер нелинейности задачи или возникало усреднённое условие Дирихле на многообразии. В работах [45], [19] рассматривалась модель, называемая ситом Стеклова. Речь шла о задачах в областях, соединённых тонкой прослойкой с большим числом периодически и часто расположенных тонких каналов. На внутренней поверхности этих каналов задавалось спектральное граничное условие Стеклова, на остальных частях границы — классические краевые условия. В [45] была проведена классификация усреднённых задач в зависимости от размеров каналов и прослойки и доказаны соответствующие теоремы сходимости. В [19] для двумерного случая были построены первые члены асимптотических разложений собственных значений в предположении, что каналы и прослойка имеют одинаковый порядок малости. В [58] рассматривались двух– и трёхмерные задачи в ограниченных областях с периодической частой перфорацией малыми полостями вдоль части границы. На границе полостей ставилось краевое условие Дирихле, а на части границы области, вдоль которой эти полости располагались — спектральное граничное условие Стеклова. Были описаны усреднённые задачи в зависимости от размеров полостей и доказаны соответствующие теоремы сходимости. В [60] рассматривалась задача для уравнения Пуассона в многомерном области, часто и периодически перфорированной малыми полостями. На границах полостей выставлялось третье краевое условие с коэффициентом, растущим по малому параметру; сам коэффициент мог быстро осциллировать по малому параметру. В работе были приведены различные возможные усреднённые краевые задачи, вид которых зависел от структуры перфорации и краевого условия на границе полостей. Были доказаны теоремы сходимости, а также описано поведение спектров соответствующих спектральных задач.

В монографиях [29] и [59] рассматривались разнообразные задачи об усреднении в областях с перфорацией вдоль заданного многообразия. В [29] изучались краевые задачи для эллиптических уравнений в областях, граница которых состоит из большого числа мелких непересекающихся компонент. В [59] рассматривались различные краевые задачи для эллиптических и параболических уравнений в перфорированных областях. В [29] и [59] были получены аналогичные описанным выше результаты о сходимости. Списки литературы этих монографий содержат большое число ссылок на дальнейшие работы по усреднению задач в перфорированных областях.

На языке спектральной теории неограниченных операторов упомянутые выше классические результаты о сходимости решений означают наличие сильной или слабой резольвентной сходимости. В последние 20 лет в теории усреднения развивается новое направление исследований: появились работы, в которых для возмущенных задач была доказана более сильная, равномерная резольвентная сходимость и были установлены операторные оценки. Суть таких оценок заключались в том, что L_2– или W_2^1–норма разности решений возмущенной и усредненной задач оценивалась через L_2–норму правой части уравнения, умноженной на малую величину, вид которой зависел от типа возмущения и его структуры. Подобного сорта оценки для операторов с быстро осциллирующими коэффициентами были получены в работах [2], [3], [4], [5], [6], [7], [37], [38], [39], [40], [41], [42], [74], [73], [21], [22], [23], [24], [33], [34], [36], [32], [35], [71], [72], [63], [64], [65], см.также списки литературы в цитированных работах и другие работы этих авторов. В этих работах была установлена равномерная резольвентная сходимость возмущенного оператора к усредненному в различных операторных нормах и получены оценки скорости сходимости. Во всех этих работах быстрая осцилляция коэффициентов всегда была периодической или локально периодической.

Упомянутые выше работы стимулировали схожие исследования для других задач теории усреднения. Для задач теории граничного усреднения вопросы равномерной резольвентной сходимости изучались в работах [48], [49], [10], [50], [51], [52], [53], [43], [9], [44]. В работах [48], [49], [10], [50], [51], [52] исследованы эллиптические операторы в плоской бесконечной полосе с частой периодической и непериодической сменой граничных условий. В [43], [9], [44] рассмотрен эллиптический оператор в произвольной многомерной области с частым непериодическим чередованием граничных условий. В [53] изучен общий эллиптический самосопряженный оператор в полосе с быстро осциллирующей границей. Результаты работ [48], [49], [10], [50], [51], [52], [53], [43], [9], [44] утверждают наличие равномерной резольвентной сходимости возмущённых операторов к некоторым усреднённым и дают оценки скорости сходимости.

Похожие результаты для задач в перфорированных областях были получены в работах [11], [54], [55], [67], [66], [70], [75]. В [11] рассматривался оператор Лапласа в плоской бесконечной полосе, из которой симметричным образом вырезана пара малых полостей. На границах полостей ставилось условие Неймана. В [54] исследован эллиптический оператор второго порядка с переменными коэффициентами в плоской полосе, перфорированной вдоль заданной кривой. На границах полостей выставлялось одно из классических краевых условий, при этом на границах отверстий ставились разные граничные условия. В [55] рассмотрен эллиптический оператор второго порядка с переменными коэффициентами в многомерной области с малыми полостями. На границах полостей ставилось одно из классических краевых условий. В [67], [66], [70], [75] исследовались краевые задачи в периодически перфорированных областях.

В настоящей диссертации рассматривается краевая задача для эллиптического уравнения второго порядка с переменными коэффициентами в многомерной области, перфорированной вдоль заданного многообразия. Размерность области не меньше трёх, при этом область может быть как ограниченной, так и неограниченной. Предполагается, что размеры всех полостей одного порядка, а их форма и распределение вдоль многообразия могут быть произвольными. На границах полостей ставятся различные граничные условия: первое граничное условие, второе граничное условие, третье нелинейное граничное условие. При измельчении перфорации решения рассматриваемых задач сходятся к решениям некоторых усредненных задач. Вид усредненных задач существенно зависит от распределения полостей вдоль многообразия, соотношения размеров полостей и расстояний между ними и от задаваемых граничных условий.

В диссертации описываются усредненные задачи для двух типичных случаев перфорации. В первой главе рассматривается случай, когда все полости поделены на два множества. На границах полостей первого множества ставится условие Дирихле, на границах полостей второго множества — третье нелинейное граничное условие. При усреднении полости пропадают, а на многообразии возникает условие Дирихле. Во второй главе рассматривается краевая задача с третьим нелинейным граничным условием на границах полостей. В зависимости от соотношений между размерами полостей и расстояний между ними при усреднении возникают два разных случая. В первом случае при усреднении полости пропадают вместе с многообразием, вдоль которого они расположены. Во втором случае при усреднении на многообразии возникает граничное условие, которое можно интерпретировать как нелинейное дельта–взаимодействие. Для каждого случая доказывается сходимость решения возмущённой задачи к решению усреднённой задачи в норме W_2^1 равномерно по L_2–норме правой части уравнения и получены оценки скорости сходимости. Также для каждого описанного случая строится и строго обосновывается полная асимптотика решений возмущенных задач. При построении асимптотик предполагается, что область является неограниченной, перфорация производится вдоль гиперплоскости и имеет периодическую структуру.

Глава 1

Задачи и основные результаты

Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — декартовы координаты в $\mathbb{R}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — область с границей класса C^2. Область Ω может быть как ограниченной, так и неограниченной. Обозначим через $S \subset \Omega$ ориентируемое многообразие без края класса C^3 коразмерности 1 без самопересечений, которое либо замкнуто, либо бесконечно. Пусть ε — малый положительный параметр, $\eta = \eta(\varepsilon)$ — некоторая функция, удовлетворяющая неравенству $0 < \eta(\varepsilon) \leqslant 1$.

В окрестности многообразия S произвольно выберем точки M_k^ε, $k \in \mathbb{M}^\varepsilon$, где множество индексов $\mathbb{M}^\varepsilon$ не более, чем счётно, а для самих точек выполнено условие

$$\operatorname{dist}(M_k^\varepsilon, S) \leqslant R_0\varepsilon, \tag{1.0.1}$$

с положительной константой R_0, не зависящей от k и ε. Пусть $\omega_{k,\varepsilon} \subset \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{M}^\varepsilon$ — ограниченные области с границами класса C^2; допускается зависимость этих областей от ε. Обозначим:

$$\omega_k^\varepsilon := \big\{x:\, (x - M_k^\varepsilon)\varepsilon^{-1}\eta^{-1}(\varepsilon) \in \omega_{k,\varepsilon}\big\}, \qquad \theta^\varepsilon := \bigcup_{k\in\mathbb{M}^\varepsilon} \omega_k^\varepsilon.$$

Из области Ω вырежем полости ω_k^ε, $k \in \mathbb{M}^\varepsilon$ и такую область обозначим через Ω^ε, то есть, $\Omega^\varepsilon := \Omega \setminus \theta^\varepsilon$. Пример перфорированной области приведен на рис. 1.

Введённая область Ω^ε содержит перфорацию малыми полостями ω_k^ε, расположенными вдоль многообразия S. На размеры, форму и расположение этих полостей в диссертации налагается несколько естественных условий общего характера. Точные формулировки этих условий мы приведём позднее, пока лишь отметим, что все полости ω_k^ε мы считаем попарно непересекающимися с минимальным расстоянием между ними порядка $O(\varepsilon)$. Перейдём к постановке рассматриваемой задачи.

Через $A_{ij} = A_{ij}(x)$, $A_i = A_i(x)$, $A_0 = A_0(x)$ обозначим функции, заданные в Ω и удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} & A_{ij} \in W_\infty^1(\Omega), \qquad A_j, A_0 \in L_\infty(\Omega), \\ & A_{ij} = A_{ji}, \qquad i,j = 1,\ldots,n, \\ & \sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x) z_i \overline{z_j} \geqslant c_0 |z|^2, \qquad x \in \Omega, \qquad z = (z_1 \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n, \end{aligned} \tag{1.0.2}$$

где $c_0 > 0$ — некоторая константа, не зависящая от x и z. Функции A_{ij} считаем вещественнозначными, а функции A_j, A_0 — комплекснозначными. Пусть $a = a(x,u)$ — комплекснозначная функция, заданная для $u \in \mathbb{C}$ и $x \in \Sigma := \{x : \operatorname{dist}(x,S) \leqslant \tau_0\}$, где $\tau_0 > 0$ — некоторое фиксированное число. Будем считать, что функция a кусочно–непрерывна по $(x,u) \in \Sigma \times \mathbb{C}$ и удовлетворяет условиям

$$|a(x,u_1) - a(x,u_2)| \leqslant a_0 |u_1 - u_2|, \qquad a(x,0) = 0, \tag{1.0.3}$$

где a_0 — некоторая константа, не зависящая от $x \in \Sigma$ и $u_1, u_2 \in \mathbb{C}$. Пусть f — произвольная функция из $L_2(\Omega)$, а λ — вещественное число.

Разобъем все полости произвольным образом на два типа:

$$\theta^\varepsilon = \theta_{\mathrm{D}}^\varepsilon \cup \theta_{\mathrm{R}}^\varepsilon, \qquad \theta_\natural^\varepsilon = \bigcup_{k \in \mathbb{M}_\natural^\varepsilon} \omega_k^\varepsilon, \qquad \natural \in \{\mathrm{D}, \mathrm{R}\},$$

где $\mathbb{M}_{\mathrm{D}}^\varepsilon \cap \mathbb{M}_{\mathrm{R}}^\varepsilon = \emptyset$, $\mathbb{M}_{\mathrm{D}}^\varepsilon \cup \mathbb{M}_{\mathrm{R}}^\varepsilon = \mathbb{M}^\varepsilon$, то есть, $\mathbb{M}_{\mathrm{D}}^\varepsilon$ и $\mathbb{M}_{\mathrm{R}}^\varepsilon$ — некоторое произвольное разбиение множества $\mathbb{M}^\varepsilon$.

Основной объект исследования настоящей диссертации — краевая задача

$$\begin{aligned} & (\hat{\mathcal{H}} - \lambda) u_\varepsilon = f \quad \text{в} \quad \Omega^\varepsilon, \qquad u_\varepsilon = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega, \\ & u_\varepsilon = 0 \quad \text{на} \quad \partial\theta_{\mathrm{D}}^\varepsilon, \qquad \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \mathrm{n}} + a(\,\cdot\,, u_\varepsilon) = 0 \quad \text{на} \quad \partial\theta_{\mathrm{R}}^\varepsilon, \end{aligned} \tag{1.0.4}$$

где дифференциальное выражение и производная по конормали заданы формулами

$$\begin{aligned}
&\hat{\mathcal{H}} := -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} A_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} A_j \frac{\partial}{\partial x_j} + A_0,\\
&\frac{\partial}{\partial \mathrm{n}} = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \nu_i \frac{\partial}{\partial x_j},
\end{aligned} \tag{1.0.5}$$

ν_i — i–ая компонента единичной нормали ν к $\partial\theta^\varepsilon$, направленная внутрь множества θ^ε.

Целью диссертации является изучение асимптотического поведения решения задачи (1.0.4) при $\varepsilon \to 0$. Такое поведение существенно зависит от геометрии перфорации и соотношения между размерами полостей и расстояний между ними, а именно, оно определяется распределением точек M_k^ε, формами областей $\omega_{k,\varepsilon}$ и поведением функции $\eta(\varepsilon)$ при малых ε. В диссертации мы рассмотрим два типичных случаях перфорации и для каждого из них опишем асимптотическое поведение решения. Каждый из случаев описывается определенными ограничениями на перфорацию, которые мы сформулируем ниже.

Начнем с общих, достаточно естественных геометрических ограничений на перфорацию, которые будут предполагаться выполненнными всюду в работе. На многообразии S зафиксируем сторону и соответствующее непрерывное поле нормалей. Через τ обозначим расстояние от точки до S, измеренное вдоль нормали, а через s — какие–нибудь локальные переменные на многообразии S. При таком определении переменная τ положительна для точек, расположенных со стороны многообразия S, определяемой выбранным полем нормалей.

Наше первое условие описывает регулярность многообразия S.

A1. Переменные (τ, s) корректно определены по крайней мере в области Σ. В этой же области равномерно ограничены якобианы перехода от переменных x к переменным (τ, s) и обратно, а также производные x по (τ, s) и производные (τ, s) по x вплоть до второго порядка.

Пусть $B_r(M)$ — открытый шар в $\mathbb{R}^n$ с центром в точке M радиуса r. На размеры и взаимное расположение полостей ω_k^ε наложим следующее условие.

A2. Существуют точки $M_{k,\varepsilon} \in \omega_{k,\varepsilon}$, $k \in \mathbb{M}^\varepsilon$, и числа $0 < R_1 < R_2$, $b > 1$, не зависящие от ε, такие что для достаточно малых ε выполнено:

$$\begin{aligned} &B_{R_1}(M_{k,\varepsilon}) \subset \omega_{k,\varepsilon} \subset B_{R_2}(0), && k \in \mathbb{M}^\varepsilon, \\ &B_{bR_2\varepsilon}(M_k^\varepsilon) \cap B_{bR_2\varepsilon}(M_i^\varepsilon) = \emptyset, && i, k \in \mathbb{M}^\varepsilon, \quad i \neq k. \end{aligned} \tag{1.0.6}$$

Для всех k и ε множества $B_{R_2}(0) \setminus \omega_{k,\varepsilon}$ связны.

В окрестности границ областей $\omega_{k,\varepsilon}$ введём локальную переменную ρ — расстояние от точки до границы $\partial\omega_{k,\varepsilon}$, измеренное в направлении внешней нормали. Следующее условие касается форм областей $\partial\omega_{k,\varepsilon}$.

A3. Существуют фиксированные константы $\rho_0 > 0$ и локальные переменные ς на $\partial\omega_{k,\varepsilon}$ такие, что переменные (ρ, ς) корректно определены по крайней мере на множествах

$$\{x : \operatorname{dist}(x, \partial\omega_{k,\varepsilon}) \leqslant \rho_0\} \setminus \omega_{k,\varepsilon} \subseteq B_{b_* R_2}(0), \qquad b_* := \frac{b+1}{2},$$

одновременно для всех $k \in \mathbb{M}^\varepsilon$, и на данных множествах равномерно ограничены якобианы перехода от переменных x к переменным (ρ, ς) и обратно, а также производные x по (ρ, ς) и производные (ρ, ς) по x.

Решение краевой задачи (1.0.4) будем понимать в обобщенном смысле. Обобщенным решением задачи (1.0.4) называется функция $u_\varepsilon \in W_2^1(\Omega^\varepsilon)$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\mathfrak{h}_a(u_\varepsilon, v) - \lambda(u_\varepsilon, v)_{L_2(\Omega^\varepsilon)} = (f, v)_{L_2(\Omega^\varepsilon)}$$

для любых $v \in \mathring{W}_2^1(\Omega^\varepsilon, \partial\Omega \cup \partial\theta_{\mathrm{D}}^\varepsilon)$, где

$$\mathfrak{h}_a(u_\varepsilon, v) := \mathfrak{h}_0(u_\varepsilon, v) + (a(\,\cdot\,, u_\varepsilon), v)_{L_2(\partial\theta^\varepsilon)}, \tag{1.0.7}$$

$$\mathfrak{h}_0(u_\varepsilon, v) := \sum_{i,j=1}^{n} \left(A_{ij} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L_2(\Omega^\varepsilon)} + \sum_{j=1}^{n} \left(A_j \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}, v \right)_{L_2(\Omega^\varepsilon)} + (A_0 u_\varepsilon, v)_{L_2(\Omega^\varepsilon)}$$

и $\mathring{W}_2^1(\Omega^\varepsilon, \partial\Omega \cup \partial\theta_{\mathrm{D}}^\varepsilon)$ — подпространство функций из $W_2^1(\Omega)$, обращающихся в нуль на $\partial\Omega$ и $\partial\theta_{\mathrm{D}}^\varepsilon$. Интеграл по границе $\partial\theta_{\mathrm{R}}^\varepsilon$ понимается в смысле следов. Далее будет показано, что благодаря условиям A1, A2, A3 такой след определён корректно.

Опишем первый случай. Здесь предполагаем, что ε и η связаны следующим соотношением:

$$\frac{\varepsilon}{\eta^{n-2}(\varepsilon)} \to +0, \qquad \varepsilon \to +0. \tag{1.0.8}$$

На распределение полостей из множества $\theta_{\mathrm{D}}^\varepsilon$ наложим следующее условие.

A4. Существует число $R_3 > bR_2$ такое, что

$$\Xi^\varepsilon \subset \bigcup_{k \in \mathbb{M}_{\mathrm{D}}^\varepsilon} B_{R_3\varepsilon}(M_k^\varepsilon), \qquad \Xi^\varepsilon := \{x : |\tau| < bR_2\varepsilon\}.$$

Введем еще одну краевую задачу:

$$(\hat{\mathcal{H}} - \lambda)u_0 = f \quad \text{в} \quad \Omega \setminus S, \qquad u_0 = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega \cup S. \tag{1.0.9}$$

Далее мы покажем, что она является усреднённой для задачи (1.0.4) при выполнении условий A4 и (1.0.8). Её решение также понимаем в обобщенном смысле. А именно, это функция $u_0 \in \mathring{W}_2^1(\Omega, \partial\Omega \cup S)$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\mathfrak{h}_0(u_0, v) - \lambda(u_0, v)_{L_2(\Omega)} = (f, v)_{L_2(\Omega)}$$

для любых $v \in \mathring{W}_2^1(\Omega, \partial\Omega \cup S)$.

Основным результатом диссертации об усреднении в первом случае является следующая теорема.

Теорема 1.0.1. *Пусть выполнены предположения A1, A2, A3, A4 и условие (1.0.8). Тогда существует λ_0, не зависящее от ε, η и f, такое, что при $\lambda < \lambda_0$ задачи (1.0.4), (1.0.9) однозначно разрешимы для всех $f \in L_2(\Omega)$ и верно неравенство*

$$\|u_\varepsilon - u_0\|_{W_2^1(\Omega^\varepsilon)} \leqslant C \left(\frac{\varepsilon}{\eta^{n-2}(\varepsilon)}\right)^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L_2(\Omega)}, \tag{1.0.10}$$

где константа C не зависит от ε, η и f, но зависит от λ.

Переходим ко второму случаю. Здесь предполагаем, что $\mathbb{M}_{\mathrm{D}}^\varepsilon = \emptyset$. Также считаем, что функция a удовлетворяет более жёстким условиям

$$\begin{aligned} &\left|\frac{\partial a}{\partial \operatorname{Re} u}(x,u)\right| + \left|\frac{\partial a}{\partial \operatorname{Im} u}(x,u)\right| \leqslant a_0, \\ &a(x,0) = 0, \qquad |\nabla_x a(x,u)| \leqslant a_1 |u|, \end{aligned} \tag{1.0.11}$$

где a_0 и a_1 — некоторые константы, не зависящие от x и u.

Пусть $\zeta = \zeta(t)$, $t \in [0,1]$ — бесконечно дифференцируемая срезающая функция, принимающая значения из отрезка $[0,1]$, равная нулю при $|t| > 1$ и удовлетворяющая условию

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \zeta(|t|)\, dt = 1. \tag{1.0.12}$$

Через $M_{k,\perp}^\varepsilon$ обозначим проекции точек M_k^ε на поверхность S. На поверхности S определим функцию

$$\alpha^\varepsilon(x) = \begin{cases} \dfrac{\eta^{n-1}(\varepsilon)|\partial\omega_{k,\varepsilon}|}{R_2^{n-1}} \zeta\left(\dfrac{|x - M_{k,\perp}^\varepsilon|}{\varepsilon R_2}\right) & \text{при} \quad |x - M_{k,\perp}^\varepsilon| < \varepsilon R_2, \quad k \in \mathbb{M}^\varepsilon, \\ 0 & \text{в остальных точках} \quad S. \end{cases} \tag{1.0.13}$$

Обозначим: $\varpi := \left\{x \in \mathbb{R}^n \,:\, 0 < \tau < \frac{\tau_0}{2}\right\}$. Пусть Φ — произвольная функция, заданная на S и являющаяся следом некоторой функции из $W_2^1(\varpi)$, то есть, $\Phi \in W_2^{\frac{1}{2}}(S)$. Ясно, что следующие две задачи однозначно разрешимы в $W_2^1(\varpi)$:

$$
\begin{gathered}
-\Delta U_\Phi^N + U_\Phi^N = 0 \quad \text{в} \quad \varpi,\\
\frac{\partial U_\Phi^N}{\partial \tau} = -\Phi \quad \text{на} \quad S, \qquad \frac{\partial U_\Phi^N}{\partial \nu} = 0 \quad \text{на} \quad \partial\varpi \setminus S,
\end{gathered} \tag{1.0.14}
$$

и

$$
\begin{gathered}
-\Delta U_\Phi^D + U_\Phi^D = 0 \quad \text{в} \quad \varpi,\\
U_\Phi^D = \Phi \quad \text{на} \quad S, \qquad \frac{\partial U_\Phi^D}{\partial \nu} = 0 \quad \text{на} \quad \partial\varpi \setminus S,
\end{gathered} \tag{1.0.15}
$$

где ν — единичная нормаль к поверхности $\partial\varpi \setminus S$, внешняя к области ϖ. Далее будет показано (см. лемму 3.1.3), что следующая норма определена корректно по крайней мере на пространстве $L_\infty(S)$:

$$
\|\alpha\|_S^2 := \sup_{\substack{\Phi \in W_2^{\frac{1}{2}}(S)\\ \Phi \neq 0}} \frac{\|U_{\alpha\Phi}^N\|^2_{W_2^1(\varpi)}}{\|U_\Phi^D\|^2_{W_2^1(\varpi)}}, \tag{1.0.16}
$$

где α — произвольная функция из $L_\infty(S)$.

На функцию α^ε, определённую в (1.0.13), наложим следующее условие.

A5. Существуют ограниченная измеримая функция α^0, заданная на S и принадлежащая $W_\infty^1(S)$, и функция $\kappa = \kappa(\varepsilon) \to +0$ при $\varepsilon \to +0$ такие, что для всех достаточно малых ε верна оценка

$$
\|\alpha^\varepsilon - \alpha^0\|_S \leqslant \kappa(\varepsilon).
$$

Если выполнены условия A1, A2, A3 и одно из условий $a \equiv 0$ или $\eta(\varepsilon) \to 0$, $\varepsilon \to 0$, то при усреднении полости пропадают вместе с многообразием S, и усреднённая задача для (1.0.4) имеет вид:

$$
(\hat{\mathcal{H}} - \lambda) u_0 = f \quad \text{в} \quad \Omega, \qquad u_0 = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega. \tag{1.0.17}
$$

Если же η не стремится к нулю, а функция a произвольна, то при выполнении условий A1, A2, A3, A5 усреднённая задача для (1.0.4) имеет вид

$$
(\hat{\mathcal{H}} - \lambda) u_0 = f \quad \text{в} \quad \Omega, \qquad u_0 = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega, \tag{1.0.18}
$$

$$[u_0]_S=0,\qquad \left[\frac{\partial u_0}{\partial \mathrm{n}}\right]_S-\alpha a(\,\cdot\,,u_0)\big|_S=0, \tag{1.0.19}$$

где $[u]_S:=u|_{\tau=+0}-u|_{\tau=-0}$ — скачок функции u на S. Производная по конормали здесь задается формулой из (1.0.5), в которой в качестве ν берется упомянутое выше поле нормалей на S. Отметим, что граничное условие (1.0.19) описывает нелинейное дельта–взаимодействие на поверхности S.

Решения задач (1.0.17) и (1.0.18), (1.0.19) также будем понимать в обобщенном смысле. Обобщенным решением краевой задачи (1.0.17) называется функция $u_0\in \mathring{W}_2^1(\Omega,\partial\Omega)$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\mathfrak{h}_0(u_0,v)-\lambda(u_0,v)_{L_2(\Omega)}=(f,v)_{L_2(\Omega)}$$

для любых $v\in \mathring{W}_2^1(\Omega,\partial\Omega)$. Обобщенным решением краевой задачи (1.0.18), (1.0.19) называется функция $u_0\in \mathring{W}_2^1(\Omega,\partial\Omega)$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\mathfrak{h}_0(u_0,v)-\lambda(u_0,v)_{L_2(\Omega)}+(\alpha a(\,\cdot\,,u_0),v)_{L_2(S)}=(f,v)_{L_2(\Omega)},$$

для любых $v\in \mathring{W}_2^1(\Omega,\partial\Omega)$.

Основные результаты диссертации об усреднении во втором случае сформулированы в следующих двух теоремах. Первая из них описывает ситуацию, когда при усреднении возникает задача (1.0.17).

Теорема 1.0.2. *Пусть выполнены предположения A1, A2, A3. Тогда существует λ_0, не зависящее от ε, такое, что при $\lambda<\lambda_0$ задачи (1.0.4) и (1.0.17) однозначно разрешимы для всех $f\in L_2(\Omega)$. Если дополнительно выполнено одно из условий*

$$a\equiv 0\quad \textit{или}\quad \eta(\varepsilon)\to 0,\quad \varepsilon\to 0, \tag{1.0.20}$$

то справедливы неравенства

$$\|u_\varepsilon-u_0\|_{W_2^1(\Omega^\varepsilon)}\leqslant C\big(\varepsilon\eta(\varepsilon)+\varepsilon^{\frac12}\eta^{\frac n2}(\varepsilon)\big)\|f\|_{L_2(\Omega)}, \tag{1.0.21}$$

если $a \equiv 0$, *и*

$$\|u_\varepsilon - u_0\|_{W_2^1(\Omega^\varepsilon)} \leqslant C\big(\varepsilon\eta(\varepsilon) + \eta^{n-1}(\varepsilon)\big)\|f\|_{L_2(\Omega)}, \tag{1.0.22}$$

если $\eta(\varepsilon) \to 0$, $\varepsilon \to 0$, *где константы* C *не зависят от* ε *и* f, *но зависят от* λ.

Во второй теореме описывается ситуация, когда усреднение приводит к задаче (1.0.18), (1.0.19).

Теорема 1.0.3. *Пусть выполнены предположения A1, A2, A3, A5. Тогда существует* λ_0, *не зависящее от* ε, η *и* f, *такое, что при* $\lambda < \lambda_0$ *задачи (1.0.4) и (1.0.18), (1.0.19) однозначно разрешимы для всех* $f \in L_2(\Omega)$ *и имеет место неравенство:*

$$\|u_\varepsilon - u_0\|_{W_2^1(\Omega^\varepsilon)} \leqslant C\big(\varepsilon^{\frac{1}{2}} + \kappa(\varepsilon)\big)\|f\|_{L_2(\Omega)}, \tag{1.0.23}$$

где константа C *не зависит от* ε *и* f, *но зависит от* λ.

Вторая часть результатов диссертации посвящена построению асимптотического разложения решения задачи (1.0.4) в случае периодической перфорации. Пусть Ω — неограниченная область. Будем считать, что в окрестности гиперплоскости $x_n = 0$ эта область совпадает со слоем, а именно, существует $\tau_0 > 0$ такое, что

$$\Omega \cap \{x : |x_n| \leqslant \tau_0\} = \{x : |x_n| \leqslant \tau_0\}.$$

В качестве многообразия S возьмем гиперплоскость $\{x :\, x_n = 0\}$. Пусть M_{D}, M_{R} — некоторые фиксированные точки, ω_{D}, ω_{R} — некоторые фиксированные ограниченные множества с границей гладкости $C^{(2+\vartheta)}$ для некоторого фиксированного $\vartheta \in (0,1)$. Обозначим:

$$\Pi := \square \times \mathbb{R}, \qquad \square := \left\{x : -\frac{b_i}{2} < x_i < \frac{b_i}{2},\, i = 1, \ldots, n-1\right\},$$

где $b_i > 0$ — некоторые числа. Множества $\mathbb{M}_{\mathrm{D}}^\varepsilon$, $\mathbb{M}_{\mathrm{R}}^\varepsilon$ выберем следующим образом:

$$\mathbb{M}_\flat^\varepsilon := \left\{\varepsilon(M_k + M_\flat),\ k \in \mathbb{Z}^{n-1}\right\}, \qquad \flat \in \{\mathrm{R},\, \mathrm{D}\},$$

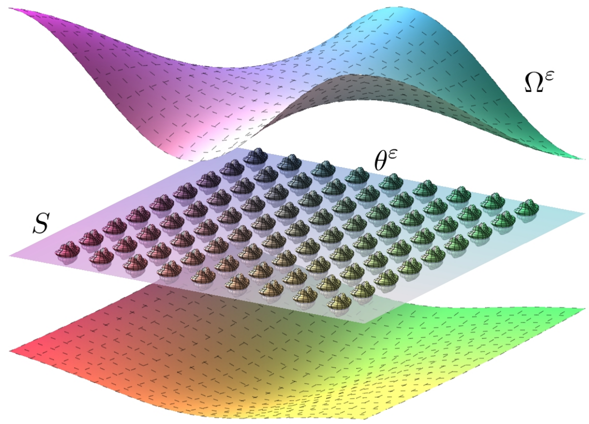

Рис. 1.1: Схематичный вид части области Ω^ε с периодической перфорацией.

$$M_k := (b_1 k_1, \ldots, b_{n-1}k_{n-1}, 0), \qquad\qquad k := (k_1, \ldots, k_{n-1}).$$

Точки M_k^ε из множества $\mathbb{M}_{\mathrm{D}}^\varepsilon$ пересчитываются мульти–индексом $k \in \mathbb{Z}^{n-1}$ и имеют вид $M_k^\varepsilon = \varepsilon(M_k + M_{\mathrm{D}})$ и аналогичные соотношения верны для точек из множества $\mathbb{M}_{\mathrm{R}}^\varepsilon$. Точкам $M_k^\varepsilon \in \mathbb{M}_{\mathrm{D}}^\varepsilon$ сопоставим множества $\omega_{k,\eta} := \omega_{\mathrm{D}}$, а точкам $M_k^\varepsilon \in \mathbb{M}_{\mathrm{R}}^\varepsilon$ — множества $\omega_{k,\eta} := \omega_{\mathrm{R}}$. Определим затем соответствующие множества $\theta_{\mathrm{D}}^\varepsilon$ и $\theta_{\mathrm{R}}^\varepsilon$. Пример перфорированной области приведен на рис. 1.1.

Пусть

$$f \in L_2(\Omega) \cap W_2^q(\Omega_{\tau_0}^+) \cap W_2^q(\Omega_{\tau_0}^-), \qquad \Omega_b^\pm := \{x : \, 0 < \pm x_n < b\}, \quad (1.0.24)$$

для всех $q \in \mathbb{N}$. Предполагаем, что $A_{ij} = 1$, $A_j = 0$, $A_0 = 0$ при $|x_n| \leqslant \tau_0$.

Через $\chi = \chi(x_n)$ обозначим бесконечно дифференцируемую срезающую функцию, равную нулю при $|x_n| < 1$ и единице при $|x_n| > 2$, и положим:

$$\chi^\varepsilon(x_n) = \begin{cases} \chi\left(x_n \varepsilon^{-\frac{1}{2}}\right), & |x_n| > \tau_0 \\ 0, & |x_n| \leqslant \tau_0. \end{cases}$$

Отметим, что для введенной периодической перфорации выполнены условия A1, A2, A3, A4, A5. А именно, в качестве локальных переменных из условия A1 можно выбрать $\tau = x_n$, $s = x'$ и тогда условие A1 оказывается выполненным с произвольным τ_0. Так как все полости имеют одинаковые размеры, формы и их распределение вдоль S периодические, то условия A2, A3, A4 также выполняются для рассматриваемого случая. В §1.3 будет показано, что условие A5 выполняется для локально–периодической перфорации. Если в рассматриваемом периодическом случае на границах полостей ставится только третье нелинейное граничное условие, то условие A5 выполняется, так как описанный выше случай строго периодического распределения полостей является частным случаем локально–периодической перфорации.

Асимптотика решения задачи (1.0.4) строится для двух описанных выше случаев перфорации. Опишем первый случай. Будем считать, что функция a не зависит от x, то есть, $a = a(u)$, и кроме того, эта функция является бесконечно дифференцируемой и удовлетворяет условию (1.0.3). Предположим, что для всех $\eta \in (0, 1]$ выполнено:

$$\begin{aligned}
&\overline{\omega_\flat^\eta} \subset \Pi, \qquad \operatorname{dist}(\omega_{\mathrm{D}}^\eta, \omega_{\mathrm{R}}^\eta) \geqslant R_4 > 0, \\
&\omega_\flat^\eta := \big\{ x : \, \eta^{-1}(x - M_\flat) \in \omega_\flat \big\},
\end{aligned} \tag{1.0.25}$$

где R_4 — некоторая фиксированная константа, не зависящая от η.

Рассмотрим систему краевых задач

$$\begin{aligned}
&(\mathcal{L} - \lambda) u_m = 0 \quad \text{в} \quad \Omega \setminus S, \qquad u_m = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega, \quad m \in \mathbb{N}, \\
&u_m(x', +0, \eta) = \varphi_m^+(x', \eta), \quad x' \in \mathbb{R}^{n-1}, \\
&u_m(x', -0, \eta) = \varphi_m^-(x', \eta), \quad x' \in \mathbb{R}^{n-1},
\end{aligned} \tag{1.0.26}$$

$$\begin{aligned}
&-\Delta_\xi v_1 = 0 \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^n \setminus \breve{\omega}^\eta, \qquad v_1 = 0 \quad \text{на} \quad \partial\omega_{\mathrm{D}}^\eta, \\
&\frac{\partial v_1}{\partial \nu_\xi} = 0 \quad \text{на} \quad \partial\breve{\omega}_{\mathrm{R}}^\eta,
\end{aligned} \tag{1.0.27}$$

$$\begin{aligned}
&-\Delta_\xi v_m = f_m \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^n \setminus \breve{\omega}^\eta, \qquad v_m = 0 \quad \text{на} \quad \partial\breve{\omega}_{\mathrm{D}}^\eta, \\
&\frac{\partial v_m}{\partial \nu_\xi} = -\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial v_{m-1}}{\partial x_i} \nu_i - L_{m-1}(v_1, \ldots, v_{m-1}) \quad \text{на} \quad \partial\breve{\omega}_{\mathrm{R}}^\eta,
\end{aligned} \tag{1.0.28}$$

$$v_m(\xi,x',\eta)=\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{j!}\frac{\partial^j u_{m-j}}{\partial x_n^j}(x',\pm0,\eta)\xi_n^j+\varphi_m^{\pm}(x',\eta)+o(1),\qquad \xi_n\to\pm\infty, \tag{1.0.29}$$

$$f_m:=\frac{\xi_n^{m-2}}{(m-2)!}\frac{\partial^{m-2}f}{\partial x_n^{m-2}}(x',0)+2\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial^2 v_{m-1}}{\partial\xi_i\partial x_i}+(\Delta_{x'}+\lambda)v_{m-2}, \tag{1.0.30}$$

где $m\geqslant 2$, $v_0:=0$,

$$\breve{\omega}_\flat^\eta=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}^{n-1}}\left\{\xi:\eta^{-1}(\xi-M_k-M_\flat)\in\omega_\flat\right\},\qquad \flat\in\{\mathrm{R},\mathrm{D}\},$$

$\breve{\omega}^\eta:=\breve{\omega}_{\mathrm{D}}^\eta\cup\breve{\omega}_{\mathrm{R}}^\eta$, ν_ξ — единичная нормаль к $\partial\omega_{\mathrm{R}}^\eta$, направленная внутрь ω_{R}^η, ν_i — компоненты вектора ν_ξ. Здесь L_m — некоторые фиксированные полиномы такие, что для каждого монома вида $Cv_1^{p_1}v_2^{p_2}\ldots v_m^{p_m}$ выполнено $p_1+2p_2+\ldots+mp_m=m$. Эти полиномы определяются как коэффициенты в формальном асимптотическом ряде

$$a(u_\varepsilon^{in})=\sum_{m=1}^{\infty}\varepsilon^m L_m(v_1,\ldots,v_m), \tag{1.0.31}$$

В частности,

$$L_1(v_1)=a'(0)v_1,\qquad L_2(v_1,v_2)=a'(0)v_2+\frac{a''(0)}{2}v_1^2.$$

Следующая лемма будет доказана в §4.3.

Лемма 1.0.1. *Существуют единственные решения рекуррентной системы задач (1.0.26), (1.0.27), (1.0.28), (1.0.29). Данные решения имеют вид*

$$\begin{aligned}v_m(\xi,x',\eta)&=\sum_{j=1}^{N_m}\varphi_{mj}(x')v_{mj}(\xi,\eta),\\ u_m(x,\eta)&=\sum_{j=1}^{2N_m}u_{mj}(x)A_{mj}(\eta),\end{aligned} \tag{1.0.32}$$

где N_m — некоторые числа, φ_{mj}, v_{mj}, u_{mj}, A_{mj} — некоторые функции со следующими свойствами. При $|\xi_n| > R_6$ функции v_{mj} представляются в виде

$$\begin{aligned} v_{mj}(\xi,\eta) =& K^{\pm}_{mj}(\xi_n) + A^{\pm}_{mj}(\eta) \\ &+ \sum_{k\in\mathbb{Z}^{n-1}} Q^{\pm}_{mjk}(\xi_n,\eta) e^{-Z_k|\xi_n|} e^{2\pi \mathrm{i}\frac{k}{b}\cdot\xi'}, \qquad \pm\xi_n > R_6, \end{aligned} \tag{1.0.33}$$

где $K^{\pm}_{mj}$ — некоторые полиномы степени не выше m, причём $K^{\pm}_{mj}(0) = 0$, а $Q^{\pm}_{mjk}$ — некоторые полиномы по ξ_n степени не выше $(m-1)$ с коэффициентами, $A^{\pm}_{mj}$ — некоторые функции. Справедливы оценки

$$|A_{mj}| + \|v_{mj}\|_{\mathfrak{H}} + \|v_{mj}\|_{C^1(\overline{\Pi^\eta})} + \eta^{\vartheta}\langle\nabla v_{mj}\rangle^{(\vartheta)}_{\Pi^\eta} \leqslant C\eta^{-m(n-2)}, \tag{1.0.34}$$

где константа C не зависит от η и j. Функции φ_{mj} принадлежат пространствам $W^q_2(\mathbb{R}^{n-1})$ для всех $q \in \mathbb{N}$, бесконечно дифференцируемы, и каждая их производная ограничена равномерно по $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$. Верны равенства

$$\varphi^{\pm}_m(x',\eta) = \sum_{j=1}^{2N_m} A^{\pm}_{mj}(\eta)\varphi_{mj}(x') \tag{1.0.35}$$

Функции u_{mj} есть решения задачи (1.0.26) с краевыми условиями:

$$u_{mj}(x',+0) = \varphi_{mj}(x'), \qquad u_{mj}(x',-0) = 0, \qquad x' \in \mathbb{R}^{n-1}, \tag{1.0.36}$$

при $j = 1, \ldots, N_m$, и

$$u_{mj}(x',+0) = 0, \qquad u_{mj}(x',-0) = \varphi_{mj-N_m}(x'), \qquad x' \in \mathbb{R}^{n-1}, \tag{1.0.37}$$

при $j = N_m + 1, \ldots, 2N_m$. Функции u_{mj} принадлежат

$$W^q_2(\Omega^+_{\tau_0-\delta}) \cap W^q_2(\Omega^-_{\tau_0-\delta}) \cap W^1_2(\Omega)$$

для всех $q \in \mathbb{N}$ и всех $\delta > 0$, бесконечно дифференцируемы в $\Omega^{\pm}_{\tau_0}$ и для каждого $\delta > 0$ все их производные равномерно ограничены в каждой из областей $\overline{\Omega^{\pm}_{\tau_0-\delta}}$.

Основным результатом о построении асимптотик в первом случае является следующая теорема.

Теорема 1.0.4. *Пусть выполнено условие (1.0.8), тогда асимптотика решения задачи (1.0.4) норме* $W_2^1(\Omega^\varepsilon)$ *имеет вид*

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(x,\eta) =& \chi^\varepsilon(x_n)\sum_{m=0}^{N}\varepsilon^m u_m(x,\eta) \\ & + (1-\chi^\varepsilon(x_n))\sum_{m=1}^{N}\varepsilon^m v_m(x\varepsilon^{-1},x',\eta) \\ & + O\left(\varepsilon^{-\frac{1}{4}}\left((\varepsilon\eta^{-n+2})^{N+1}+\varepsilon^{\frac{N+1}{2}}\right)\right). \end{aligned} \tag{1.0.38}$$

Здесь N *— произвольное натуральное число, функция* u_0 *— решение соответствующей усреднённой задачи (1.0.9), оставшиеся функции* u_m *— решения задач (1.0.26), функции* v_m *— решения задач (1.0.27), (1.0.28), (1.0.29), со свойствами, описанными в лемме 1.0.1. Верны соотношения:*

$$\left\|\varepsilon^m(\chi^\varepsilon u_m + (1-\chi^\varepsilon)v_m)\right\|_{W_2^1(\Omega^\varepsilon)} \leqslant C\varepsilon^{-\frac{1}{4}}\left((\varepsilon\eta^{-n+2})^m+\varepsilon^{\frac{m}{2}}\right), \tag{1.0.39}$$

где константа C *не зависит от* ε *и* η*, но зависит от* m.

Опишем второй случай. Предполагаем, что функция a является бесконечно дифференцируемой функцией и удовлетворяет условиям

$$a(u,0)=0, \qquad \left|\frac{\partial a}{\partial \operatorname{Re} u}(x,u)\right| + \left|\frac{\partial a}{\partial \operatorname{Im} u}(x,u)\right| \leqslant a_1, \tag{1.0.40}$$

$$\left|\frac{\partial^{|\beta|}a}{\partial x^\beta}(x,u)\right| \leqslant a_{\beta,0}|u|, \left|\frac{\partial^{|\beta|+\gamma_1+\gamma_2}a}{\partial x^\beta \partial(\operatorname{Re} u)^{\gamma_1}\partial(\operatorname{Im} u)^{\gamma_2}}(x,u)\right| \leqslant a_{\beta,\gamma}, \tag{1.0.41}$$

где $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$, $\gamma := (\gamma_1,\gamma_2) \in \mathbb{Z}_+^2 \setminus \{0\}$, а символы a_1, $a_{\beta,\gamma}$ обозначают некоторые константы, не зависящие от x и u. Рассмотрим систему краевых задач

$$-\Delta_\xi v_m = f_m \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^n \setminus \theta_\eta, \qquad \frac{\partial v_m}{\partial \nu_\xi} = \psi_m \quad \text{на} \quad \partial\theta_\eta, \tag{1.0.42}$$

$$f_0 = 0, \qquad \psi_0 = 0, \qquad \theta_\eta = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}^{n-1}} \left\{\xi : \eta^{-1}(\xi - M_k) \in \omega\right\},$$

$$f_m := \frac{\xi_n^{m-2}}{(m-2)!}\frac{\partial^{m-2} f}{\partial x_n^{m-2}}(x',0) + 2\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial^2 v_{m-1}}{\partial\xi_i\partial x_i} + (\Delta_{x'}+\lambda)v_{m-2},$$

$$\psi_m := -\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial v_{m-1}}{\partial x_i}\nu_i - T_m,$$

где ν_ξ — единичная нормаль к θ_η, направленная внутрь θ_η, ν_i — компоненты вектора ν_ξ, а функции $T_m = T_m(x', \xi_n, v_0, ..., v_m)$ возникают как коэффициенты в следующем асимптотическом равенстве:

$$a\left(x', \varepsilon\xi_n, \sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon^j v_m\right) = T_0(x'\xi_n, v_0) + \sum_{m=1}^{\infty}\varepsilon^m T_m(x', \xi_n, v_1, ..., v_m) \qquad (1.0.43)$$

и $T_0(x', \xi_n, v_0) = a(x', 0, v_0)$.

Для произвольного положительного числа R обозначим $\Pi_R := \square \times (-R, R)$.

Теорема 1.0.5. *Пусть выполнено условие (1.0.20). Асимптотика решения задачи (1.0.4) в норме $W_2^1(\Omega^\varepsilon)$ имеет вид*

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(x) =& \chi^\varepsilon(x_n)\sum_{m=0}^{N}\varepsilon^m u_m(x,\eta) \\ &+ (1-\chi^\varepsilon(x_n))\sum_{m=0}^{N}\varepsilon^m v_m(x\varepsilon^{-1}, x', \eta) + O(\varepsilon^{\frac{N+1}{2}}), \end{aligned} \qquad (1.0.44)$$

где N — произвольное натуральное число. Функции v_m являются $\square$–периодическими по ξ' решениями задач (1.0.42) с асимптотиками

$$\begin{aligned} v_m(\xi, x', \eta) =& \sum_{j=2}^{m}\frac{1}{j!}\frac{\partial^j u_{m-j}}{\partial x_n^j}(x', \pm 0, \eta)\xi_n^j \\ &+ U_{m,1}^{\pm}(x',\eta)\xi_n + U_{m,0}^{\pm}(x',\eta) + O(e^{-c|\xi_n|}), \end{aligned}$$

при $\xi_n \to \pm\infty$, где $c > 0$ — некоторая фиксированная константа, не зависящая от ξ', x', η, а $U_{m,i}^{\pm}$, $i = 1, 2$ — некоторые функции из $W_2^p(S)$

для всех $p \in \mathbb{N}$, бесконечно дифференцируемые по $\eta \in (0,1]$ и равномерно ограниченные по $\eta \in [0,1]$ в нормах указанных пространств. Для функций v_m справедливы представления

$$v_m(\xi, x', \eta) = \sum_{j=1}^{N_m} \varphi_{mj}(x', \eta) v_{mj}(\xi, \eta) + v_m^{(0)}(x', \eta), \tag{1.0.45}$$

где N_m — некоторые числа, $v_m^{(0)}$, φ_{mj}, v_{mj} — некоторые функции. Функции $v_m^{(0)}$, φ_{mj} принадлежат пространствам $W_2^p(S)$ для всех $p \in \mathbb{N}$, бесконечно дифференцируемы по $\eta \in (0,1]$ и равномерно ограничены по $\eta \in [0,1]$ в нормах указанных пространств. Функции v_{mj} являются $\square$–периодическими по ξ', бесконечно дифференцируемы в $\overline{\Pi} \backslash \omega^\eta$ для каждого $\eta \in (0,1]$ и равномерно ограничены по $\eta \in [0,1]$ в нормах $C^1(\Pi_R \setminus \theta_\eta)$ для каждого $R > 0$. Функции v_{mj} бесконечно дифференцируемы по $\eta \in (0,1]$ в следующем смысле: для каждой точки $\eta_0 \in (0,1]$ существует фиксированная окрестность B множества ω^{η_0}, так что функции v_{mj} бесконечно дифференцируемы по (ξ, η), где η — из малой окрестности точки η_0, а $\xi \in \overline{\Pi} \setminus \omega^{\eta_0}$. Одновременно функции $v_{mj}(\tilde{\xi}\eta\eta_0^{-1}, \eta)$ бесконечно дифференцируемы по $(\tilde{\xi}, \eta)$, где η — из малой окрестности точки η_0, а $\tilde{\xi} \in \overline{B} \setminus \omega^{\eta_0}$.

Функция u_0 является решением задачи (1.0.18), (1.0.19) с $\alpha = \eta^{n-1}$, а функции u_m — решения задач

$$(\mathcal{L} - \lambda) u_m = 0 \quad \text{в} \quad \Omega \setminus S, \qquad u_m = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega, \quad m \geqslant 1, \tag{1.0.46}$$

с краевыми условиями

$$[u_m]_0 = U^+_{m,0} - U^-_{m,0}, \qquad \left[\frac{\partial u_m}{\partial x_n}\right]_0 = U^+_{m,1} - U^-_{m,1} \qquad \text{на} \quad S.$$

Верна оценка

$$\left\| \varepsilon^m (\chi^\varepsilon u_m + (1 - \chi^\varepsilon) v_m) \right\|_{W_2^1(\Omega^\varepsilon)} \leqslant C \varepsilon^{\frac{m}{2}}, \tag{1.0.47}$$

где константа C не зависит от ε и η, но зависит от m.

Обсудим полученные результаты. Начнём с предположений о геометрии перфорации. Условие A1 налагается на многообразие, вдоль которого располагаются полости. Это условие означает, что поверхность S не слишком сильно осциллирует — наличие сильных осцилляций уменьшает размер области, в которой корректно определены локальные переменные (τ, s). Схематическим примером, демонстрирующим возможное наличие таких осцилляций и нарушение условия A1, является многообразие в $\mathbb{R}^3$, определяемое уравнением $x_3 = \sin(x_1^2 + x_2^2)$, $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. При больших (x_1, x_2) это многообразие начинает сильно осциллировать, и тем самым не удается ввести локальные переменные (τ, s) равномерно вдоль многообразия. Вместе с тем подчеркнём, что условие A1 необходимо в том смысле, что попытка определить перфорацию вдоль многообразий с нарастающими осцилляциями существенно изменяет саму постановку задачи, так как здесь полости могут располагаться слишком часто и могут начать пересекаться. Это означает качественное изменение постановки исходной задачи и, возможно, качественное изменение вида усреднённой задачи. Отметим ещё, что условие A1 важно в случае неограниченной поверхности S и автоматически выполняется, если поверхность S ограничена; в последнем случае достаточно предполагаемой гладкости C^2.

Условие A2 означает, что все полости имеют размеры одного порядка, они не пересекаются, и между ними имеется минимальное расстояние порядка $O(\varepsilon)$. Размеры полостей порядка $O(\varepsilon\eta(\varepsilon))$. На форму полостей никаких ограничений не накладывается, полости могут достаточно произвольно зависеть от малого параметра. Эти условия являются естественными для всех задач о перфорации, налагая минимальные разумные требования на формы полостей и их распределение. Предположение о связности множеств $B_{R_2}(0)\setminus\omega_{k,\eta}$ также весьма естественно, так как иначе внутри области Ω^ε возникали бы изолированные компоненты малого размера, не связанные с основной частью области, и фактически речь шла о независимых задачах на таких малых областях. Подчеркнём, что каждое из полостей $\omega_{k,\eta}$ не обязательно односвязно и число компонент связности полости $\omega_{k,\eta}$ может зависеть от k.

Условие А3 означает определённую равномерность геометрии областей $\omega_{k,\eta}$ по параметрам k и η. Как и первое условие А1, оно сформулировано в терминах локальных переменных возле границы — требуется наличие полосы достаточно малой, но фиксированной ширины вдоль границ областей $\omega_{k,\eta}$, в которых были бы корректно определены локальные переменные ρ одновременно для всех $k \in \mathbb{M}^{\varepsilon}_{\mathrm{R}}$ и всех η. Как и в случае поверхности S, это также означает отсутствие нарастающих осцилляций у границ областей $\omega_{k,\eta}$. Это условие далее используется для того, что обеспечить наличие следа функций из $\mathring{W}_2^1(\Omega^\varepsilon, \partial\Omega)$ на границах полостей $\partial\omega_{k,\eta}$. Наличие следа необходимо для формулировки определения обобщённых решений рассматриваемой возмущённой задачи. Если не налагать условие А3, а ограничиться лишь условием А2, то тогда не исключаются полости, удовлетворяющие вложениям в (1.0.6), но с возрастающей по k или по η мерой границ $|\partial\omega_{k,\eta}|$, что возможно за счёт возрастающих осцилляций этих границ. На таких границах соответствующая константа в оценках L_2–норм следов на границах через W_2^1–нормы в области Ω^ε будет расти с ростом k. В этом легко убедиться, если взять функцию, локально равную константе в окрестности таких полостей — сама функция не изменяется, а мера границы возрастает, увеличивая тем самым L_2–норму следа. Поэтому условие А3 является по меньшей мере близким к необходимому для обеспечения наличия следа.

Условие А4 требует, чтобы полости с первым граничным условием были расположены достаточно часто, так что шары с центрами в этих полостях радиусами $R_3\varepsilon$ покрывают слой вдоль многообразия шириной $2bR_2\varepsilon$. Последнее требование фактически налагает единственное дополнительное и весьма слабое условие на распределение полостей с краевым условием Дирихле на границе. Геометрический смысл этого условия состоит в том, что полости с условием Дирихле должны быть расположены достаточно часто вдоль многообразия S. На положение полостей с третьим нелинейным краевым условием никаких условий не налагается, поэтому они могут располагаться как часто, так и редко. Например, расстояния между этими полостями могут быть и конечными, не обязательно малыми, число таких полостей может быть конечным, либо они вовсе могут отсутствовать.

При выполнении условий A1, A2, A3, A4 и (1.0.8) усреднённая задача для (1.0.4) имеет вид (1.0.9). При усреднении полости пропадают, а на многообразии S возникает условие Дирихле. Теорема 1.0.1 устанавливает сходимость решения задачи (1.0.4) к решению задачи (1.0.9) в норме $W_2^1(\Omega^\varepsilon)$ равномерно по правой части уравнения. Более того, теорема 1.0.1 дает оценку скорости сходимости, см. неравенство (1.0.10). Правая часть этого неравенства стремится к нулю в силу условия (1.0.8).

При выполнении условий A1, A2, A3 и одного из условий (1.0.20) усреднённая задача для (1.0.4) имеет вид (1.0.17). В этом случае полости пропадают вместе с многообразием S, вдоль которого они расположены и усреднённая задача (1.0.17) никак не зависит от выбора многообразия S. При выполнении условий A1, A2, A3 и дополнительного условия A5 усреднённая задача для (1.0.4) имеет вид (1.0.18), (1.0.19). Теперь усреднённая задача зависит от выбора многообразия S, на котором возникает граничное условие, которое уместно трактовать как нелинейное дельта–взаимодействие. Коэффициент в этом условии определяется геометрией и распределением полостей. А именно, функция α^ε зависит от распределения проекций точек $M_{k,\perp}^\varepsilon$ на поверхности S и от площадей границ полостей $\partial\omega_{k,\varepsilon}$. При малых ε эта функция должна оказываться близкой к некоторой функции α^0 в смысле нормы $\|\cdot\|_S$, то есть, условие A5 утверждает возможность усреднения функции α^ε в смысле нормы $\|\cdot\|_S$, и это налагает определенные ограничения на степень непериодичности распределения точек M_k^ε и произвол в выборе полостей $\omega_{k,\varepsilon}$. При этом следует подчеркнуть, что форма полостей оказывается неважной, а роль играют лишь площади их границ, так как именно они входят в определение функции α^ε.

Теорема 1.0.2 утверждает сходимость решения задачи (1.0.4) к решению задачи (1.0.17) в W_2^1 равномерно по правой части уравнения. Теорема 1.0.3 утверждает аналогичную сходимость решения задачи (1.0.4) к решению задачи (1.0.18), (1.0.19). Помимо сходимости, теоремы 1.0.2 и 1.0.3 дают оценки скорости сходимости, см. неравенства (1.0.21), (1.0.22), (1.0.23).

Вторая часть результатов посвящена построению асимптотического разложения решения задачи (1.0.4). Для возможности построения асимптотики приходится налагать дополнительные ограничения на полости, а именно, теперь полости образуют периодическое множество, расположенное вдоль гиперплоскости $x_n = 0$. Сами полости задаём как сжатие в $\varepsilon^{-1}\eta^{-1}$ раз некоторых фиксированных ограниченных множеств. Также требуем, чтобы функции f и a были бесконечно дифференцируемыми и предполагаем, что функция a не зависит от x. Выполнение этих условий позволяет нам построить полное асимптотическое разложение решения задачи (1.0.4). Решение строится методом согласования асимптотических разложений в виде комбинации внешнего разложения с коэффициентами u_m и внутреннего разложения с коэффициентами v_m.

Асимптотика (1.0.38) является двупараметрической и зависит от двух параметров ε и η. Структура асимптотики степенная, коэффициенты зависят от η как от параметра. Оставаясь ограниченными для конечных η, они имеют особенности при $\eta \to +0$, несмотря на которые, ряд (1.0.38) сохраняет свойство асимптотичности благодаря условию (1.0.8).

При выполнении условия (1.0.20) предельной оказывается уже задача (1.0.18), (1.0.19), и асимпотика решения задачи (1.0.4) теперь имеет вид (1.0.44). Эта асимптотика внешне похожа на асимптотику (1.0.38) для случая усредненной задачи Дирихле, однако на самом деле она качественно отличается. Основное отличие состоит в зависимости коэффициентов от параметра η — данная зависимость теперь бесконечно дифференцируемая. Это утверждение доказано как для коэффициентов внешнего разложения, так и для коэффициентов внутреннего разложения. Причем последние заданы в модельной области с полостью, зависящей от

η, и уточняется, что понимается по бесконечной дифференцируемости в окрестности такой полости.

Результаты диссертации опубликованы в статьях [12], [13], [14], [15], [31]. В статье [12] Борисову Д.И. принадлежит постановка задачи и утверждение в основных теоремах о точности по порядку доказанных операторных оценок. Диссертанту принадлежат результаты об операторных W_2^1–оценках. В статье [13] Борисову Д.И. принадлежит постановка задачи и доказательство вспомогательных лемм 3.1, 4.4. Остальная часть результатов работы [13] принадлежит диссертанту. В статье [14] Борисову Д.И. принадлежит постановка задачи и доказательство вспомогательной леммы 7.4. Остальная часть результатов работы [14] принадлежит диссертанту. В статье [15] Д.И. Борисову принадлежит постановка задачи и доказательство L_2–операторных оценок. Остальная часть результатов работы [15] принадлежит диссертанту. Из результатов совместных работ в диссертацию автором включены только результаты, полученные им лично.

В следующих главах приводится основное содержание диссертации и доказательство основных результатов. В каждой из глав вводятся и используются свои обозначения, которые, как правило, имеют силу лишь в рамках главы. В диссертации допускается использование одного и того же символа для обозначения разных объектов в разных главах.

Глава 2

Сходимость в случае усредненного краевого условия Дирихле

2.1 Существование и оценка следов на $\partial\theta_{\mathrm{R}}^{\varepsilon}$

Настоящий параграф посвящён изучению свойств следов функций из $W_2^1(\Omega^\varepsilon)$ на множестве $\partial\theta_{\mathrm{R}}^{\varepsilon}$. Наша основная цель — доказать, что условия A1, A2, A3 обеспечивают существование такого следа в пространстве $L_2(\theta_{\mathrm{R}}^{\varepsilon})$, а также оценить норму такого следа равномерно по ε и η.

Первая лемма — один из ключевых шагов как при дальнейшей оценке следов, так и в доказательстве теоремы 1.0.1 в следующем параграфе. Она была доказана в статье [55], см. лемму 3.2 в этой работе.

Лемма 2.1.1. *Пусть выполнено условие A2. Тогда для всех функций* $u \in \mathring{W}_2^1(B_{b_*R_2}(0) \setminus \omega_{k,\eta}, \partial B_{b_*R_2}(0))$ *верны оценки:*

$$\|u\|_{L_2(B_{b_*R_2}(0)\setminus\omega_{k,\eta})} \leqslant C\|\nabla u\|_{L_2(B_{b_*R_2}(0)\setminus\omega_{k,\eta})}$$

где C *— некоторая фиксированная константа, не зависящая от* u, k, η *и формы полостей* $\omega_{k,\eta}$.

Пусть $\chi_1 = \chi_1(t)$ — бесконечно дифференцируемая срезающая функция, равная единице при $t < 1$ и нулю при $t > 2$. Следующие два вспомогательных утверждения выглядят следующим образом.

Лемма 2.1.2. *При выполнении условий А2, А3 для всех* $k \in \mathbb{M}_{\mathrm{R}}^{\varepsilon}$ *и всех* $u \in \mathring{W}_2^1\big(B_{b_*R_2}(0) \setminus \omega_{k,\eta}, \partial B_{b_*R_2}(0)\big)$ *справедлива оценка*

$$\|u\|^2_{L_2(\partial\omega_{k,\eta})} \leqslant C\|\nabla u\|^2_{L_2(B_{b_*R_2}(0)\setminus\omega_{k,\eta})},$$

где C *— положительная константа, не зависящая от параметров* k, ε, η *и функции* u.

Доказательство. Пусть $k \in \mathbb{M}_{\mathrm{R}}^{\varepsilon}$ и $u \in \mathring{W}_2^1\big(B_{b_*R_2}(0) \setminus \omega_{k,\eta}, \partial B_{b_*R_2}(0)\big)$. Тогда в силу условия А3 функция $\chi_1\left(\frac{3\rho}{\rho_0}\right)u(x)$ определена корректно, обращается в нуль вне области $\{x\,:\,0 \leqslant \rho < \rho_0\} \cup \omega_{k,\eta}$, и выполнено равенство

$$|u(x)|^2\big|_{\partial\omega_{k,\eta}} = \int\limits_{\rho_0}^{0} \frac{\partial}{\partial\rho}\chi_1\left(\frac{3\rho}{\rho_0}\right)|u(x)|^2\,d\rho.$$

Интегрируя последнее соотношение по границе области $\omega_{k,\eta}$ и применяя неравенство Коши–Буняковского, получаем оценку для нормы следа

$$\|u\|^2_{L_2(\partial\omega_{k,\eta})} \leqslant C\|u\|^2_{W_2^1(B_{b_*R_2}(0)\setminus\omega_{k,\eta})},$$

где константа C не зависит от k, u, η и ε. Утверждение леммы теперь вытекает из последней оценки и леммы 2.1.1. Лемма доказана. $\square$

Обозначим: $b_\dagger := (3b+1)/4$.

Лемма 2.1.3. *При выполнении условий А2, А3 для всех* $k \in \mathbb{M}_{\mathrm{R}}^{\varepsilon}$ *и всех* $u \in W_2^1\big(B_{bR_2\varepsilon}(M_k^\varepsilon) \setminus \omega_k^\varepsilon\big)$ *справедлива оценка*

$$\begin{aligned}\|u\|^2_{L_2(\partial\omega_k^\varepsilon)} \leqslant C\Big(&\varepsilon\eta\|\nabla u\|^2_{L_2(B_{bR_2\varepsilon}(M_k^\varepsilon)\setminus\omega_k^\varepsilon)} \\ &+ \varepsilon^{-1}\eta^{n-1}\|u\|^2_{L_2(B_{bR_2\varepsilon}(M_k^\varepsilon)\setminus B_{b_\dagger R_2\varepsilon}(M_k^\varepsilon))}\Big),\end{aligned} \tag{2.1.1}$$

где C *— положительная константа, не зависящая от параметров* k, ε, η *и функции* u.

Доказательство. Пусть $k \in \mathbb{M}_{\mathrm{R}}^{\varepsilon}$ и $u \in \mathring{W}_2^1\big(B_{bR_2\varepsilon}(M_k^\varepsilon) \setminus \omega_k^\varepsilon, \partial B_{bR_2\varepsilon}(M_k^\varepsilon)\big)$. Всюду в доказательстве через C обозначаем различные несущественные константы, не зависящие от ε, η, k, u и всех рассматриваемых пространственных переменных. Обозначим:

$$\tilde{u}(y) := u(M_k^\varepsilon + \varepsilon\eta y)\chi_1\left(\frac{2|y| + (b-3)R_2}{(b-1)R_2}\right).$$

Эта функция принадлежит пространству $\mathring{W}_2^1(B_{b_* R_2}(0) \setminus \omega_{k,\eta}, \partial B_{b_* R_2}(0))$, причём $\tilde{u}(y) = u(M_k^\varepsilon + \varepsilon\eta y)$ на $\partial\omega_{k,\eta}$. Поэтому в силу леммы 2.1.2 верна оценка

$$\begin{aligned}\|u\|^2_{L_2(\partial\omega_k^\varepsilon)} =&(\varepsilon\eta)^{n-1}\|\tilde{u}\|^2_{L_2(\partial\omega_{k,\eta})} \leqslant C(\varepsilon\eta)^{n-1}\|\nabla_y\tilde{u}\|^2_{L_2(B_{b_* R_2}(0)\setminus\omega_{k,\eta})} \\ \leqslant& C\Big(\varepsilon\eta\|\nabla u\|^2_{L_2(B_{b_* R_2\varepsilon\eta}(M_k^\varepsilon)\setminus\omega_k^\varepsilon)} \\ &+ (\varepsilon\eta)^{-1}\|u\|^2_{L_2(B_{b_* R_2\varepsilon\eta}(M_k^\varepsilon)\setminus B_{R_2\varepsilon\eta}(M_k^\varepsilon))}\Big).\end{aligned} \tag{2.1.2}$$

При $R_2\varepsilon\eta \leqslant |x - M_k^\varepsilon| \leqslant b_* R_2\varepsilon\eta$ выполнено равенство

$$u(x) = \int\limits_{bR_2\varepsilon}^{|x-M_k^\varepsilon|} \frac{\partial}{\partial t} u(x)\chi_1(y)\,dt, \qquad y := \frac{4t - 2(b+1)R_2\varepsilon}{(b-1)R_2\varepsilon},$$

где t — радиус в полярных координатах с центром в точке M_k^ε, соответствующих x. Отсюда в силу неравенства Коши–Буняковского вытекает

$$\begin{aligned}|u(x)|^2 \leqslant& \int\limits_{|x-M_k^\varepsilon|}^{bR_2\varepsilon} \frac{dt}{t^{n-1}} \int\limits_{R_2\varepsilon\eta}^{R_2\varepsilon} |\nabla u|^2 t^{n-1}\,dt \\ &+ C\varepsilon^{-2} \int\limits_{b_\dagger R_2\varepsilon}^{bR_2\varepsilon} \frac{(\chi_1'(y))^2}{t^{n-1}}\,dt \int\limits_{b_\dagger R_2\varepsilon}^{bR_2\varepsilon} |u(x)|^2 t^{n-1}\,dt \\ \leqslant& C\left((\varepsilon\eta)^{-n+2}\int\limits_{R_2\varepsilon\eta}^{bR_2\varepsilon} |\nabla u|^2 t^{n-1}\,dt + \varepsilon^{-n}\int\limits_{b_\dagger R_2\varepsilon}^{bR_2\varepsilon} |u(x)|^2 t^{n-1}\,dt\right).\end{aligned}$$

Интегрируя полученную оценку по $B_{b_* R_2\varepsilon\eta}(M_k^\varepsilon) \setminus B_{R_2\varepsilon\eta}(M_k^\varepsilon)$, выводим

$$\|u\|^2_{L_2(B_{b_* R_2\varepsilon\eta}(M_k^\varepsilon)\setminus B_{R_2\varepsilon\eta}(M_k^\varepsilon))} \leqslant C\Big(\varepsilon^2\eta^2\|\nabla u\|^2_{L_2(B_{bR_2\varepsilon}(M_k^\varepsilon)\setminus B_{R_2\varepsilon}(M_k^\varepsilon))}$$

$$+\,\eta^n\|u\|^2_{L_2(B_{bR_2\varepsilon}(M_k^\varepsilon)\setminus B_{b_\dagger R_2\varepsilon}(M_k^\varepsilon))}\Big).$$

Подставляя эту оценку в (2.1.2), приходим к утверждению леммы. Лемма доказана. $\square$

Доказанные леммы позволяют установить существование следа на $\partial\theta^\varepsilon_{\mathrm{R}}$ и оценить его норму.

Лемма 2.1.4. *При выполнении условий A1, A2, A3 для любой функции $u\in \mathring{W}_2^1(\Omega^\varepsilon,\partial\theta^\varepsilon_{\mathrm{D}})$ верна оценка*

$$\|u\|^2_{L_2(\partial\theta^\varepsilon_{\mathrm{R}})}\leqslant (C\varepsilon\eta+\delta\eta^{n-1})\|\nabla u\|^2_{L_2(\Omega^\varepsilon)}+C(\delta)\eta^{n-1}\|u\|^2_{L_2(\Omega^\varepsilon)},$$

где $\delta>0$ — произвольная константа, а константы C и $C(\delta)$ не зависят от параметров ε, η, функции u, а также от формы и расположения полостей ω^ε_k, $k\in\mathbb{M}^\varepsilon$.

Доказательство. Всюду в доказательстве через C обозначаем различные несущественные константы, не зависящие от $k\in\mathbb{M}^\varepsilon_{\mathrm{R}}$, ε, η, u, пространственных переменных и формы полостей ω^ε_k.

Пусть $u\in \mathring{W}_2^1(\Omega^\varepsilon,\partial\theta^\varepsilon_{\mathrm{D}})$. Продолжим её нулём внутрь полостей $\theta^\varepsilon_{\mathrm{D}}$ и сохраним для продолжения прежнее обозначение. Такое продолжение не изменяет различные нормы этой функции, которые будут использованы далее в доказательстве.

Для $|\tau|\leqslant\tau_0$ верно

$$|u(x)|^2=\int\limits_{\tau_0}^{\tau}\frac{\partial}{\partial\tau}|u(x)|^2\chi_1\left(\frac{3\tau}{\tau_0}\right)\,d\tau,\qquad \pm\tau>0,$$

при условии, что путь интегрирования в указанном интеграле не пересекает полости из множества $\theta^\varepsilon_{\mathrm{R}}$. В силу условия A1 и неравенства Коши–Буняковского при том же условии отсутствия пересечения из приведённых равенств следует

$$
\begin{aligned}
|u(x)|^2 &= \int\limits_{\tau}^{\tau_0} \chi_1\left(\frac{3\tau}{\tau_0}\right)\frac{\partial}{\partial\tau}|\nabla u(x)|^2\,d\tau + \int\limits_{\frac{\tau_0}{3}}^{\frac{2\tau_0}{3}} \frac{3}{\tau_0}\chi_1'\left(\frac{3\tau}{\tau_0}\right)|u(x)|^2\,d\tau \\
&\leqslant \int\limits_{\tau}^{\tau_0}\left|\chi_1\left(\frac{3\tau}{\tau_0}\right)\right|\left(\delta|\nabla u(x)|^2 + C(\delta)|u(x)|^2\right)\,d\tau \\
&\quad + \int\limits_{\frac{\tau_0}{3}}^{\frac{2\tau_0}{3}} \frac{3}{\tau_0}\left|\chi_1'\left(\frac{3\tau}{\tau_0}\right)\right||u(x)|^2\,d\tau, \qquad \pm\tau > 0,
\end{aligned}
\tag{2.1.3}
$$

где $\delta > 0$ — произвольная константа, $C(\delta)$ — некоторая константа, не зависящая от переменных x и функции u.

Обозначим через Γ_k^ε множества точек x, отстоящих от поверхности S на расстояние, не превосходящее τ_0, таких что перпендикуляр, опущенный из x на S, пересекает шар $B_{b_* R_2\varepsilon}(M_k^\varepsilon)$. В силу условия A1 множества Γ_k^ε попарно не пересекаются. Проинтегрируем теперь оценки (2.1.3) по областям

$$
B_{b_* R_2\varepsilon}(M_k^\varepsilon) \setminus B_{R_2\varepsilon}(M_k^\varepsilon) \cap \{x : \pm\tau > 0\},
$$

тогда получим

$$
\|u\|^2_{L_2(B_{b_* R_2\varepsilon}(M_k^\varepsilon)\setminus B_{R_2\varepsilon}(M_k^\varepsilon))} \leqslant \varepsilon\left(\delta\|\nabla u\|^2_{L_2(\Gamma_k^\varepsilon)} + C(\delta)\|u\|^2_{L_2(\Gamma_k^\varepsilon)}\right),
$$

где $\delta > 0$ — произвольная константа, $C(\delta)$ — некоторая константа, не зависящая от переменных x и функции u. Подставим полученную оценку в (2.1.1) и просуммируем результат по $k \in \mathbb{M}_{\mathrm{R}}^\varepsilon$. Это приводит к утверждению леммы. Лемма доказана. $\square$

Лемма 2.1.5. *Для произвольной функции* $u \in \mathring{W}_2^1(\Omega, \partial\Omega)$ *функция* $a(x, u(x))$ *имеет след на* $\theta_{\mathrm{R}}^\varepsilon$, *который является элементом* $L_2(\partial\theta_{\mathrm{R}}^\varepsilon)$.

Доказательство. Так как $u \in W_2^1(\Omega)$, то существует последовательность функций $u_n \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $n = 1, 2, 3\ldots$, сходящаяся в норме $W_2^1(\Omega)$ к функции u. Верна оценка

$$\|u_n - u_m\|_{L_2(S)} \leqslant C\|u_n - u_m\|_{W_2^1(\Omega)}, \tag{2.1.4}$$

где константа C не зависит от n и m. Из условия (1.0.3) следуют неравенства

$$|a(x, u_n)| \leqslant C|u_n|, \qquad |a(x, u_n) - a(x, u_m)|^2 \leqslant C|u_n - u_m|^2, \tag{2.1.5}$$

где константа C не зависит от n и m. Так как функция u_n является интегрируемой на S, то из первого неравенства в (2.1.5) и кусочной непрерывности $a(x,u)$) следует, что функция $a(x, u_n(x))$ также является интегрируемой и принадлежит $L_2(S)$. Интегрируя вторую оценку в (2.1.5) по S и учитывая неравенство (2.1.4), получим

$$\|a(\,\cdot\,, u_n) - a(\,\cdot\,, u_m)\|^2_{L_2(S)} \leqslant C\|u_n - u_m\|^2_{W_2^1(\Omega)},$$

где константа C не зависит от n и m. Правая часть последнего неравенства стремится к нулю. Это означает, что последовательность $a(x, u_n(x))$ является фундаментальной в $L_2(S)$. Так как пространство $L_2(S)$ полное, то последовательность $a(x, u_n(x))$ сходится в $L_2(S)$ к некоторому пределу. Стандартным образом, см. §5 п.1 в [30], показывается, что этот предел не зависит от выбора последовательности u_n и именно этот предел и называется следом функции $a(x, u(x))$ на S. Лемма доказана. $\square$

2.2 Вспомогательные локальные оценки

В настоящем параграфе мы доказываем серию локальных оценок L_2–норм функций в окрестности поверхности S. Данные оценки далее будут использованы в доказательствах теорем 1.0.1, 1.0.4.

Первое вспомогательное утверждение доказывается аналогично лемме 4.1 в [54].

Лемма 2.2.1. *При выполнении условия A1 для любой функции $u \in W_2^2(\Omega)$ и $|\tau| \leqslant \frac{\tau_0}{3}$ верны оценки*

$$|u|^2 \leqslant C\tau^2\|u\|^2_{W_2^2(-\frac{\tau_0}{2}, \frac{\tau_0}{2})}, \qquad |\nabla u|^2 \leqslant C\|\nabla u\|^2_{W_2^1(-\frac{\tau_0}{2}, \frac{\tau_0}{2})}.$$

Следующая лемма описывает свойства покрытия слоя Ξ^ε шарами с центрами в точках M_k^ε, $k \in \mathbb{M}_{\mathrm{D}}^\varepsilon$.

Лемма 2.2.2. *При выполнении условий A2, A4 для каждой точки x из Ξ^ε число шаров $B_{R_5\varepsilon}(M_k^\varepsilon)$, $R_5 := R_3 + (b+1)R_2$, содержащих эту точку, не превосходит некоторой абсолютной величины, не зависящей от выбора точки x и параметра ε.*

Доказательство. Для произвольной точки $x \in \Xi^\varepsilon$ число шаров $B_{R_5\varepsilon}(M_k^\varepsilon)$, содержащих эту точку, очевидно равно числу точек M_k^ε, $k \in \mathbb{M}_{\mathrm{D}}^\varepsilon$, отстоящих от x на расстояние, не превосходящее $R_5\varepsilon$. Это число оценивается максимальным числом точек M_k^ε, $k \in \mathbb{M}_{\mathrm{D}}^\varepsilon$, которые могут располагаться в шаре радиуса $2R_5\varepsilon$. Согласно условию A2, попарные расстояние между точками M_k^ε не меньше $2bR_2\varepsilon$. Поэтому сопоставляя каждой такой точке n–мерный куб со стороной $2bR_2\varepsilon$, немедленно заключаем, что шар радиуса $2R_3\varepsilon$ может содержать не более, чем $|B_{2R_5\varepsilon}(0)|/(2bR_2\varepsilon)^n = |B_{2R_5}(0)|/(2bR_2)^n$ таких кубов, и соответственно, точек M_k^ε, $k \in \mathbb{M}_{\mathrm{D}}^\varepsilon$. Указанное отношение n–мерных объемов очевидно не зависит от ε и выбора точки x. Лемма доказана. $\square$

Далее наша основная цель — для произвольной функции u из пространства $W_2^1(\Omega^\varepsilon)$, обращающейся в нуль на $\theta_{\mathrm{D}}^\varepsilon$, оценить её норму в $L_2(\Xi^\varepsilon \setminus \theta^\varepsilon)$ через норму её градиента в $L_2(\Omega^\varepsilon)$.

Лемма 2.2.3. *При выполнении условий A1, A2, A4 для любой функции $u \in \mathring{W}_2^1(\Omega^\varepsilon, \partial\Omega \cup \theta_{\mathrm{D}}^\varepsilon)$ верна оценка*

$$\|u\|_{L_2(\Xi^\varepsilon \setminus \theta^\varepsilon)}^2 \leqslant C\varepsilon^2\eta^{-n+2}\|\nabla u\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)}^2,$$

где константа C не зависит от функции u, параметров ε и η, формы и расположения полостей ω_k^ε, $k \in \mathbb{M}^\varepsilon$.

Доказательство. Всюду в доказательстве через C обозначаем различные несущественные константы, не зависящие от u, ε, η, формы и расположения полостей ω_k^ε. Функцию u доопределим нулём внутри полостей

$\theta_{\mathrm{D}}^{\varepsilon}$. Через $\mathbb{M}_k^{\varepsilon}$ обозначим множество индексов $j \in \mathbb{M}_{\mathrm{R}}^{\varepsilon}$ таких, что

$$\overline{B_{R_3\varepsilon}(M_k^{\varepsilon})} \cap \overline{B_{R_2}(M_j^{\varepsilon})} \neq \emptyset.$$

В работе [55, §3.2] было показано, что при выполнении условий A1 и A2 функцию u можно продолжить внутрь полостей $\theta_{\mathrm{R}}^{\varepsilon}$, причем верны оценки

$$\begin{aligned} &\|u\|^2_{L_2(\omega_{k,\varepsilon})} \leqslant C\|u\|^2_{L_2(B_{R_3\varepsilon\eta}(M_k^{\varepsilon})\setminus\omega_{k,\varepsilon})}, \\ &\|\nabla u\|^2_{L_2(\omega_{k,\varepsilon})} \leqslant C\|\nabla u\|^2_{L_2(B_{R_3\varepsilon\eta}(M_k^{\varepsilon})\setminus\omega_{k,\varepsilon})}, \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

где C — некоторая константа, не зависящая от u, ε, η и k.

Из условия A4 следует, что $B_{R_3\varepsilon}(M_k)$, $k \in \mathbb{M}_{\mathrm{D}}^{\varepsilon}$, покрывают слой Ξ^{ε}. В силу леммы 2.2.2 каждая точка слоя Ξ^{ε} попадает лишь в конечное число множеств $B_{R_3\varepsilon}(M_k)$, и это число ограничено некоторой абсолютной константой равномерно по ε, η и точкам слоя. Ещё отметим, что растяжение введённых множеств в ε^{-1} раз относительно точек M_k^{ε} даёт множества $B_{R_3}(0)$. Тогда с помощью замены переменной, соответствующей такому растяжению, получим оценку

$$\|u\|^2_{L_2(B_{R_3\varepsilon\eta}(M_k))} \leqslant C\varepsilon^2\eta^{-n+2}\|\nabla v\|^2_{L_2(B_{R_3\varepsilon\eta}(M_k))}.$$

Суммируя полученные неравенства по всем $k \in \mathbb{M}_{\mathrm{D}}^{\varepsilon}$ и учитывая упомянутые выше свойства покрытия слоя Ξ^{ε} множествами $B_{R_3\varepsilon\eta}(M_k)$, $k \in \mathbb{M}_{\mathrm{D}}^{\varepsilon}$, приходим к утверждению леммы. Лемма доказана. $\square$

2.3 Сходимость решений

В данном параграфе мы доказываем теорему 1.0.1. Вначале покажем, что задача (1.0.4) однозначно разрешима.

Лемма 2.3.1. *Существует λ_0 такое, что при $\lambda < \lambda_0$ задача (1.0.4) имеет единственное решение $u_\varepsilon \in W_2^1(\Omega^{\varepsilon})$ для всех ε и $f \in L_2(\Omega)$.*

Доказательство. На пространстве $\mathring{W}_2^1(\Omega^{\varepsilon}, \partial\Omega \cup \partial\theta_{\mathrm{D}}^{\varepsilon})$ введём оператор, действующий по следующему правилу: каждой функции $u \in \mathring{W}_2^1(\Omega^{\varepsilon}, \partial\Omega\cup$

$\partial\theta^\varepsilon_{\mathrm{D}}$) ставится в соответствие линейный непрерывный функционал, заданный на $W^1_2(\Omega^\varepsilon)$ и действующий по правилу $v \mapsto \mathfrak{h}_a(u,v)$, $v \in \mathring{W}^1_2(\Omega^\varepsilon, \partial\Omega \cup \partial\theta^\varepsilon_{\mathrm{D}})$, где, напомним, форма $\mathfrak{h}_a(u,v)$ была определена в (1.0.7) при введении понятия обобщённого решения задачи (1.0.4).

В силу [27, Гл. 2, §2.1, Теор. 2.1; §2.2, Теор. 2.2] для однозначной разрешимости задачи (1.0.4) достаточно проверить выполнение условий

1. Для любых $u, v, w \in \mathring{W}^1_2(\Omega^\varepsilon, \partial\Omega \cup \partial\theta^\varepsilon_{\mathrm{D}})$ функция $\lambda \mapsto \mathfrak{h}_a(u+\lambda v, w)$ непрерывна;
2. Для любых $u, v \in \mathring{W}^1_2(\Omega^\varepsilon, \partial\Omega \cup \partial\theta^\varepsilon_{\mathrm{D}})$ выполнено $\mathfrak{h}_a(u-v, u-v) > 0$.

Проверим выполнение условия 1. Верно равенство

$$\mathfrak{h}_a(u+\lambda v, w) = \mathfrak{h}_0(u,w) + \mathfrak{h}_0(\lambda v, w) + (a(\cdot, u+\lambda v), w)_{L_2(\partial\theta^\varepsilon_{\mathrm{R}})}.$$

Так как в этом равенстве первые два слагаемых являются линейными функциями, то они непрерывны по λ. Из неравенства Коши–Буняковского и условия (1.0.3) для произвольных вещественных λ_1 и λ_2 вытекает

$$\begin{aligned}|(a(\cdot, u+\lambda_1 v), w)_{L_2(\partial\theta^\varepsilon_{\mathrm{R}})} &- (a(\cdot, u+\lambda_2 v), w)_{L_2(\partial\theta^\varepsilon_{\mathrm{R}})}| \\ &\leqslant a_0|\lambda_1-\lambda_2|\|v\|_{L_2(\partial\theta^\varepsilon_{\mathrm{R}})}\|w\|_{L_2(\partial\theta^\varepsilon_{\mathrm{R}})}.\end{aligned}$$

Из последнего неравенства следует непрерывность $(a(\cdot, u+\lambda v), w)_{L_2(\partial\theta^\varepsilon_{\mathrm{R}})}$ по λ, что доказывает условие 1.

Проверим справедливость условия 2. Поскольку скалярное произведение $(a(\cdot,u),u)_{L_2(\partial\theta^\varepsilon_{\mathrm{R}})}$ является вещественным для всех $u \in L_2(\partial\theta^\varepsilon_{\mathrm{R}})$, форма $\mathfrak{h}_a(u-v,u-v)$ также является вещественной. В силу свойства (1.0.3) выполнено неравенство

$$\mathfrak{h}_a(u-v,u-v) \geqslant \mathfrak{h}_0(u-v,u-v) - a_0\int_{\partial\theta^\varepsilon_{\mathrm{R}}} |u-v|^2\,ds.$$

Интеграл в правой части полученного неравенства оценим с помощью леммы 2.1.4, а слагаемые в форме $\mathfrak{h}_0$ — с помощью неравенства Коши–Буняковского. Тогда с учётом ограниченности η для достаточно малых ε

получим

$$\mathfrak{h}_a(u-v,u-v) \geqslant (C_0 - C_1\varepsilon - \delta)\|\nabla(u-v)\|^2_{L_2(\Omega^\varepsilon)} \\ - (\lambda + C_2(\delta))\|u-v\|^2_{L_2(\Omega^\varepsilon)}, \tag{2.3.1}$$

где $\delta > 0$ — произвольная константа, C_0, C_1, $C_2(\delta)$ — некоторые константы, не зависящие от параметров ε, η, λ и функций u, v. Выберем числа ε и δ столь малыми, а число λ достаточно большим по модулю и отрицательным по знаку так, чтобы имели место неравенства

$$C_0 - C_1\varepsilon - \delta > 0, \qquad \lambda + C_2 < 0.$$

Условие 2 теперь следует из последних двух неравенств и оценки (2.3.1). Лемма доказана. $\square$

Введем функцию

$$\chi_1^\varepsilon(x) = \begin{cases} \chi_1\left(\frac{|\tau|}{R_3\varepsilon}\right) & \text{при } |\tau| < \tau_0, \\ 0 & \text{вне } \{x : |\tau| < \tau_0\}. \end{cases}$$

Обозначим $v_\varepsilon = u_\varepsilon - (1-\chi_1^\varepsilon)u_0$. Функция v_ε обращается в нуль на $\partial\theta^\varepsilon_{\mathrm{D}}$ и принадлежит пространству $\mathring{W}_2^1(\Omega^\varepsilon, \partial\Omega \cup \partial\theta^\varepsilon_{\mathrm{D}})$. Отметим ещё, что в силу определения срезки χ_1^ε выполнено равенство

$$v_\varepsilon = u_\varepsilon \quad \text{на} \quad \partial\theta^\varepsilon. \tag{2.3.2}$$

Запишем интегральное тождество для краевой задачи (1.0.4), взяв v_ε в качестве пробной функции

$$\sum_{i,j=1}^n \left(A_{ij}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}, \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_i}\right)_{L_2(\Omega^\varepsilon)} + \sum_{j=1}^n \left(A_j \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}, v_\varepsilon\right)_{L_2(\Omega^\varepsilon)} \\ + \sum_{j=1}^n \left(u_\varepsilon, A_j\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_j}\right)_{L_2(\Omega^\varepsilon)} + (A_0 u_\varepsilon, v_\varepsilon)_{L_2(\Omega^\varepsilon)} \\ - \lambda(u_\varepsilon, v_\varepsilon)_{L_2(\Omega^\varepsilon)} + (a(\cdot, u_\varepsilon), v_\varepsilon)_{L_2(\partial\theta^\varepsilon_{\mathrm{R}})} = (f, v_\varepsilon)_{L_2(\Omega^\varepsilon)}. \tag{2.3.3}$$

В силу равенства (2.3.2), граничный член в левой части полученного равенства можно переписать следующим образом:

$$(a(\cdot, u_\varepsilon), v_\varepsilon)_{L_2(\partial\theta^\varepsilon_{\mathrm{R}})} = (a(\cdot, v_\varepsilon), v_\varepsilon)_{L_2(\partial\theta^\varepsilon_{\mathrm{R}})}. \tag{2.3.4}$$

Функцию $(1-\chi_1^\varepsilon)v_\varepsilon$ доопределим нулём внутри множества θ^ε; ясно, что полученная функция есть элемент пространства $\mathring{W}_2^1(\Omega, \partial\Omega \cup S)$. Возьмём её в качестве пробной функции в интегральном тождестве для задачи (1.0.9):

$$\begin{aligned}&\sum_{i,j=1}^{n}\left(A_{ij}\frac{\partial u_0}{\partial x_j}, \frac{\partial(1-\chi_1^\varepsilon)v_\varepsilon}{\partial x_i}\right)_{L_2(\Omega^\varepsilon)} + \sum_{j=1}^{n}\left(A_j\frac{\partial u_0}{\partial x_j}, (1-\chi_1^\varepsilon)v_\varepsilon\right)_{L_2(\Omega^\varepsilon)}\\ &+\sum_{j=1}^{n}\left(u_0, A_j\frac{\partial(1-\chi_1^\varepsilon)v_\varepsilon}{\partial x_j}\right)_{L_2(\Omega^\varepsilon)} + (A_0u_0, (1-\chi_1^\varepsilon)v_\varepsilon)_{L_2(\Omega^\varepsilon)}\\ &-\lambda(u_0, (1-\chi_1^\varepsilon)v_\varepsilon)_{L_2(\Omega^\varepsilon)} = (f, (1-\chi_1^\varepsilon)v_\varepsilon)_{L_2(\Omega^\varepsilon)}.\end{aligned}$$

Последнее равенство перепишем в виде

$$\begin{aligned}&\sum_{i,j=1}^{n}\left(A_{ij}\frac{\partial(1-\chi_1^\varepsilon)u_0}{\partial x_j}, \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_i}\right)_{L_2(\Omega)} + \sum_{j=1}^{n}\left(A_j\frac{\partial(1-\chi_1^\varepsilon)u_0}{\partial x_j}, v_\varepsilon\right)_{L_2(\Omega)}\\ &+\sum_{j=1}^{n}\left((1-\chi_1^\varepsilon)u_0, A_j\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_j}\right)_{L_2(\Omega)} + (A_0u_0(1-\chi_1^\varepsilon), v_\varepsilon)_{L_2(\Omega)}\\ &+\lambda(u_0(1-\chi_1^\varepsilon), v_\varepsilon)_{L_2(\Omega)} = (f(1-\chi_1^\varepsilon), v_\varepsilon)_{L_2(\Omega)} - K_\varepsilon,\end{aligned} \tag{2.3.5}$$

где обозначено

$$\begin{aligned}K_\varepsilon := &-\sum_{i,j=1}^{n}\left(A_{ij}\frac{\partial u_0}{\partial x_j}\frac{\partial\chi_1^\varepsilon}{\partial x_i}, v_\varepsilon\right)_{L_2(\Omega^\varepsilon)} + \sum_{i,j=1}^{n}\left(A_{ij}u_0\frac{\partial\chi_1^\varepsilon}{\partial x_j}, \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_i}\right)_{L_2(\Omega^\varepsilon)}\\ &+\sum_{j=1}^{n}\left(A_ju_0\frac{\partial\chi_1^\varepsilon}{\partial x_j}, v_\varepsilon\right)_{L_2(\Omega^\varepsilon)} - \sum_{j=1}^{n}\left(u_0\frac{\partial\chi_1^\varepsilon}{\partial x_j}, A_jv_\varepsilon\right)_{L_2(\Omega^\varepsilon)}.\end{aligned}$$

Вычислим разность (2.3.3) и (2.3.5) и учтём равенство (2.3.4). Тогда получим

$$\begin{gathered}\sum_{i,j=1}^{n}\left(A_{ij}\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_j},\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_i}\right)_{L_2(\Omega^\varepsilon)}+\sum_{j=1}^{n}\left(A_j\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_j},v_\varepsilon\right)_{L_2(\Omega^\varepsilon)}\\ +\sum_{j=1}^{n}\left(v_\varepsilon,A_j\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_j}\right)_{L_2(\Omega^\varepsilon)}+(A_0v_\varepsilon,v_\varepsilon)_{L_2(\Omega^\varepsilon)}\\ +(a(\cdot,v_\varepsilon),v_\varepsilon)_{L_2(\partial\theta^\varepsilon_{\mathrm{R}})}+\lambda(v_\varepsilon,v_\varepsilon)_{L_2(\Omega^\varepsilon)}=(\chi_1^\varepsilon f,v_\varepsilon)_{L_2(\Omega^\varepsilon)}+K_\varepsilon.\end{gathered}\tag{2.3.6}$$

Из оценки (2.3.1) с $u=v_\varepsilon$, $v=0$ немедленно следует, что

$$\begin{gathered}\sum_{i,j=1}^{n}\left(A_{ij}\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_j},\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_i}\right)_{L_2(\Omega^\varepsilon)}+\sum_{j=1}^{n}\left(A_j\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_j},v_\varepsilon\right)_{L_2(\Omega^\varepsilon)}\\ +\sum_{j=1}^{n}\left(v_\varepsilon,A_j\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_j}\right)_{L_2(\Omega^\varepsilon)}+(A_0v_\varepsilon,v_\varepsilon)_{L_2(\Omega^\varepsilon)}\\ +(a(\cdot,v_\varepsilon),v_\varepsilon)_{L_2(\partial\theta^\varepsilon_{\mathrm{R}})}+\lambda(v_\varepsilon,v_\varepsilon)_{L_2(\Omega^\varepsilon)}\geqslant C\|v_\varepsilon\|^2_{W_2^1(\Omega^\varepsilon)},\end{gathered}\tag{2.3.7}$$

где константа C не зависит от v_ε.

Оценим теперь правую часть равенства (2.3.6). Начнем с первого слагаемого. Согласно лемме 2.2.3 верно

$$|(\chi_1^\varepsilon f,v_\varepsilon)_{L_2(\Omega^\varepsilon)}|\leqslant C\frac{\varepsilon}{\eta^{\frac{n-2}{2}}}\|f\|_{L_2(\Omega)}\|v_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega^\varepsilon)}.\tag{2.3.8}$$

Задача (1.0.9) однозначно разрешима в $\mathring{W}_2^1(\Omega,\partial\Omega\cup S)$ для произвольной правой части f уравнения, причем данное уравнение линейно. Поэтому верна оценка

$$\|u_0\|_{W_2^1(\Omega)}\leqslant C\|f\|_{L_2(\Omega)},$$

где константа C не зависит от f. Используя теперь стандартные теоремы о повышении гладкости решений эллиптических краевых задач, получаем оценку

$$\|u_0\|_{W_2^2(\Omega)}\leqslant C\|f\|_{L_2(\Omega)},\tag{2.3.9}$$

где константа C не зависит от f. Используя леммы 2.2.1, 2.2.3 и неравенство (2.3.9), оценим первое слагаемое в K_ε:

$$\left|\sum_{i,j=1}^{n}\left(A_{ij}\frac{\partial u_0}{\partial x_j}\frac{\partial \chi_1^\varepsilon}{\partial x_j}, v_\varepsilon\right)_{L_2(\Omega^\varepsilon)}\right| \leqslant C\frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{\eta^{\frac{n-2}{2}}}\|f\|_{L_2(\Omega)}\|v_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega^\varepsilon)}. \tag{2.3.10}$$

Аналогично выводим

$$\left|\sum_{i,j=1}^{n}\left(A_{ij}u_0\frac{\partial \chi_1^\varepsilon}{\partial x_i}, \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_j}\right)_{L_2(\Omega^\varepsilon)}\right| \leqslant C\varepsilon^{\frac{1}{2}}\|f\|_{L_2(\Omega)}\|v_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega^\varepsilon)}, \tag{2.3.11}$$

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j=1}^{n}\left(A_{j}u_0\frac{\partial \chi_1^\varepsilon}{\partial x_j}, v_\varepsilon\right)_{L_2(\Omega^\varepsilon)} - \sum_{j=1}^{n}\left(u_0\frac{\partial \chi_1^\varepsilon}{\partial x_j}, A_j v_\varepsilon\right)_{L_2(\Omega^\varepsilon)}\right| \\ \leqslant C\frac{\varepsilon^{\frac{3}{2}}}{\eta^{\frac{n-2}{2}}}\|f\|_{L_2(\Omega)}\|v_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega^\varepsilon)}.\end{aligned} \tag{2.3.12}$$

Из неравенств (2.3.7), (2.3.8), (2.3.10), (2.3.11) и (2.3.12) вытекает оценка

$$\|v_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega^\varepsilon)} \leqslant C\left(\frac{\varepsilon}{\eta^{n-2}}\right)^{\frac{1}{2}}\|f\|_{L_2(\Omega)}. \tag{2.3.13}$$

Из равенств

$$u_\varepsilon - u_0 = u_\varepsilon - (1-\chi_1^\varepsilon)u_0 + u_0\chi_1^\varepsilon = v_\varepsilon + u_0\chi_1^\varepsilon$$

следует, что

$$\|u_\varepsilon - u_0\|_{W_2^1(\Omega^\varepsilon)} \leqslant \|v_\varepsilon\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)} + \|u_0\chi_1^\varepsilon\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)}.$$

Используя лемму 2.2.1 и неравенство (2.3.9), выводим оценку

$$\|u_0\chi_1^\varepsilon\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)} \leqslant C\varepsilon^{\frac{3}{2}}\|f\|_{L_2(\Omega)}. \tag{2.3.14}$$

Аналогично оценим норму функции $\nabla(u_0\chi_1^\varepsilon)$:

$$\|\nabla u_0\chi_1^\varepsilon\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)} \leqslant C(\|\nabla u_0\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)} + \varepsilon^{-1}\|u_0\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)}) \leqslant C\varepsilon^{\frac{1}{2}}\|f\|_{L_2(\Omega)}. \tag{2.3.15}$$

Из неравенств (2.3.13), (2.3.14) и (2.3.15) вытекает оценка (1.0.10). Теорема 1.0.1 доказана.

Глава 3

Сходимость в случае усредненного третьего нелинейного краевого условия

3.1 Примеры перфораций

В настоящем параграфе мы обсуждаем норму $\|\cdot\|_S$, определенную в (1.0.16), условие A5 и примеры выбора форм и распределений полостей $\omega_{k,\varepsilon}$, которые обеспечивают выполнение данного условия.

3.1.1 Корректная определённость нормы $\|\cdot\|_S$

В настоящем разделе мы доказываем, что соотношение (1.0.16) корректно определяет норму $\|\cdot\|_S$.

Лемма 3.1.1. *Формула (1.0.16) определяет норму в пространстве $L_\infty(S)$. Для произвольной функции $\Phi \in W_2^{\frac{1}{2}}(S)$ верны равенство и оценки*

$$(\alpha\Phi, U_{\alpha\Phi}^N)_{L_2(S)} = \|U_{\alpha\Phi}^N\|^2_{W_2^1(\varpi)}, \tag{3.1.1}$$

$$\|\alpha\|_S \leqslant C\|\alpha\|_{L_\infty(S)}, \qquad \big|(\alpha u, v)_{L_2(S)}\big| \leqslant \|\alpha\|_S \|u\|_{W_2^1(\varpi)} \|v\|_{W_2^1(\varpi)}, \tag{3.1.2}$$

где u, v — произвольные функции из $W_2^1(\varpi)$, а C — некоторая константа, не зависящая от α.

Доказательство. Для проверки равенства (3.1.1) достаточно выписать определение обобщенного решения задачи (1.0.14) для функции $U^N_{\alpha\Phi}$, взяв её в качестве пробной.

Докажем, что правая часть в (1.0.16) определена корректно и является нормой. Из равенства (3.1.1) и стандартных теорем об оценке следа функции следует, что

$$\begin{aligned}\|U^N_{\alpha\Phi}\|^2_{W^1_2(\varpi)} \leqslant &\|\alpha\Phi\|_{L_2(S)}\|U^N_{\alpha\Phi}\|_{L_2(S)} \leqslant C\|\alpha\|_{L_\infty(S)}\|\Phi\|_{L_2(S)}\|U^N_{\alpha\Phi}\|_{W^1_2(\varpi)}\\ \leqslant &C\|\alpha\|_{L_\infty(S)}\|U^D_\Phi\|_{W^1_2(\varpi)}\|U^N_{\alpha\Phi}\|_{W^1_2(\varpi)},\end{aligned}$$

где C — некоторые константы, не зависящие от Φ, α, U^D_Φ, $U^N_{\alpha\Phi}$. Из полученной оценки вытекает, что отношение в правой части (1.0.16) ограничено величиной $C\|\alpha\|^2_{L_\infty(S)}$, и потому супремум в (1.0.16) конечен. Кроме того, верна первая оценка в (3.1.2).

Очевидно, что $\|\alpha\|_S = 0$, если и только если $\alpha = 0$. Однородность нормы и неравенство треугольника легко выводятся из очевидных равенств $U^N_{C\alpha\Phi} = CU^N_{\alpha\Phi}$ и $U^N_{(\alpha_1+\alpha_2)\Phi} = U^N_{\alpha_1\Phi} + U^N_{\alpha_2\Phi}$. Поэтому формула (1.0.16) действительно определяет норму.

Докажем теперь вторую оценку в (3.1.2). Пусть U^D_v — решение задачи (1.0.15), где в качестве правой части краевого условия на S взят след функции v на S. Тогда из определения обобщенного решения задачи (1.0.15) следует, что

$$(U^D_v, U^D_v - v)_{W^1_2(\varpi)} = 0, \qquad \|U^D_v\|^2_{W^1_2(\varpi)} = (U^D_v, v)_{W^1_2(\varpi)}.$$

Используя эти равенства, выводим

$$0 \leqslant \|v - U^D_v\|^2_{W^1_2(\varpi)} = (v, v - U^D_v)_{W^1_2(\varpi)},$$

а потому

$$\|v\|^2_{W^1_2(\varpi)} \geqslant (v, U^D_v)_{W^1_2(\varpi)} = \|U^D_v\|^2_{W^1_2(\varpi)}. \tag{3.1.3}$$

Из определения обобщённого решения задачи (1.0.14) с пробной функцией U^D_v следует равенство $(\alpha u, v)_{L_2(S)} = (U^N_{\alpha u}, U^D_v)_{W^1_2(\varpi)}$. Поэтому в силу неравенства Коши–Буняковского, оценки (3.1.3) и определения нормы $\|\alpha\|_S$ получаем

$$\frac{\big|(\alpha u,v)_{L_2(S)}\big|}{\|v\|_{W_2^1(\varpi)}\|u\|_{W_2^1(\varpi)}}\leqslant\frac{\big|(U^N_{\alpha u},U^D_v)_{W_2^1(\varpi)}\big|}{\|U^D_v\|_{W_2^1(\varpi)}\|u\|_{W_2^1(\varpi)}}\leqslant\frac{\|U^N_{\alpha u}\|_{W_2^1(\varpi)}}{\|u\|_{W_2^1(\varpi)}}\leqslant\|\alpha\|_S.$$

Отсюда уже вытекает вторая оценка в (3.1.2). Лемма доказана. □

Подчеркнём, что данная лемма не утверждает, что пространство $L_\infty(S)$ полное относительно нормы $\|\cdot\|_S$.

Пусть $\chi_2=\chi_2(t)$, $t\in\mathbb{R}$ — бесконечно дифференцируемая срезающая функция, равная единице при $|t|<1$ и нулю при $|t|>2$.

Лемма 3.1.2. *Пусть выполнено условие A3. Тогда площади $|\partial\omega_{k,\varepsilon}|$ ограничены равномерно по ε и k.*

Доказательство. Фиксируем произвольно $k\in\mathbb{M}^\varepsilon$. В силу условия A3 и определения срезки χ_2 функция $\chi_2(4\rho\rho_0^{-1})$ обращается в нуль при $\rho>\rho_0/2$, непрерывно дифференцируема и ограничена вместе со своими первыми производными равномерно по x, k и ε. Учитывая эти факты и очевидное равенство

$$|\partial\omega_{k,\varepsilon}|=\int\limits_{\partial\omega_{k,\varepsilon}}d\varsigma=\int\limits_{\partial\omega_{k,\varepsilon}}d\varsigma\int\limits_{\rho_0}^{0}\frac{\partial}{\partial\rho}\chi_2(4\rho\rho_0^{-1})\,d\rho,$$

в силу условия A3 легко выводим равномерную ограниченность площадей $|\partial\omega_{k,\varepsilon}|$. Лемма доказана. □

Лемма 3.1.3. *Пусть условие A5 выполнено для некоторой перфорации, удовлетворяющей условиям A1, A2, A3. Тогда для любой другой перфорации, удовлетворяющей тем же условиям и описываемой точками $\tilde{M}_k^\varepsilon$, $k\in\mathbb{M}^\varepsilon$, и полостями $\tilde{\omega}_{k,\varepsilon}$, $k\in\mathbb{M}^\varepsilon$, такими, что выполнена равномерная по k и ε оценка*

$$\varepsilon^{-1}\big|\tilde{M}_k^\varepsilon-M_k^\varepsilon\big|+\big||\partial\omega_{k,\varepsilon}|-|\partial\tilde{\omega}_{k,\varepsilon}|\big|\leqslant\mu(\varepsilon),$$

где $\mu(\varepsilon)$ — некоторая функция, бесконечно малая при $\varepsilon \to +0$, условие A5 выполнено с той же функцией α^0 и с заменой $\kappa(\varepsilon)$ на $\kappa(\varepsilon) + C\mu(\varepsilon)\eta^{n-1}(\varepsilon)$, где C — некоторая константа, не зависящая от ε.

Доказательство. Пусть $\tilde{\alpha}^\varepsilon$ — это функция, построенная по формуле (1.0.13) для перфорации, описываемой точками $\tilde{M}_k^\varepsilon$ и полостями $\tilde{\omega}_{k,\varepsilon}$. В силу леммы Адамара выполнена оценка

$$\left|\zeta\left(\frac{|x - M_{k,\perp}^\varepsilon|}{\varepsilon R_2}\right) - \zeta\left(\frac{|x - \tilde{M}_{k,\perp}^\varepsilon|}{\varepsilon R_2}\right)\right| \leqslant C\varepsilon^{-1}|M_k^\varepsilon - \tilde{M}_k^\varepsilon|,$$

где C — некоторая константа, не зависящая от ε и k. Тогда из условия леммы сразу получаем оценку

$$\|\alpha^\varepsilon - \tilde{\alpha}^\varepsilon\|_{L_\infty(S)} \leqslant C\mu(\varepsilon)\eta^{n-1}(\varepsilon),$$

где константа C не зависит от ε. Учитывая теперь первую оценку в (3.1.2), легко выводим неравенство

$$\|\tilde{\alpha}^\varepsilon - \alpha^0\|_S \leqslant \kappa(\varepsilon) + C\mu(\varepsilon)\eta^{n-1}(\varepsilon),$$

которое завершает доказательство леммы. □

Последняя лемма существенно расширяет класс перфораций, для которых выполнено условие A5. А именно, если это условие выполнено для какой–то перфорации, определяемой набором точек M_k^ε и областей ω_k^ε, то оно выполнено с той же самой функцией α^0 для перфораций, полученных произвольными малыми смещениями точек M_k^ε и вариацией площадей $|\partial\omega_{k,\varepsilon}|$. Подчеркнём ещё, что форма полостей не играет никакой роли, а важна лишь площадь поверхности границы полости. Этот факт предоставляет большой произвол в выборе областей $\omega_{k,\varepsilon}$.

3.1.2 Примеры редко распределённых перфораций

В настоящем разделе мы обсуждаем два достаточно общих примера перфораций, для которых условие A5 гарантированно выполняется с функцией $\alpha^0 = 0$.

Первый пример является прямым следствием лемм 3.1.1, 3.1.2. А именно, пусть выполнены условия A1, A2, A3. Тогда из определения функции α^ε и лемм 3.1.1, 3.1.2 немедленно вытекает равномерная по ε оценка

$$\|\alpha^\varepsilon\|_S \leqslant C\|\alpha^\varepsilon\|_{L_\infty(S)} \leqslant C\eta^{n-1}(\varepsilon), \tag{3.1.4}$$

где C — некоторые константы, не зависящие от ε. Следовательно, если $\eta(\varepsilon) \to 0$, то для любой перфорации, удовлетворяющей условиям A1, A2, A3, условие A5 выполняется с $\alpha^0 = 0$. Отметим, что этот результат частично воспроизводит утверждение теоремы 1.0.2 для случая $\eta(\varepsilon) \to 0$.

Переходим ко второму примеру. Для этого нам понадобится покрытие поверхности S. А именно, выберем точки $\mathrm{L}_p \in S$, $p \in \mathbb{P}$, где $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{N}$ — некоторое подмножество индексов, и фиксированное число $R_3 > 0$ такие, что

$$S \subset \bigcup_{p\in\mathbb{P}} B_{R_3}(\mathrm{L}_p), \qquad \frac{6}{5}R_3 \leqslant \inf_{p\neq j} |\mathrm{L}_p - \mathrm{L}_j| \leqslant \frac{8}{5}R_3. \tag{3.1.5}$$

Ясно, что такое покрытие всегда существует с некоторым R_3. Также в силу неравенства в (3.1.5) очевидно, что каждая точка поверхности S попадает в конечное число шаров $B_{R_3}(\mathrm{L}_k)$, и это число ограничено равномерно по всем точкам поверхности S.

Положим

$$N_\varepsilon := \sup_{p\in\mathbb{P}} \#\big\{k:\ M^\varepsilon_{k,\perp} \in S \cap B_{R_3}(\mathrm{L}_p)\big\}, \tag{3.1.6}$$

где символ $\#$ обозначает число элементов во множестве. Отметим, что данную величину можно интерпретировать как плотность распределения точек M^ε_k, так как она характеризует количество проекций $M^\varepsilon_{k,\perp}$ этих точек на каждом куске $S \cap B_{R_3}(\mathrm{L}_p)$ поверхности.

Наш второй пример основан на следующей лемме.

Лемма 3.1.4. *Справедлива оценка*

$$\|\alpha^\varepsilon\|_S \leqslant C\varepsilon N_\varepsilon,$$

где C — некоторая константа, не зависящая от ε и N_ε.

Доказательство. Произвольно фиксируем точку $\mathrm{L}_p \in S$ и выберем точку $M^\varepsilon_{k,\perp} \in B_{R_3}(\mathrm{L}_p) \cap S$. Обозначим:

$$\begin{aligned}
&S^\varepsilon_k := \big\{x \in S : \, |x - M^\varepsilon_{k,\perp}| < \varepsilon R_2\big\},\\
&\varpi_p := \left\{x \in \Omega : \, s \in B_{2R_3}(T_p) \cap S, \; 0 < \tau < \frac{\tau_0}{2}\right\}.
\end{aligned}$$

Пусть $u \in W^1_2(\varpi)$ — произвольная функция. Ключевым шагом в доказательстве леммы является проверка оценки

$$\|u\|_{L_2(S^\varepsilon_k)} \leqslant C\varepsilon^{\frac{1}{2}}\|u\|_{W^1_2(\varpi_p)}. \tag{3.1.7}$$

Здесь и всюду далее в доказательстве символом C обозначаем различные несущественные константы, не зависящие от выбора функции u, параметров ε, k, p и пространственных переменных.

Докажем оценку (3.1.7). Функцию u продолжим чётным образом по переменной τ, а именно, положим $u(s,\tau) := u(s,-\tau)$. Продолжение очевидно оказывается элементом пространства $W^1_2(\varpi^+)$, $\varpi^+ := \{x : \, |\tau| < \frac{\tau_0}{2}\}$ и верна оценка

$$\begin{aligned}
&\|u\|_{W^1_2(\varpi^+_p)} \leqslant C\|u\|_{W^1_2(\varpi_p)},\\
&\varpi^+_p := \left\{x : \, s \in B_{2R_3}(T_p) \cap S, \; |\tau| < \frac{\tau_0}{2}\right\}.
\end{aligned} \tag{3.1.8}$$

Для $s \in S^\varepsilon_k$ из очевидного равенства

$$u(s) = \int\limits_{2\varepsilon}^{0} \frac{\partial}{\partial\tau}u(x)\chi_2\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)\, d\tau$$

и неравенства Коши–Буняковского легко выводим, что

$$|u(s)|^2 \leqslant C\int\limits_0^{2\varepsilon}\left(\varepsilon\left|\frac{\partial u}{\partial\tau}(x)\right|^2 + \varepsilon^{-1}|u(x)|^2\right)\, d\tau.$$

Интегрируя эту оценку по S^ε_k, с учётом условия A1 получаем:

$$\|u\|^2_{L_2(S^\varepsilon_k)} \leqslant C\left(\varepsilon\|\nabla u\|^2_{L_2(\varpi_{k,\varepsilon})} + \varepsilon^{-1}\|u\|^2_{L_2(\varpi_{k,\varepsilon})}\right), \tag{3.1.9}$$

где $\varpi_{k,\varepsilon} := \{x \in \Omega :\ s \in S_k^\varepsilon,\ |\tau| < 2\varepsilon\}$. Применяя теперь оценку

$$\|u\|_{L_2(\varpi_{k,\varepsilon})} \leqslant C\varepsilon \|u\|_{W_2^1(\varpi_p^+)},$$

вытекающую из леммы 2.1 в [12], из (3.1.8), (3.1.9) получаем неравенство (3.1.7).

Используя теперь оценку (3.1.7) и определение функции α^ε, из равенства (3.1.1) и свойств покрытия поверхности S шарами $B_{2R_3}(\mathrm{L}_p)$ выводим

$$\begin{aligned}\|U^N_{\alpha^\varepsilon\Phi}\|^2_{W_2^1(\varpi)} =&(\alpha^\varepsilon\Phi, U^N_{\alpha^\varepsilon\Phi})_{L_2(S)} \leqslant C \sum_{k\in\mathbb{M}^\varepsilon} \|\Phi\|_{L_2(S_k^\varepsilon)} \|U^N_{\alpha^\varepsilon\Phi}\|_{L_2(S_k^\varepsilon)}\\ \leqslant& C\varepsilon \sum_{k\in\mathbb{M}^\varepsilon} \|U^D_\Phi\|_{W_2^1(\varpi_p)} \|U^N_{\alpha^\varepsilon\Phi}\|_{W_2^1(\varpi_p)},\end{aligned}$$

где для каждого k параметр p выбран из условия $M^\varepsilon_{k,\perp} \in B_{R_3}(\mathrm{L}_p) \cap S$. С учётом такого выбора p и определения числа N_ε в (3.1.6) продолжим оценки:

$$\begin{aligned}\|U^N_{\alpha^\varepsilon\Phi}\|^2_{W_2^1(\varpi)} \leqslant& C\varepsilon N_\varepsilon \sum_{p\in\mathbb{P}} \|U^D_\Phi\|_{W_2^1(\varpi_p)} \|U^N_{\alpha^\varepsilon\Phi}\|_{W_2^1(\varpi_p)}\\ \leqslant& C\varepsilon N_\varepsilon \|U^D_\Phi\|_{W_2^1(\varpi)} \|U^N_{\alpha^\varepsilon\Phi}\|_{W_2^1(\varpi)}.\end{aligned}$$

Подставляя эту оценку в (1.0.16), приходим к утверждению леммы. $\square$

Из доказанной леммы следует, что если $\varepsilon N_\varepsilon \to +0$ при $\varepsilon \to +0$, то условие A5 выполнено с $\alpha^0 = 0$. Описанное условие на N_ε означает, что плотность распределения точек M_k^ε достаточно мала. Подчеркнём, что это условие не означает, что расстояния между точками M_k^ε много больше, чем размеры полостей. Такую ситуацию мы описываем с помощью параметра $\eta(\varepsilon)$, предполагая, что $\eta(\varepsilon) \to +0$ при $\varepsilon \to +0$. Лемма 3.1.4 в первую очередь ориентирована на ситуации, когда в окрестности отдельных частей поверхности S точки M_k^ε расположены друг от друга на расстояниях того же порядка малости, что и размеры полостей, но при этом их количество в окрестности кусков $S \cap B_{R_3}(\mathrm{L}_p)$ мало. В качестве примера можно упомянуть ситуацию, когда точки M_k^ε распределены небольшими кластерами: точки M_k^ε расположены в окрестности кусков поверхности линейного размера порядка $O(\varepsilon^{1-\beta})$ с $\beta < \frac{1}{d-1}$, а сами куски находятся друг от друга на расстоянии порядка $O(1)$.

3.1.3 Периодические и локально–периодические перфорации

Важным примером перфораций являются периодические и локально–периодические перфорации. В свете имеющихся классических результатов о сильной и слабой сходимости решений задач в областях, перфорированных вдоль многообразий [1], [56], [57], [68], [28], [61], [62], необходимо гарантировать выполнение основных результатов о равномерной сходимости по крайней мере для периодических перфораций. Этому и посвящён настоящий раздел.

Начнём с леммы, которая далее будет играть ключевую роль в исследовании случаев периодических и локально–периодических перфораций.

Лемма 3.1.5. *Пусть существуют вещественная функция $\alpha^0 \in W_\infty^1(S)$ и комплекснозначная функция $\Psi^\varepsilon \in W_\infty^2(\varpi)$ такие, что*

$$\begin{aligned} &\|\Psi^\varepsilon\|_{L_\infty(\varpi)} + \|\Psi^\varepsilon\|_{L_\infty(S)} + \|\Delta\Psi^\varepsilon\|_{L_\infty(\varpi)} + \left\|\frac{\partial\Psi^\varepsilon}{\partial\nu}\right\|_{L_\infty(\partial\varpi\setminus S)} \\ &\qquad + \left\|\frac{\partial\Psi^\varepsilon}{\partial\tau} - \alpha^\varepsilon + \alpha^0\right\|_{L_\infty(S)} =: \mu(\varepsilon) \to +0, \quad \varepsilon \to +0. \end{aligned} \tag{3.1.10}$$

Тогда существует константа C, не зависящая от ε такая, что

$$\|\alpha^\varepsilon - \alpha^0\|_S \leqslant C\mu^{\frac{1}{2}}(\varepsilon). \tag{3.1.11}$$

Доказательство. Положим $\alpha := \alpha^\varepsilon - \alpha^0$. Через $\mathcal{A}_\alpha$ обозначим линейный оператор в $W_2^1(\varpi)$, отображающий каждую функцию $u \in W_2^1(\varpi)$ в решение задачи (1.0.14) с правой частью $-\alpha\Phi$, $\Phi = u\big|_S$, в краевом условии на S. На основе равенства (3.1.1) и второй оценки в (3.1.2) несложно убедиться, что оператор $\mathcal{A}_\alpha$ ограничен, самосопряжён и

$$(\alpha u, U_{\alpha u}^N)_{L_2(S)} = (\mathcal{A}_\alpha u, \mathcal{A}_\alpha u)_{W_2^1(\varpi)} = (\mathcal{A}_\alpha^2 u, u)_{W_2^1(\varpi)}. \tag{3.1.12}$$

Из этого равенства, формулы (3.1.1), определения (1.0.16) нормы $\|\alpha\|_S$ и неравенства (3.1.3) следует, что

$$\sup_{\substack{u\in W_2^1(\varpi)\\ u\neq 0}} \frac{(\mathcal{A}_\alpha^2 u, u)_{W_2^1(\varpi)}}{\|u\|^2_{W_2^1(\varpi)}} = \sup_{\substack{u\in W_2^1(\varpi)\\ u\neq 0}} \frac{(\alpha u, U^N_{\alpha u})_{L_2(S)}}{\|u\|^2_{W_2^1(\varpi)}} = \sup_{\substack{u\in W_2^1(\varpi)\\ u\neq 0}} \frac{\|U^N_{\alpha\Phi}\|^2_{W_2^1(\varpi)}}{\|u\|^2_{W_2^1(\varpi)}}$$

$$\leqslant \sup_{\substack{\Phi\in W_2^{\frac{1}{2}}(S)\\ \Phi\neq 0}} \frac{\|U^N_{\alpha\Phi}\|^2_{W_2^1(\varpi)}}{\|U^D_\Phi\|^2_{W_2^1(\varpi)}} = \|\alpha\|_S^2$$

В этих соотношениях дроби под знаком супремума совпадают при $u = U^D_\Phi$, а потому

$$\sup_{\substack{u\in W_2^1(\varpi)\\ u\neq 0}} \frac{(\mathcal{A}_\alpha^2 u, u)_{W_2^1(\varpi)}}{\|u\|^2_{W_2^1(\varpi)}} = \|\alpha\|_S^2.$$

Так как оператор $\mathcal{A}_\alpha^2$ ограничен и самосопряжён, то в силу принципа минимакса число $\|\alpha\|_S^2$ — это верхняя точка спектра оператора $\mathcal{A}_\alpha^2$. Эта точка может быть точкой существенного спектра либо дискретным собственным значением. В обоих случаях существует последовательность функций $u_n \in W_2^1(\varpi)$, $n \in \mathbb{N}$, такая, что

$$\|u_n\|_{W_2^1(\varpi)} = 1, \qquad \|f_n\|_{W_2^1(\varpi)} \to 0, \quad n \to +\infty, \tag{3.1.13}$$

где обозначено $f_n := \big(\mathcal{A}_\alpha^2 - \|\alpha\|_S^2\big)u_n$. Положим:

$$v_n := \mathcal{A}_\alpha u_n, \qquad w_n := \mathcal{A}_\alpha v_n = \|\alpha\|_S^2 u_n + f_n. \tag{3.1.14}$$

Из определений оператора $\mathcal{A}_\alpha$ и обобщённого решения задачи (1.0.14) вытекает справедливость интегральных тождеств

$$(v_n, \varphi)_{W_2^1(\varpi)} = (\alpha u_n, \varphi)_{L_2(S)}, \qquad (w_n, \varphi)_{W_2^1(\varpi)} = (\alpha v_n, \varphi)_{L_2(S)} \tag{3.1.15}$$

для всех $\varphi \in W_2^1(\varpi)$. Из первого тождества с $\varphi = v_n$, первого равенства в (3.1.13) и второй оценки в (3.1.2) элементарно вытекает неравенство

$$\|v_n\|_{W_2^1(\varpi)} \leqslant \|\alpha\|_S \|u_n\|_{W_2^1(\varpi)} = \|\alpha\|_S. \tag{3.1.16}$$

Отметим ещё, что из соотношений (3.1.13) и равенств (3.1.12) легко следует, что

$$\begin{aligned}&(\mathcal{A}_\alpha u_n, \mathcal{A}_\alpha u_n)_{W_2^1(\varpi)} - \|\alpha\|_S^2 \|u_n\|^2_{W_2^1(\varpi)} = (f_n, u_n)_{W_2^1(\varpi)},\\ &\|\alpha\|_S^2 = (\alpha u_n, v_n)_{L_2(S)} - (f_n, u_n)_{W_2^1(\varpi)}.\end{aligned} \tag{3.1.17}$$

Проинтегрируем теперь по частям

$$\int\limits_{\varpi} u_n \overline{v_n} \Delta \Psi^\varepsilon \, dx = -\int\limits_S \frac{\partial \Psi^\varepsilon}{\partial \tau} u_n \overline{v_n} \, ds + \int\limits_{\partial\varpi\setminus S} \frac{\partial \Psi^\varepsilon}{\partial \nu} u_n \overline{v_n} \, ds - \int\limits_{\varpi} \nabla \Psi^\varepsilon \cdot \nabla (u_n \overline{v}_n) \, dx$$

и перепишем полученное равенство

$$\begin{aligned}(u_n \Delta \Psi^\varepsilon, v_n)_{L_2(\varpi)} = &- \left(\frac{\partial \Psi^\varepsilon}{\partial \tau} u_n, v_n \right)_{L_2(S)} + \left(\frac{\partial \Psi^\varepsilon}{\partial \nu} u_n, v_n \right)_{L_2(\partial\varpi\setminus S)}\\ &- (u_n \nabla \Psi^\varepsilon, \nabla v_n)_{L_2(\varpi)} - (\nabla u_n, v_n \nabla \overline{\Psi^\varepsilon})_{L_2(\varpi)}\\ = &- (\alpha u_n, v_n)_{L_2(S)} - \left(\left(\frac{\partial \Psi^\varepsilon}{\partial \tau} - \alpha \right) u_n, v_n \right)_{L_2(S)}\\ &+ \left(\frac{\partial \Psi^\varepsilon}{\partial \nu} u_n, v_n \right)_{L_2(\partial\varpi\setminus S)} - \big(\nabla(u_n \Psi^\varepsilon), \nabla v_n\big)_{L_2(\varpi)}\\ &- \big(\nabla u_n, \nabla(v_n \overline{\Psi^\varepsilon})\big)_{L_2(\varpi)} + 2(\Psi^\varepsilon \nabla u_n, \nabla v_n)_{L_2(\varpi)}.\end{aligned} \tag{3.1.18}$$

Ещё выразим функцию u_n из определения функции w_n в (3.1.14) и воспользуемся интегральным тождеством для функции w_n из (3.1.15) с пробной функцией $v_n \overline{\Psi^\varepsilon}$:

$$\begin{aligned}(\nabla u_n, \nabla(v_n \overline{\Psi^\varepsilon}))_{L_2(\varpi)} = &(u_n, v_n \overline{\Psi^\varepsilon})_{W_2^1(\varpi)} - (u_n, v_n \overline{\Psi^\varepsilon})_{L_2(\varpi)}\\ = &\|\alpha\|_S^{-2} (w_n - f_n, v_n \overline{\Psi^\varepsilon})_{W_2^1(\varpi)} - (u_n, v_n \overline{\Psi^\varepsilon})_{L_2(\varpi)}\\ = &\|\alpha\|_S^{-2} (\alpha v_n, v_n \overline{\Psi^\varepsilon})_{L_2(S)} - \|\alpha\|_S^{-2} (f_n, v_n \overline{\Psi^\varepsilon})_{W_2^1(\varpi)}\\ &- (u_n, v_n \overline{\Psi^\varepsilon})_{L_2(\varpi)}.\end{aligned}$$

Используя это равенство, выразим скалярное произведение $(\alpha u_n, v_n)_{L_2(S)}$ из (3.1.18) и воспользуемся затем интегральным тождеством для v_n из

(3.1.15) с $\varphi = u_n\Psi^\varepsilon$. Это даст формулу для скалярного произведения $(\alpha u_n, v_n)_{L_2(S)}$, подставив которую во второе равенство в (3.1.17), получим

$$\begin{aligned}\|\alpha\|_S^2 = &- (u_n\Delta\Psi^\varepsilon, v_n)_{L_2(\varpi)} + \left(\frac{\partial\Psi^\varepsilon}{\partial\nu}u_n, v_n\right)_{L_2(\partial\varpi\setminus S)}\\ &+ 2(\Psi^\varepsilon\nabla u_n, \nabla v_n)_{L_2(\varpi)} - \left(\left(\frac{\partial\Psi^\varepsilon}{\partial\tau} - \alpha\right)u_n, v_n\right)_{L_2(S)}\\ &+ 2(u_n\Psi^\varepsilon, v_n)_{L_2(\varpi)} - \|\alpha\|_S^{-2}(\alpha v_n, v_n\overline{\Psi^\varepsilon})_{L_2(S)}\\ &- (u_n\Psi^\varepsilon, \alpha u_n)_{L_2(S)} + \|\alpha\|_S^{-2}(f_n, v_n\overline{\Psi^\varepsilon})_{W_2^1(\varpi)}\\ &- (f_n, u_n)_{W_2^1(\varpi)}.\end{aligned}\tag{3.1.19}$$

Неравенства (3.1.16), (3.1.2), определение величины $\mu(\varepsilon)$ из условия леммы, нормировка функций u_n из (3.1.13) и очевидная оценка

$$\|u\|_{L_2(S)} + \|u\|_{L_2(\partial\omega\setminus S)} \leqslant C\|u\|_{W_2^1(\varpi)}, \qquad u \in W_2^1(\varpi),$$

с константой C, не зависящей от u, позволяют оценить левую часть в (3.1.19). А именно, первые семь слагаемых по модулю оцениваются величиной $C\mu\big(\|\alpha\|_S + \|\alpha\|_{L_\infty(S)}\big)$, а последние два слагаемых оцениваются через $C\|f_n\|_{W_2^1(\varpi)}\big(1+\|\alpha\|_S^{-1}\|\Psi^\varepsilon\|_{W_\infty^1(\varpi)}\big)$. Финальная оценка выглядит так:

$$\begin{aligned}\|\alpha\|_S^2 \leqslant\, & C\mu(\varepsilon)\big(\|\alpha\|_S + \|\alpha\|_{L_\infty(S)}\big)\\ &+ C\|f_n\|_{W_2^1(\varpi)}\big(1 + \|\alpha\|_S^{-1}\|\Psi^\varepsilon\|_{W_\infty^1(\varpi)}\big),\end{aligned}\tag{3.1.20}$$

где константа C не зависит от ε, n, u_n, v_n, f_n, α. Правая часть полученного неравенства содержит множитель $\|\Psi^\varepsilon\|_{W_\infty^1(\varpi)}$, в который входит $L_\infty(\varpi)$–норма градиента функции Ψ^ε и относительно которого у нас нет никаких предположений. Вместе с тем, от второго слагаемого в правой части (3.1.20) легко избавиться предельным переходом при $n \to +\infty$ с учётом сходимости в (3.1.13) и получить более точную оценку

$$\|\alpha\|_S^2 \leqslant C\mu(\varepsilon)\big(\|\alpha\|_S + \|\alpha\|_{L_\infty(S)}\big).\tag{3.1.21}$$

Теперь ещё отметим, что функция α^ε по своему определению (1.0.13) и лемме 3.1.2 ограничена равномерно по ε в $L_\infty(S)$–норме. Используя этот факт и решая неравенство (3.1.21) относительно $\|\alpha\|_S$, приходим к (3.1.11). Лемма доказана. $\square$

Доказанная лемма даёт удобный способ проверки условия A5: достаточно отыскать функции α^0 и Ψ^ε, удовлетворяющие условию (3.1.10). Например, это легко сделать в случае строго периодической перфорации, когда $S = \{x : x_n = 0\}$, $M_k^\varepsilon = \varepsilon M + (\varepsilon k, 0)$, $k \in \Gamma$, где Γ — некоторая периодическая решётка в $\mathbb{R}^{n-1}$ с ячейкой периодичности $\square$, M — некоторая точка в области $\square \times \mathbb{R}$. Будем считать, что $\eta = 1$, $\omega_{k,\varepsilon} = \omega$, где $\omega \subset \mathbb{R}^n$ — некоторая фиксированная ограниченная область такая, что

$$\overline{\omega + M} \subset \overline{B_{R_2}(M)} \subset \square \times \mathbb{R}, \qquad \overline{B_{R_2}(M_\perp)} \subset \square \times \mathbb{R},$$

$M_\perp$ — проекция точки M на гиперплоскость S. В этом случае функция α^ε имеет вид

$$\alpha^\varepsilon(x) = \frac{|\partial\omega|}{R_2^{n-1}} \zeta\left(\frac{|x' - \varepsilon(k + M_\perp)|}{\varepsilon R_2}\right), \qquad x' := (x_1, \dots, x_{n-1}),$$

при $|x' - \varepsilon(k + M_\perp)| < \varepsilon R_2$, $k \in \Gamma$, и $\alpha^\varepsilon = 0$ в остальных точках S. В качестве α^0 возьмём постоянную функцию $\alpha^0(x') := |\partial\omega|/|\square|$, $x' \in S$. Тогда существует бесконечно дифференцируемое $\square$–периодическое решение краевой задачи

$$\Delta_\xi \Psi = 0 \quad \text{при} \quad \xi_n > 0, \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial \xi_n} = \alpha^\varepsilon(\varepsilon\xi') - \alpha^0 \quad \text{при} \quad \xi_n = 0,$$

равномерно экспоненциально убывающее при $\xi_n \to +\infty$, где $\xi := (\xi', \xi_n)$, $\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$. Положим $\Psi^\varepsilon(x) := \varepsilon\Psi(\frac{x}{\varepsilon})$ и сразу видим, что условие (3.1.10) выполнено с $\mu(\varepsilon) = C\varepsilon$, где C — константа, не зависящая от ε.

Такой же подход удаётся перенести и на более общий случай локально периодических перфораций вдоль гладких поверхностей. Будем считать, что поверхность S является графиком некоторой функции $F = F(s)$, то есть, $S = \big\{(s, F(s)) : \ s \in \mathbb{R}^{n-1}\big\}$, а сама функция F и все её частные производные вплоть до пятого порядка непрерывны и равномерно ограничены на $\mathbb{R}^{n-1}$. Точки M_k^ε выберем лежащими на поверхности S

следующим образом: $M_k^\varepsilon := \big(\varepsilon(k+M), F(\varepsilon(k+M))\big)$, $k\in\Gamma$, где Γ — это вновь некоторая периодическая решётка в $\mathbb{R}^{n-1}$ с ячейкой периодичности $\square$, а M — точка в $\square$ такая, что $\{\xi' :\ |\xi'-M|\leqslant R_2\}\subset\square$. Относительно площадей границ полостей будем предполагать, что

$$|\partial\omega_{k,\varepsilon}| = \mathbf{w}(\varepsilon(k+M)), \tag{3.1.22}$$

где $\mathbf{w}\in C^3(\mathbb{R}^{n-1})$ — некоторая заданная функция, равномерно ограниченная на $\mathbb{R}^n$ вместе со всеми своими производными вплоть до третьего порядка. Отдельно предполагаем, что полости $\omega_{k,\varepsilon}$ таковы, что выполнены условия A2, A3.

Поверхность S будем параметризовать переменной $s\in\mathbb{R}^{n-1}$. Вектор единичной нормали к поверхности S выберем в виде

$$\nu(s) := \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla_s F(s)|^2}}\begin{pmatrix} -\nabla_s F(s) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Данная явная формула позволяет вычислить все производные вектора нормали по s и проверить, что они непрерывны и равномерны ограничены на S. Это гарантирует существование сферы фиксированного радиуса, которой можно коснуться каждой точки поверхности S, и тем самым существует τ_0 из условия A1 и множество Σ, на котором будут корректно определены локальные переменные (τ, s), которые описывают точки $x\in\Sigma$ формулой $x = \big(s, F(s)\big) + \tau\nu(s)$. Наличие непрерывных и равномерно ограниченных производных у функции F вплоть до пятого порядка гарантирует существование непрерывных и равномерно ограниченных производных x по (τ, s) и (τ, s) по x вплоть до четвёртого порядка. Это обеспечивает выполнение условия A1 для поверхности S.

Наше основное утверждение о введённой локально периодической перфорации выглядит следующим образом.

Лемма 3.1.6. *Пусть выполнены описанные выше условия на поверхность S, условия локальной периодичности перфорации для функции α^ε,* *и имеет место сходимость* $\eta(\varepsilon) \to \eta_0 \neq 0$, $\varepsilon \to +0$. *Тогда выполнено условие A5 с*

$$\begin{aligned}&\alpha^0(s) := \eta_0^{n-1}\alpha_0(s), \qquad \kappa(\varepsilon) := C\big(\varepsilon^{\frac{1}{2}} + (\eta(\varepsilon) - \eta_0)\big),\\&\alpha_0(s) := \frac{\mathbf{w}(s)}{|\square|}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \zeta\Big(\big(|\xi'|^2 + |\nabla_s F(s)\cdot\xi'|^2\big)^{\frac{1}{2}}\Big)\,d\xi,\end{aligned}$$

где константа C *не зависит от* ε.

Доказательство. В рассматриваемом случае точки M_k^ε совпадают со своими проекциями $M_{k,\perp}^\varepsilon$. Поэтому согласно определению функции α^ε в (1.0.13) эта функция может отличаться от нуля лишь при

$$|s - \varepsilon(k+M)|^2 + |F(s) - F(\varepsilon(k+M))|^2 < \varepsilon^2 R_2^2.$$

Множество таких точек на поверхности S очевидно лежит внутри множества, описываемого неравенством $|s - \varepsilon(k+M)| < \varepsilon R_2$. Для таких s при каждом заданном $k \in \Gamma$ и ε в силу формулы Тейлора для функции F с центром в точке s и непрерывности и равномерной ограниченности вторых производных функции F верны неравенства

$$\big|F(s) - F(\varepsilon(k+M)) - \nabla_s F(s)\cdot(s - \varepsilon(k+M))\big| \leqslant C\varepsilon^2;$$

здесь и далее C — некоторые константы, не зависящие от ε, k и s. Из этих соотношений следует, что при $|s - \varepsilon(k+M)| < \varepsilon R_2$ справедлива оценка

$$\begin{aligned}\Bigg|&\frac{\big(|s-\varepsilon(k+M)|^2 + |F(s) - F(\varepsilon(k+M))|^2\big)^{\frac{1}{2}}}{\varepsilon R_2}\\&- \frac{\big(|s-\varepsilon(k+M)|^2 + \big|\nabla_s F(s)\cdot(s-\varepsilon(k+M))\big|\big)^{\frac{1}{2}}}{\varepsilon R_2}\Bigg| \leqslant C\varepsilon.\end{aligned}$$

В силу предполагаемой гладкости функции $\mathbf{w}$ при $|s - \varepsilon(k+M)| < \varepsilon R_2$ выполнена ещё одна оценка

$$|\mathbf{w}(s) - \mathbf{w}(\varepsilon(k+M))| \leqslant C\varepsilon.$$

Из последних двух оценок, определения срезки ζ и (3.1.22) вытекает, что функцию α^ε можно представить в виде

$$\alpha^\varepsilon(s) = \eta_0^{n-1}\beta_0(s\varepsilon^{-1}, s) + \big(\eta^{n-1}(\varepsilon) - \eta_0^{n-1}\big)\beta_0(s\varepsilon^{-1}, s) + \varepsilon\eta^{n-1}\beta^\varepsilon(s), \quad (3.1.23)$$

где β^ε — некоторая бесконечно дифференцируемая функция на S, ограниченная равномерно по ε в норме пространства $L_\infty(S)$, а функция β_0 задаётся формулой

$$\beta_0(\xi', s) = \frac{\mathbf{w}(s)}{R_2^{n-1}}\zeta\left(\frac{\big(|\xi' - k - M|^2 + |\nabla_s F(s)\cdot(\xi' - k - M)|^2\big)^{\frac{1}{2}}}{R_2}\right)$$

при $|\xi' - k - M| < R_2$, $k \in \Gamma$, а в остальных точках функция β_0 тождественно равна нулю. С учётом равенства (3.1.23) и утверждения леммы 3.1.1, выполнение условия A5 достаточно проверить только для функции $\beta_0(s\varepsilon^{-1}, s)$, что и будет нашей целью далее.

Условие A5 для функции $\beta_0(s\varepsilon^{-1}, s)$ проверим на основе леммы 3.1.5. Требуемую функцию Ψ^ε будем искать как формальное асимптотическое решение краевой задачи

$$\Delta\Psi^\varepsilon = 0 \quad \text{в} \quad \varpi, \qquad \frac{\partial\Psi^\varepsilon}{\partial\tau} = \beta_0(\varepsilon^{-1}\,\cdot\,,\,\cdot\,) - \alpha_0 \quad \text{на} \quad S, \qquad (3.1.24)$$

имеющего структуру пограничного слоя, сконцентрированного возле поверхности S и экспоненциально убывающего при отходе от поверхности S. Условие экспоненциального убывания является заменой краевого условия на $\partial\varpi \setminus S$.

А именно, функцию Ψ^ε будем строить на основе комбинации метода многих масштабов и метода пограничного слоя в виде

$$\Psi^\varepsilon(x) = \varepsilon\Psi_1(\xi, s) + \varepsilon^2\Psi_2(\xi, s), \qquad \xi := (\xi', \xi_n) = (s\varepsilon^{-1}, \tau\varepsilon^{-1}), \quad (3.1.25)$$

где Ψ_1, Ψ_2 — некоторые $\square$–периодические по ξ' функции, экспоненциально убывающие при $\xi_n \to +\infty$. Эти функции мы найдём как решения некоторых краевых задач, которые стандартно будут определены подстановкой (3.1.25) в (3.1.24) с последующим занулением коэффициентов при старших степенях ε.

Вначале отметим, что оператор Лапласа в переменных (τ, s) переписывается следующим образом:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial\tau^2} + \ell_n(\tau, s)\frac{\partial}{\partial\tau} + \sum_{i,j=1}^{n-1} \ell_{ij}(\tau, s)\frac{\partial^2}{\partial s_i \partial s_j} + \sum_{i=1}^{n-1} \ell_i(\tau, s)\frac{\partial}{\partial s_i},$$

где ℓ_n, ℓ_i, ℓ_{ij} — некоторые вещественные функции, причём

$$\ell_n, \ell_i \in C^2([0, \tau_0] \times \mathbb{R}^{n-1}), \qquad \ell_{ij} \in C^3([0, \tau_0] \times \mathbb{R}^{n-1}),$$

и для функций ℓ_{ij} выполнено условие равномерной эллиптичности

$$\sum_{i,j=1}^{n-1} \ell_{ij}(\tau, s) z_i z_j \geqslant c_1 \sum_{i=1}^{n-1} z_i^2, \qquad (z_1, \ldots, z_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1},$$

с константой $c_1 > 0$, не зависящей от τ, s, z_1, $\ldots$, z_{n-1}. Все производные функций ℓ_n, ℓ_i вплоть до второго порядка и функций ℓ_{ij} вплоть до третьего порядка равномерно ограничены. С учётом определения переменных ξ оператор Лапласа на функциях $\Psi = \Psi(\xi, s)$ переписывается следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\Delta_x \Psi(\xi, s) = \varepsilon^{-2}\mathcal{L}_{-2}\Psi(\xi, s) + \varepsilon^{-1}\mathcal{L}_{-1}\Psi(\xi, s) + \mathcal{L}_\varepsilon \Psi(\xi, s),\\
&\mathcal{L}_{-2} := \frac{\partial^2}{\partial\xi_n^2} + \sum_{i,j=1}^{n-1} \ell_{ij}(0, s)\frac{\partial^2}{\partial\xi_i \partial\xi_j},\\
&\mathcal{L}_{-1} := \ell_n(0, s)\frac{\partial}{\partial\xi_n} + \sum_{i,j=1}^{n-1} \ell_{ij}(0, s)\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi_i \partial s_j} + \frac{\partial^2}{\partial\xi_j \partial s_i}\right)\\
&\qquad\quad + \sum_{i,j=1}^{n-1} \frac{\partial\ell_{ij}}{\partial\tau}(0, s)\xi_n \frac{\partial^2}{\partial\xi_i \partial\xi_j} + \sum_{i=1}^{n-1} \ell_i(0, s)\frac{\partial}{\partial\xi_i},
\end{aligned}$$

где $\mathcal{L}_\varepsilon$ — некоторый дифференциальный оператор по переменным (ξ, s) с коэффициентами, ограниченными величиной $C(1 + |\xi_n|^2)$ равномерно по s, ξ, ε. Теперь подставим полученное выражение для оператора Лапласа и (3.1.25) в краевую задачу (3.1.24) и соберём члены при двух старших степенях ε. Это приводит к следующим краевым задачам для Ψ_1 и Ψ_2:

$$\mathcal{L}_{-2}\Psi_1 = 0 \quad \text{при} \quad \xi_n > 0, \qquad \frac{\partial \Psi_1}{\partial \xi_n} = \beta_0 - \alpha_0 \quad \text{при} \quad \xi_n = 0, \tag{3.1.26}$$

$$\mathcal{L}_{-2}\Psi_2 = -\mathcal{L}_{-1}\Psi_1 \quad \text{при} \quad \xi_n > 0, \qquad \frac{\partial \Psi_2}{\partial \xi_n} = 0 \quad \text{при} \quad \xi_n = 0. \tag{3.1.27}$$

Задачу (3.1.26) легко решить разделением переменных, при этом соответствующий ряд не содержит постоянного по ξ_n слагаемого благодаря выбору функции α_0, указанному в формулировке леммы:

$$\Psi_1(\xi, s) = \sum_{\mathbf{k}\in\Gamma^*\setminus\{0\}} \gamma_{\mathbf{k}}^{(1)}(s) e^{\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\xi' - \Lambda_{\mathbf{k}}(s)\xi_n}, \tag{3.1.28}$$

$$\Lambda_{\mathbf{k}}(s) := \left(\sum_{i,j=1}^{n-1} \ell_{ij}(0,s)\mathbf{k}_i\mathbf{k}_j\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \gamma_{\mathbf{k}}^{(1)}(s) := -\frac{1}{|\Box|\Lambda_k(s)} \int\limits_{\Box} \beta_0(\xi', s) e^{-\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\xi'}\, d\xi',$$

где Γ^* — двойственная к Γ решётка и $\mathbf{k} = (\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_{n-1})$. С учётом финитности функции ζ формулу для $\gamma_{\mathbf{k}}^{(1)}$ можно переписать следующим образом:

$$\gamma_{\mathbf{k}}^{(1)}(s) := -\frac{\mathbf{w}(s)}{|\Box|\Lambda_k(s)} \int\limits_{\Box} \zeta\Big(\big(|\xi'|^2 + |\nabla_s F(s)\cdot\xi'|^2\big)^{\frac{1}{2}}\Big) e^{-\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot(R_2\xi' + M)}\, d\xi'.$$

Так как функция $\zeta = \zeta(t)$ бесконечно дифференцируемая, финитная и равна единице при $|t| < t_0$, то функция $\zeta\Big(\big(|\xi'|^2+|\nabla_s F(s)\cdot\xi'|^2\big)^{\frac{1}{2}}\Big)$ бесконечно дифференцируемая по ξ' и её носитель содержится внутри $\Box$. Поэтому из предполагаемой непрерывности и равномерной ограниченности всех производных функций F и $\mathbf{w}$ следует, что коэффициенты $\gamma_{\mathbf{k}}^{(1)}$ трижды непрерывно дифференцируемы по $s \in \mathbb{R}^{n-1}$ и все их частные производные вплоть до третьего порядка равномерно ограничены и при $\mathbf{k} \to \infty$ убывают быстрее любой обратной степени $|\mathbf{k}|$ равномерно по s. Отсюда сразу следует, что функция Ψ_1, определённая формулой (3.1.28), $\Box$–периодична по ξ' и имеет все частные производные вида $\frac{\partial^{|\mathbf{n}|+|\mathbf{m}|}\Psi_1}{\partial\xi^{\mathbf{n}}\partial s^{\mathbf{m}}}$, $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}_+^n$, $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}_+^{n-1}$, $|\mathbf{m}| \leqslant 3$. Каждая из этих производных является непрерывной и равномерно ограниченной функцией $(\xi, s) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \overline{\mathbb{R}_+} \times \mathbb{R}^{n-1}$, экспоненциально убывающей при $\xi_n \to +\infty$ равномерно по $(\xi', s) \in \mathbb{R}^{2(n-1)}$.

Подставляя ряд (3.1.28) в задачу (3.1.27), мы также можем решить её с помощью разделения переменных. Итоговая формула для решения будет иметь вид

$$\Psi_2(\xi, s) = \sum_{\mathbf{k}\in\Gamma^*\setminus\{0\}} \big(\gamma_{\mathbf{k}}^{(2,1)}(s)\xi_n^2 + \gamma_{\mathbf{k}}^{(2,0)}(s)\xi_n + \Lambda_{\mathbf{k}}^{-1}(s)\gamma_{\mathbf{k}}^{(2,0)}(s)\big)e^{\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\xi' - \Lambda_{\mathbf{k}}(s)\xi_n},$$

где $\gamma_{\mathbf{k}}^{(2,j)}$, $j = 0, 1,$ — некоторые функции. Эти функции являются коэффициентами решений обыкновенных дифференциальных уравнений по переменной ξ_n, возникающих при разделении переменных, и они могут быть найдены явно в виде достаточно громоздких формул как линейные комбинации с постоянными коэффициентами произведений функций $\gamma_{\mathbf{k}}^{(1)}(s)$, их первых производных, степеней $\Lambda_{\mathbf{k}}$, компонент $\mathbf{k}_i$ индекса $\mathbf{k}$ и коэффициентов дифференциального выражения $\mathcal{L}_{-1}$. Элементарный анализ таких явных формул показывает, что функции $\gamma_{\mathbf{k}}^{(2,j)}$ имеют все частные производные по s вплоть до второго порядка, каждая из которых непрерывна и ограничена равномерно по s и убывает быстрее любой отрицательной степени $|\mathbf{k}|$ при $\mathbf{k} \to \infty$. Поэтому функция Ψ_2, определённая выше, $\square$–периодична по ξ' и имеет все частные производные вида $\frac{\partial^{|\mathbf{n}|+|\mathbf{m}|}\Psi_2}{\partial\xi^{\mathbf{n}}\partial s^{\mathbf{m}}}$, $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}_+^n$, $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}_+^{n-1}$, $|\mathbf{m}| \leqslant 2$. Каждая из этих производных является непрерывной и равномерно ограниченной функцией переменных $(\xi, s) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \overline{\mathbb{R}_+} \times \mathbb{R}^{n-1}$, экспоненциально убывающей при $\xi_n \to +\infty$ равномерно по $(\xi', s) \in \mathbb{R}^{2(n-1)}$.

Из задач (3.1.26), (3.1.27) следует, что функция Ψ^ε из (3.1.25) является решением краевой задачи

$$\Delta\Psi^\varepsilon = \varepsilon\big(\mathcal{L}_{-1}\Psi_2 + \varepsilon\mathcal{L}_\varepsilon(\Psi_1 + \varepsilon\Psi_2)\big) \quad \text{в} \quad \varpi, \quad \frac{\partial\Psi^\varepsilon}{\partial\tau} = \beta_0(\varepsilon^{-1}\,\cdot\,,\,\cdot\,) - \alpha_0 \quad \text{на} \quad S,$$

и в силу описанной выше гладкости функций Ψ_1, Ψ_2 и их экспоненциального убывания при $\xi_n \to +\infty$ сразу видим, что функция Ψ^ε удовлетворяет условию леммы 3.1.5 с $\mu(\varepsilon) = C\varepsilon$. Применение теперь равенства (3.1.23) завершает доказательство леммы. $\square$

3.2 Вспомогательные утверждения

В данном параграфе мы докажем ряд лемм, которые далее будут использоваться в доказательстве наших основных теорем.

Лемма 3.2.1. *При выполнении условий A1, A2, A3 для всех* $u \in W_2^1(\Omega^\varepsilon)$ *верна оценка*

$$\|u\|^2_{L_2(\partial\theta^\varepsilon)} \leqslant C(\varepsilon\eta + \delta\eta^{n-1})\|\nabla u\|^2_{L_2(\Omega^\varepsilon)} + C(\delta)\eta^{n-1}\|u\|^2_{L_2(\Omega^\varepsilon)},$$

где $\delta > 0$ *— произвольная константа, а константы* C *и* $C(\delta)$ *не зависят от параметров* ε, η, *функции* u, *а также от формы и расположения полостей* ω_k^ε, $k \in \mathbb{M}^\varepsilon$.

Это утверждение является частным случаем леммы 3.2.8 в случае $\mathbb{M}^\varepsilon_{\mathrm{D}} = \emptyset$, $\theta^\varepsilon_{\mathrm{D}} = \emptyset$.

Лемма 3.2.2. *Для любой функции* $u \in W_2^1(\Omega)$ *функция* $a(x, u(x))$ *является элементом пространства* $W_2^1(\Sigma)$ *и верны оценки*

$$\begin{aligned} &\|a(\,\cdot\,, u(x))\|_{L_2(\Sigma)} \leqslant C\|u\|_{L_2(\Omega)}, \\ &\|\nabla_x a(\,\cdot\,, u(x))\|_{L_2(\Sigma)} \leqslant C\|u\|_{W_2^1(\Omega)}, \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

$$\begin{aligned} &|a(x, u(x))| \leqslant a_0|u(x)|, \\ &|\nabla_x a(x, u(x))| \leqslant a_0|\nabla_x u(x)| + a_1|u(x)|, \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

где C *— некоторые константы, не зависящие от* u.

Доказательство. Неравенства (3.2.2) являются прямым следствием условий (1.0.11). Оценки (3.2.1) выводятся возведением в квадрат неравенств (3.2.2) с последующим интегрированием по области Σ. Лемма доказана. □

Лемма 3.2.3. *Пусть выполнены условия A1, A2, A3. Тогда существует* λ_0, *не зависящее от* ε, *такое, что при* $\lambda < \lambda_0$ *для всех* $f \in L_2(\Omega)$ *задачи (1.0.4), (1.0.17) и (1.0.18), (1.0.19) имеют единственные решения*

$u_0 \in W_2^1(\Omega)$ и $u_\varepsilon \in W_2^1(\Omega^\varepsilon)$ для всех достаточно малых ε. Для решения задачи (1.0.4) верна равномерная оценка

$$\|u_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega^\varepsilon)} \leqslant C\|f\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)}, \tag{3.2.3}$$

где константа C не зависит от f и ε. Решение задачи (1.0.17) принадлежит пространству $W_2^2(\Omega)$ и верна равномерная оценка

$$\|u_0\|_{W_2^2(\Omega)} \leqslant C\|f\|_{L_2(\Omega)}, \tag{3.2.4}$$

где константа C не зависит от f. Решение задачи (1.0.18), (1.0.19) принадлежит пространству $W_2^2(\Omega \setminus S)$ и верна равномерная оценка

$$\|u_0\|_{W_2^1(\Omega)} + \|u_0\|_{W_2^2(\Omega\setminus S)} \leqslant C\|f\|_{L_2(\Omega)}, \tag{3.2.5}$$

где константа C не зависит от f.

При $\lambda < \lambda_0$ для всех $u \in W_2^1(\Omega^\varepsilon)$ верна априорная оценка

$$\left|\mathfrak{h}_0(u,u) - \lambda\|u\|^2_{L_2(\Omega^\varepsilon)}\right| \geqslant C\|u\|^2_{W_2^1(\Omega^\varepsilon)}, \tag{3.2.6}$$

где константа C не зависит от u и ε.

Доказательство. Доказательство этой леммы в целом проводится аналогично лемме 2.3.1 и отличается лишь некоторыми деталями. Поэтому кратко опишем схему доказательства и остановимся на имеющихся отличиях.

Мы обсудим только задачу (1.0.4), так как для задачи (1.0.18), (1.0.19) доказательство проводится совершенно аналогично, а задача (1.0.17) является частным случаем задачи (1.0.18), (1.0.19), соответствующим равенству $\alpha^0 = 0$.

Вначале в пространстве $\mathring{W}_2^1(\Omega^\varepsilon, \partial\Omega)$ необходимо ввести оператор, действующий по правилу: каждой функции $u \in \mathring{W}_2^1(\Omega^\varepsilon, \partial\Omega)$ ставится в соответствие антилинейный непрерывный функционал, заданный на $\mathring{W}_2^1(\Omega^\varepsilon, \partial\Omega)$ и действующий по правилу $v \mapsto \mathfrak{h}_a(u, v)$, $v \in \mathring{W}_2^1(\Omega^\varepsilon, \partial\Omega)$. Далее для доказательства однозначной разрешимости задачи (1.0.4) достаточно проверить выполнение следующих свойств [27, Гл. 2, §2.1, Теор. 2.1; §2.2, Теор. 2.2], [16, Гл. VI, §18.4], [18, Гл. 1, §1.2^0]:

1. Для любых $u, v, w \in \mathring{W}_2^1(\Omega^\varepsilon, \partial\Omega)$ функция $t \mapsto \mathfrak{h}_a(u + tv, w)$ непрерывна;

2. Для любых $u, v \in \mathring{W}_2^1(\Omega^\varepsilon, \partial\Omega)$, $u \neq v$, выполнено
$$\operatorname{Re}\big(\mathfrak{h}_a(u, u-v) - \mathfrak{h}_a(v, u-v)\big) - \lambda\|u-v\|^2_{L_2(\Omega^\varepsilon)} > 0;$$

3. Справедливо соотношение
$$\frac{\operatorname{Re}\mathfrak{h}_a(u,u) - \lambda\|u\|^2_{L_2(\Omega^\varepsilon)}}{\|u\|_{W_2^1(\Omega^\varepsilon)}} \to +\infty, \qquad \|u\|_{W_2^1(\Omega^\varepsilon)} \to +\infty.$$

Свойство 1 проверяется аналогично проверке соответствующего свойства из доказательства леммы 2.3.1.

Проверим свойство 2. Сразу же отметим равенство
$$\begin{aligned}\mathfrak{h}_a(u, u-v) - \mathfrak{h}_a(v, u-v) =& \mathfrak{h}_0(u-v, u-v)\\ &+ \big(a(\,\cdot\,, u) - a(\,\cdot\,, v), u-v\big)_{L_2(\partial\theta^\varepsilon)}\end{aligned} \tag{3.2.7}$$
и тривиальную оценку
$$\left|\sum_{j=1}^n \left(A_j\frac{\partial u}{\partial x_j}, u\right)_{L_2(\Omega^\varepsilon)} + (A_0 u, u)_{L_2(\Omega^\varepsilon)}\right| \leqslant \frac{c_0}{4}\|\nabla u\|^2_{L_2(\Omega^\varepsilon)} + C_1\|u\|^2_{L_2(\Omega^\varepsilon)}, \tag{3.2.8}$$
где C_1 — некоторая константа, не зависящая от $u \in W_2^1(\Omega^\varepsilon)$ и ε, а константа c_0 введена в условии эллиптичности (1.0.2). Отсюда и из условия эллиптичности уже вытекает оценка (3.2.6), если взять $\lambda < -C_1 - 1$.

Так как функция a имеет ограниченные производные по $\operatorname{Re} u$ и $\operatorname{Im} u$ (см. первое условие в (1.0.11)), то она удовлетворяет оценке:
$$|a(x,u) - a(x,v)| \leqslant a_0|u-v|, \tag{3.2.9}$$
где a_0 — некоторая константа, не зависящая от x, u, v. Поэтому в силу леммы 3.2.1 при достаточно малом ε верно неравенство
$$\begin{aligned}\big|(a(\,\cdot\,,u) - a(\,\cdot\,,v), u-v)_{L_2(\partial\theta^\varepsilon)}\big| \leqslant& a_0\|u-v\|^2_{L_2(\partial\theta^\varepsilon)}\\ \leqslant& \frac{c_0}{4}\|\nabla(u-v)\|^2_{L_2(\Omega^\varepsilon)}\\ &+ C_2\|u-v\|^2_{L_2(\Omega^\varepsilon)},\end{aligned} \tag{3.2.10}$$

где константа C_2 не зависит от ε, $u, v \in W_2^1(\Omega^\varepsilon)$. Учитывая эту оценку и (3.2.7), (3.2.8) и полагая $\lambda < \lambda_0 := -C_1 - C_2 - \frac{c_0}{2}$, получаем

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Re}\big(\mathfrak{h}_a(u, u-v) - \mathfrak{h}_a(v, u-v))\big) - \lambda\|u-v\|^2_{L_2(\Omega^\varepsilon)} \\
&\geqslant \frac{c_0}{2}\|\nabla(u-v)\|^2_{L_2(\Omega^\varepsilon)} - (\lambda + C_1 + C_2)\|u-v\|^2_{L_2(\Omega^\varepsilon)} \\
&\geqslant \frac{c_0}{2}\|u-v\|^2_{W_2^1(\Omega^\varepsilon)}.
\end{aligned} \tag{3.2.11}$$

Из этой оценки уже следует свойство 2. Полагая в этой оценке $v = 0$ и учитывая равенство $\mathfrak{h}_a(0, u) = 0$, сразу приходим к свойству 3.

Аналогично выводу оценки (3.2.11) несложно проверить, что

$$\begin{aligned}
\frac{c_0}{2}\|u_\varepsilon\|^2_{W_2^1(\Omega^\varepsilon)} \leqslant &\big|\mathfrak{h}_a(u^\varepsilon, u^\varepsilon) - \lambda\|u_\varepsilon\|^2_{L_2(\Omega^\varepsilon)}\big| \\
= &\big|(f, u_\varepsilon)_{L_2(\Omega^\varepsilon)}\big| \leqslant \|f\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)}\|u_\varepsilon\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)},
\end{aligned}$$

откуда вытекает априорная оценка (3.2.3) с $C = \frac{2}{c_0}$.

Однозначная разрешимость задач (1.0.17) и (1.0.18), (1.0.19) устанавливается аналогично. Для решений этих задач верны априорные оценки, аналогичные (3.2.3) с заменой пространств $W_2^1(\Omega^\varepsilon)$ и $L_2(\Omega^\varepsilon)$ на $W_2^1(\Omega)$ и $L_2(\Omega)$.

Уравнение в задаче (1.0.17) можно переписать в виде

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} A_{ij} \frac{\partial u_0}{\partial x_j} = f - \sum_{j=1}^{n} A_j \frac{\partial u_0}{\partial x_j} - (A_0 - \lambda)u_0 \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{3.2.12}$$

где в силу априорных оценок для решения, аналогичных (3.2.3), правая часть — элемент пространства $L_2(\Omega)$, чья норма оценивается через $C\|f\|_{L_2(\Omega)}$ с константой C, не зависящей от f. Учитывая теперь краевое условие из задачи (1.0.17), в силу стандартных теорем о повышении гладкости приходим к неравенству (3.2.4).

Оценка (3.2.5) доказывается аналогично с единственным отличием, что здесь помимо приведения уравнения к виду (3.2.12), необходимо ещё правую часть в краевом условии на скачок производной считать следом на S функции $a(x, u_0(x))$. Наличие априорных оценок для функции u_0 в $W_2^1(\Omega)$ и лемма 3.2.2 позволяют вывести априорную оценку для

$a(x, u_0(x))$ в норме $W_2^1(\Sigma)$. Затем уже можно применить стандартные теоремы о повышении гладкости и получить оценку (3.2.5). Лемма доказана. $\square$

Обозначим: $B_r^k := B_{rR_2\varepsilon\eta}(M_k^\varepsilon)$.

Лемма 3.2.4. *При выполнении условий A1, A2 для всех $u \in W_2^1(\Omega^\varepsilon)$ выполнено неравенство:*

$$\sum_{k\in\mathbb{M}^\varepsilon} \|u\|^2_{L_2(B^k_{b_*}\setminus\omega_k^\varepsilon)} \leqslant C\Big(\varepsilon^2\eta^2\|\nabla u\|^2_{L_2(\Omega^\varepsilon)} + \varepsilon\eta^n\|u\|^2_{W_2^1(\Omega^\varepsilon)}\Big),$$

где C — некоторая константа, не зависящая от параметров ε, η, функции u, формы и расположения полостей ω_k^ε, $k \in \mathbb{M}^\varepsilon$.

Доказательство. Всюду в доказательстве через C обозначаем различные несущественные константы, не зависящие от k, ε, η, u, формы и расположения полостей ω_k^ε, $k \in \mathbb{M}^\varepsilon$. Напомним, что $\chi_2 = \chi_2(t)$ — бесконечно дифференцируемая срезающая функция, равная единице при $t < 1$ и нулю при $t > 2$. В окрестности каждой из точек M_k^ε введем растянутые координаты по правилу: $y = (x - M_k^\varepsilon)\varepsilon^{-1}$. Обозначим:

$$\tilde{u}(y) := u(M_k^\varepsilon + \varepsilon y)\chi_2\left(\frac{2|y|}{(b+1)R_2\eta}\right),$$

$\tilde{\omega}_{k,\varepsilon}$ — область, полученная сжатием $\omega_{k,\varepsilon}$ в $\eta^{-1}(\varepsilon)$ раз. Функция $\tilde{u}$ является элементом пространства $\mathring{W}_2^1(B_{(b+1)R_2\eta}(0) \setminus \tilde{\omega}_{k,\varepsilon}, \partial B_{(b+1)R_2\eta}(0))$. В силу леммы 3.2 из [55] выполнено неравенство

$$\begin{aligned}
\|u(M_k^\varepsilon + \varepsilon\,\cdot\,)\|^2_{L_2(B_{b_*R_2\eta}(0)\setminus\tilde{\omega}_{k,\varepsilon})} \leqslant{}& \|\tilde{u}\|^2_{L_2(B_{(b+1)R_2\eta}(0)\setminus\tilde{\omega}_{k,\varepsilon})}\\
\leqslant{}& C\eta^2\|\nabla_y\tilde{u}\|^2_{L_2(B_{(b+1)R_2\eta}(0)\setminus\tilde{\omega}_{k,\varepsilon})}\\
\leqslant{}& C\eta^2\Big(\|\nabla_y u(M_k^\varepsilon + \varepsilon\,\cdot)\|^2_{L_2(B_{(b+1)R_2\eta}(0)\setminus\tilde{\omega}_{k,\varepsilon})}\\
&+ \eta^{-2}\|u(M_k^\varepsilon + \varepsilon\,\cdot\,)\|^2_{L_2(B_{(b+1)R_2\eta}(0)\setminus B_{b_*R_2\eta}(0))}\Big).
\end{aligned}$$

Переходя обратно к переменным x, получаем:

$$\|u\|^2_{L_2(B^k_{b_*}\setminus\omega_k^\varepsilon)} \leqslant C\left(\varepsilon^2\eta^2\|\nabla u\|^2_{L_2(B^k_{b+1}\setminus\omega_k^\varepsilon)} + \|u\|^2_{L_2(B^k_{b+1}\setminus B^k_{b_*})}\right). \tag{3.2.13}$$

Дословно повторяя вывод последней оценки в доказательстве леммы 2.1.3, легко показать, что

$$\|u\|^2_{L_2(B^k_{b+1}\setminus B^k_{b_*})} \leqslant C\Big(\varepsilon^2\eta^2\|\nabla u\|^2_{L_2(B_{(2b+1)R_2\varepsilon}(M^\varepsilon_k)\setminus B_{b_*R_2\varepsilon}(M^\varepsilon_k))} + \eta^n\|u\|^2_{L_2(B_{(2b+1)R_2\varepsilon}(M^\varepsilon_k)\setminus B_{(b+2)R_2\varepsilon}(M^\varepsilon_k))}\Big).$$

Подставим последнее неравенство в оценку (3.2.13) и просуммируем результат по $k\in\mathbb{M}^\varepsilon$. В результате получим

$$\sum_{k\in\mathbb{M}^\varepsilon}\|u\|^2_{L_2(B^k_{b_*}\setminus\omega^\varepsilon_k)} \leqslant C\sum_{k\in\mathbb{M}^\varepsilon}\Big(\varepsilon^2\eta^2\|\nabla u\|^2_{L_2(B_{(2b+1)R_2\varepsilon}(M^\varepsilon_k)\setminus\omega^\varepsilon_k)} + \eta^n\|u\|^2_{L_2(B_{(2b+1)R_2\varepsilon}(M^\varepsilon_k)\setminus B_{(b+2)R_2\varepsilon}(M^\varepsilon_k))}\Big). \tag{3.2.14}$$

Заметим, что для $|\tau|\leqslant\frac{\tau_0}{2}$ верно равенство

$$|u(\tau,s)|^2=\int\limits_{\pm\frac{\tau_0}{2}}^{\tau}\frac{\partial}{\partial t}|u(\tau,s)|^2\chi_2\left(\frac{4|t|}{\tau_0}\right)dt,\qquad \pm\tau>0,$$

при условии отсутствия пересечения пути интегрирования и полостей θ^ε. Из последнего равенства в силу неравенства Коши–Буняковского следует:

$$|u(\tau,s)|^2\leqslant C\left|\int\limits_{\tau}^{\pm\frac{\tau_0}{2}}\left|\frac{\partial u}{\partial t}(\tau,s)\right|^2dt\right|+C\left|\int\limits_{\pm\frac{\tau_0}{4}}^{\pm\frac{\tau_0}{2}}|u(\tau,s)|^2\,dt\right|,\qquad \pm\tau>0. \tag{3.2.15}$$

Интегрируя последнее неравенство по $B_{(2b+1)R_2\varepsilon}(M^\varepsilon_k)\setminus B_{(b+2)R_2\varepsilon}(M^\varepsilon_k)$ и суммируя результат по $k\in\mathbb{M}^\varepsilon$, легко получим ещё одно неравенство

$$\sum_{k\in\mathbb{M}^\varepsilon}\|u\|^2_{L_2(B_{(2b+1)R_2\varepsilon}(M^\varepsilon_k)\setminus B_{(b+2)R_2\varepsilon}(M^\varepsilon_k))}\leqslant C\varepsilon\|u\|^2_{W^1_2(\Omega^\varepsilon)}. \tag{3.2.16}$$

Подставляя это неравенство в (3.2.14), приходим к утверждению леммы. Лемма доказана. $\square$

Замечание 3.1. Отметим, что утверждение леммы 3.2.4 остаётся в силе и в вырожденном случае $\omega_k^\varepsilon = \emptyset$. Доказательство требуемой оценки в этом случае даже упрощается, так как неравенство (3.2.13) оказывается тривиальным, а все дальнейшие рассуждения относятся к шаровым слоям $B_{2b_*}^k \setminus B_{b_*}^k$ и $B_{(2b+1)R_2\varepsilon}(M_k^\varepsilon) \setminus B_{(b+2)R_2\varepsilon}(M_k^\varepsilon)$.

Лемма 3.2.5. *При выполнении условий A2, A3 для всех $k \in \mathbb{M}^\varepsilon$ и функций $u \in W_2^1(B_{b_*}^k \setminus \omega_k^\varepsilon)$, удовлетворяющих условию*

$$\int\limits_{B_{b_*}^k \setminus \omega_k^\varepsilon} u(x)\,dx = 0,$$

справедливы оценки

$$\|u\|_{L_2(B_{b_*}^k \setminus \omega_k^\varepsilon)} \leqslant C\varepsilon\eta \|\nabla u\|_{L_2(B_{b_*}^k \setminus \omega_k^\varepsilon)}, \tag{3.2.17}$$

$$\|u\|_{L_2(\partial\omega_k^\varepsilon \cup \partial B_{b_*}^k)} \leqslant C\varepsilon^{\frac{1}{2}}\eta^{\frac{1}{2}} \|\nabla u\|_{L_2(B_{b_*}^k \setminus \omega_k^\varepsilon)}, \tag{3.2.18}$$

с константами C, не зависящими от u, k, ε и η.

Доказательство. С учётом замены переменных $\xi = (x - M_k^\varepsilon)\varepsilon^{-1}\eta^{-1}$ достаточно доказать неравенства

$$\begin{aligned} &\|u\|_{L_2(B_{b_*}(0) \setminus \omega_{k,\varepsilon})} \leqslant C\|\nabla u\|_{L_2(B_{b_*}(0) \setminus \omega_{k,\varepsilon})}, \\ &\|u\|_{L_2(\partial\omega_{k,\varepsilon} \cup \partial B_{b_*}(0))} \leqslant C\|\nabla u\|_{L_2(B_{b_*}(0) \setminus \omega_{k,\varepsilon})}, \end{aligned} \tag{3.2.19}$$

для всех $u \in W_2^1(B_{b_*}(0) \setminus \omega_{k,\varepsilon})$, удовлетворяющих условию

$$\int\limits_{B_{b_*}(0) \setminus \omega_{k,\varepsilon}} u(x)\,dx = 0. \tag{3.2.20}$$

Вторая оценка в (3.2.19) вытекает из первой и неравенства

$$\|u\|_{L_2(\partial\omega_{k,\varepsilon})} \leqslant C\|u\|_{W_2^1(B_{b_*}(0) \setminus \omega_{k,\varepsilon})},$$

установленного в доказательстве леммы 2.1.2, а также очевидного неравенства

$$\|u\|_{L_2(\partial B_{b_*}(0))} \leqslant C\|u\|_{W_2^1(B_{b_*}(0) \setminus \omega_{k,\varepsilon})}.$$

Первая оценка в (3.2.19) при условии (3.2.20) была установлена в [55, Лем. 3.4]. Лемма доказана. $\square$

Обозначим $\tilde{S} := \{x \in \Omega :\ \tau = (2bR_2 + R_0)\varepsilon\}$. Поверхность $\tilde{S}$ естественным образом параметризуем точками поверхности S по формуле

$$\tilde{x} = x + \varepsilon(2bR_2 + R_0)\nu(x), \tag{3.2.21}$$

где $x \in S$, $\tilde{x} \in \tilde{S}$, а ν, напомним, нормаль к поверхности S.

Лемма 3.2.6. *При выполнении условий A1, A2, A3 для всех $u, v \in W_2^1(\Omega^\varepsilon)$ выполнено неравенство:*

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{M}^\varepsilon} \left| \frac{\eta^{n-1}|\partial\omega_{k,\varepsilon}|}{|\partial B_{b_*R_2}(0)|}(a(\,\cdot\,,u),v)_{L_2(\partial B_{b_*R_2\varepsilon}(M_k^\varepsilon))} - (a(\,\cdot\,,u),v)_{L_2(\partial\omega_k^\varepsilon)}\right| \\ \leqslant C\varepsilon^{\frac{1}{2}}\|u\|_{W_2^1(\Omega^\varepsilon)}\|v\|_{W_2^1(\Omega^\varepsilon)},\end{aligned} \tag{3.2.22}$$

где константа C не зависит от параметров ε, η, функций u и v.

Доказательство. Всюду в доказательстве через C обозначаем различные несущественные константы, не зависящие от k, ε, η, u и v. Для произвольной $u \in W_2^1(B_{b_*}^k \setminus \omega_k^\varepsilon)$ положим:

$$\langle u\rangle^k := \frac{1}{|B_{b_*}^k \setminus \omega_k^\varepsilon|}\int\limits_{B_{b_*}^k\setminus\omega_k^\varepsilon} u\,dx, \qquad u^\perp := u - \langle u\rangle^k. \tag{3.2.23}$$

В силу леммы 3.2.5 для функции $u^\perp$ верны оценки (3.2.17), (3.2.18). С помощью этих оценок и (3.2.2) элементарно проверяется, что

$$\begin{aligned}&\left|(a(\,\cdot\,,u),v)_{L_2(\partial\omega_k^\varepsilon)} - \frac{|\partial\omega_{k,\varepsilon}|}{|\partial B_{b_*R_2}(0)|}(a(\,\cdot\,,u),v)_{L_2(\partial B_{b_*}^k)}\right| \\ &\leqslant C\Big(|\langle a(\,\cdot\,,u)\rangle^k|\|v^\perp\|_{L_1(\partial\omega_k^\varepsilon\cup\partial B_{b_*}^k)} + |\langle v\rangle^k|\|a(\,\cdot\,,u)^\perp\|_{L_1(\partial\omega_k^\varepsilon\cup\partial B_{b_*}^k)} \\ &\qquad + \|a(\,\cdot\,,u)^\perp\|_{L_2(\partial\omega_k^\varepsilon\cup\partial B_{b_*}^k)}\|v^\perp\|_{L_2(\partial\omega_k^\varepsilon\cup\partial B_{b_*}^k)}\Big) \\ &\leqslant C\Big(\|u\|_{L_2(B_{b_*}^k\setminus\omega_k^\varepsilon)}\|\nabla v\|_{L_2(B_{b_*}^k\setminus\omega_k^\varepsilon)} + \|u\|_{W_2^1(B_{b_*}^k\setminus\omega_k^\varepsilon)}\|v\|_{L_2(B_{b_*}^k\setminus\omega_k^\varepsilon)} \\ &\qquad + \varepsilon\eta\|u\|_{W_2^1(B_{b_*}^k\setminus\omega_k^\varepsilon)}\|\nabla v\|_{L_2(B_{b_*}^k\setminus\omega_k^\varepsilon)}\Big).\end{aligned} \tag{3.2.24}$$

Суммируя эти оценки по k и применяя затем лемму 3.2.4, получаем

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{M}^\varepsilon}\left|\big(a(\,\cdot\,,u),v\big)_{L_2(\partial\omega_k^\varepsilon)}-\frac{|\partial\omega_{k,\varepsilon}|}{|\partial B_{b_*R_2}(0)|}\big(a(\,\cdot\,,u),v\big)_{L_2(\partial B_{b_*}^k)}\right|&\\ \leqslant C\varepsilon^{\frac{1}{2}}\|u\|_{W_2^1(\Omega^\varepsilon)}\|v\|_{W_2^1(\Omega^\varepsilon)}.&\end{aligned}\tag{3.2.25}$$

Проинтегрируем по частям в следующем интеграле:

$$\begin{aligned}0=&\frac{(\varepsilon\eta)^{n-1}|\partial\omega_{k,\varepsilon}|}{(2-n)|\partial B_1(0)|}\int\limits_{B_{b_*R_2\varepsilon}(M_k^\varepsilon)\setminus B_{b_*}^k} a(x,u(x))\overline{v(x)}\Delta|x-M_k^\varepsilon|^{-n+2}\,dx\\ =&\frac{\eta^{n-1}|\partial\omega_{k,\varepsilon}|}{|\partial B_{b_*R_2}(0)|}\big(a(\,\cdot\,,u),v\big)_{L_2(\partial B_{b_*R_2\varepsilon}(M_k^\varepsilon))}\\ &-\frac{|\partial\omega_{k,\varepsilon}|}{|\partial B_{b_*R_2}(0)|}\big(a(\,\cdot\,,u),v\big)_{L_2(\partial B_{b_*}^k)}-\frac{(\varepsilon\eta)^{n-1}|\partial\omega_{k,\varepsilon}|}{(2-n)|\partial B_1(0)|}\\ &\cdot\int\limits_{B_{b_*R_2\varepsilon}(M_k^\varepsilon)\setminus B_{b_*}^k}\nabla|x-M_k^\varepsilon|^{-n+2}\cdot\nabla\big(a(x,u(x))\overline{v(x)}\big)\,dx.\end{aligned}\tag{3.2.26}$$

Элементарные оценки и неравенство Коши–Буняковского дают:

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{M}^\varepsilon}&\left|\frac{(\varepsilon\eta)^{n-1}|\partial\omega_{k,\varepsilon}|}{(2-n)|\partial B_1(0)|}\int\limits_{B_{b_*R_2\varepsilon}(M_k^\varepsilon)\setminus B_{b_*}^k}\nabla|x-M_k^\varepsilon|^{-n+2}\cdot\nabla(a(x,u(x))\overline{v(x)})\,dx\right|\\ &\leqslant C\sum_{k\in\mathbb{M}^\varepsilon}\Big(\|v\|_{L_2(B_{b_*R_2\varepsilon}(M_k^\varepsilon)\setminus B_{b_*}^k)}\|\nabla a(\,\cdot\,,u)\|_{L_2(B_{b_*R_2\varepsilon}(M_k^\varepsilon)\setminus B_{b_*}^k)}\\ &\qquad+\|\nabla v\|_{L_2(B_{b_*R_2\varepsilon}(M_k^\varepsilon)\setminus B_{b_*}^k)}\|a(\,\cdot\,,u)\|_{L_2(B_{b_*R_2\varepsilon}(M_k^\varepsilon)\setminus B_{b_*}^k)}\Big).\end{aligned}\tag{3.2.27}$$

Применяя оценку (3.2.15) для $a(x,u(x))$ и $v(x)$, интегрируя её по множествам $B_{b_*R_2\varepsilon}(M_k^\varepsilon)\setminus B_{b_*}^k$ и суммируя результат по k, с учётом (3.2.2) получим:

$$\begin{aligned}&\sum_{k\in\mathbb{M}^\varepsilon}\|v\|^2_{L_2(B_{b_*R_2\varepsilon}(M_k^\varepsilon)\setminus B_{b_*}^k)}\leqslant C\varepsilon\|v\|^2_{W_2^1(\Omega^\varepsilon)},\\ &\sum_{k\in\mathbb{M}^\varepsilon}\|a(\,\cdot\,,u)\|^2_{L_2(B_{b_*R_2\varepsilon}(M_k^\varepsilon)\setminus B_{b_*}^k)}\leqslant C\varepsilon\|u\|^2_{W_2^1(\Omega^\varepsilon)}.\end{aligned}$$

Отсюда и из (3.2.27) выводим:

$$\sum_{k\in\mathbb{M}^\varepsilon}\left|\frac{(\varepsilon\eta)^{n-1}|\partial\omega_{k,\varepsilon}|}{(2-n)|\partial B_1(0)|}\int\limits_{B_{b_*R_2\varepsilon}(M_k^\varepsilon)\setminus B_{b_*}^k}\nabla|x-M_k^\varepsilon|^{-n+2}\cdot\nabla(a(x,u(x))\overline{v(x)})\,dx\right|$$
$$\leqslant C\varepsilon^{\frac{1}{2}}\|u\|_{W_2^1(\Omega^\varepsilon)}\|v\|_{W_2^1(\Omega^\varepsilon)}. \tag{3.2.28}$$

Выразим теперь скалярное произведение $(a(\,\cdot\,,u),v)_{L_2(\partial B_{b_*}^k)}$ из равенства (3.2.26) и подставим полученное выражение в (3.2.25). Тогда немедленно получим требуемую оценку (3.2.22). Лемма доказана. □

Лемма 3.2.7. *Для любой функции $v\in W_2^1(\Omega^\varepsilon)$ выполнено неравенство*

$$\|v\|^2_{L_2(\tilde{S})}\leqslant\delta\|\nabla v\|^2_{L_2(\Omega^\varepsilon)}+C(\delta)\|v\|^2_{L_2(\Omega^\varepsilon)}$$

для любого $\delta>0$ с константой $C(\delta)>0$, не зависящей от v и ε.

Доказательство леммы проводится аналогично доказательству леммы 3.1 из [54].

Функции α^ε и α^0, заданные на S, определим также и на поверхности $\tilde{S}$ с помощью параметризации (3.2.21) по правилу

$$\alpha^\varepsilon(\tilde{x}):=\alpha^\varepsilon(x),\qquad \alpha^0(\tilde{x}):=\alpha^0(x), \tag{3.2.29}$$

где точки $\tilde{x}\in\tilde{S}$ и $x\in S$ связаны формулой (3.2.21). Напомним, что в силу условия A5 функция α^0 является элементом пространства $W_\infty^1(S)$. Поэтому продолжение этой функции, введённое в (3.2.29), является и элементом пространства $W_\infty^1(\tilde{S})$.

Обозначим:

$$\begin{aligned}
\varpi_0^\varepsilon&:=\Big\{x\in\Omega:\,(2bR_2+R_0)\varepsilon<\tau<\frac{\tau_0}{2}\Big\},\\
\varpi_1^\varepsilon&:=\big\{x\in\Omega:\,0<\tau<(2bR_2+R_0)\varepsilon\big\},\\
\varpi_2^\varepsilon&:=\big\{x\in\Omega:\,(2bR_2+R_0)\varepsilon<\tau<(4bR_2+2R_0)\varepsilon\big\}.
\end{aligned}$$

Отметим, что для произвольной функции $u\in W_2^1(\varpi_0^\varepsilon)$ верны оценки

$$\|u\|_{L_2(\tilde{S})}\leqslant C\|u\|_{W_2^1(\varpi_0^\varepsilon)},\qquad \|u\|_{L_2(\varpi_2^\varepsilon)}\leqslant C\varepsilon^{\frac{1}{2}}\|u\|_{W_2^1(\varpi_0^\varepsilon)}, \tag{3.2.30}$$

где C — некоторые оценки, не зависящие от ε и u. Здесь первая оценка очевидна, а вторая получается интегрированием по ϖ_2^ε неравенства (3.2.15).

Лемма 3.2.8. *Пусть выполнено условие A1 и $\alpha \in L_\infty(S)$ — произвольная функция, которую продолжим на поверхность $\tilde{S}$ согласно (3.2.29). Тогда для всех $u, v \in W_2^1(\varpi_0^\varepsilon)$ верна оценка*

$$\begin{aligned}\big|(\alpha u, v)_{L_2(\tilde{S})}\big| \leqslant & C\big(\|\alpha\|_S + \varepsilon\|\alpha\|_{L_\infty(S)}\big)\|u\|_{W_2^1(\varpi_0^\varepsilon)}\|v\|_{W_2^1(\varpi_0^\varepsilon)} \\ & + C\varepsilon^{\frac{1}{2}}\|\alpha\|_{L_\infty(S)}\big(\|u\|_{W_2^1(\varpi_0^\varepsilon)}\|\nabla v\|_{L_2(\varpi_2^\varepsilon)} \\ & + \|v\|_{W_2^1(\varpi_0^\varepsilon)}\|\nabla u\|_{L_2(\varpi_2^\varepsilon)}\big),\end{aligned}$$

где C — некоторые константы, не зависящие от параметра ε и функций u, v, α.

Доказательство. Функции u, v продолжим в область $\varpi \setminus \varpi_0^\varepsilon$ чётным образом относительно $\tilde{S}$. А именно, для каждой точки $x \in \varpi \setminus \varpi_0^\varepsilon$ однозначно найдём точки $s \in S$ и $\tau \in (0, (2bR_2 + R_0)\varepsilon)$ по правилу $x = s + \tau\nu(s)$ и положим

$$\begin{aligned}u(x) &= u\big(s + ((4bR_2 + 2R_0)\varepsilon - \tau)\nu(s)\big), \\ v(x) &= v\big(s + ((4bR_2 + 2R_0)\varepsilon - \tau)\nu(s)\big).\end{aligned}$$

В силу условия A1 такое продолжение определено корректно, продолженные функции являются элементами пространства $W_2^1(\varpi)$ и верны оценки

$$\begin{aligned}&\|u\|_{W_2^1(\varpi)} \leqslant C\|u\|_{W_2^1(\varpi_0^\varepsilon)}, \qquad \|u\|_{L_2(\varpi_1^\varepsilon)} \leqslant C\|u\|_{L_2(\varpi_2^\varepsilon)}, \\ &\|\nabla u\|_{L_2(\varpi_1^\varepsilon)} \leqslant C\|\nabla u\|_{L_2(\varpi_2^\varepsilon)};\end{aligned} \tag{3.2.31}$$

и такие же оценки верны для v. Здесь и всюду до конца доказательства через C обозначаем различные константы, не зависящие от ε, u, v, α. Из равенства

$$u\overline{v}\big|_{\tau=(2bR_2+R_0)\varepsilon} = u\overline{v}\big|_{\tau=0} + \int\limits_0^{(2bR_2+R_0)\varepsilon} \frac{\partial u\overline{v}}{\partial\tau}\,d\tau$$

следует оценка

$$\begin{aligned}&\left|\int\limits_S \alpha\big(u\overline{v}\big|_{\tau=(2bR_2+R_0)\varepsilon}-u\overline{v}\big)\,ds\right|\\&\leqslant C\|\alpha\|_{L_\infty(S)}\Big(\|u\|_{L_2(\varpi_1^\varepsilon)}\|\nabla v\|_{L_2(\varpi_1^\varepsilon)}+\|v\|_{L_2(\varpi_1^\varepsilon)}\|\nabla u\|_{L_2(\varpi_1^\varepsilon)}\Big).\end{aligned}\tag{3.2.32}$$

Отметим, что дифференциалы площади поверхностей S и $\tilde{S}$ связаны равенствами $d\tilde{s}=(1+\varepsilon J_\varepsilon(s))ds$, где J_ε — непрерывно дифференцируемая функция, ограниченная равномерно по ε и $s\in S$ вместе со своими пространственными производными первого порядка.

Используя указанные свойства дифференциалов площадей S и $\tilde{S}$ и оценки (3.1.4), (3.2.30), (3.2.31), (3.2.32), получаем

$$\begin{aligned}\big|(\alpha u,v)_{L_2(\tilde{S})}-(\alpha u,v)_{L_2(S)}\big| \leqslant& C\varepsilon\|\alpha\|_{L_\infty(S)}\|u\|_{W_2^1(\varpi_0^\varepsilon)}\|v\|_{W_2^1(\varpi_0^\varepsilon)}\\&+C\varepsilon^{\frac{1}{2}}\|\alpha\|_{L_\infty(S)}\Big(\|u\|_{W_2^1(\varpi_0^\varepsilon)}\|\nabla v\|_{L_2(\varpi_2^\varepsilon)}\\&+\|v\|_{W_2^1(\varpi_0^\varepsilon)}\|\nabla u\|_{L_2(\varpi_2^\varepsilon)}\Big).\end{aligned}\tag{3.2.33}$$

Применяя теперь к скалярному произведению $(\alpha u,v)_{L_2(S)}$ вторую оценку из (3.1.2), приходим к утверждению леммы. Лемма доказана. □

Лемма 3.2.9. *Пусть выполнены условия A1, A5. Тогда для всех* $u\in W_2^1(\Omega)$, $v\in W_2^1(\Omega^\varepsilon)$ *верна оценка*

$$\Big|\big((\alpha^\varepsilon-\alpha^0)a(\,\cdot\,,u),v\big)_{L_2(\tilde{S})}\Big|\leqslant C\big(\kappa(\varepsilon)+\varepsilon^{\frac{1}{2}}\big)\|u\|_{W_2^1(\Omega)}\|v\|_{W_2^1(\Omega^\varepsilon)},\tag{3.2.34}$$

где константа C *не зависит от* ε, u, v.

Доказательство. Так как $u\in W_2^1(\Omega)$, то в силу леммы 3.2.2 функция $a(x,u(x))$ является элементом пространства $W_2^1(\Sigma)$ и справедлива оценка

$$\|a(\,\cdot\,,u)\|_{W_2^1(\Sigma)}\leqslant C\|u\|_{W_2^1(\Omega)},$$

где C — некоторая константа, не зависящая от u. Применяя теперь лемму 3.2.8 с заменой $u(x)$ на $a(x,u(x))$ и $\alpha=\alpha^\varepsilon-\alpha^0$ и учитывая условие A5, приходим к оценке (3.2.34). Лемма доказана. □

Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{aligned}&(\hat{\mathcal{H}}-\lambda)\tilde{u}_0=f \quad \text{в} \quad \Omega, \qquad \tilde{u}_0=0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega,\\ &[\tilde{u}_0]_{\tilde{S}}=0, \qquad \left[\frac{\partial\tilde{u}_0}{\partial \mathrm{n}}\right]_{\tilde{S}}-\alpha^0 a(\,\cdot\,,\tilde{u}_0)|_{\tilde{S}}=0,\end{aligned} \tag{3.2.35}$$

где обозначено $[u]_{\tilde{S}}:=u\big|_{\tau=(2bR_2+R_0)\varepsilon+0}-u\big|_{\tau=(2bR_2+R_0)\varepsilon-0}$. Производная по конормали в (3.2.35) задаётся формулой из (1.0.5), где в качестве нормали на $\tilde{S}$ выбирается та, которая направлена в ту же сторону, что и нормаль на S.

Лемма 3.2.10. *Пусть выполнено условие A1 и $\alpha^0\in W^1_\infty(S)$. Существует фиксированное λ_0, не зависящее от ε, такое, что при $\lambda<\lambda_0$ задачи (1.0.18), (1.0.19) и (3.2.35) однозначно разрешимы для любой $f\in L_2(\Omega)$ и выполнены неравенства*

$$\|\tilde{u}_0-u_0\|_{W^1_2(\Omega)}\leqslant C\varepsilon^{\frac{1}{2}}\|f\|_{L_2(\Omega)}, \qquad \|\tilde{u}_0\|_{W^2_2(\Omega\setminus\tilde{S})}\leqslant C\|f\|_{L_2(\Omega)}, \tag{3.2.36}$$

где константа C не зависит от ε, α^0 и f.

Доказательство. Существование λ_0 и разрешимость задачи (3.2.35) легко проверяется аналогично доказательству леммы 3.2.3, при этом зависимость поверхности $\tilde{S}$ от ε не играет никакой роли. Вторая оценка в (3.2.36) доказывается по той же схеме, что и оценка (3.2.5); для оценки нормы вторых производных достаточно повторить доказательство леммы 8.1 из [26, Гл. 3, §8]. При этом необходимая регулярность поверхности обеспечивается условием A1, а равномерность всех оценок по ε — явным определением поверхности $\tilde{S}$, которая фактически обладает той же регулярностью, что и поверхность S.

Докажем первую оценку в (3.2.36). Обозначим $\phi:=u_0-\tilde{u}_0$. Используя задачи (1.0.18), (1.0.19) и (3.2.35), несложно убедиться, что функция ϕ является решением краевой задачи

$$\begin{aligned}&(\hat{\mathcal{H}}-\lambda)\phi=0 \quad \text{в} \quad \Omega, \qquad \phi=0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega,\\ &[\phi]_S=0, \qquad [\phi]_{\tilde{S}}=0,\end{aligned}$$

$$\left[\frac{\partial\phi}{\partial\mathrm{n}}\right]_S - \alpha^0 a(\,\cdot\,,u_0)|_S = 0, \qquad \left[\frac{\partial\phi}{\partial\mathrm{n}}\right]_{\tilde S} + \alpha^0 a(\,\cdot\,,\tilde u_0)|_{\tilde S} = 0.$$

Выпишем теперь интегральное тождество, соответствующее этой задаче, взяв в качестве пробной функцию ϕ,

$$\mathfrak{h}_0(\phi,\phi) - \lambda\|\phi\|^2_{L_2(\Omega)} = \big(\alpha^0 a(\,\cdot\,,\tilde u_0),\phi\big)_{L_2(\tilde S)} - \big(\alpha^0 a(\,\cdot\,,u_0),\phi\big)_{L_2(S)}.$$

Перепишем это равенство в более удобном виде

$$\begin{aligned}\mathfrak{h}_0(\phi,\phi) - \lambda\|\phi\|^2_{L_2(\Omega)} + \big(\alpha^0\big(a(\,\cdot\,,u_0) - a(\,\cdot\,,\tilde u_0)\big),\phi\big)_{L_2(\tilde S)}&\\ = \big(\alpha^0 a(\,\cdot\,,u_0),\phi\big)_{L_2(\tilde S)} - \big(\alpha^0 a(\,\cdot\,,u_0),\phi\big)_{L_2(S)}&.\end{aligned} \tag{3.2.37}$$

Аналогично (3.2.8), (3.2.9), (3.2.10) элементарно проверяется оценка

$$\left|\mathfrak{h}_0(\phi,\phi) - \lambda\|\phi\|^2_{L_2(\Omega)} + \big(\alpha^0\big(a(\,\cdot\,,u_0) - a(\,\cdot\,,\tilde u_0)\big),\phi\big)_{L_2(\tilde S)}\right| \geqslant \frac{c_0}{2}\|\phi\|^2_{W_2^1(\Omega)}. \tag{3.2.38}$$

Правую часть тождества (3.2.37) оценим с помощью (3.2.33), (3.2.2) и (3.2.5):

$$\begin{aligned}\left|\big(\alpha^0 a(\,\cdot\,,u_0),\phi\big)_{L_2(\tilde S)} - \big(\alpha^0 a(\,\cdot\,,u_0),\phi\big)_{L_2(S)}\right| \leqslant& C\varepsilon^{\frac12}\|u_0\|_{W_2^1(\Omega)}\|\phi\|_{W_2^1(\Omega)}\\ \leqslant& C\varepsilon^{\frac12}\|f\|_{L_2(\Omega)}\|\phi\|_{W_2^1(\Omega)},\end{aligned}$$

где C — некоторая константа, не зависящая от ε, f, u_0, ϕ. Из этой оценки и (3.2.38), (3.2.37) следует неравенство

$$\|\phi\|_{W_2^1(\Omega)} \leqslant C\varepsilon^{\frac12}\|f\|_{L_2(\Omega)},$$

которое доказывает первую оценку в (3.2.36). Лемма доказана. □

3.3 Усреднённая задача без условий на S

В настоящем параграфе мы доказываем теорему 1.0.2. Всюду в доказательстве считаем, что параметр λ выбирается из условия $\lambda < \lambda_0$, где λ_0 — отрицательное и достаточно большое по модулю число так, что оно не превосходит аналогичную константу из леммы 3.2.3.

Разность решений задач задач (1.0.4) и (1.0.17), обозначаемая через $v_\varepsilon = u_\varepsilon - u_0$, удовлетворяет краевой задаче

$$\begin{gathered}(\hat{\mathcal{H}}-\lambda)v_\varepsilon = 0 \quad \text{в} \quad \Omega^\varepsilon, \qquad v_\varepsilon = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega,\\ \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \mathrm{n}} = -\frac{\partial u_0}{\partial \mathrm{n}} - a(\,\cdot\,, u_\varepsilon) \quad \text{на} \quad \partial\theta^\varepsilon.\end{gathered} \tag{3.3.1}$$

Выпишем для этой задачи интегральное тождество, взяв $v_\varepsilon \in \mathring{W}_2^1(\Omega^\varepsilon, \partial\Omega)$ в качестве пробной функции,

$$\mathfrak{h}_0(v_\varepsilon, v_\varepsilon) - \lambda\|v_\varepsilon\|^2_{L_2(\Omega^\varepsilon)} = -\left(\frac{\partial u_0}{\partial \mathrm{n}}, v_\varepsilon\right)_{L_2(\partial\theta^\varepsilon)} - \big(a(\,\cdot\,, u_\varepsilon), v_\varepsilon\big)_{L_2(\partial\theta^\varepsilon)}. \tag{3.3.2}$$

Основная идея доказательства теоремы состоит в том, чтобы оценить сверху правую часть равенства (3.3.2) и снизу левую часть этого равенства, что в итоге даст оценку для функции v_ε.

Вначале рассмотрим случай $a \equiv 0$. В этом случае второе слагаемое в правой части равенства (3.3.2) обращается в нуль, а для оценки первого слагаемого проинтегрируем по частям

$$\begin{aligned}\int\limits_{B_1^k\setminus\omega_k^\varepsilon} \overline{v}_\varepsilon \hat{\mathcal{H}} u_0\,dx = {}&\sum_{i,j=1}^n \int\limits_{B_1^k\setminus\omega_k^\varepsilon} A_{ij}\frac{\partial u_0}{\partial x_j}\frac{\partial \overline{v}_\varepsilon}{\partial x_i}\,dx + \sum_{j=1}^n \int\limits_{B_1^k\setminus\omega_k^\varepsilon} A_j \frac{\partial u_0}{\partial x_j}\overline{v}_\varepsilon\,dx\\ &+ \int\limits_{B_1^k\setminus\omega_k^\varepsilon} A_0 u_0 \overline{v}_\varepsilon\,dx - \int\limits_{\partial\omega_k^\varepsilon} \frac{\partial u_0}{\partial \mathrm{n}}\overline{v}_\varepsilon\,ds + \int\limits_{\partial B_1^k} \frac{\partial u_0}{\partial \mathrm{n}}\overline{v}_\varepsilon\,ds;\end{aligned} \tag{3.3.3}$$

здесь нормаль к ∂B_1^k считаем направленной внутрь B_1^k. Из последнего равенства и уравнения из (1.0.17) следует

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial u_0}{\partial \mathrm{n}}, v_\varepsilon\right)_{L_2(\partial\omega_k^\varepsilon)} = {}&\left(\frac{\partial u_0}{\partial \mathrm{n}}, v_\varepsilon\right)_{L_2(\partial B_1^k)} + \sum_{i,j=1}^n \left(A_{ij}\frac{\partial u_0}{\partial x_j}, \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_i}\right)_{L_2(B_1^k\setminus\omega_k^\varepsilon)}\\ &+ \sum_{j=1}^n \left(A_j\frac{\partial u_0}{\partial x_j}, v_\varepsilon\right)_{L_2(B_1^k\setminus\omega_k^\varepsilon)} + (A_0 u_0, v_\varepsilon)_{L_2(B_1^k\setminus\omega_k^\varepsilon)}\\ &- (f, v_\varepsilon)_{L_2(B_1^k\setminus\omega_k^\varepsilon)} - \lambda(u_0, v_\varepsilon)_{L_2(B_1^k\setminus\omega_k^\varepsilon)}.\end{aligned} \tag{3.3.4}$$

Введем вспомогательную задачу

$$\begin{gathered}\Delta W^{\varepsilon}_{k,i}=0 \quad \text{в} \quad B^k_{b_*}\setminus B^k_1,\\ \frac{\partial W^{\varepsilon}_{k,i}}{\partial r}=\frac{\partial \varrho^k_i}{\partial r} \quad \text{на} \quad \partial B^k_1, \quad \frac{\partial W^{\varepsilon}_{k,i}}{\partial r}=0 \quad \text{на} \quad \partial B^k_{b_*},\end{gathered} \tag{3.3.5}$$

где $\varrho^k=(\varrho^k_1,\ldots,\varrho^k_n)=x-M^{\varepsilon}_k$, $r=|\varrho^k|$. Её решением является функция

$$W^{\varepsilon}_{k,i}=\frac{-(b+1)^{-n}\varrho^k_i}{2^{-n}-(b+1)^{-n}}+\frac{2^{-n}r^{-n}\varrho^k_i}{(-n+1)(R_2\eta\varepsilon)^{-n}(2^{-n}-(b+1)^{-n})}.$$

Эта функция удовлетворяет неравенству

$$|\nabla W^{\varepsilon}_{k,i}|\leqslant C \quad \text{в} \quad B^k_{b_*}\setminus B^k_1, \tag{3.3.6}$$

где константа C не зависит от $W^{\varepsilon}_{k,i}$. Проинтегрируем по частям в равенстве

$$\sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_{B^k_{b_*}\setminus B^k_1} A_{ij}\frac{\partial u_0}{\partial x_j}\overline{v}_{\varepsilon}\Delta W^{\varepsilon}_{k,i}\,dx=0$$

с учётом граничных условий задачи (3.3.5). В результате получим

$$\left(\frac{\partial u_0}{\partial \mathrm{n}},v_{\varepsilon}\right)_{L_2(\partial B^k_1)}=\sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_{B^k_{b_*}\setminus B^k_1}\nabla W^{\varepsilon}_{k,i}\nabla\left(A_{ij}\frac{\partial u_0}{\partial x_j}\overline{v}_{\varepsilon}\right)dx.$$

Из последнего равенства, (3.3.4) и (3.3.6) выводим

$$\begin{aligned}\left|\left(\frac{\partial u_0}{\partial \mathrm{n}},v_{\varepsilon}\right)_{L_2(\partial\theta^{\varepsilon})}\right|\leqslant &C\Bigg(\sum_{k\in\mathbb{M}^{\varepsilon}}\|u_0\|^2_{W^1_2(B^k_{b_*}\setminus\omega^{\varepsilon}_k)}\Bigg)^{\frac12}\Bigg(\sum_{k\in\mathbb{M}^{\varepsilon}}\|\nabla v_{\varepsilon}\|^2_{L_2(B^k_{b_*}\setminus\omega^{\varepsilon}_k)}\Bigg)^{\frac12}\\ &+C\Bigg(\sum_{k\in\mathbb{M}^{\varepsilon}}\|u_0\|^2_{W^2_2(B^k_{b_*}\setminus\omega^{\varepsilon}_k)}\Bigg)^{\frac12}\Bigg(\sum_{k\in\mathbb{M}^{\varepsilon}}\|v_{\varepsilon}\|^2_{L_2(B^k_{b_*}\setminus\omega^{\varepsilon}_k)}\Bigg)^{\frac12}.\end{aligned}$$

Здесь и всюду далее символом C обозначаем константы, не зависящие от u_0, v_{ε} и ε. Правую часть последнего неравенства оценим с помощью леммы 3.2.4 и оценки (3.2.4)

$$\begin{aligned}\left|\left(\frac{\partial u_0}{\partial \mathrm{n}},v_{\varepsilon}\right)_{L_2(\partial\theta^{\varepsilon})}\right|&\leqslant C(\varepsilon\eta+\varepsilon^{\frac12}\eta^{\frac{n}{2}})\|u_0\|_{W^2_2(\Omega)}\|v_{\varepsilon}\|_{W^1_2(\Omega^{\varepsilon})}\\ &\leqslant C(\varepsilon\eta+\varepsilon^{\frac12}\eta^{\frac{n}{2}})\|f\|_{L_2(\Omega)}\|v_{\varepsilon}\|_{W^1_2(\Omega^{\varepsilon})}.\end{aligned} \tag{3.3.7}$$

Из последнего неравенства и (3.2.6), (3.3.2) вытекает оценка (1.0.21).

Теперь рассмотрим случай $a \neq 0$. Оценим правую часть равенства (3.3.2). Для первого слагаемого остаётся справедливой оценка (3.3.7). Применяя (3.2.2), (3.2.3) и лемму 3.2.1, приходим к оценке

$$\left|\big(a(\,\cdot\,,u_\varepsilon),v_\varepsilon\big)_{L_2(\partial\theta^\varepsilon)}\right| \leqslant C(\varepsilon\eta+\eta^{n-1})\|f\|_{L_2(\Omega)}\|v_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega^\varepsilon)}.$$

Неравенство (1.0.22) вытекает из последней оценки, (3.3.7), (3.3.2) и (3.2.6). Теорема 1.0.2 доказана.

3.4 Усреднённая задача с дельта–взаимодействием

В данном параграфе мы доказываем теорему 1.0.3. По сравнению с доказательством предыдущей теоремы здесь возникают дополнительные трудности, что требует привлечения новой техники.

Первая трудность связана с тем, что многообразие S может пересекать полости ω_k^ε и это вызывает сложности при попытке прямого вывода оценки нормы разности $u_\varepsilon - u_0$ по аналогии с предыдущим параграфом. Поэтому мы вводим многообразие $\tilde{S}$ и рассматриваем краевую задачу (3.2.35). Многообразие $\tilde{S}$ не пересекает полостей ω_k^ε и это в итоге позволит нам оценить разность $u_\varepsilon - \tilde{u}_0$. Поэтому вначале мы оценим норму разности $u_\varepsilon - \tilde{u}_0$, а затем дополнительно воспользуемся имеющейся оценкой нормы разности $\tilde{u}_0 - u_0$ из леммы 3.2.10.

Как и в доказательстве теоремы 1.0.2, выберем и зафиксируем достаточно большое по модулю отрицательное λ_0 так, чтобы гарантировать разрешимость задач для u_ε, u_0, $\tilde{u}_0$. Такая возможность гарантируется леммами 3.2.3, 3.2.10.

Обозначим $v_\varepsilon := u_\varepsilon - \tilde{u}_0$. Функция v_ε является решением задачи

$$\begin{gathered}
(\hat{\mathcal{H}}-\lambda)v_\varepsilon = 0 \quad \text{в} \quad \Omega^\varepsilon, \qquad \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \mathrm{n}} = -\frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial \mathrm{n}} - a(\,\cdot\,,u_\varepsilon) \quad \text{на} \quad \partial\theta^\varepsilon,\\
v_\varepsilon = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega, \qquad [v_\varepsilon]_{\tilde{S}} = 0, \qquad \left[\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \mathrm{n}}\right]_{\tilde{S}} = -\alpha^0 a(\,\cdot\,,\tilde{u}_0)|_{\tilde{S}}.
\end{gathered}$$

Выпишем для неё интегральное тождество с пробной функцией v_ε:

$$\begin{aligned}&\mathfrak{h}_0(v_\varepsilon, v_\varepsilon) + \big(a(\,\cdot\,,u_\varepsilon) - a(\,\cdot\,,\tilde u_0), v_\varepsilon\big)_{L_2(\partial\theta^\varepsilon)} - \lambda\|v_\varepsilon\|^2_{L_2(\Omega^\varepsilon)}\\ &= -\left(\frac{\partial \tilde u_0}{\partial \mathrm{n}}, v_\varepsilon\right)_{L_2(\partial\theta^\varepsilon)} - \big(a(\,\cdot\,,\tilde u_0), v_\varepsilon\big)_{L_2(\partial\theta^\varepsilon)} + (\alpha^0 a(\,\cdot\,,\tilde u_0), v_\varepsilon)_{L_2(\tilde S)}.\end{aligned} \tag{3.4.1}$$

Наша дальнейшая цель — оценить сверху правую часть равенства (3.4.1) и снизу левую часть этого равенства. Всюду далее до конца доказательства через C обозначаем различные несущественные константы, не зависящие от ε, v_ε, f, $\tilde u_0$, $k \in \mathbb{M}^\varepsilon$, а также пространственных переменных.

Используя свойство (3.2.9) и неравенство Коши–Буняковского, выводим:

$$\Big|\big(a(\,\cdot\,,u_\varepsilon) - a(\,\cdot\,,\tilde u_0), v_\varepsilon\big)_{L_2(\partial\theta^\varepsilon)}\Big| \leqslant a_0\|v_\varepsilon\|^2_{L_2(\partial\theta^\varepsilon)}.$$

Из последнего неравенства, (3.2.6) и леммы 3.2.1 следует, что увеличивая при необходимости модуль числа λ_0, при $\lambda < \lambda_0$ будем иметь

$$\Big|\mathfrak{h}_0(v_\varepsilon, v_\varepsilon) + \big(a(\,\cdot\,,u_\varepsilon) - a(\,\cdot\,,\tilde u_0), v_\varepsilon\big)_{L_2(\partial\theta^\varepsilon)} - \lambda\|v_\varepsilon\|^2_{L_2(\Omega^\varepsilon)}\Big| \geqslant C\|v_\varepsilon\|^2_{W_2^1(\Omega^\varepsilon)}. \tag{3.4.2}$$

Первое слагаемое в правой части неравенства (3.4.1) оценивается так же, как и первое слагаемое в правой части (3.3.2) в случае $a \equiv 0$. Поэтому, повторяя выкладки из вывода оценки (3.3.7), получим неравенство

$$\left|\left(\frac{\partial \tilde u_0}{\partial \mathrm{n}}, v_\varepsilon\right)_{L_2(\partial\theta^\varepsilon)}\right| \leqslant C(\varepsilon\eta + \varepsilon^{\frac12}\eta^{\frac n2})\|f\|_{L_2(\Omega)}\|v_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega^\varepsilon)}. \tag{3.4.3}$$

В дальнейших оценках, не оговаривая отдельно, мы неоднократно будем пользоваться равномерной ограниченностью площадей $|\partial\omega_{k,\varepsilon}|$, установленной в лемме 3.1.2. Согласно оценке (3.2.22) в лемме 3.2.6 и второй оценке в (3.2.36), выполнено неравенство

$$\begin{aligned}&\sum_{k\in\mathbb{M}^\varepsilon}\left|\frac{\eta^{n-1}|\partial\omega_{k,\varepsilon}|}{|\partial B_{b_* R_2}(0)|}(a(\,\cdot\,,\tilde u_0), v_\varepsilon)_{L_2(\partial B_{b_* R_2\varepsilon}(M_k^\varepsilon))} - (a(\,\cdot\,,\tilde u_0), v_\varepsilon)_{L_2(\partial\omega_k^\varepsilon)}\right|\\ &\qquad\leqslant C\varepsilon^{\frac12}\|\tilde u_0\|_{W_2^1(\Omega)}\|v_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega^\varepsilon)} \leqslant C\varepsilon^{\frac12}\|f\|_{L_2(\Omega)}\|v_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega^\varepsilon)}.\end{aligned} \tag{3.4.4}$$

Пусть $\xi=(\xi',\xi_n)$, $\xi'=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{n-1})$ — декартовы координаты в $\mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}&\Xi:=\big\{\xi:\,|\xi'|<bR_2,\,|\xi_n|<bR_2\big\}\setminus B_{b_*R_2}(0),\\&\Upsilon:=\big\{\xi:\,|\xi'|<bR_2,\,\xi_n=bR_2\big\}.\end{aligned}$$

Ясно, что для функций $u\in W_2^1(\Xi)$ с нулевым средним верна оценка

$$\|u\|_{L_2(\Xi)}\leqslant C\|\nabla_\xi u\|_{L_2(\Xi)},\qquad \|u\|_{L_2(\partial B_{b_*R_2}(0)\cup\Upsilon)}\leqslant C\|\nabla_\xi u\|_{L_2(\Xi)}.\tag{3.4.5}$$

где C — некоторая константа, не зависящая от u. Фиксируем произвольный индекс $k\in\mathbb{M}^\varepsilon$ и определим $\xi:=y\varepsilon^{-1}$, где $y=(y_1,\ldots,y_n)$ — декартовы координаты в $\mathbb{R}^n$ с центром в точке M_k^ε, причём ось y_n направлена вдоль положительного направления вектора нормали к поверхности S в точке $M_{k,\perp}^\varepsilon$. Переменные x выразим через y и ξ и положим $\Xi_k^\varepsilon:=\{x:\,\xi\in\Xi\}$, $\Upsilon_k^\varepsilon:=\{x:\,\xi\in\Upsilon\}$.

Из оценок (3.4.5) следует оценки, аналогичные (3.2.17), (3.2.18),

$$\|u\|_{L_2(\Xi_k^\varepsilon)}\leqslant C\varepsilon\|\nabla u\|_{L_2(\Xi_k^\varepsilon)},\qquad \|u\|_{L_2(\partial B_{b_*R_2\varepsilon}(M_k^\varepsilon)\cup\Upsilon_k^\varepsilon)}\leqslant C\varepsilon^{\frac12}\|\nabla u\|_{L_2(\Xi_k^\varepsilon)}$$

для всех $u\in W_2^1(\Xi_k^\varepsilon)$ с нулевым средним по Ξ_k^ε, где константы C не зависят от ε, k, u. Основываясь на этих оценках, применим теперь подход, использованный в доказательстве леммы 3.2.6 для вывода неравенства (3.2.25). Аналогично (3.2.23) введём схожие величины, но уже для множеств Ξ_k^ε:

$$\langle u\rangle_k:=\frac{1}{|\Xi_k^\varepsilon|}\int\limits_{\Xi_k^\varepsilon}u\,dx,\qquad u_\perp:=u-\langle u\rangle_k,\qquad u\in W_2^1(\Xi_k^\varepsilon).$$

В терминах этих обозначений функции $a(x,\tilde u_0(x))$ и v_ε представим в виде

$$a(\,\cdot\,,\tilde u_0)=\langle a(\,\cdot\,,\tilde u_0)\rangle_k+a(\,\cdot\,,\tilde u_0)_\perp,\qquad v_\varepsilon=\langle v_\varepsilon\rangle_k+v_{\varepsilon,\perp}$$

и, пользуясь условием (1.0.12) и оценками (3.2.2), аналогично (3.2.24) получаем

$$
\begin{aligned}
&\bigg|\frac{1}{|\partial B_{b_* R_2}(0)|}(a(\,\cdot\,,\tilde u_0),v_\varepsilon)_{L_2(\partial B_{b_* R_2\varepsilon}(M_k^\varepsilon))}\\
&\quad-\frac{1}{R_2^{n-1}}\big(\zeta(|\xi'|R_2^{-1})a(\,\cdot\,,\tilde u_0),v_\varepsilon\big)_{L_2(\Upsilon_k^\varepsilon)}\bigg|\\
&\quad\leqslant C\Big(|\langle a(\,\cdot\,,\tilde u_0)\rangle_k|\|v_{\varepsilon,\perp}\|_{L_1(\partial B_{b_* R_2\varepsilon}(M_k^\varepsilon)\cup\Upsilon_k^\varepsilon)}\\
&\qquad\quad+|\langle v_\varepsilon\rangle_k|\|a(\,\cdot\,,\tilde u_0)_\perp\|_{L_1(\partial B_{b_* R_2\varepsilon}(M_k^\varepsilon)\cup\Upsilon_k^\varepsilon)}\\
&\qquad\quad+\|a(\,\cdot\,,\tilde u_0)_\perp\|_{L_2(\partial B_{b_* R_2\varepsilon}(M_k^\varepsilon)\cup\Upsilon_k^\varepsilon)}\|v_{\varepsilon,\perp}\|_{L_2(\partial B_{b_* R_2\varepsilon}(M_k^\varepsilon)\cup\Upsilon_k^\varepsilon)}\Big)\\
&\quad\leqslant C\Big(\|\tilde u_0\|_{L_2(\Xi_k^\varepsilon)}\|\nabla v_\varepsilon\|_{L_2(\Xi_k^\varepsilon)}+\|\tilde u_0\|_{W_2^1(\Xi_k^\varepsilon)}\|v_\varepsilon\|_{L_2(\Xi_k^\varepsilon)}\\
&\qquad\quad+\varepsilon\|\tilde u_0\|_{W_2^1(\Xi_k^\varepsilon)}\|\nabla v_\varepsilon\|_{L_2(\Xi_k^\varepsilon)}\Big).
\end{aligned}
\tag{3.4.6}
$$

Отметим ещё, что верны оценки

$$
\sum_{k\in\mathbb{M}^\varepsilon}\|v_\varepsilon\|^2_{L_2(\Xi_k^\varepsilon)}\leqslant C\varepsilon\|v_\varepsilon\|^2_{W_2^1(\Omega^\varepsilon)},\qquad \sum_{k\in\mathbb{M}^\varepsilon}\|\tilde u_0\|^2_{L_2(\Xi_k^\varepsilon)}\leqslant C\varepsilon\|\tilde u_0\|^2_{W_2^1(\Omega^\varepsilon)},
$$

которые легко получаются интегрированием (3.2.15) по областям Ξ_k^ε. Суммируя теперь неравенства (3.4.6) с учётом этих оценок и второй оценки в (3.2.36), получаем

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k\in\mathbb{M}^\varepsilon}\bigg|\frac{\eta^{n-1}|\partial\omega_{k,\varepsilon}|}{|\partial B_{b_* R_2}(0)|}(a(\,\cdot\,,\tilde u_0),v_\varepsilon)_{L_2(\partial B_{b_* R_2\varepsilon}(M_k^\varepsilon))}\\
&\qquad-\frac{\eta^{n-1}|\partial\omega_{k,\varepsilon}|}{R_2^{n-1}}\big(\zeta(|\xi'|R_2^{-1})a(\,\cdot\,,\tilde u_0),v_\varepsilon\big)_{L_2(\Upsilon_k^\varepsilon)}\bigg|\\
&\quad\leqslant C\eta^{n-1}\bigg(\sum_{k\in\mathbb{M}^\varepsilon}\|\tilde u_0\|^2_{L_2(\Xi_k^\varepsilon)}\bigg)^{\frac12}\bigg(\sum_{k\in\mathbb{M}^\varepsilon}\|\nabla v_\varepsilon\|^2_{L_2(\Xi_k^\varepsilon)}\bigg)^{\frac12}\\
&\qquad+C\eta^{n-1}\bigg(\sum_{k\in\mathbb{M}^\varepsilon}\|\tilde u_0\|^2_{W_2^1(\Xi_k^\varepsilon)}\bigg)^{\frac12}\bigg(\sum_{k\in\mathbb{M}^\varepsilon}\|v_\varepsilon\|^2_{L_2(\Xi_k^\varepsilon)}\bigg)^{\frac12}\\
&\qquad+C\varepsilon\eta^{n-1}\bigg(\sum_{k\in\mathbb{M}^\varepsilon}\|\tilde u_0\|^2_{W_2^1(\Xi_k^\varepsilon)}\bigg)^{\frac12}\bigg(\sum_{k\in\mathbb{M}^\varepsilon}\|\nabla v_\varepsilon\|^2_{L_2(\Xi_k^\varepsilon)}\bigg)^{\frac12}\\
&\quad\leqslant C\varepsilon^{\frac12}\eta^{n-1}\|f\|_{L_2(\Omega)}\|v_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega_\varepsilon)}.
\end{aligned}
\tag{3.4.7}
$$

Определим множества

$$\Omega_k^\varepsilon := \big\{ x\in\Omega:\, |\xi'|<bR_2,\, \xi_n>bR_2,\, \tau<\varepsilon(2bR_2+R_0)\big\}.$$

Это цилиндрические области, нижними основаниями которых служат Υ_k^ε, а верхними — пересечения $\tilde S\cap B_{bR_2\varepsilon}(\tilde M_{k,\perp}^\varepsilon)$, где $\tilde M_{k,\perp}^\varepsilon$ — точка пересечения оси Oy_n с поверхностью $\tilde S$. С учётом финитности срезающей функции ζ проинтегрируем по частям

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega_k^\varepsilon} \zeta(|\xi'|R_2^{-1})\frac{\partial}{\partial y_n}\big(a(\,\cdot\,,\tilde u_0)\overline{v}_\varepsilon\big)\,dx = &-\big(\zeta(|\xi'|R_2^{-1})a(\,\cdot\,,\tilde u_0),v_\varepsilon\big)_{L_2(\Upsilon_k^\varepsilon)}\\ &+\big(\zeta(|\xi'|R_2^{-1})a(\,\cdot\,,\tilde u_0),\cos(Oy_n,\tilde\nu)v_\varepsilon\big)_{L_2(\tilde S\cap B_{bR_2\varepsilon}(\tilde M_{k,\perp}^\varepsilon))},\end{aligned}\tag{3.4.8}$$

где $\tilde\nu$ — нормаль к поверхности $\tilde S$, направленная от поверхности S. Ясно, что верна равномерная по ε, k и $x\in\tilde S\cap B_{bR_2\varepsilon}(\tilde M_{k,\perp}^\varepsilon)$ оценка

$$\big|\cos(Oy_n,\tilde\nu)-1\big|\leqslant C\varepsilon.\tag{3.4.9}$$

Интегрирование (3.2.15) даёт ещё одно неравенство

$$\sum_{k\in\mathbb{M}^\varepsilon}\|u\|^2_{L_2(\Omega_k^\varepsilon)}\leqslant C\varepsilon\|u\|^2_{W_2^1(\Omega^\varepsilon)}$$

для всех $u\in W_2^1(\Omega^\varepsilon)$ с константой C, не зависящей от ε и u. Из данной оценки, (3.4.8), (3.4.9), (3.2.2), (3.2.30) следует

$$\begin{aligned}&\Bigg|\sum_{k\in\mathbb{M}^\varepsilon}\frac{\eta^{n-1}|\partial\omega_{k,\varepsilon}|}{R_2^{n-1}}\big(\zeta(|\xi'|R_2^{-1})a(\,\cdot\,,\tilde u_0),v_\varepsilon\big)_{L_2(\Upsilon_k^\varepsilon)}\\ &\quad-\sum_{k\in\mathbb{M}^\varepsilon}\frac{\eta^{n-1}|\partial\omega_{k,\varepsilon}|}{R_2^{n-1}}\big(\zeta(|\xi'|R_2^{-1})a(\,\cdot\,,\tilde u_0),v_\varepsilon\big)_{L_2(\tilde S\cap B_{bR_2\varepsilon}(\tilde M_{k,\perp}^\varepsilon))}\Bigg|\\ &\quad\leqslant C\Bigg(\sum_{k\in\mathbb{M}^\varepsilon}\|\tilde u_0\|^2_{W_2^1(\Omega_k^\varepsilon)}\Bigg)^{\frac12}\Bigg(\sum_{k\in\mathbb{M}^\varepsilon}\|v_\varepsilon\|^2_{L_2(\Omega_k^\varepsilon)}\Bigg)^{\frac12}\\ &\qquad+C\Bigg(\sum_{k\in\mathbb{M}^\varepsilon}\|\tilde u_0\|^2_{L_2(\Omega_k^\varepsilon)}\Bigg)^{\frac12}\Bigg(\sum_{k\in\mathbb{M}^\varepsilon}\|\nabla v_\varepsilon\|^2_{L_2(\Omega_k^\varepsilon)}\Bigg)^{\frac12}\\ &\qquad+C\varepsilon\|\tilde u_0\|_{L_2(\tilde S)}\|v_\varepsilon\|_{L_2(\tilde S)}\leqslant C\varepsilon^{\frac12}\|\tilde u_0\|_{W_2^1(\Omega)}\|v_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega^\varepsilon)}.\end{aligned}\tag{3.4.10}$$

Пусть $x \in S \cap B_{bR_2\varepsilon}(M^\varepsilon_{k,\perp})$ — произвольная точка, $x^\perp$ — её проекция на касательную гиперплоскость к поверхности S в точке $M^\varepsilon_{k,\perp}$. Ясно, что $|\xi'| = |x^\perp - M^\varepsilon_{k,\perp}|\varepsilon^{-1}$. Так как поверхность S гладкая, а линейный размер куска $S \cap B_{bR_2\varepsilon}(M^\varepsilon_{k,\perp})$ порядка $O(\varepsilon)$, то верно неравенство

$$\left|\frac{|\xi'|}{R_2} - \frac{|x - M^\varepsilon_{k,\perp}|}{\varepsilon R_2}\right| = \left|\frac{|x^\perp - M^\varepsilon_{k,\perp}|}{\varepsilon R_2} - \frac{|x - M^\varepsilon_{k,\perp}|}{\varepsilon R_2}\right| \leqslant C\varepsilon,$$

где константа C не зависит от ε, $k \in \mathbb{M}^\varepsilon$ и $x \in S \cap B_{bR_2\varepsilon}(M^\varepsilon_{k,\perp})$. Учитывая последнюю оценку, (3.2.2) и определение функции α^ε, теперь видим, что

$$\begin{aligned}\Bigg| \sum_{k\in\mathbb{M}^\varepsilon} \frac{\eta^{n-1}|\partial\omega_{k,\varepsilon}|}{R_2^{n-1}} \left(\zeta\left(\frac{|\xi'|}{R_2}\right) a(\,\cdot\,,\tilde{u}_0), v_\varepsilon\right)_{L_2(\tilde{S}\cap B_{bR_2\varepsilon}(\tilde{M}^\varepsilon_{k,\perp}))}& \\ - (\alpha^\varepsilon a(\,\cdot\,,\tilde{u}_0), v_\varepsilon)_{L_2(\tilde{S})}\Bigg| &\leqslant C\varepsilon\|a(\,\cdot\,,\tilde{u}_0)\|_{L_2(\tilde{S})}\|v_\varepsilon\|_{L_2(\tilde{S})} \\ &\leqslant C\varepsilon\|\tilde{u}_0\|_{W_2^1(\Omega)}\|v_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega^\varepsilon)}.\end{aligned} \tag{3.4.11}$$

Эта оценка вместе с (3.4.4), (3.4.7), (3.4.10) приводит к неравенству

$$\left|(a(\,\cdot\,,\tilde{u}_0), v_\varepsilon)_{L_2(\partial\theta^\varepsilon)} - (\alpha^\varepsilon a(\,\cdot\,,\tilde{u}_0), v_\varepsilon)_{L_2(\tilde{S})}\right| \leqslant C\varepsilon^{\frac{1}{2}}\|\tilde{u}_0\|_{W_2^1(\Omega)}\|v_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega^\varepsilon)}. \tag{3.4.12}$$

Отсюда уже в силу оценки (3.2.34) с $u = \tilde{u}_0$ получаем

$$\begin{aligned}\big|(a(\,\cdot\,,\tilde{u}_0), v_\varepsilon)_{L_2(\partial\theta^\varepsilon)} - (\alpha^0 a(\,\cdot\,,\tilde{u}_0), v_\varepsilon)_{L_2(\tilde{S})}\big|& \\ \leqslant C\big(\varepsilon^{\frac{1}{2}} + \kappa(\varepsilon)\big)\|\tilde{u}_0\|_{W_2^1(\Omega^\varepsilon)}\|v_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega^\varepsilon)}& \\ \leqslant C\big(\varepsilon^{\frac{1}{2}} + \kappa(\varepsilon)\big)\|f\|_{L_2(\Omega)}\|v_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega^\varepsilon)}&.\end{aligned} \tag{3.4.13}$$

Из последнего неравенства и (3.4.3), (3.4.2), (3.4.1) следует

$$\|v_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega^\varepsilon)} \leqslant C\big(\varepsilon^{\frac{1}{2}} + \kappa(\varepsilon)\big)\|f\|_{L_2(\Omega)}. \tag{3.4.14}$$

Используя последнее неравенство и лемму 3.2.10, выводим

$$\|u_\varepsilon - u_0\|_{W_2^1(\Omega^\varepsilon)} \leqslant \|v_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega^\varepsilon)} + \|\tilde{u}_0 - u_0\|_{W_2^1(\Omega^\varepsilon)} \leqslant C\big(\varepsilon^{\frac{1}{2}} + \kappa(\varepsilon)\big)\|f\|_{L_2(\Omega)}.$$

Теорема 1.0.3 доказана.

Глава 4

Асимптотика решения в случае усредненного краевого условия Дирихле

4.1 Формальные асимптотики

В этом параграфе мы начинаем доказательство теоремы 1.0.4, а именно, начинаем формальное построение асимптотики для решения рассматриваемой задачи.

Для построения асимптотики решения задачи (1.0.4) будем применять метод согласования асимптотических разложений [25]. Функцию u_ε будем строить как комбинацию внешнего и внутреннего разложений. Внешнее разложение строится в виде

$$u_\varepsilon^{ex}(x,\eta) = u_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m u_m(x,\eta), \tag{4.1.1}$$

где u_0 — решение соответствующей усреднённой задачи

$$(\mathcal{L}-\lambda)u_0 = f \quad \text{в} \quad \Omega \setminus S, \qquad u_0 = 0 \quad \text{на} \quad S \cup \partial\Omega, \tag{4.1.2}$$

Внутреннее разложение будем строить в окрестности полостей θ^ε в растянутых переменных $\xi = (\xi', \xi_n) = (x'\varepsilon^{-1}, x_n\varepsilon^{-1})$ в виде

$$u_\varepsilon^{in}(x,\eta) = \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m v_m(\xi, x', \eta). \tag{4.1.3}$$

Целью формального построения является определение коэффициентов внешнего и внутреннего разложений.

Подставим разложение (4.1.1) в задачу (1.0.4) и соберем коэффициенты при одинаковых степенях ε. В результате получим краевые задачи (1.0.26) на коэффициенты внешнего разложения.

Выпишем задачи на коэффициенты внутреннего разложения. Для этого разложим функцию f в ряд Тейлора при $x_n \to 0$ и сделаем замену $x_n = \varepsilon\xi_n$. Тогда получим

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}\frac{\partial^m f}{\partial x_n^m}(x',0)x_n^m = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^m}{m!}\frac{\partial^m f}{\partial x_n^m}(x',0)\xi_n^m, \qquad x_n \to 0. \quad (4.1.4)$$

Подставляя разложение (1.0.31), (4.1.4) и (4.1.3) в задачу (1.0.4) и собирая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим задачи (1.0.27), (1.0.28), (1.0.30). Поведение функций v_m на бесконечности определяется из условия согласования внешнего разложения с внутренним. Согласование проводится следующим образом.

Далее в работе будет показано, что функции u_0, u_m бесконечно дифференцируемые в окрестности гиперплоскости $x_n = 0$ с каждой из её сторон. Поэтому разложим их в ряд Тейлора при $x_n \to \pm 0$, учитывая граничные условия для u_0 при $x_n = 0$,

$$u_0(x,\eta) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!}\frac{\partial^j u_0}{\partial x_n^j}(x',\pm 0,\eta)x_n^j = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^j}{j!}\frac{\partial^j u_0}{\partial x_n^j}(x',\pm 0,\eta)\xi_n^j, \quad (4.1.5)$$

$$u_m(x,\eta) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}\frac{\partial^j u_m}{\partial x_n^j}(x',\pm 0,\eta)x_n^j = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^j}{j!}\frac{\partial^j u_m}{\partial x_n^j}(x',\pm 0,\eta)\xi_n^j. \quad (4.1.6)$$

В силу метода согласования из последних разложений следует, что функции v_m должны иметь следующие асимптотики (1.0.29) на бесконечности.

Задачи (1.0.27), (1.0.28), (1.0.29) на коэффициенты внутреннего разложения являются периодическими по ξ'. Поэтому их решения также будем искать периодическими. В силу предполагаемой периодичности задачи (1.0.27), (1.0.28), (1.0.29) сводятся к аналогичным задачам в Π

с периодическими граничными условиями на боковых гранях Π. Решив такие задачи в Π, решения задач (1.0.28), (1.0.29) получим простым $\square$–периодическим продолжением по ξ'.

Описанные задачи в Π зависят от параметра η. Их разрешимость и зависимость от этого параметра будут исследованы в следующем параграфе.

4.2 Исследование модельной задачи для коэффициентов внутреннего разложения

4.2.1 Модельная задача

Обозначим: $\omega^\eta := \omega^\eta_{\mathrm{D}} \cup \omega^\eta_{\mathrm{R}}$. Пусть $F \in L_2(\Pi \setminus \omega^\eta)$, $\phi \in L_2(\partial\theta^\eta_{\mathrm{R}})$ — произвольные функции. Рассмотрим модельную краевую задачу

$$
\begin{aligned}
&-\Delta_\xi v = F \quad \text{в} \quad \Pi \setminus \overline{\omega^\eta},\\
&v = 0 \quad \text{на} \quad \partial\omega^\eta_{\mathrm{D}}, \qquad \frac{\partial v}{\partial \nu_\xi} = \phi \quad \text{на} \quad \partial\omega^\eta_{\mathrm{R}},
\end{aligned}
\tag{4.2.1}
$$

$$
v\big|_{\xi_i=-\frac{b_i}{2}} = v\big|_{\xi_i=\frac{b_i}{2}}, \qquad \frac{\partial v}{\partial \xi_i}\bigg|_{\xi_i=-\frac{b_i}{2}} = \frac{\partial v}{\partial \xi_i}\bigg|_{\xi_i=\frac{b_i}{2}}, \quad i = 1, \ldots, n-1. \tag{4.2.2}
$$

Для произвольного $R > 0$ обозначим:

$$
\Pi^\pm_R := \{\xi :\, \xi' \in \square,\, 0 < \pm\xi_n < R\}\,, \qquad \Pi^\eta := \Pi_{R_6} \setminus \overline{\omega^\eta}.
$$

Обобщенным решением задачи (4.2.1), (4.2.2) называется функция v, принадлежащая пространству $W^1_2(\Pi_R \setminus \omega^\eta)$ для каждого $R > 0$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$
(\nabla_\xi v, \nabla_\xi w)_{L_2(\Pi_R\setminus\omega^\eta)} - (w, \phi)_{L_2(\partial\omega^\eta)} = (F, w)_{L_2(\Pi_R\setminus\omega^\eta)}
$$

для всех функций $w \in C^2(\overline{\Pi \setminus \omega^\eta})$ таких, что функция w обращается в нуль на $\partial\omega^\eta_{\mathrm{D}}$, удовлетворяет периодическим граничным условиям на боковых гранях Π и тождественно равна нулю при $|\xi_n| > d > 0$ для некоторого $d > 0$, зависящего от выбора функции w. Поведение решения задачи (4.2.1), (4.2.2) на бесконечности будет уточнено далее в процессе исследования разрешимости.

Целью этого параграфа является исследование разрешимости задачи (4.2.1), (4.2.2) и зависимости её решения от параметра η.

4.2.2 Операторное уравнение

В этом пункте будем рассматривать задачу (4.2.1), (4.2.2) с финитной правой частью F и с однородным граничным условием $\phi = 0$. Считаем, что функция F обращается в нуль вне множества Π_{R_6} для некоторого фиксированного $R_6 > 1$ такого, что $\omega^\eta \subset \Pi_{R_6-1}$ для всех $\eta \in (0, 1]$. Будем искать решение такой задачи, стремящееся к константам при $\xi_n \to \pm\infty$,

$$v(\xi, \eta) = A_\pm(\eta) + o(1), \qquad \xi_n \to \pm\infty. \tag{4.2.3}$$

Для всех $R > 0$ обозначим

$$\begin{aligned}
&\Pi_R^\pm := \{\xi : \xi' \in \square,\, 0 < \pm\xi_n < R\}, \\
&\Pi_{R,\pm} := \{\xi : \xi' \in \square,\, \pm\xi_n > R\}.
\end{aligned}$$

Пусть $g \in L_2(\Pi^\eta)$ — некоторая функция. Продолжим функцию g нулём при $|\xi_n| > R_6$ и рассмотрим задачи

$$-\Delta_\xi V_1^\pm = g \quad \text{в} \quad \Pi_{R_6-1,\pm}, \qquad V_1^\pm = 0 \quad \text{на} \quad \square \times \{0\}, \tag{4.2.4}$$

с периодическими граничными условиями (4.2.2). Решим эту задачу методом разделения переменных:

$$V_1^\pm(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^{n-1}} X_k^\pm(\xi_n) e^{2\pi \mathrm{i} \frac{k}{b} \cdot \xi'}, \tag{4.2.5}$$

где $\cdot$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^{n-1}$,

$$X_k^\pm(\xi_n) = \int\limits_{\Pi_{R_6}^\pm \setminus \Pi_{R_6-1}^\pm} J_k^\pm(\xi', \xi_n \mp (R_6 - 1), t) g(t) dt, \quad k \neq 0,$$

$$X_0^{+}(\xi_n) = \int\limits_{\Pi^{\pm}_{R_6}\setminus\Pi^{\pm}_{R_6-1}} J_0^{\pm}(\xi_n \mp (R_6-1), t_n) g(t) dt$$

и обозначено:

$$\begin{aligned}
&J_k^{\pm}(\xi', \xi_n, t) := \frac{1}{2Z_k}\Big(e^{\mp Z_k(\xi_n+t_n)} - e^{-Z_k|\xi_n-t_n|}\Big)e^{2\pi \mathrm{i}\frac{k}{b}\cdot t'},\\
&J_0^{+}(\xi_n, t_n) := -\min\{\xi_n, t_n\}, \qquad J_0^{-}(\xi_n, t_n) := \max\{\xi_n, t_n\},\\
&k = (k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}), \qquad \frac{k}{b} = \left(\frac{k_1}{b_1}, \frac{k_2}{b_2}, \ldots, \frac{k_{n-1}}{b_{n-1}}\right),\\
&t = (t', t_n), \qquad t' = (t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}), \qquad Z_k = 2\pi\left|\frac{k}{b}\right|.
\end{aligned}$$

В силу финитности функции g, при $\pm\xi_n > R_6$ функции $X_0^{\pm}$ тождественно совпадают с константами:

$$X_0^{\pm}(\xi_n) \equiv A_{\pm}, \qquad \pm\xi_n > R_6, \qquad A_{\pm} = \int\limits_{\Pi^{\pm}_{R_6}\setminus\Pi^{\pm}_{R_6-1}} |t_n| g(t)\, dt. \tag{4.2.6}$$

Определим функцию $V_1(\xi) := V_1^{\pm}(\xi)$ в $\Pi_{R_6-1,\pm}$.

Лемма 4.2.1. *Ряды (4.2.5) сходятся в норме $W_2^2(\Pi_R^{\pm} \setminus \Pi_{R_6-1,\pm})$ для произвольного $R \geqslant R_6 - 1$, а за вычётом слагаемых $X_0^{\pm}$ сходимость верна и в норме $W_2^2(\Pi_{R_6-1,\pm})$. Оператор $\mathcal{B}_1$, отображающий g в V_1, линеен и ограничен как оператор из $L_2(\Pi_{R_6})$ в $W_2^2(\Pi_R^{+} \setminus \Pi_{R_6-1}^{+}) \oplus W_2^2(\Pi_R^{-} \setminus \Pi_{R_6-1}^{-})$. Верны неравенства*

$$\begin{aligned}
&\|V_1^{\pm}\|_{W_2^2(\Pi_R^{\pm}\setminus\Pi_{R_6-1}^{\pm})} \leqslant C(R)\|g\|_{L_2(\Pi_{R_6}^{\pm}\setminus\Pi_{R_6-1}^{\pm})},\\
&\|V_1^{\pm} - A_{\pm}\|_{W_2^2(\Pi_{R_6-1,\pm})} \leqslant C\|g\|_{L_2(\Pi_{R_6}^{\pm}\setminus\Pi_{R_6-1}^{\pm})},
\end{aligned} \tag{4.2.7}$$

где константы C и $C(R)$ не зависят от g, а константы $A_{\pm}$ определяются формулами (4.2.6).

Доказательство леммы проводится аналогично доказательству леммы 3.1 в [8] с дополнительным использованием того факта, что при $|\xi_n| \geqslant$

$R > R_6$ функции $X_k^\pm$ имеют вид

$$
\begin{aligned}
&X_k^\pm(\xi) = A_k^\pm e^{-Z_k(\xi_n - R_6)}, \qquad \pm\xi_n \geqslant R,\\
&A_k^\pm := -\frac{1}{Z_k} \int\limits_{\Pi_{R_6}^\pm \setminus \Pi_{R_6-1}^\pm} g(t) e^{2\pi \mathrm{i} \frac{k}{b}\cdot t'} \sinh Z_k t_n dt,
\end{aligned}
\tag{4.2.8}
$$

и для констант$A_k^\pm$ верна очевидная оценка

$$
|A_k^\pm| \leqslant \frac{C e^{Z_k R_6}}{|Z_k|} \|g\|_{L_2(\Pi_{R_6}^\pm \setminus \Pi_{R_6-1}^\pm)},
\tag{4.2.9}
$$

где константа C не зависит от k и g.

Рассмотрим ещё одну краевую задачу

$$
\begin{aligned}
-\Delta_\xi V_2 = g \quad \text{в} \quad \Pi^\eta, \qquad & V_2 = V_1^\pm \quad \text{на} \quad \square \times \{\pm R_6\},\\
V_2 = 0 \quad \text{на} \quad \partial\omega_{\mathrm{D}}^\eta, \qquad & \frac{\partial V_2}{\partial \nu_\xi} = 0 \quad \text{на} \quad \partial\omega_{\mathrm{R}_6}^\eta,
\end{aligned}
\tag{4.2.10}
$$

с периодическими граничными условиями (4.2.2).

Задача (4.2.10) имеет единственное решение $V_2 \in W_2^1(\Pi^\eta)$. Согласно теоремам о повышении гладкости решений эллиптических краевых задач, функция V_2 есть элемент пространства $W_2^2(\Pi^\eta)$. Поэтому функцию V_2 можно представить как $V_2 = \mathcal{B}_2(\eta) g$, где $\mathcal{B}_2(\eta)$ — линейный ограниченный оператор, действующий из $L_2(\Pi^\eta)$ в $W_2^2(\Pi^\eta)$. Для функции V_2 выполнены оценки

$$
\|V_2\|_{W_2^2(\Pi^\eta)} \leqslant C \|g\|_{L_2(\Pi^\eta)},
$$

где константа C не зависит от V_2 и g, но зависит от R и η.

Обозначим через $\chi_3 = \chi_3(\xi_n)$ чётную бесконечно дифференцируемую срезающую функцию, равную единице при $|\xi_n| < R_6 - \frac{2}{3}$ и нулю при $|\xi_n| > R_6 - \frac{1}{3}$. Определим функцию v по правилу

$$
v(\xi,\eta) = (\mathcal{B}_3(\eta) g)(\xi,\eta) = \chi_3(\xi_n) V_2(\xi,\eta) + (1 - \chi_3(\xi_n)) V_1(\xi),
\tag{4.2.11}
$$

где $\mathcal{B}_3(\eta)$ — линейный ограниченный оператор, действующий из $L_2(\Pi^\eta)$ в $W_2^2(\Pi_R \setminus \omega^\eta)$ для всех $R > 0$. В силу определения функций V_1 и V_2

эта функция удовлетворяет граничным условиям задачи (4.2.1), (4.2.2) и условию (4.2.3). Следовательно, функция v является решением задачи (4.2.1), (4.2.2), если для нее выполнено уравнение из (4.2.1). Подставляя равенство (4.2.11) в это уравнение и учитывая уравнения на функции V_1 и V_2 из задач (4.2.4) и (4.2.10), получим

$$g + \mathcal{B}_4(\eta)g = F, \tag{4.2.12}$$

где

$$\mathcal{B}_4(\eta)g = 2\frac{\partial(V_2 - V_1)}{\partial\xi_n}\chi_3' + (V_2 - V_1)\chi_3''. \tag{4.2.13}$$

Лемма 4.2.2. *Уравнение (4.2.12) эквивалентно задаче (4.2.1), (4.2.2): для каждого решения g уравнения (4.2.12) существует решение задачи (4.2.1), (4.2.2), определённое равенством (4.2.11), и для каждого решения v задачи (4.2.1), (4.2.2) существует единственное решение g уравнения (4.2.12), связанное с v равенством (4.2.11).*

Доказательство. Воспользуемся идеями доказательства схожего утверждения — предложения 3.2 из работы [47]. А именно, как было показано выше, каждое решение уравнения (4.2.12) порождает решение задачи (4.2.1), (4.2.2) по формуле (4.2.11). Поэтому достаточно показать, как по заданному решению задачи (4.2.1), (4.2.2) строится соответствующее решение уравнения (4.2.12).

Пусть u — решение задачи (4.2.1), (4.2.2). Вначале отыщем разность функций $V_2 - V_1^{\pm}$, соответствующих этой функции. Как легко видеть из задач (4.2.4), (4.2.10) и равенства (4.2.11), функции $\tilde{u}^{\pm} := V_2 - V_1^{\pm}$ являются решениями задач

$$\begin{aligned}
&-\Delta_\xi \tilde{u}^{\pm} = 0 \quad \text{в} \quad \Pi_{R_6} \setminus \Pi_{R_6-1},\\
&\quad \tilde{u} = 0 \quad \text{на} \quad \square \times \{\pm R_6\}, \qquad \tilde{u} = u \quad \text{на} \quad \square \times \{\pm(R_6 - 1)\},
\end{aligned}$$

с периодическими граничными условиями (4.2.2). Такие задачи очевидно однозначно разрешимы. Положим теперь

$$V_1^{\pm} := u - \chi_3\tilde{u}^{\pm} \quad \text{в} \quad \Pi_{R_6}^{\pm} \setminus \Pi_{R_6-1}^{\pm}, \qquad V_2 := u + (1 - \chi_3)\tilde{u}^{\pm} \quad \text{в} \quad \Pi_{R_6}^{\pm},$$

$$g := F \quad \text{в} \quad \Pi_{R_6-1} \setminus \omega^\eta, \qquad g := F + \Delta\chi_3\tilde{u}^\pm \quad \text{в} \quad \Pi^\pm_{R_6} \setminus \Pi^\pm_{R_6-1}.$$

Теперь прямыми вычислениями элементарно проверяется, что определённые функции g, $V_1^\pm$, V_2 соответствует функции u в указанном выше смысле, а функция g является решением уравнения (4.2.12). Лемма доказана. □

Лемма 4.2.3. $\mathcal{B}_4(\eta)$ *является линейным компактным оператором в* $L_2(\Pi^\eta)$.

Доказательство этой леммы проводится аналогично доказательству предложения 3.1 из [47].

Поскольку оператор $\mathcal{B}_4(\eta)$ является компактным, то к уравнению (4.2.12) можно применить альтернативы Фредгольма. Это поможет исследовать разрешимость задачи (4.2.1), (4.2.2) в следующих разделах.

4.2.3 Поведение решения при конечных η

Для любого $\eta \in (0, 1]$ задача (4.2.1), (4.2.2) с однородной правой частью имеет единственное решение, ограниченное на бесконечности, и благодаря наличию однородного краевого условия Дирихле на $\partial\omega^\eta_{\mathrm{D}}$, это решение — тривиальное. В этом легко убедиться, умножив соответствующее уравнение на решение и проинтегрировав затем однократно по частям по всей области с учётом поведения на бесконечности. В силу леммы 4.2.2 этот факт означает, что уравнение (4.2.12) с однородной правой частью имеет только тривиальное решение. Поэтому уравнение (4.2.12) с произвольной правой частью однозначно разрешимо, и тем самым корректно определён обратный оператор $(I + \mathcal{B}_4(\eta))^{-1}$ в $L_2(\Pi^\eta)$. Наша цель — показать, что он в определённом смысле непрерывен по η.

Пусть $g = (I + \mathcal{B}_4(\eta))^{-1}F$ — решение уравнения (4.2.12). Результат действия оператора $\mathcal{B}_4(\eta)$ на произвольную функцию g есть функция с носителем в $\Pi_{R_6} \setminus \Pi_{R_6-1}$. Поэтому сразу заключаем, что

$$g = F \quad \text{в} \quad \Pi_{R_6-1} \setminus \omega^\eta. \tag{4.2.14}$$

В смысле прямого разложения

$$L_2(\Pi^\eta) = L_2(\Pi_{R_6-1} \setminus \omega^\eta) \oplus L_2(\Pi_{R_6} \setminus \Pi_{R_6-1})$$

справедливо равенство $\mathcal{B}_4 = \mathcal{B}_4(I \oplus 0) + \mathcal{B}_4(0 \oplus I)$, и так как результат действия оператора $\mathcal{B}_4$ — финитная функция, то оператор $\mathcal{B}_4(\eta)(0 \oplus I)$ можно эквивалентно рассматривать как оператор в $L_2(\Pi_{R_6} \setminus \Pi_{R_6-1})$. Поэтому в свете равенства (4.2.14) уравнение (4.2.12) сводится к эквивалентному уравнению в $L_2(\Pi_{R_6} \setminus \Pi_{R_6-1})$

$$(I + \mathcal{B}_4(0 \oplus I))\tilde{g} = \tilde{F} - \mathcal{B}_4(\eta)(I \oplus 0)F,$$

где $\tilde{g}$, $\tilde{F}$ — сужение g и F на $\Pi_{R_6} \setminus \Pi_{R_6-1}$.

Пусть $0 < \eta_0 \leqslant 1$ — некоторое фиксированное число, $\eta \in [\eta_0, 1]$, а $G \in L_2(\Pi^\eta)$ — некоторая функция. Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{gathered} -\Delta_\xi U = G \quad \text{в} \quad \Pi^\eta, \qquad \frac{\partial U}{\partial \nu_\xi} = 0 \quad \text{на} \quad \partial\omega^\eta_{\mathrm{R}}, \\ U = 0 \quad \text{на} \quad \partial\omega^\eta_{\mathrm{D}} \cup \big(\square \times \{-R_6, R_6\}\big), \end{gathered} \tag{4.2.15}$$

с периодическими граничными условиями (4.2.2).

Лемма 4.2.4. *При $\eta \in [\eta_0, 1]$ для решения задачи (4.2.15) верна оценка*

$$\|U\|_{W_2^2(\Pi^\eta)} \leqslant C(\eta_0)\|G\|_{L_2(\Pi^\eta)}, \tag{4.2.16}$$

где константа $C(\eta_0)$ не зависит от $\eta \in [\eta_0, 1)$ и G.

Доказательство. Благодаря наличию краевого условия Дирихле при $\xi_2 = \pm R_6$ задача (4.2.15) однозначно разрешима, и верна оценка

$$\|U\|_{W_2^1(\Pi^\eta} \leqslant C(\eta_0)\|G\|_{L_2(\Pi^\eta}. \tag{4.2.17}$$

Эта оценка выводится на основе соответствующих интегральных тождеств с пробной функцией U и неравенства

$$\|U\|_{L_2(\Pi^\eta} \leqslant C(\eta_0)\|\nabla U\|_{W_2^1(\Pi^\eta}. \tag{4.2.18}$$

Оно доказывается аналогично лемме 2.1.3, но с $\varepsilon = 1$. Используя теперь неравенство (4.2.17), для задач (4.2.15) несложно повторить доказательство леммы 8.1 из [26, Гл. III, §8] и убедиться в выполнении равномерной оценки (4.2.16). Лемма доказана. $\square$

Лемма 4.2.5. *Пусть $0 < \eta_0 \leqslant 1$ — некоторое фиксированное число, $\eta_1,\ \eta_2 \in [\eta_0, 1]$, а $G_i \in L_2(\Pi_{R_2} \setminus (\omega^{\eta_i}))$, $i = 1, 2$, — произвольные функции, причём $G_1 = G_2$ на $\Pi_{R_2} \setminus (\omega^{\eta_1} \cup \omega^{\eta_2})$. Тогда для решений U_i, $i = 1, 2$, задачи (4.2.15) с $\eta = \eta_i$, $G = G_i$ при достаточно малых $|\eta_1 - \eta_2|$ выполнена оценка*

$$\|U_1 - U_2\|_{W_2^2(\Pi_{R_6} \setminus \Pi_{R_6 - 1})} \leqslant C(\eta_0)|\eta_1 - \eta_2|^{\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^{2} \|G_i\|_{L_2(\Pi_{R_2} \setminus (\omega^{\eta_i}))}, \qquad (4.2.19)$$

где константа $C(\eta_0)$ не зависит от G_i и η_i, $i = 1, 2$.

Доказательство. Всюду в доказательстве через C обозначаем несущественные константы, не зависящие от U_i, F_i, ξ и $\eta \in [\eta_0, 1)$, но зависящие от η_0.

Рассмотрим задачу (4.2.15) для функции U_1. Пусть $\gamma := \partial\omega_{\mathrm{D}}^{\eta_2} \cap (\Pi_{R_6} \setminus \omega^{\eta_1})$ — часть поверхности $\partial\omega_{\mathrm{D}}^{\eta_2}$, лежащая в области $\Pi_{R_6} \setminus \omega^{\eta_1}$. Тогда для $\xi \in \gamma$ мы можем проинтегрировать по нормали к $\partial\omega_{\mathrm{D}}^{\eta_1}$

$$U_1(\xi) = -\int\limits_{\tilde{\xi}}^{\xi} \frac{\partial U_1}{\partial \rho}\, d\rho,$$

где ρ — расстояние вдоль нормали к $\partial\omega_{\mathrm{D}}^{\eta_1}$, а точки $\tilde{\xi} \in \partial\omega_{\mathrm{D}}^{\eta_1}$ соединяется такой нормалью с точкой ξ. Из полученного представления следует очевидная оценка

$$|U_1(\xi)|^2 \leqslant C|\eta_2 - \eta_1| \int\limits_{\tilde{\xi}}^{\xi} |\nabla U_1|\, d\rho.$$

Проинтегрировав по γ, получаем

$$\|U_1\|^2_{L_2(\partial\omega_{\mathrm{D}}^{\eta_2}\cap(\Pi_{R_6}\setminus\omega^{\eta_1}))} \leqslant C|\eta_2-\eta_1|\|\nabla U_1\|_{L_2(\Pi_{R_6}\setminus\omega^{\eta_1})}. \tag{4.2.20}$$

Аналогично выводится оценка

$$\left\|\frac{\partial U_1}{\partial \nu_\xi}\right\|^2_{L_2(\partial\omega_{\mathrm{D}}^{\eta_2}\cap(\Pi_{R_6}\setminus\omega^{\eta_1}))} \leqslant C|\eta_2-\eta_1|\|\nabla U_1\|_{W_2^1(\Pi_{R_6}\setminus\omega^{\eta_1})}. \tag{4.2.21}$$

При этом следует учесть, что нормаль ν_ξ на $\partial\omega_{\mathrm{D}}^{\eta_2}$ отличается от нормали на $\partial\omega_{\mathrm{D}}^{\eta_1}$ на величину порядка $|\eta_2-\eta_1|$, и в силу леммы 4.2.4 верна оценка

$$\|\nabla U_1\|_{L_2(\partial\omega_{\mathrm{D}}^{\eta_2}\cap(\Pi_{R_6}\setminus\omega^{\eta_1}))} \leqslant C\|U_1\|_{W_2^2(\Pi_{R_6}\setminus\omega^{\eta_1})}.$$

Аналогичные оценки верны и для функции U_2 на частях многообразия ω^{η_1}, расположенных внутри области $\Pi_{R_6}\setminus\omega^{\eta_2}$.

Обозначим $\hat{U} := U_1 - U_2$, $\hat{\omega} := \omega^{\eta_1}\cup\omega^{\eta_2}$. Выпишем теперь задачу для этой функции в области $\Pi_{R_2}\setminus\hat{\omega}$, вытекающую из (4.2.15), и запишем для неё интегральное тождество, взяв $\hat{U}$ в качестве пробной функции

$$\|\nabla\hat{U}\|^2_{L_2(\Pi_{R_2}\setminus\hat{\omega})} = \int\limits_{\partial\hat{\omega}} \overline{\hat{U}}\frac{\partial\hat{U}}{\partial\nu_\xi}\,ds. \tag{4.2.22}$$

Каждая точка границы $\partial\hat{\omega}$ является точкой одной из границ $\partial\omega_{\mathrm{D}}^{\eta_i}$ или $\partial\omega_{\mathrm{R}}^{\eta_i}$. Если, например, точка попадает на $\partial\omega_{\mathrm{D}}^{\eta_1}$, то $\overline{\hat{U}}\frac{\partial\hat{U}}{\partial\nu_\xi} = -\overline{U_2}\frac{\partial\hat{U}}{\partial\nu_\xi}$. Если точка попадает на $\partial\omega_{\mathrm{R}}^{\eta_1}$, то $\overline{\hat{U}}\frac{\partial\hat{U}}{\partial\nu_\xi} = -\overline{\hat{U}}\frac{\partial U_2}{\partial\nu_\xi}$. Для точек из $\partial\omega^{\eta_2}$ верны аналогичные равенства. Используя эти равенства, оценки (4.2.20), (4.2.21) и аналогичные оценки для U_2, а также лемму 4.2.4, на основе соотношения (4.2.22) несложно проверить, что

$$\|\nabla\hat{U}\|^2_{L_2(\Pi_{R_2}\setminus\hat{\omega})} \leqslant C|\eta_2-\eta_1|\sum_{j=1}^{2}\|G_i\|_{L_2(\Pi_{R_2}\setminus(\omega^{\eta_i}))}.$$

Теперь остается только применить оценку (4.2.18) к функции $\hat{U}$ и это даёт требуемое неравенство (4.2.19). Лемма доказана. $\square$

Замена решения задачи (4.2.10) на $V_2-(1-\chi_3)V_1$ сводит эту задачу к (4.2.15) с $G=g-\Delta_\xi(1-\chi_3)V_1$. В силу леммы 4.2.5 и определения (4.2.13) оператора $\mathcal{B}_4(\eta)$ сразу заключаем, что оператор $\mathcal{B}_4(\eta)(0\oplus I)$ непрерывен по $\eta\in(0,1]$ и оператор $\mathcal{B}_4(\eta)(I\oplus 0)$ ограничен равномерно по $\eta\in[\eta_0,1]$ для каждого фиксированного $\eta_0>0$. С учётом равенства (4.2.14) теперь окончательно получаем, что при $\eta\in[\eta_0,1]$ верна оценка

$$\|(I+\mathcal{B}_4(\eta))^{-1}\|\leqslant C,$$

где константа C не от η, но зависит от η_0, а норма понимается как норма оператора $L_2(\Pi^\eta)$. Восстанавливая теперь решение задачи (4.2.1), (4.2.2) по формуле (4.2.11) и учитывая леммы 4.2.1, 4.2.4 и оценки (4.2.9), приходим к следующему утверждению.

Лемма 4.2.6. *Задача (4.2.1), (4.2.2) с финитной правой частью F, чей носитель расположен внутри $\overline{\Pi_{R_6}}$, и с $\phi=0$ имеет единственное обобщённое решение с асимптотикой (4.2.3) для всех $\eta\in(0,1]$. При $|\xi_n|>R_6$ данное решение представляется в виде*

$$v(\xi,\eta)=A_\pm(\eta)+\sum_{k\in\mathbb{Z}^{n-1}}A_k^\pm(\eta)e^{-Z_k|\xi_n|}e^{2\pi\mathrm{i}\frac{k}{b}\cdot\xi'},\quad \pm\xi_n>R_6,\tag{4.2.23}$$

где константы $A_k^\pm$ выражаются через соответствующее решение уравнения (4.2.12) формулами в (4.2.8). Для каждого фиксированного $\eta\in(0,1]$ при $\eta\in[\eta_0,1]$ верны оценки

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}^{n-1}}e^{-Z_k}|A_k^\pm(\eta)|\leqslant\frac{C}{|Z_k|}\|F\|_{L_2(\Pi^\eta},\tag{4.2.24}$$

$$\begin{aligned}&\|v\|_{W_2^2(\Pi^\eta}+\|v-A_0^+\|_{W_2^2(\Pi_{R_6,+})}\\&\qquad+\|v-A_0^-\|_{W_2^2(\Pi_{R_6,-})}\leqslant C\|F\|_{L_2(\Pi^\eta)},\end{aligned}\tag{4.2.25}$$

где константа C не зависит от F и η, но зависит от η_0.

4.2.4 Поведение решения при малых η

Исследуем поведение решения уравнения (4.2.12) и соответствующего решения задачи (4.2.1), (4.2.2) при малых η. Начнём с исследования поведения оператора $\mathcal{B}_4(\eta)$.

Рассмотрим задачу

$$-\Delta_\xi v^0 = F \quad \text{в} \quad \Pi \tag{4.2.26}$$

с периодическими граничными условиями (4.2.2). Пусть задана функция $g \in L_2(\Pi_{R_6})$. Построим по ней решение V_1 задачи (4.2.4). Затем с помощью функции V_1 построим решение задачи

$$-\Delta_\xi V_2^0 = g \quad \text{в} \quad \Pi_{R_6}, \qquad V_2^0 = V_1^\pm \quad \text{на} \quad \square \times \{\pm R_6\},$$

с периодическими граничными условиями (4.2.2). Будем искать решение задачи (4.2.26) в виде

$$v^0(\xi,\eta) = (\mathcal{B}_3^0(\eta)g)(\xi,\eta) := \chi_3(\xi_n)V_2^0 + (1-\chi_3(\xi_n))V_1.$$

Обозначим

$$\mathcal{B}_5 g = 2\frac{\partial(V_2^0 - V_1)}{\partial \xi_n}\chi_3' + (V_2^0 - V_1)\chi_3''. \tag{4.2.27}$$

Уравнение

$$g + \mathcal{B}_5 g = F$$

эквивалентно задаче (4.2.26) в том же смысле, в каком это было доказано в лемме 4.2.2 для уравнения (4.2.12) и задачи (4.2.1), (4.2.2).

Сужение функции из $L_2(\Pi_{R_6})$ на Π^η очевидно является элементом пространства $L_2(\Pi^\eta)$, поэтому с этой точки зрения оператор $\mathcal{B}_4(\eta)$ определён также и на пространстве $L_2(\Pi_{R_6})$. Результат действия — функция с носителем в $\Pi_{R_6} \setminus \Pi_{R_6-1}$, которую можно рассматривать одновременно как элемент пространств $L_2(\Pi_{R_6})$ и $L_2(\Pi^\eta)$. В результате оператор $\mathcal{B}_4(\eta)$ можно рассматривать как оператор в пространстве $L_2(\Pi_{R_6})$. Обозначим теперь $\mathcal{B}_6(\eta) := \mathcal{B}_4(\eta) - \mathcal{B}_5\mathcal{B}_7$, где $\mathcal{B}_7(\eta)$ — оператор продолжения функций из $L_2(\Pi^\eta)$ нулём внутрь ω^η. А именно, оператор $\mathcal{B}_7 : L_2(\Pi^\eta) \to L_2(\Pi_{R_6})$ каждой функции $g \in L_2(\Pi^\eta)$ сопоставляет функцию

$$\mathcal{B}_7(\eta)g := \begin{cases} g & \text{в} \quad \Pi^\eta, \\ 0 & \text{в} \quad \omega^\eta. \end{cases}$$

Наша дальнейшая цель — оценить норму введённого оператора $\mathcal{B}_6(\eta)$ как оператора в $L_2(\Pi_{R_6})$.

Из (4.2.13), (4.2.27) вытекает, что

$$\mathcal{B}_6(\eta)g = 2\chi_3'\left(\frac{\partial V_2}{\partial \xi_n} - \frac{\partial V_2^0}{\partial \xi_n}\right) + \chi_3''(V_2 - V_2^0),$$

где функция V_2^0 строится по функции $\mathcal{B}_7(\eta)g$. Верны неравенства

$$\begin{aligned}
&\|V_2^0\|_{W_2^1(\Pi_{R_6})} \leqslant C\|g\|_{L_2(\Pi_{R_6})},\\
&\|V_2^0\|_{W_2^2(\Pi_{R_6}\setminus\Pi_{R_6-1})} \leqslant C\|g\|_{L_2(\Pi_{R_6})},\\
&\|\mathcal{B}_6(\eta)g\|_{L_2(\Pi_{R_6})} \leqslant C\|V_2 - V_2^0\|_{W_2^1(\Pi_{R_6}\setminus\Pi_{R_6-1})},
\end{aligned}\tag{4.2.28}$$

где константы C не зависят от η и g, но зависят от R.

Обозначим $V_3 = V_2 - \chi_3 V_1$, $V_3^0 = V_2^0 - \chi_3 V_1$. Функция V_3 является решением задачи

$$-\Delta_\xi V_3 = g + \Delta_\xi(\chi_3 V_1) \quad \text{в} \quad \Pi^\eta,$$
$$V_3 = 0 \quad \text{на} \quad \partial\omega_{\mathrm{D}}^\eta \cup (\square \times \{-R_6, R_6\}), \qquad \frac{\partial V_3}{\partial \nu_\xi} = 0 \quad \text{на} \quad \partial\omega_{\mathrm{R}}^\eta,$$

с периодическими граничными условиями (4.2.2). Функция V_3^0 — решение задачи

$$-\Delta_\xi V_3^0 = g + \Delta_\xi(\chi_3 V_1) \quad \text{в} \quad \Pi_{R_6}, \qquad V_3^0 = 0 \quad \text{на} \quad \square \times \{\pm R_6\},$$

с периодическими граничными условиями (4.2.2). В силу теорем 1.1, 1.2 из [12] и леммы 4.2.1 выполнены неравенства

$$\begin{aligned}
&\|V_3 - V_3^0\|_{W_2^1(\Pi^\eta)} \leqslant C\eta^{\frac{1}{2}}\|g\|_{L_2(\Pi_{R_6})}, \qquad n = 3,\\
&\|V_3 - V_3^0\|_{W_2^1(\Pi^\eta)} \leqslant C\eta\|g\|_{L_2(\Pi_{R_6})}, \qquad n \geqslant 4,
\end{aligned}\tag{4.2.29}$$

где константа C не зависит от η и g. Из последних неравенств, (4.2.28) и очевидной оценки

$$\|V_2 - V_2^0\|_{W_2^1(\Pi_{R_6}\setminus\Pi_{R_6-1})} \leqslant \|V_3 - V_3^0\|_{W_2^1(\Pi_{R_6})}$$

для достаточно малых η следуют неравенства

$$\|\mathcal{B}_6(\eta)\| \leqslant C\eta^{\frac{1}{2}}, \quad n=3, \qquad \|\mathcal{B}_6(\eta)\| \leqslant C\eta, \qquad n \geqslant 4, \tag{4.2.30}$$

где константа C не зависит от η, а норма понимается как норма оператора в $L_2(\Pi_{R_6})$.

Рассмотрим в $L_2(\Pi_{R_6})$ уравнение

$$(I+\mathcal{B}_5)g = F, \tag{4.2.31}$$

эквивалентное задаче (4.2.26), (4.2.2). Согласно теореме Фредгольма разрешимость этого уравнения эквивалентна ортогональности функции F всем линейно независимым решениям сопряжённого однородного уравнения

$$(I+\mathcal{B}_5^*)h_0 = 0. \tag{4.2.32}$$

Пусть $h_0 \equiv 1$. Тогда для всех $g \in L_2(\Pi_{R_6})$ верно равенство

$$((I+\mathcal{B}_5)g, h_0)_{L_2(\Pi_{R_6})} = \int\limits_{\Pi_{R_6}} \Delta_\xi \mathcal{B}_3^0 g \, d\xi = 0. \tag{4.2.33}$$

Отсюда следует, что $h_0 \equiv 1$ является решением уравнения (4.2.32). В силу теоремы Фредгольма однородное уравнение

$$(I+\mathcal{B}_5)g_0 = 0 \tag{4.2.34}$$

и сопряжённое с ним однородное уравнение (4.2.32) имеют либо только тривиальные решения, либо одинаковое конечное число линейно независимых решений. Уравнение (4.2.34) эквивалентно задаче (4.2.26), (4.2.2) с однородной правой частью. Такая задача имеет единственное решение — константу. Поэтому уравнения (4.2.32) и (4.2.34) имеют ровно по одному нетривиальному решению.

Пусть g_0 — нетривиальное решение уравнения (4.2.34). Тогда соответствующая ему функция $\mathcal{B}_3^0 g$ есть решение (4.2.26), (4.2.2) с $F=0$. Как уже обсуждалось, данное решение — константа, которую выберем равной единице. Из явной схемы, приведённой в доказательстве леммы 4.2.2 и применённой к уравнению (4.2.34), следует, что соответствующая функция g_0 имеет вид

$$g_0(\xi) = \Delta_\xi\big(\chi_3(\xi_n)(|\xi_n| - R_6)\big). \tag{4.2.35}$$

Отметим, что функция g_0 тождественно равна нулю в Π_{R_6-1}.

Введем пространства

$$\mathfrak{V}_* = \{g \in L_2(\Pi_{R_6}) :\ (g, h_0)_{L_2(\Pi_{R_6})} = 0\},$$
$$\mathfrak{V} = \{g \in L_2(\Pi_{R_6}) :\ (g, g_0)_{L_2(\Pi_{R_6})} = 0\}.$$

Так как уравнения (4.2.32) и (4.2.34) имеют ровно по одному нетривиальному решению, то уравнение (4.2.31) однозначно разрешимо в пространстве $\mathfrak{V}$ при функциях F из пространства $\mathfrak{V}_*$. В силу теоремы Банаха об обратном операторе существует ограниченный обратный оператор $(I + \mathcal{B}_5)^{-1}$, отображающий $\mathfrak{V}_*$ в $\mathfrak{V}$.

Решение уравнения (4.2.12) будем искать в виде

$$g = \beta(\eta)g_0 + g^\perp, \tag{4.2.36}$$

где $\beta(\eta)$ — некоторая константа, $g^\perp$ — некоторая функция функция, такая что $\mathcal{B}_7 g^\perp \in \mathfrak{V}$. Оператор $\mathcal{B}_4(\eta)$ удовлетворяет равенству

$$\mathcal{B}_7(\eta)\mathcal{B}_4(\eta)\mathcal{B}_7(\eta) = \mathcal{B}_4(\eta),$$

где в левой части оператор $\mathcal{B}_4(\eta)$ рассматривается как оператор в $L_2(\Pi^\eta)$, а в правой — как оператор в $L_2(\Pi_{R_6})$. Учитывая данное равенство, уравнение (4.2.12) очевидно переписывается к эквивалентному виду

$$(I + \mathcal{B}_5)\mathcal{B}_7(\eta)g + \mathcal{B}_6(\eta)\mathcal{B}_7(\eta)g = \mathcal{B}_7(\eta)F.$$

Подставим теперь сюда представление (4.2.36) и воспользуемся уравнением (4.2.34) и очевидными равенствами $\mathcal{B}_7 g_0 = g_0$, $\mathcal{B}_6\mathcal{B}_7 = \mathcal{B}_6$. В результате приходим к уравнению

$$(I + \mathcal{B}_5 + \mathcal{B}_6(\eta))\mathcal{B}_7(\eta)g^\perp + \beta(\eta)\mathcal{B}_6(\eta)g_0 = \mathcal{B}_7(\eta)F. \tag{4.2.37}$$

Умножим это уравнение на h_0 скалярно в $L_2(\Pi_{R_6})$ и воспользуемся равенством (4.2.33) с заменой g на $\mathcal{B}_7(\eta)g$. В результате получаем:

$$\beta(\eta)(\mathcal{B}_6(\eta)g_0, h_0)_{L_2(\Pi_{R_6})} + (\mathcal{B}_6(\eta)\mathcal{B}_7 g^\perp, h_0)_{L_2(\Pi_{R_6})} = (\mathcal{B}_7(\eta)F, h_0)_{L_2(\Pi_{R_6})}. \tag{4.2.38}$$

Верна следующая лемма.

Лемма 4.2.7. *При $\eta \to 0$ выполнены равенство*

$$(\mathcal{B}_6(\eta)g_0, h_0)_{L_2(\Pi_{R_6})} = C_1\eta^{n-2} + O(\eta^{n-1}), \quad C_1 \neq 0,$$

и неравенство

$$\frac{\|\mathcal{B}_6(\eta)g_0\|_{L_2(\Pi_{R_6})}}{|(\mathcal{B}_6(\eta)g_0, h_0)_{L_2(\Pi_{R_6})}|} \leqslant C_2, \tag{4.2.39}$$

где константы C_1 и C_2 не зависят от η.

Доказательство леммы проводится аналогично доказательству леммы 5.6 из [43].

Данная лемма позволяет корректно выразить $\beta(\eta)$ из (4.2.38):

$$\beta(\eta) = \frac{-(\mathcal{B}_6(\eta)\mathcal{B}_7(\eta)g^\perp, h_0)_{L_2(\Pi_{R_6}} + (\mathcal{B}_7(\eta)F, h_0)_{L_2(\Pi_{R_6})}}{(\mathcal{B}_6(\eta)g_0, h_0)_{L_2(\Pi_{R_6})}}. \tag{4.2.40}$$

Подставим полученную формулу в уравнение (4.2.37):

$$(I + \mathcal{B}_5 + \mathcal{B}_8(\eta))\mathcal{B}_7 g^\perp = F^\perp,$$

где обозначено

$$\mathcal{B}_8(\eta) := \mathcal{B}_6(\eta) - \frac{(\mathcal{B}_6(\eta)\,\cdot, h_0)_{L_2(\Pi_{R_6})}}{(\mathcal{B}_6(\eta)g_0, h_0)_{L_2(\Pi_{R_6})}}\mathcal{B}_6(\eta)g_0,$$

$$F^\perp := \mathcal{B}_7(\eta)F - \frac{(\mathcal{B}_7(\eta)F, h_0)_{L_2(\Pi_{R_6})}}{(\mathcal{B}_6(\eta)g_0, h_0)_{L_2(\Pi_{R_6})}}\mathcal{B}_6(\eta)g_0.$$

Нетрудно убедиться, что $F^\perp \in \mathfrak{V}_*$ и оператор $\mathcal{B}_8(\eta)$ действует из пространства $\mathfrak{V}$ в пространство $\mathfrak{V}_*$. Оценим норму оператора $\mathcal{B}_8(\eta)$, действующего в пространстве $L_2(\Pi_{R_6})$. В силу неравенства (4.2.39) для произвольной функции $\tilde{g} \in L_2(\Pi_{R_6})$ выполнено

$$\|\mathcal{B}_8(\eta)\tilde{g}\|_{L_2(\Pi_{R_6})} \leqslant \|\mathcal{B}_6(\eta)\tilde{g}\|_{L_2(\Pi_{R_6})} - \frac{|(\mathcal{B}_6(\eta)\tilde{g}, h_0)|_{L_2(\Pi_{R_6})}}{|(\mathcal{B}_6(\eta)g_0, h_0)|_{L_2(\Pi_{R_6})}}\|\mathcal{B}_6(\eta)g_0\|_{L_2(\Pi_{R_6})}$$

$$\leqslant C\|\mathcal{B}_6(\eta)\tilde{g}\|_{L_2(\Pi_{R_6})},$$

где C — некоторая константа, не зависящая от η и $\tilde{g}$. Из последней оценки и (4.2.30)) следует, что норма оператора $\mathcal{B}_8(\eta)$ мала. Поэтому существует обратный ограниченный оператор $(I+\mathcal{B}_5+\mathcal{B}_8(\eta))^{-1}$, действующий из пространства пространства $\mathfrak{V}_*$ в пространство $\mathfrak{V}$. Тогда согласно лемме 4.2.7 верно неравенство

$$\begin{aligned}
\|g^{\perp}\| &= \|\big(I+\mathcal{B}_5+\mathcal{B}_8(\eta)\big)^{-1}F^{\perp}\|_{L_2(\Pi_{R_6})}\\
&\leqslant C\|F^{\perp}\|_{L_2(\Pi_{R_6})}\\
&\leqslant C\left(\|F\|_{L_2(\Pi_{R_6})}+\frac{|(F,h_0)_{L_2(\Pi_{R_6})}|}{|(\mathcal{B}_6(\eta)g_0,h_0)_{L_2(\Pi_{R_6})}|}\|\mathcal{B}_6(\eta)g_0\|_{L_2(\Pi_{R_6})}\right)\\
&\leqslant C\|F\|_{L_2(\Pi_{R_6})}.
\end{aligned}\tag{4.2.41}$$

Используя последнее неравенство, равенство (4.2.40) и оценки (4.2.30), выводим

$$\left|\beta(\eta)-\mathring{C}\eta^{-n+2}\int\limits_{\Pi^\eta}F\,d\xi\right|\leqslant C\eta^{-n+3}\|F\|_{L_2(\Pi^\eta},\tag{4.2.42}$$

где $\mathring{C}\neq 0$ и C — некоторые константы, не зависящие от η и F. Из формулы (4.2.35), представления (4.2.36), оценок (4.2.41), (4.2.42) и легко проверяемого соотношения

$$\int\limits_{\Pi^-_{R_6}\setminus\Pi^-_{R_6-1}}|\xi_n|g_0(\xi)\,d\xi=\int\limits_{\Pi^+_{R_6}\setminus\Pi^+_{R_6-1}}|\xi_n|g_0(\xi)\,d\xi=-R_6|\square|$$

следует

$$\left|A_{\pm}(\eta)-\mathring{C}R_6|\square|\eta^{-n+2}\int\limits_{\Pi^\eta}F\,d\xi\right|\leqslant C\eta^{-n+3}\|F\|_{L_2(\Pi_{R_6})}.\tag{4.2.43}$$

Из формулы (4.2.8), (4.2.11) вытекает, что при $|\xi_n|>R_6$ функция v представляется в виде (4.2.23), где константы $A_k^{\pm}$ даётся формулами из (4.2.8). Подставим в эти формулы представление (4.2.36) и равенство

(4.2.35) и воспользуемся затем оценками (4.2.41) и (4.2.42). В результате получим

$$|A_k^{\pm}| \leqslant \frac{C\eta^{-n+3}}{|Z_k|} e^{Z_k R_6} \|F\|_{L_2(\Pi_{R_6})}, \tag{4.2.44}$$

где C — некоторая константа, не зависящая от F, η и k.

Обозначим: $v_*(\xi, \eta) := (\mathcal{B}_3(\eta) g_0)(\xi, \eta)$. Прямыми вычислениями легко убедиться, что функции $V_1^{\pm}$ из (4.2.5), соответствующие g_0 и функции v_*, имеют вид

$$V_1^{\pm}(\xi) = 1 + \chi_3(\xi)(|\xi_n| - R_6).$$

В силу свойств оператора $\mathcal{B}_3$, описанных в разделе 4.2.2, и оценок (4.2.29), верны оценки

$$\|v_*\|_{W_2^1(\Pi_R)} \leqslant C, \qquad \|v_* \mp (|\xi_n| - R_6 + 1)\|_{W_2^2(\Pi_R^{\pm})} \leqslant C,$$

где C — некоторые константы, не зависящие от η, но зависящие от R. Так как в силу (4.2.11), (4.2.36) функция v имеет вид $v = \beta(\eta) v_* + \mathcal{B}_3(\eta) g^{\perp}$, то оценки (4.2.41) и (4.2.42) позволяют заключить, что

$$\left\| v - C_* \eta^{-n+2} v_* \int\limits_{\Pi} F \, d\xi \right\|_{W_2^1(\Pi_R)} \leqslant C\eta^{-n+3} \|F\|_{L_2(\Pi_{R_6})}, \tag{4.2.45}$$

где обозначено $C_* := \mathring{C} R_6 |\square|$.

Таким образом, доказана следующая лемма.

Лемма 4.2.8. *При достаточно малых η для решения задачи (4.2.1), (4.2.2) с финитной правой частью F, чей носитель расположен внутри $\overline{\Pi_{R_6}}$, с $\phi = 0$ и с асимптотикой (4.2.3) выполнены неравенства (4.2.43), (4.2.44), (4.2.45).*

4.2.5 Оценки максимума решения

Краевые условия на $\omega_{\mathrm{R}}^{\eta}$ в задачах (1.0.28) полиномиально зависят от v_1, …, v_m, что приводит к необходимости оценки $L_p(\omega_{\mathrm{R}}^{\eta})$–норм функций v_i с произвольным натуральным p. С точки зрения модельной задачи (4.2.1), (4.2.2) это означает необходимость оценки аналогичной нормы для её решения. Известные теоремы о вложении пространств Соболева W_2^2 и W_2^1 в пространства L_p верны лишь для ограниченного интервала значений p, зависящего от размерности пространства. Поэтому мы будем оценивать максимум модуля решения модельной задачи (4.2.1), (4.2.2). При этом соответствующие константы в оценках могут иметь особенность при $\eta \to +0$ не сильнее, чем $O(\eta^{-n+2})$. Это необходимо, чтобы обеспечить оптимальные оценки для членов и остатков в асимптотиках (4.1.1), (4.1.3). С учётом последнего обстоятельства, нужные неравенства будут получены на основе оценок Шаудера с анализом зависимости от параметра η на основе аналогичных неравенств для решения следующей вспомогательной задачи в области

$$\begin{gathered} -\Delta_\xi U = G \quad \text{в} \quad \Pi_{2R_6} \setminus \omega^\eta, \qquad \frac{\partial U}{\partial \nu_\xi} = \phi \quad \text{на} \quad \partial\omega^\eta_{\mathrm{R}}, \\ U = 0 \quad \text{на} \quad \partial\omega^\eta_{\mathrm{D}} \cup (\square \times \{-2R_6,\, 2R_6\}) \end{gathered} \tag{4.2.46}$$

с периодическими краевыми условиями (4.2.2). Здесь G, ϕ — некоторые заданные функции, принадлежащие соответственно пространствам $C^{(\vartheta)}(\overline{\Pi_{2R_6} \setminus \omega^\eta})$ и $C^{(1+\theta)}(\partial\theta^\theta_{\mathrm{R}})$. Дополнительно предполагаем, что функция G удовлетворяет первому условию периодичности в (4.2.2), а именно, что $\square$–периодичное продолжение этой функции по ξ' остаётся элементом пространства $C^{(\vartheta)}$. Параметр η в данном разделе считаем изменяющимся во всем полуинтервале $(0,1]$.

Для произвольной ограниченной области Θ с липшицевой границей, заданной на ней функции u и $\vartheta \in (0,1)$ обозначим

$$\langle u \rangle^{(\vartheta)}_{\overline{\Theta}} := \sup_{\substack{\xi,\hat{\xi} \in \overline{\Theta}, \\ 0<|\xi-\hat{\xi}|\leqslant c\eta}} \frac{|u(\xi) - u(\hat{\xi})|}{|\xi - \hat{\xi}|^\vartheta} \tag{4.2.47}$$

с некоторым фиксированным $c > 0$ при условии конечности введённой величины. В терминах введённого обозначения норма в пространстве

$C^{(p+\vartheta)}(\overline{\Theta})$, $p\in\mathbb{Z}_+$ даётся формулой

$$\|u\|_{C^{(p+\vartheta)}(\overline{\Theta})}=\|u\|_{C^{(p)}(\overline{\Theta})}+\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}_+^n\\ |k|=p}}\langle\partial_\xi^k u\rangle_\Theta^{(\vartheta)}.$$

Отметим ещё, что при замене переменных $\xi=\tilde\xi\eta$ для функций $\tilde u(\tilde\xi):=u(\xi\eta)$ выполнено

$$\|\partial_\xi^k u\|_{C(\overline{\Theta})}=\eta^{-|k|}\|\partial_{\tilde\xi}^k\tilde u\|_{C(\overline{\Theta})},\quad k\in\mathbb{Z}_+^n,\qquad \langle u\rangle_\Theta^{(\vartheta)}=\eta^{-\vartheta}\langle\tilde u\rangle_{\tilde\Theta}^{(\vartheta)},\tag{4.2.48}$$

где $\tilde\Theta:=\{\tilde\xi:\,\tilde\xi\eta\in\Theta\}$, а определении величины $\langle\tilde u\rangle_{\tilde\Theta}^{(\vartheta)}$ аналогично (4.2.47), но уже с заменой $c\eta$ на c.

Основная требуемая оценка сформулирована в следующей лемме.

Лемма 4.2.9. *Задача (4.2.46) с периодическими краевыми условиями (4.2.2) однозначно разрешима в пространстве $C^{(2+\vartheta)}(\overline{\Pi_{2R_6}\setminus\omega^\eta})$ и для решения верны оценки*

$$\|U\|_{C(\overline{\Pi_{2R_6}\setminus\omega^\eta})}\leqslant C\left(\|G\|_{C(\overline{\Pi_{2R_6}\setminus\omega^\eta})}+\eta\|\phi\|_{C(\partial\omega_{\mathrm{R}}^\eta)}\right),\tag{4.2.49}$$

$$\begin{aligned}\|\nabla_\xi U\|_{C(\overline{\Pi_{2R_6}\setminus\omega^\eta})}+\eta^\vartheta\langle\nabla_\xi U\rangle_{\Pi_{2R_6}\setminus\omega^\eta}^{(\vartheta)}\leqslant C\Big(&\eta^{-1}\|G\|_{C(\overline{\Pi_{2R_6}\setminus\omega^\eta})}\\ &+\eta^\vartheta\langle G\rangle_{\Pi_{2R_6}\setminus\omega^\eta}^{(\vartheta)}+\|\phi\|_{C(\partial\omega_{\mathrm{R}}^\eta)}+\eta\|\nabla\phi\|_{C(\partial\omega_{\mathrm{R}}^\eta)}\\ &+\eta^{1+\vartheta}\langle\nabla\phi\rangle_{\Pi_{2R_6}\setminus\omega^\eta}^{(\vartheta)}\Big),\end{aligned}\tag{4.2.50}$$

где константа C не зависит от функций G, ϕ и параметра η, а градиент от ϕ вычисляется вдоль поверхности $\partial\omega_{\mathrm{R}}^\eta$.

Доказательство. В силу стандартных оценок Шаудера [26, Гл. III, §§2, 3], задача (4.2.46) с периодическими краевыми условиями (4.2.2) однозначно разрешима и решение является элементом пространства $C^{(2+\vartheta)}(\overline{\Pi_{2R_6}\setminus\omega^\eta})$. Основная трудность состоит в доказательстве достаточно специфичной оценки (4.2.50) равномерно по параметру η.

Вначале оценим максимум модуля решения. Требуемую оценку докажем классическим образом на основе принципа максимума применяя подходящие барьерные функции. Доказательство проведём в предположении $\|G\|_{C(\overline{\Pi_{2R_6}\setminus\omega^\eta})}+\|\phi\|_{C(\overline{\Pi_{2R_6}\setminus\omega^\eta})}>0$, так как в случае $G=0$, $\phi=0$ утверждение леммы очевидно.

В доказательстве отдельно рассмотрим два случая: $\eta<\eta_0$ и $\eta\geqslant\eta_0$, где η_0 — некоторое достаточно малое фиксированное число, значение которого будет уточнено ниже.

Начнём со второго случая, предполагая $\eta\geqslant\eta_0$. Пусть X — решение однозначно разрешимой краевой задачи

$$\begin{gathered}
-\Delta_\xi X=1 \quad \text{в} \quad \Pi_{2R_6}\setminus\omega^\eta, \qquad \frac{\partial X}{\partial\nu_\xi}=1 \quad \text{на} \quad \partial\omega^\eta_{\mathrm{R}},\\
X=0 \quad \text{на} \quad \partial\omega^\eta_{\mathrm{D}}\cup\big(\square\times\{-2R_6,2R_6\}\big),
\end{gathered}\tag{4.2.51}$$

с периодическими краевыми условиями (4.2.2). Используя указанные свойства функции X, для функции

$$\tilde u:=u-2\left(\|G\|_{C(\overline{\Pi_{2R_6}\setminus\omega^\eta})}+\|\phi\|_{C^1(\overline{\Pi_{2R_6}\setminus\omega^\eta})}\right)X$$

получаем

$$\begin{gathered}
-\Delta_\xi\tilde u<0 \quad \text{в} \quad \Pi_{2R_6}\setminus\omega^\eta, \qquad \frac{\partial\tilde u}{\partial\nu_\xi}<0 \quad \text{на} \quad \partial\omega^\eta_{\mathrm{R}},\\
\tilde u=0 \quad \text{на} \quad \partial\omega^\eta_{\mathrm{D}}\cup(\square\times\{2R_6\})\cup(\square\times\{-2R_6\}).
\end{gathered}\tag{4.2.52}$$

Применяя теперь стандартные рассуждения из доказательства классического принципа максимума к функции $\tilde u$, немедленно заключаем, что $\tilde u\leqslant 0$, и потому

$$u\leqslant 2\left(\|G\|_{C(\overline{\Pi_{2R_6}\setminus\omega^\eta})}+\|\phi\|_{C(\overline{\Pi_{2R_6}\setminus\omega^\eta})}\right)X\tag{4.2.53}$$

в $\overline{\Pi_{2R_6}\setminus\omega^\eta}$. Аналогично доказывается неравенство

$$u\geqslant -2\left(\|G\|_{C(\overline{\Pi_{2R_6}\setminus\omega^\eta})}+\|\phi\|_{C(\overline{\Pi_{2R_6}\setminus\omega^\eta})}\right)X.\tag{4.2.54}$$

Из последних двух оценок будет вытекать оценка (4.2.49), если мы установим, что функция X ограничена равномерно по ξ и η. Проверим, что это действительно верно.

Пусть $\chi_{4,\mathrm{D}} = \chi_{4,\mathrm{D}}(\xi)$ — бесконечно дифференцируемая срезающая функция, равная единице в некоторой фиксированной окрестности нуля, в которую попадает множество $\omega_{\mathrm{D}}^{\eta}$ для всех $\eta \in [0,1]$, и равная нулю вне некоторой большей фиксированной окрестности, которая лежит строго внутри множества Π_{2R_6}. Аналогичную срезающую функцию $\chi_{4,\mathrm{R}} = \chi_{4,\mathrm{R}}(\xi)$ введём и в окрестности множества $\omega_{\mathrm{R}}^{\eta}$. Условия (1.0.25) обеспечивают существование таких функций.

Выберем некоторое значение $\eta_* \in (0,1]$ и рассмотрим близкие к нему значения η из этого же полуинтервала. Замена

$$\tilde{\xi} = \xi - \frac{\eta - \eta_*}{\eta}\big(\chi_{4,\mathrm{D}}(\xi)(\xi - M_{\mathrm{D}}) + \chi_{4,\mathrm{R}}(\xi)(\xi - M_{\mathrm{R}})\big)$$

отображает область $\Pi_{2R_6} \setminus \omega^{\eta}$ в Π^{η_*}. При такой замене задача (4.2.51) в $\Pi_{2R_6} \setminus \omega^{\eta}$ переходит в малое регулярное возмущение этой же задачи, но в области Π^{η_*}. Применение затем оценок классических Шаудера из [26, Гл. III, §2, 3] позволяет нам утверждать, что

$$\big\|X\big(\xi(\tilde{\xi},\eta),\eta\big) - X(\tilde{\xi},\eta_*)\big\|_{C^{(2+\vartheta)}(\overline{\Pi_{2R_6}\setminus\omega^{\eta}})} \to 0 \quad \text{при} \quad \eta \to \eta_*.$$

Отсюда следует, что функция $\eta \mapsto \|X(\cdot,\eta)\|_{C(\overline{\Pi_{2R_6}\setminus\omega^{\eta}})}$ непрерывна на $(0,1]$ и потому ограничена на каждом отрезке $[\eta_0,1]$, что доказывает оценку (4.2.49) на данном отрезке.

Докажем теперь оценку (4.2.49) при $\eta \in (0,\eta_0]$ и выберем попутно величину η_0. Пусть $Y_i^{\mathrm{D}} = Y_i^{\mathrm{D}}(\tilde{\xi})$, $Y_i^{\mathrm{R}} = Y_i^{\mathrm{R}}(\tilde{\xi})$, $i = 0,1,2$, $\tilde{\xi} = (\tilde{\xi}_1,\ldots,\tilde{\xi}_n) \in \mathbb{R}^n$, есть решения внешних краевых задач

$$\begin{aligned}
&-\Delta_{\tilde{\xi}} Y_i^{\mathrm{D}} = 0 \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^n \setminus \omega_{\mathrm{D}}, \qquad i = 0,1,2,\\
&\;Y_0^{\mathrm{D}} = 1, \qquad Y_1^{\mathrm{D}} = \tilde{\xi}_n, \qquad Y_1^{\mathrm{D}} = \tilde{\xi}_n^2 \quad \text{на} \quad \partial\omega_{\mathrm{D}},\\
&-\Delta_{\tilde{\xi}} Y_i^{\mathrm{R}} = 0 \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^n \setminus \omega_{\mathrm{R}}, \qquad i = 0,1,2,\\
&\;\frac{\partial Y_0^{\mathrm{R}}}{\partial \nu_{\tilde{\xi}}} = 1, \qquad \frac{\partial Y_1^{\mathrm{R}}}{\partial \nu_{\tilde{\xi}}} = \frac{\partial \tilde{\xi}_n}{\partial \nu_{\tilde{\xi}}}, \qquad \frac{\partial Y_2^{\mathrm{R}}}{\partial \nu_{\tilde{\xi}}} = \tilde{\xi}_n \frac{\partial \tilde{\xi}_n}{\partial \nu_{\tilde{\xi}}} \quad \text{на} \quad \partial\omega_{\mathrm{R}}.
\end{aligned} \tag{4.2.55}$$

где $\nu_{\tilde{\xi}}$ — единичная нормаль к границе ω_{R}, направленная внутрь этого множества. Известно, что существуют классические решения этих задач, принадлежащие пространству $C^\infty(\mathbb{R}^n\setminus\theta)\cap C^{(2+\vartheta)}(\overline{B_R(0)})$, где R — достаточно большое фиксированное число, с бесконечно дифференцируемыми асимптотиками на бесконечности

$$Y_i^{\mathrm{D}}(\tilde\xi)=O\big(|\tilde\xi|^{-n+1}\big),\qquad Y_i^{\mathrm{R}}(\tilde\xi)=O\big(|\tilde\xi|^{-n+2}\big),\qquad \tilde\xi\to\infty,\quad i=0,1,2.$$

где C_0^{R} — некоторая константа. С учётом данных асимптотик, указанной выше гладкости функций $Y_i^\flat$, $\flat\in\{\mathrm{D},\mathrm{R}\}$, $i=0,1,2$, и задач (4.2.55), прямыми вычислениями несложно убедиться, что

$$\begin{aligned}&\big|\chi_{4,\flat}(\xi)Y_i^\flat((\xi-M_\flat)\eta^{-1})\big|\leqslant C,\\ &\big|\Delta_\xi\eta\chi_{4,\flat}(\xi)Y_i^\flat(\xi-M_\flat)\eta^{-1})\big|\leqslant C\eta^n,\end{aligned}\tag{4.2.56}$$

где C — некоторая константа, не зависящая от ξ и η. Пусть ξ_n^{D}, ξ_n^{R} — n-ые координаты точек M_{D}, M_{R}. Теперь в качестве барьерных выберем функции

$$\begin{aligned}X_1(\xi,\eta):=&(\xi_n^2-4R_6^2)-\chi_{4,\mathrm{D}}(\xi)\Big(\eta^2Y_2^{\mathrm{D}}\big((\xi-M_{\mathrm{D}})\eta^{-1}\big)\\ &+2\eta\xi_n^{\mathrm{D}}Y_1^{\mathrm{D}}\big((\xi-M_{\mathrm{D}})\eta^{-1}\big)+\big((\xi_n^{\mathrm{D}})^2-4R_6^2\big)Y_0^{\mathrm{D}}\big((\xi-M_{\mathrm{D}})\eta^{-1}\big)\Big)\\ &-\chi_{4,\mathrm{R}}(\xi)\Big(2\eta^2Y_2^{\mathrm{R}}\big((\xi-M_{\mathrm{R}})\eta^{-1}\big)+2\eta\xi_n^{\mathrm{R}}Y_1^{\mathrm{R}}\big((\xi-M_{\mathrm{R}})\eta^{-1}\big)\Big),\\ X_2(\xi,\eta):=&\eta\chi_{4,\mathrm{R}}(\xi)Y_0^{\mathrm{R}}\big((\xi-M_{\mathrm{R}})\eta^{-1}\big).\end{aligned}$$

Из определения функций $Y_i^\flat$ и оценок (4.2.56) вытекает, что существует достаточно малое фиксированное η_0 такое, что при $\eta\in(0,\eta_0]$ введённые функции X_1, X_2 удовлетворяют периодическим краевым условиям (4.2.2), ограничены равномерно по ξ и η и

$$\begin{aligned}&-\Delta_\xi X_1\geqslant 1\quad\text{в}\quad \Pi_{2R_6}\setminus\omega^\eta, &&\frac{\partial X_1}{\partial\nu_\xi}=0\quad\text{на}\quad\partial\omega_{\mathrm{R}}^\eta,\\ &|\Delta_\xi X_2|\leqslant C\eta^n\quad\text{в}\quad\Pi_{2R_6}\setminus\omega^\eta, &&\frac{\partial X_1}{\partial\nu_\xi}=1\quad\text{на}\quad\partial\omega_{\mathrm{R}}^\eta,\\ &X_i=0\quad\text{на}\quad\partial\omega_{\mathrm{D}}^\eta\cup(\square\times\{-2R_6,\,2R_6\}), &&i=1,2,\end{aligned}$$

где C — некоторая константа, не зависящая от ξ и η. Используя теперь установленные свойства функций X_1, X_2 и рассматривая функции

$$u \pm 2\|\phi\|_{C(\overline{\Pi_{2R_6}\setminus\omega^\eta})} X_2 + 2\Big(\|G\|_{C(\overline{\Pi_{2R_6}\setminus\omega^\eta})} + C\eta^n \|\phi\|_{C(\overline{\Pi_{2R_6}\setminus\omega^\eta})}\Big) X_1,$$

аналогично (4.2.52), (4.2.53), (4.2.54) несложно проверить, что при достаточно малом η_0 для всех $\eta \in (0, \eta_0]$ выполнено

$$|u| \leqslant 2\|\phi\|_{C(\overline{\Pi_{2R_6}\setminus\omega^\eta})} X_2 + 2\Big(\|G\|_{C(\overline{\Pi_{2R_6}\setminus\omega^\eta})} + C\eta^n \|\phi\|_{C(\overline{\Pi_{2R_6}\setminus\omega^\eta})}\Big) X_1.$$

Отсюда, из первых оценок в (4.2.56) и определения функций X_1, X_2 уже легко следует оценка (4.2.49) для $\eta \in (0, \eta_0]$. Оценка (4.2.49) полностью доказана.

Для исследования задачи (4.2.46) мы используем “растянутую” версию этой задачи, получаемую переходом к переменным $\tilde{\xi} := \xi\eta^{-1}$,

$$-\Delta_{\tilde{\xi}} \tilde{U} = \tilde{G} \quad \text{в} \quad \tilde{\Pi} \setminus (\tilde{\omega}_{\mathrm{D}} \cup \tilde{\omega}_{\mathrm{R}}), \qquad \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \nu_{\tilde{\xi}}} = \tilde{\phi} \quad \text{на} \quad \partial\tilde{\omega}_{\mathrm{R}},$$
$$\tilde{U} = 0 \quad \text{на} \quad \partial\tilde{\omega}_{\mathrm{D}} \cup \big(\square \times \{-2R_6\eta^{-1},\, 2R_6\eta^{-1}\}\big),$$

с периодическими краевыми условиями (4.2.2) на боковых сторонах множества $\tilde{\Pi} := \{\tilde{\xi} :\, \tilde{\xi}\eta \in \Pi_{2R_6}\}$. Здесь

$$\tilde{U}(\tilde{\xi}, \eta) := U(\tilde{\xi}\eta, \eta), \qquad \tilde{G}(\tilde{\xi}) := \eta^2 G(\tilde{\xi}\eta), \qquad \tilde{\phi}(\tilde{\xi}) := \eta\phi(\tilde{\xi}\eta),$$
$$\tilde{\omega}_{\mathrm{D}} := \big\{\tilde{\xi} :\, \tilde{\xi} - \eta^{-1} M_{\mathrm{D}} \in \omega_{\mathrm{D}}\big\}, \qquad \tilde{\omega}_{\mathrm{R}} := \big\{\tilde{\xi} :\, \tilde{\xi} - \eta^{-1} M_{\mathrm{R}} \in \omega_{\mathrm{R}}\big\}.$$

Новая задача задана в области размера порядка η^{-1}, а полости ω^η перешли в фиксированные полости $\tilde{\omega}_{\mathrm{D}}$, $\tilde{\omega}_{\mathrm{R}}$ и их форма перестала зависеть от η. Последнее обстоятельство является основной причиной указанного растяжения. К описанной новой задаче применим оценку Шаудера, см. [26, Гл. III, §2, 3]. При этом соответствующая константа в этой оценке может быть выбранной не зависящей от размеров растянутой области, то есть, от параметра η. Этот факт несложно вывести, если проследить вывод оценки, приведённый в [26, Гл. III, §2, 3], что также явно указано в [26, Гл. III, §2] в тексте после финальной оценки (2.24). Возвращаясь теперь обратно к переменным ξ и учитывая соотношения (4.2.48) и оценку (4.2.49), немедленно получаем неравенство (4.2.50). Лемма доказана. $\square$

4.2.6 Разрешимость модельных задач

В этом параграфе мы исследуем разрешимость модельной задачи (4.2.1), (4.2.2) для функций внутреннего разложения и зависимость ее решения от параметра η, а также разрешимость модельной задачи для функций внешнего разложения.

Через $\mathfrak{H}$, обозначим пространство функций $f = f(\xi)$, заданных на $\overline{\Pi \setminus \omega^\eta}$ таких, что при $|\xi_n| > R_6$ ряд Фурье функции f имеет вид

$$f(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^{n-1}} T_k^\pm(\xi_n) e^{-Z_k|\xi_n|} e^{2\pi \mathrm{i} \frac{k}{b} \cdot \xi'}, \quad \pm\xi_n > R_6, \tag{4.2.57}$$

где $T_k^\pm(\xi_n)$ — полиномы степени не выше некоторого p, не зависящего от k, причём для коэффициентов этих полиномов предполагается выполнение условия

$$\|f\|_{\mathfrak{H}} := \sup_{k \in \mathbb{Z}^{n-1}} e^{-Z_k R_6} |\!|\!| T_k^+ |\!|\!| + \sup_{k \in \mathbb{Z}^{n-1}} e^{-Z_k R_6} |\!|\!| T_k^- |\!|\!| < \infty.$$

Здесь для произвольного многочлена L величина $|\!|\!| L |\!|\!|$ обозначает максимум из абсолютных значений его коэффициентов. Отметим, что в силу сделанных предположений, при $|\xi_n| > R_6$ ряды в правой части (4.2.57) сходятся абсолютно и равномерно по ξ вместе со всеми своими производными.

Лемма 4.2.10. *Пусть*

$$F = F_0 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial F_j}{\partial \xi_j}, \quad F_0 \in C^{(\theta)}(\overline{\Pi_{2R_6} \setminus \omega^\eta}) \cap \mathfrak{H}, \quad F_j \in C^{(1+\theta)}(\overline{\Pi_{2R_6} \setminus \omega^\eta}) \cap \mathfrak{H},$$

где для F_j верны представления (4.2.57) с некоторыми полиномами $T_k^\pm = T_{k,j}^\pm$, а правая часть ϕ в граничном условии на $\partial\omega_{\mathrm{R}}^\eta$ в (4.2.1) является элементом пространства $C^{(1+\vartheta)}(\partial\omega_{\mathrm{R}}^\eta)$. Тогда существует единственное решение задачи (4.2.1), (4.2.2), принадлежащее пространству

$$C^{(1+\theta)}(\overline{\Pi_{2R_6} \setminus \omega^\eta}) \cap \mathfrak{H},$$

имеющее при $|\xi_n| > R_6$ *вид (4.2.57) с полиномами* $T_k^{\pm} = Q_k^{\pm}$, $Q_k^{\pm} = Q_k^{\pm}(\xi,\eta)$, *обладающими свойствами*

$$\begin{aligned} &-\frac{\partial^2 Q_0^{\pm}}{\partial \xi_n^2} = T_{0,0}^{\pm}, \qquad \frac{\partial Q_0^{\pm}}{\partial \xi_n}(0,\eta) = 0,\\ &-\frac{\partial^2 Q_k^{\pm}}{\partial \xi_n^2} \pm 4\pi \left|\frac{k}{b}\right| \frac{\partial Q_k^{\pm}}{\partial \xi_n} = T_{k,0}^{\pm} + 2\pi\mathrm{i}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{k_j}{b_j}T_{k,j}, \end{aligned} \tag{4.2.58}$$

Справедливы оценки

$$\begin{aligned} \big|Q_0^{\pm}(0,\eta) - C_*\overset{*}{Q}_0(\eta)\eta^{-n+2}\big| \leqslant C\bigg(\eta^{-n+3}\Big(\|F_0\|_{C(\overline{\Pi_{2R_6}\setminus\omega^\eta})}\\ + \sum_{j=1}^{n-1}\|\nabla_\xi F_j\|_{C(\overline{\Pi_{2R_6}\setminus\omega^\eta})} + \sum_{j=0}^{n}\|F_j\|_{\mathfrak{H}}\Big) + \eta^{\frac{3}{2}}\|\phi\|_{C(\partial\theta_{\mathrm{R}}^{\theta})}\bigg), \end{aligned} \tag{4.2.59}$$

$$\begin{aligned} \overset{*}{Q}_0(\eta) := \lim_{R\to+\infty}\Bigg(\int\limits_{\Pi_R\setminus\omega^\eta} F_0\,d\xi + \frac{\partial Q_0^{+}}{\partial \xi_n}(R,\eta)|\Box|\\ - \frac{\partial Q_0^{-}}{\partial \xi_n}(-R,\eta)|\Box|\Bigg), \end{aligned} \tag{4.2.60}$$

$$\begin{aligned} \sup_{k\in\mathbb{Z}^{n-1}\setminus\{0\}} e^{-Z_k R_6}|Q_k^{\pm}(0,\eta)| \leqslant C\eta^{-n+3}\Bigg(\|F_0\|_{C(\overline{\Pi_{2R_6}\setminus\omega^\eta})}\\ + \sum_{j=0}^{n-1}\|F_j\|_{C^1(\overline{\Pi_{2R_6}\setminus\omega^\eta})} + \sum_{j=0}^{n-1}\|F_j\|_{\mathfrak{H}}\Bigg), \end{aligned} \tag{4.2.61}$$

$$|\!|\!|Q_k^{\pm} - Q_k^{\pm}(0,\eta)|\!|\!| \leqslant \sum_{j=0}^{n-1}|\!|\!|T_{k,j}^{\pm}|\!|\!|, \qquad k\neq 0, \tag{4.2.62}$$

$$\begin{aligned} \|v\|_{C(\overline{\Pi_{2R_6}\setminus\omega^\eta})} \leqslant C\bigg(\eta^{-n+2}|\overset{*}{Q}_0(\eta)| + \eta\|\phi\|_{C(\partial\omega_{\mathrm{R}}^{\eta})} + \eta^{-n+3}\Big(\|F_0\|_{C(\overline{\Pi_{2R_6}\setminus\omega^\eta})}\\ + \sum_{j=1}^{n-1}\|\nabla_\xi F_j\|_{C(\overline{\Pi_{2R_6}\setminus\omega^\eta})} + \sum_{j=0}^{n}\|F_j\|_{\mathfrak{H}}\Big)\bigg), \end{aligned} \tag{4.2.63}$$

$$\begin{aligned}\|\nabla v\|_{C(\overline{\Pi_{2R_6}\setminus\omega^\eta})}+\eta^\vartheta\langle\nabla v\rangle^{(\vartheta)}_{\Pi_{2R_6}\setminus\omega^\eta}\leqslant C\Bigg(&\eta^{-n+1}|\overset{*}{Q}_0(\eta)|+\|\phi\|_{C(\partial\omega^\eta_{\mathrm{R}})}\\&+\eta\|\nabla\phi\|_{C(\partial\omega^\eta_{\mathrm{R}})}+\eta^{1+\vartheta}\langle\nabla\phi\rangle^{(\vartheta)}_{\partial\omega^\eta_{\mathrm{R}}}+\eta^\vartheta\langle F_0\rangle^{(\vartheta)}_{\Pi_{2R_6}\setminus\omega^\eta}\\&+\eta^\vartheta\sum_{j=1}^{n-1}\langle\nabla F_j\rangle^{(\vartheta)}_{\Pi_{2R_6}\setminus\omega^\eta}+\eta^{-n+3}\Bigg(\|F_0\|_{C(\overline{\Pi_{2R_6}\setminus\omega^\eta})}\\&+\sum_{j=1}^{n-1}\|\nabla_\xi F_j\|_{C(\overline{\Pi_{2R_6}\setminus\omega^\eta})}+\sum_{j=0}^{n}\|F_j\|_{\mathfrak{H}}\Bigg)\Bigg),\end{aligned}\tag{4.2.64}$$

где C — некоторые константы, не зависящие от функций F_j, $j=0,\ldots,n-1$, и параметров η и k.

Доказательство. Вначале докажем существование обобщённого решения для рассматриваемой задачи, а затем уже покажем наличие указанной гладкости. Рассмотрим уравнения

$$\begin{gathered}-\Delta_\xi v_\phi=0\quad\text{в}\quad\Pi_R\setminus\omega^\eta_{\mathrm{R}},\\\frac{\partial v_\phi}{\partial\nu_\xi}=\phi\quad\text{на}\quad\partial\omega^\eta_{\mathrm{R}},\qquad v_\phi=0\quad\text{на}\quad\square\times\{\pm R_6\},\end{gathered}\tag{4.2.65}$$

с периодическими граничными условиями (4.2.2). Такая задача однозначно разрешима и в силу [12, лемма 2.2] для её решения выполнено

$$\|v_\phi\|_{W_2^1(\Pi_R\setminus\omega^\eta_{\mathrm{R}})}\leqslant C\eta^{\frac12}\|\phi\|_{L_2(\partial\omega^\eta_{\mathrm{R}})},\tag{4.2.66}$$

где константа C не зависит от η и ϕ.

Рассмотрим задачу

$$-\Delta_\xi v_F^\pm=F_0+\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial F_j}{\partial\xi_j}\quad\text{в}\quad\Pi^\pm_{R_6-1},$$

с периодическими граничными условиями (4.2.2). Эти уравнения решим методом разделения переменных:

$$v_F^\pm(\xi)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^{n-1}}\tilde{Q}_k^\pm(\xi_n)e^{2\pi\mathrm{i}\frac{k}{b}\cdot\xi'},\tag{4.2.67}$$

где функции $\tilde{Q}_k^{\pm}$ определяются из уравнений

$$-\frac{\partial^2 \tilde{Q}_k^{\pm}}{\partial \xi_n^2} \pm 4\pi \left|\frac{k}{b}\right| \frac{\partial \tilde{Q}_k^{\pm}}{\partial \xi_n} = \tilde{T}_{k,0}^{\pm} + 2\pi\mathrm{i}\sum_{j=1}^{n-1} \frac{k_j}{b_j}\tilde{T}_{k,j}, \tag{4.2.68}$$

а функции $\tilde{T}_{k,j}^{\pm} = \tilde{T}_{k,j}^{\pm}(\xi_n)$ определяются как коэффициенты разложений функций F_j в ряды Фурье

$$F_j(\xi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^{n-1}} \tilde{T}_{k,j}^{\pm}(\xi_n) e^{2\pi\mathrm{i}\frac{k}{b}\cdot\xi'}, \qquad \tilde{T}_{k,j}^{\pm}(\xi_n) = T_{k,j}^{\pm}(\xi_n) \quad \text{при} \quad \pm\,\xi_n > R_6.$$

Уравнения (4.2.67) для $k \neq 0$ разрешимы с точностью до произвольной константы, а при $k = 0$ — с точностью до произвольной линейной функции. Выберем эти константы и функции следующим образом. При $\pm\xi_n > R_6$ функции $\tilde{Q}_k^{\pm}$ являются полиномами, определёнными также с указанным произволом. Функции $\tilde{Q}_k^{\pm}$ выберем так, чтобы эти полиномы при $\pm\xi_n > R_6$ не содержали свободного члена, а при $k = 0$ дополнительно требуем отсутствия первой степени ξ_n в $\tilde{Q}_0^{\pm}$ при $\pm\xi_n > R_6$. Такое условие однозначно определяет решения уравнений (4.2.68). При этом для полиномов $\tilde{Q}_k^{\pm}$ выполнены оценки

$$|||\mathring{Q}_k^{\pm}||| \leqslant C \sum_{j=0}^{n-1} |||T_{k,j}^{\pm}|||, \tag{4.2.69}$$

где константа C не зависит от $T_{k,j}$ и k.

Аналогично доказательству леммы 4.2.1 легко проверить, что $v_F^{\pm} \in W_2^2(\Pi_R^{\pm} \setminus \Pi_{R_6-1}^{\pm})$ для любого $R > R_6$ и справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \|v_F^{\pm}\|_{W_2^2(\Pi_R^{\pm}\setminus\Pi_{R_6-1}^{\pm})} \leqslant C(R)\Bigg(& \|F_0\|_{L_2(\Pi_{R_6}^{\pm}\setminus\Pi_{R_6-1}^{\pm}))} \\ & + \sum_{j=1}^{n-1} \|\nabla F_j\|_{L_2(\Pi_{R_6}^{\pm}\setminus\Pi_{R_6-1}^{\pm}))} + \sum_{j=0}^{n-1} \|F_j\|_{\mathfrak{H}}\Bigg), \end{aligned} \tag{4.2.70}$$

где $C(R)$ — некоторая константа, не зависящая от функций F_j, $j = 0, \ldots, n-1$.

Решение задачи (4.2.1), (4.2.2) будем искать в виде

$$v=\tilde{v}+(1-\chi_3)v_F+\chi_3 v_\phi,\qquad v_F(\xi):=v_F^\pm(\xi)\quad\text{при}\quad \pm\,\xi_n>R_6-1.$$

Тогда для функции $\tilde{v}$ получаем следующую задачу

$$\begin{aligned}&-\Delta_\xi\tilde{v}=\tilde{F}\quad\text{в}\quad \Pi_R\setminus\omega^\eta,\qquad \tilde{v}=0\quad\text{на}\quad \partial\omega_{\mathrm{D}}^\eta,\\ &\frac{\partial\tilde{v}}{\partial\nu_\xi}=0\quad\text{на}\quad\partial\omega_{\mathrm{R}}^\eta,\end{aligned}\tag{4.2.71}$$

с периодическими граничными условиями (4.2.2), где

$$\tilde{F}:=F\chi_3+2\frac{\partial(v_\phi-v_F)}{\partial\xi_n}\chi_3'+(v_\phi-v_F)\chi_3''.$$

Ясно, что функция $\tilde{F}$ финитная с носителем внутри Π_{R_6}. Из оценок (4.2.66), (4.2.70) следует, что

$$\begin{aligned}\|\tilde{F}\|_{L_2(\Pi_{R_6})}\leqslant C\Bigg(&\eta^{\frac{1}{2}}\|\phi\|_{L_2(\partial\omega_{\mathrm{R}}^\eta)}+\|F_0\|_{L_2(\Pi_{R_6}^\pm\setminus\Pi_{R_6-1}^\pm))}\\ &+\sum_{j=1}^{n-1}\|\nabla F_j\|_{L_2(\Pi_{R_6}^\pm\setminus\Pi_{R_6-1}^\pm))}+\sum_{j=0}^{n-1}\|F_j\|_{\mathfrak{H}}\Bigg),\end{aligned}\tag{4.2.72}$$

где константа C не зависит от функций ϕ, F_j, $j=0,\ldots,n-1$, и параметра η.

Согласно леммам 4.2.8, 4.2.6, задача (4.2.71) разрешима и имеет единственное решение, которое при $|\xi_n|>R_6$ представляется в виде (4.2.23), где для коэффициентов верны оценки (4.2.24), (4.2.43), (4.2.44), (4.2.45) с заменой F на $\tilde{F}$. Вернёмся теперь к функции v и обозначим

$$Q_k^\pm(\xi,\eta):=\tilde{Q}_k^\pm(\xi_n)+A_k^\pm(\eta),\quad \pm\xi_n>R_6.$$

Тогда немедленно заключаем, что существует единственное обобщённое решение задачи (4.2.1), (4.2.2), имеющее при $\pm\xi_n>R_6$ вид (4.2.57) с $T_k^\pm=Q_k^\pm$. Уравнения (4.2.58) вытекают из определения полиномов $Q_k^\pm$ и уравнений (4.2.68).

Докажем теперь требуемые оценки для решения v. Вначале вычислим интеграл $\int\limits_{\Pi^\eta} \tilde{F}\,d\xi$. Используя определение этой функции, проинтегрируем по частям

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Pi^\eta} \tilde{F}\,d\xi =& \lim_{R\to+\infty}\int\limits_{\Pi_R}\left(F_0+\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial F_j}{\partial \xi_j}+\Delta_\xi((1-\chi_3)v_F+\chi_3 v_\phi)\right)\,d\xi\\ =&\mathring{Q}_0(\eta)-\int\limits_{\partial\omega^\eta}\phi\,ds+\sum_{j=1}^{n-1}\int\limits_{\partial\omega^\eta}F_j\nu_j\,ds,\end{aligned}$$

где для последних двух интегралов верны очевидные оценки

$$\left|\int\limits_{\partial\omega^\eta}\phi\,ds\right|\leqslant|\theta_{\mathrm{R}}|\eta^{n-1}\|\phi\|_{C(\partial\omega^\eta_{\mathrm{R}})},\quad \left|\sum_{j=1}^{n-1}\int\limits_{\partial\omega^\eta}F_j\nu_j\,ds\right|\leqslant|\theta_{\mathrm{R}}|\eta^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}\|F_j\|_{C(\partial\omega^\eta_{\mathrm{R}})}.$$

Отсюда и из оценок (4.2.25), (4.2.43), (4.2.44), (4.2.72) для коэффициентов функции $\tilde{v}$ выводим оценку (4.2.59). Оценки (4.2.61) и (4.2.62) есть прямое следствие оценок (4.2.44), (4.2.72) и (4.2.69).

Переходим к доказательству оценок (4.2.63), (4.2.64). В силу представления (4.2.57) для функции v и доказанных оценок (4.2.59), (4.2.60), (4.2.61), (4.2.62), функция v очевидно бесконечно дифференцируема в $\overline{\Pi_{2R_6}\setminus\Pi_{\frac{4}{3}R_6}}$ и верна оценка

$$\|v\|_{C^3(\overline{\Pi_{2R_6}\setminus\Pi_{\frac{4}{3}R_6}})}\leqslant C\|v\|_{\mathfrak{H}},\tag{4.2.73}$$

где константа C не зависит от v.

Пусть $\chi_5=\chi_5(\xi_n)$ — бесконечно дифференцируемая срезающая функция со значениями в отрезке $[0,1]$, равная нулю при $|\xi_n|\geqslant\frac{5}{3}R_6$ и единице при $|\xi_n|\leqslant\frac{4}{3}R_6$. Тогда функция $U=v\chi_5$ является решением задачи (4.2.46) с

$$G=F-2\nabla_\xi\chi_5\cdot\nabla_\xi v-v\Delta_\xi v.$$

Применяя теперь лемму 4.2.9 и используя оценки (4.2.73), (4.2.59), (4.2.60), (4.2.61), (4.2.62), легко получаем оценки (4.2.63), (4.2.64). Лемма доказана.

$\square$

4.3 Свойства коэффициентов асимптотики

В настоящем параграфе мы используем лемму 4.2.10 для исследования разрешимости задач (1.0.27), (1.0.28), (1.0.29) для коэффициентов внутреннего разложения. При этом с помощью метода согласования асимптотических разложений будут определены краевые условия для функций внешнего разложения u_m, которые дополнят задачи (1.0.26). Исследование полученных задач для функций u_m будет сделано на основе следующей вспомогательной леммы, доказательство которой проводится аналогично доказательству леммы 6.1 из [43].

Обозначим: $\Omega^{\pm} := \{x :\, \pm x_n > 0\} \cap \Omega$.

Лемма 4.3.1. *Пусть* $f \in L_2(\Omega) \cap W_2^q(\Omega^+_{\tau_0}) \cap W_2^q(\Omega^-_{\tau_0})$, $\phi_\pm \in W_2^q(S)$ *для всех* $q \in \mathbb{N}$. *Тогда задача*

$$\begin{array}{llll} (\mathcal{L}-\lambda)u = f, & x \in \Omega \setminus S, & u = 0, & x \in \partial\Omega, \\ u(x', +0, \eta) = \phi_+, & x' \in \mathbb{R}^{n-1}, & u(x', -0, \eta) = \phi_-, & x' \in \mathbb{R}^{n-1}, \end{array} \tag{4.3.1}$$

однозначно разрешима в пространстве $W_2^1(\Omega^+) \cap W_2^1(\Omega^-)$. *Решение этой задачи также принадлежит* $W_2^q(\Omega^+_{\tau_0-\delta}) \cap W_2^q(\Omega^-_{\tau_0-\delta})$ *для всех* $q \in \mathbb{N}$ *и* $\delta > 0$ *и верны оценки*

$$\|u\|_{W_2^1(\Omega^+)} + \|u\|_{W_2^1(\Omega^-)} \leqslant C\left(\|f\|_{L_2(\Omega)} + \|\phi_+\|_{W_2^1(S)} + \|\phi_-\|_{W_2^1(S)}\right),$$
$$\|u\|_{W_2^q(\Omega_{\tau_0-\delta})} \leqslant C(q,\delta)\Big(\|f\|_{W_2^{q-2}(\Omega_{\tau_0-\delta})} + \|f\|_{L_2(\Omega)} + \|\phi_+\|_{W_2^q(S)} + \|\phi_-\|_{W_2^q(S)}\Big),$$

где константы C *и* $C(q,\delta)$ *не зависят от* u, f *и* $\phi_\pm$, *и во второй оценке* $q \geqslant 2$ *— произвольно натуральное число. Функция u бесконечно дифференцируема в* $\Omega^{\pm}_{\tau_0}$ *и для каждого* $\delta > 0$ *все её производные равномерно ограничены в области* $\overline{\Omega^{\pm}_{\tau_0-\delta}}$.

Общая схема исследования задач для функций внутреннего и внешнего разложений следующая. Вначале на основе леммы 4.2.10 доказывается разрешимость задачи (1.0.27) для функции v_1, где для решения предполагается выполнение асимптотики (1.0.29) с $m = 1$ на уровне главного

члена
$$v_1(\xi,x',\eta)=\frac{\partial u_0}{\partial x_n}(x',\pm 0)\xi_n+O(1),\qquad \xi_n\to\pm\infty.$$
Такое решение однозначно определяется. Уточнение асимптотики этого решения и сравнение её с требуемой асимптотикой (1.0.29) с $m=1$ позволяет однозначно определить функции $u_1(x',\pm 0)$, то есть, граничные условия для функции u_1 на S.

Определив функцию u_1, мы тем самым однозначно определяем первых два главных члена в асимптотике (1.0.29) с $m=2$. Это позволяет затем однозначно найти функцию v_2 и определить затем по её асимптотике на бесконечности функции $u_2(x',\pm 0)$, то есть граничные условия для функции u_2 на S. Дальнейшие построения проводятся по такой же схеме.

Реализуем теперь описанный подход строго и во всех деталях. Вначале отметим, что лемма 4.2.7, применённая к задаче (4.1.2), сразу гарантирует, что функция u_0 принадлежат $W_2^q(\Omega^+_{\tau_0-\delta})\cap W_2^q(\Omega^-_{\tau_0-\delta})\cap W_2^1(\Omega)$ для всех $q\in\mathbb{N}$ и всех $\delta>0$, бесконечно дифференцируема в $\Omega^\pm_{\tau_0}$ и для каждого $\delta>0$ все её производные равномерно ограничены в каждой из областей $\overline{\Omega^\pm_{\tau_0-\delta}}$.

Рассмотрим теперь вспомогательные задачи
$$\begin{aligned}&-\Delta_\xi\mathring{v}^\pm=0\quad\text{в}\quad\Pi\setminus\omega^\eta,\qquad \mathring{v}^\pm=0\quad\text{на}\quad\partial\omega^\eta_{\mathrm{D}},\\ &\frac{\partial\mathring{v}^\pm}{\partial\nu_\xi}=0\quad\text{на}\quad\partial\omega^\eta_{\mathrm{R}},\end{aligned}\tag{4.3.2}$$
с периодическим граничными условиями (4.2.2) и следующим поведением на бесконечности:
$$\mathring{v}^\pm(\xi)=\xi_n+O(1),\qquad \xi_n\to\pm\infty,\qquad \mathring{v}^\pm(\xi)=O(1),\qquad \xi_n\to\mp\infty.$$
Положим:
$$\mathring{V}_\pm(\xi_n):=\begin{cases}\xi_n, & \pm\,\xi_n>0,\\ 0, & \pm\,\xi_n<0.\end{cases}$$
Переход к функции $\mathring{v}^\pm(\xi)-(1-\chi_3(\xi_n))\mathring{Q}^\pm(\xi_n)$ приводит к задаче (4.2.1), (4.2.2) для такой новой неизвестной функции с правыми частями $F=$

$2\chi_3'\mathring{V}_\pm' + \chi_3''\mathring{V}_\pm$. Применение затем леммы 4.2.10 с $F_0 = 2\chi_3'\mathring{V}'^{\pm} + \chi_3''\mathring{V}_\pm$, $F_j = 0$, $\phi = 0$ позволяет установить однозначную разрешимость задачи (4.3.2), (4.2.2), определить гладкость решения и получить для него оценки типа (4.2.59), (4.2.60), (4.2.61), (4.2.62), (4.2.63), (4.2.64). А именно, для функций $\mathring{v}^\pm$ верны представления (4.2.57), которые в данном случае имеют вид:

$$\mathring{v}^\pm(\xi,\eta) = \mathring{Q}^{\pm,+}(\xi_n,\eta) + \sum_{k\in\mathbb{Z}^{n-1}\setminus\{0\}} \mathring{A}_k^{\pm,+}(\eta)e^{-Z_k|\xi_n|}e^{2\pi\mathrm{i}\frac{k}{b}\cdot\xi'}, \quad \xi_n > R_6,$$
$$\mathring{v}^\pm(\xi,\eta) = \mathring{Q}^{\pm,-}(\xi_n,\eta) + \sum_{k\in\mathbb{Z}^{n-1}\setminus\{0\}} \mathring{A}_k^{\pm,-}(\eta)e^{-Z_k|\xi_n|}e^{2\pi\mathrm{i}\frac{k}{b}\cdot\xi'}, \quad \xi_n < -R_6,$$

где

$$\mathring{Q}^{\pm,\pm}(\xi_n,\eta) = \xi_n + \mathring{A}_0^{\pm,\pm}(\eta), \qquad \mathring{Q}^{\pm,\mp}(\xi_n,\eta) = \mathring{A}_0^{\pm,\mp}(\eta),$$

и $A_k^{\flat,\natural}(\eta)$, $\flat,\natural \in \{+,-\}$ — некоторые функции. Выполнены следующие оценки:

$$|A_0^{\flat,\natural}(\eta)| \leqslant C\eta^{-n+2}, \qquad \sup_{k\in\mathbb{Z}^{n-1}\setminus\{0\}} e^{-Z_kR_6}|A_k^{\flat,\natural}(\eta)| \leqslant C\eta^{-n+3},$$
$$\|\mathring{v}^\pm\|_{C(\overline{\Pi_{2R_6}\setminus\omega^\eta})} \leqslant C\eta^{-n+2}, \qquad \|\mathring{v}^\pm\|_{C(\overline{\Pi_{2R_6}\setminus\omega^\eta})} + \eta^\vartheta\langle\mathring{v}^\pm\rangle_{\Pi^\eta}^{(\vartheta)} \leqslant C\eta^{-n+1},$$

где C — некоторая константа, не зависящая от η. Легко убедиться, что решение задачи (1.0.27), (1.0.29) с $m=1$ даётся формулой

$$v_1(\xi,x',\eta) = \frac{\partial u_0}{\partial x_n}(x',+0)\mathring{v}^+(\xi,\eta) + \frac{\partial u_0}{\partial x_n}(x',-0)\mathring{v}^-(\xi,\eta).$$

Асимптотики этой функции на бесконечности имеют вид:

$$\begin{aligned} v_1(\xi,x',\eta) =& \frac{\partial u_0}{\partial x_n}(x',\pm0)\xi_n + \frac{\partial u_0}{\partial x_n}(x',+0)\mathring{A}_0^{+,\pm}(\eta) \\ &+ \frac{\partial u_0}{\partial x_n}(x',-0)\mathring{A}_0^{-,\pm}(\eta) + o(1), \qquad \xi_n \to \pm\infty. \end{aligned}$$

Сравнивая полученную асимптотику с (1.0.29) при $m=1$, получаем граничные условия для функции u_1:

$$u_1(x',\pm0,\eta) = \frac{\partial u_0}{\partial x_n}(x',+0)\mathring{A}_0^{+,\pm}(\eta) + \frac{\partial u_0}{\partial x_n}(x',-0)\mathring{A}_0^{-,\pm}(\eta), \qquad x' \in \mathbb{R}^{n-1}. \tag{4.3.3}$$

Полученные граничные условия и уравнения (1.0.26) с $m = 1$ позволяют однозначно определить функцию u_1. Для этого достаточно применить лемму 4.3.1 к полученной задаче. При этом легко видеть, что решение задачи (1.0.26), (4.3.3) имеет вид

$$u_1(x,\eta) = \sum_{\flat,\natural\in\{+,-\}} A^{\flat,\natural}(\eta) u^{\flat,\natural}(x),$$

где функции $u^{\flat,\natural}$ являются решением задачи (4.3.1) с правой частью $f = 0$ и граничными условиями

$$\begin{aligned} &u^{+,\pm}(x',\pm 0) = \frac{\partial u_0}{\partial x_n}(x',+0), \qquad u^{+,\pm}(x',\mp 0) = 0, \qquad x' \in \mathbb{R}^{n-1},\\ &u^{-,\pm}(x',\pm 0) = \frac{\partial u_0}{\partial x_n}(x',-0), \qquad u^{-,\pm}(x',\mp 0) = 0, \qquad x' \in \mathbb{R}^{n-1}, \end{aligned}$$

Согласно лемме 4.3.1, задачи для функций $u^{\flat,\natural}$ однозначно разрешимы. Функции $u^{\flat,\natural}$ принадлежат $W_2^q(\Omega^+_{\tau_0-\delta}) \cap W_2^q(\Omega^-_{\tau_0-\delta}) \cap W_2^1(\Omega)$ для всех $q \in \mathbb{N}$, бесконечно дифференцируемы в $\Omega^\pm_{\tau_0}$ и для каждого $\delta > 0$ все их производные равномерно ограничены в каждой из областей $\overline{\Omega^\pm_{\tau_0-\delta}}$.

По той же схеме, что и выше, исследуются задачи для остальных функций u_m и v_m. Свойства этих функций описывает лемма 1.0.1

Доказательство леммы 1.0.1. Доказательство леммы проведём по индукции. База индукции, случай $m = 1$, был уже разобран выше и построенные функции v_1, u_1 очевидно удовлетворяют всем утверждениям леммы.

Предположим теперь, что уже построены решения задач (1.0.26), (1.0.27), (1.0.28), (1.0.29) до некоторого значения $(m-1)$ с утверждаемыми свойствами и проверим утверждение леммы для значения m.

Обозначим:

$$F_0 := \frac{\xi_n^{m-2}}{(m-2)!}\frac{\partial^{m-2} f}{\partial x_n^{m-2}}(x',0) + (\Delta_{x'} + \lambda) v_{m-2}, \qquad F_j := 2\frac{\partial v_{m-1}}{\partial x_j}, \quad (4.3.4)$$

где $j = 1, \ldots, n-1$.

Подстановка рядов Тейлора (4.1.4), (4.1.5), (4.1.6) в уравнения (4.1.2), (1.0.26) с учётом сделанных предположений относительно поведения коэффициентов A_{ij}, A_j при $x_n \to 0$ немедленно приводит к равенствам для функций u_0 и u_q, $q \leqslant m-1$,

$$\begin{aligned}
&-\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_n^2}(x', \pm 0) = f(x', 0),\\
&-(\Delta_{x'} + \lambda)\frac{\partial^j u_0}{\partial x_n^j}(x', \pm 0) - \frac{\partial^{j+2} u_0}{\partial x_n^{j+2}}(x', \pm 0) = \frac{\partial^j f}{\partial x_n^j}(x', 0), \quad j \geqslant 1,\\
&-(\Delta_{x'} + \lambda)\frac{\partial^j u_q}{\partial x_n^j}(x', \pm 0) - \frac{\partial^{j+2} u_q}{\partial x_n^{j+2}}(x', \pm 0) = 0, \quad j \geqslant 0.
\end{aligned} \tag{4.3.5}$$

Из формул (1.0.32), (1.0.33) для функций v_p, v_{qj}, $q \leqslant m-1$ и индукционного предположения следует, что при $|\xi_n| > R_6$ эти функции представимы в виде (4.2.57), причём полином $T_0^{\pm}$ для функции v_q имеет вид

$$T_0^{\pm} = \sum_{j=0}^{q} \frac{1}{j!} \frac{\partial^j u_{q-j}}{\partial x_n^j}(x', \pm 0, \eta)\xi_n^j.$$

Подставим эти формулы в правую часть (1.0.30) уравнения в (1.0.28) для v_m и учтём соотношения (4.3.5). Тогда получим, что функция F_0 из (4.3.4) также представляется в виде (4.2.57), где соответствующий полином имеет вид

$$T_0^{\pm}(\xi_n, \eta) = -\sum_{j=2}^{m-2} \frac{1}{(j-2)!} \frac{\partial^j u_{m-j}}{\partial x_n^j}(x', \pm 0, \eta)\xi_n^{j-2}.$$

Из определения (4.3.4) введённых функций F_0 и F_j и индукционного предположения о функциях v_q, $q = 1, \ldots, m-1$, заключаем, что функции F_0 и F_j удовлетворяют предположениям леммы 4.2.10. Для функций F_0

и F_j верны оценки

$$\begin{aligned}\|F_0\|_{C(\overline{\Pi_{2R_6}\setminus\omega^\eta})} + \sum_{j=1}^{n-1}\|F_0\|_{C(\overline{\Pi_{2R_6}\setminus\omega^\eta})} + \sum_{j=0}^{n-1}\|F_0\|_{\mathfrak{H}} \\ + \eta^\vartheta\langle F_0\rangle^{(\vartheta)}_{\Pi_{2R_6}\setminus\omega^\eta} + \eta^\vartheta\sum_{j=1}^{n-1}\langle\nabla F_j\rangle^{(\vartheta)}_{\Pi_{2R_6}\setminus\omega^\eta} \\ \leqslant C\eta^{-(m-1)(n-2)},\end{aligned} \tag{4.3.6}$$

где константа C не зависит от η. Отметим ещё, что для функции $\overset{*}{Q}_0(\eta)$, вычисленной по формуле (4.2.60) для введённой функции F_0, верна легко проверяемая оценка

$$|\overset{*}{Q}_0(\eta)| \leqslant C\eta^{-(m-2)(n-2)}. \tag{4.3.7}$$

Через ϕ обозначим правую часть в граничном условии на $\partial\omega^\eta_{\mathrm{R}}$ для v_m в задаче (1.0.28). В силу индукционного предположения, из определения полиномов L_m и функции ϕ следует, что функция ϕ принадлежит пространству $C^{(1+\vartheta)}(\partial\omega^\eta_{\mathrm{R}})$ и выполнены равномерные по η оценки

$$\|\phi\|_{C(\partial\omega^\eta_{\mathrm{R}})} + \eta\|\nabla\phi\|_{C(\partial\omega^\eta_{\mathrm{R}})} + \eta^{1+\vartheta}\langle\nabla\phi\rangle^{(\vartheta)}_{\partial\omega^\eta_{\mathrm{R}}} \leqslant C\eta^{-(m-1)(n-2)}. \tag{4.3.8}$$

Применяя теперь лемму 4.3.1, немедленно заключаем, что задача (1.0.28) имеет единственное решение, принадлежащее пространству $\mathfrak{H}\cap C^{(1+\vartheta)}(\overline{\Pi^\eta})$. Далее добавим к этому решению функцию

$$\frac{\partial^j u_{m-1}}{\partial x_n}(x',+0,\eta)\mathring{v}^+(\xi,\eta) + \frac{\partial^j u_{m-1}}{\partial x_n}(x',-0,\eta)\mathring{v}^-(\xi,\eta),$$

что в силу задач (4.3.2) не изменяет задачи (1.0.28). Полученное таким образом решение задачи (1.0.28) и возьмём в качестве функции v_m. Оценки (4.3.6), (4.3.7), (4.3.8) и оценки из утверждения леммы 4.3.1 позволяют получить для построенного решения оценки (1.0.34) с заменой v_{mj} на v_m, но с зависимостью от переменной x' как от параметра. Вместе с тем, разделение переменных x' и (ξ,η) в функциях v_p, $p \leqslant m-1$, означает, что такое же разделение переменных присутствует в функциях F_m F_0, F_j, ϕ.

Поэтому аналогичное разделение переменных имеется и в решении v_m, что доказывает формулу (1.0.32) для v_m и означает выполнение оценок (1.0.34) и для функций v_{mj}.

Представление (1.0.33) есть представления (4.2.57), выписанные для решения задачи (1.0.28) с учётом структуры правой части уравнения. Сравнивая доказанные соотношения (1.0.32), (1.0.33) для v_m и асимптотику (1.0.29) для этой же функции, заключаем, что функция u_m должна удовлетворять следующим граничным условиям:

$$u_m(x', \pm 0, \eta) = \sum_{j=1}^{N_m} A^{\pm}_{mj}(\eta)\varphi_j(x'), \qquad x' \in \mathbb{R}^{n-1}. \tag{4.3.9}$$

Применяя теперь лемму 4.3.1 к задаче (1.0.26), (4.3.9), немедленно заключаем, что эта задача однозначно разрешима и решение имеет гладкость, указанную в утверждении данной леммы. С учётом наличия разделения переменных в граничном условии (4.3.9) теперь легко убедиться в справедливости формулы (1.0.32), где функции u_{mj} есть решения задачи из (1.0.26) с функциями $\varphi^{\pm}_m$ из (1.0.35) и краевыми условиями (1.0.36), (1.0.37). При этом лемма 4.3.1 обеспечивает утверждаемую гладкость функций u_{mj}. Лемма доказана. $\square$

4.4 Обоснование асимптотики

Цель данного параграфа — провести обоснование формальное асимптотики решения задачи (1.0.4), построенной в предыдущих параграфах.

Для произвольного натурального $N \geqslant 3$ обозначим

$$u_{\varepsilon,N}(x,\xi,\eta) := \chi^{\varepsilon}(x_n)u^{ex}_{\varepsilon,N}(x,\eta) + (1-\chi^{\varepsilon}(x_n))u^{in}_{\varepsilon,N}\big(x\varepsilon^{-1}, x', \eta\big), \tag{4.4.1}$$

$$u^{ex}_{\varepsilon,N}(x,\eta) := u_0(x) + \sum_{m=1}^{N} \varepsilon^m u_m(x,\eta),$$

$$u^{in}_{\varepsilon,N}(\xi,x',\eta) := \sum_{m=1}^{N} \varepsilon^m v_m(x',\xi,\eta).$$

Докажем, что функция $u_{\varepsilon,N}$ есть формальное асимптотическое решение задачи (1.0.4).

Лемма 4.4.1. *Функция $u_{\varepsilon,N}$ является решением задачи*

$$(\mathcal{L}-\lambda)u_{\varepsilon,N} = \chi^{\varepsilon} f + f_{\varepsilon,N} \quad \text{в} \quad \Omega^{\varepsilon},$$

$$u_{\varepsilon,N} = 0 \quad \text{на} \quad x \in \partial\Omega \cup \in \partial\theta^{\varepsilon}_{\mathrm{D}}, \qquad \frac{\partial u_{\varepsilon,N}}{\partial \mathrm{n}} + a(u_{\varepsilon,N}) = \phi_{\varepsilon,N} \quad \text{на} \quad \partial\theta^{\varepsilon}_{\mathrm{R}},$$

где $f_{\varepsilon,N} \in L_2(\Omega^{\varepsilon})$, $\phi_{\varepsilon,N} \in L_2(\partial\theta^{\varepsilon}_{\mathrm{R}})$ и верны оценки

$$\|f_{\varepsilon,N}\|_{L_2(\Omega^{\varepsilon})} \leqslant C\varepsilon^{-\frac{1}{4}}\Big((\varepsilon\eta^{-n+2})^{N-1} + \varepsilon^{\frac{N}{2}}\Big), \tag{4.4.2}$$

$$\|\phi_{\varepsilon,N}\|_{L_2(\partial\omega^{\varepsilon}_{\mathrm{R}})} \leqslant C(\varepsilon\eta^{-n+2})^{N}, \tag{4.4.3}$$

а константы C не зависят от ε и η, но зависят от N.

Доказательство. Выполнение граничных условий на $\partial\Omega$ и $\partial\theta^{\varepsilon}_{\mathrm{D}}$ следует из свойств функции χ^{ε} и граничных условий из задач (1.0.27), (1.0.28)для коэффициентов внутреннего и внешнего разложения.

Обозначим

$$\phi_{\varepsilon,N} := \frac{\partial u^{in}_{\varepsilon,N}}{\partial \mathrm{n}} + a(u^{in}_{\varepsilon,N}).$$

В силу определения функции $u_{\varepsilon,N}$ ясно, что граничное условие на $\partial\omega^{\eta}_{\mathrm{R}}$ выполнено именно с такой функцией $\phi_{\varepsilon,N}$. В силу представлений (1.0.32) и оценок (1.0.34), функция $u^{in}_{\varepsilon,N}(x\varepsilon^{-1}, x', \eta)$ удовлетворяет равномерной по ε, η и x оценке на $\partial\omega^{\eta}_{\mathrm{R}}$:

$$|u^{in}_{\varepsilon,N}(x\varepsilon^{-1}, x', \eta)| \leqslant \varepsilon\eta^{-n+2}|\Phi_{N,1}(x')|,$$

где $\Phi_{N,1} \in L_2(S) \cap C(S)$ — некоторая функция, не зависящая от ε и η и ограниченная равномерно по x'. Считая теперь $u^{in}_{\varepsilon,N}$ малой величиной на $\partial\omega^{\eta}_{\mathrm{R}}$, разложим функцию $a(u^{in}_{\varepsilon,N})$ в ряд Тейлора до N–го члена с остатком в форме Лагранжа. Тогда получим, что

$$a(u^{in}_{\varepsilon,N}) = \sum_{j=0}^{N} \frac{a^{(j)}(0)}{j!}(u^{in}_{\varepsilon,N})^{j} + \tilde{a}_N, \tag{4.4.4}$$

где $\tilde{a}_N = \tilde{a}_N(x, \varepsilon, \eta)$ — некоторая функция, для которой верна равномерная по x, ε, η оценка

$$|\tilde{a}(x, \varepsilon, \eta)| \leqslant (\varepsilon\eta^{-n+2})^{N+1}|\Phi_{N,2}(x')|, \tag{4.4.5}$$

где $\Phi_{N,2} \in L_2(S) \cap C(S)$ — некоторая функция, не зависящая от ε и η и ограниченная равномерно по x'. Полиномы L_m в правых частях краевых условий на $\partial\omega^\eta_{\mathrm{R}}$ в (1.0.27), (1.0.28) получаются в результате подстановки функции $u^{in}_{\varepsilon,N}$ в сумму в правой части равенства (4.4.4). Поэтому, вновь учитывая лемму 1.0.1 и оценку (4.4.5), легко вывести требуемую оценку (4.4.3) для $\phi_{\varepsilon,N}$.

Обозначим:

$$f_{\varepsilon,N} := (\mathcal{L} - \lambda)u_{\varepsilon,N} - \chi^\varepsilon f.$$

Используя уравнения из задач (4.1.2), (1.0.26), (1.0.27), (1.0.28), прямыми вычислениями проверяем, что

$$\begin{aligned}
&f_{\varepsilon,N} = f^{(1)}_{\varepsilon,N} + f^{(2)}_{\varepsilon,N} + f^{(3)}_{\varepsilon,N},\\
&f^{(1)}_{\varepsilon,N} := (\chi^\varepsilon(x_n) - 1)\left(f(x) - \sum_{j=1}^{N-2}\frac{x_n^j}{j!}\frac{\partial^j f}{\partial x_n^j}(x', 0)\right),\\
&f^{(2)}_{\varepsilon,N} = \varepsilon^{N-1}\big(\chi^\varepsilon(x_n) - 1\big)\left(\lambda(v_{N-1} + \varepsilon v_N) + 2\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial^2 v_N}{\partial\xi_j\partial x_j}\right),\\
&f^{(3)}_{\varepsilon,N} := -2(\chi^\varepsilon)'\frac{\partial}{\partial x_n}(u^{ex}_{\varepsilon,N} - u^{in}_{\varepsilon,N}) - (u^{ex}_{\varepsilon,N} - u^{in}_{\varepsilon,N})(\chi^\varepsilon)''.
\end{aligned}$$

Функция $f^{(1)}_{\varepsilon,N}$ оценивается элементарным образом на основе свойств функции f и стандартных остатков в формуле Тейлора в форме Лагранжа:

$$\|f^{(1)}_{\varepsilon,N}\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)} \leqslant C\varepsilon^{\frac{N+1}{2}}, \tag{4.4.6}$$

где константа C не зависит от ε. Оценку нормы функции $f^{(2)}_{\varepsilon,N}$ несложно получить прямыми вычислениями, если учесть, что эта функция не равна нулю лишь при $|x_n| \leqslant 2\varepsilon^{\frac{1}{2}}\tau_0$, что фактически означает необходимость оценки функций v_{N-1} и v_N при $|\xi_n| \leqslant 2\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\tau_0$. Это несложно сделать с помощью оценок (1.0.34), если учесть, что нормы $\|v_{mj}\|_{\mathfrak{H}}$ позволяет равномерно по $\xi \in \Pi_{2\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\tau_0} \setminus \Pi_{\frac{3}{2}R_6}$ оценить $|v_{mj}(\xi)|$ и $|\nabla_\xi v_{mj}(\xi)|$. Окончательная оценка для функции $f^{(2)}_{\varepsilon,N}$ имеет вид

$$\|f^{(2)}_{\varepsilon,N}\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)} \leqslant C\varepsilon^{\frac{1}{4}}\Big((\varepsilon\eta^{-n+2})^{N-1} + \varepsilon^{\frac{N-1}{2}}\Big). \tag{4.4.7}$$

Аналогичным образом оценивается и функция $f^{(3)}_{\varepsilon,N}$. При этом необходимо учитывать условия согласования внешнего и внутреннего разложений, обеспечивающие требуемую малость разности $u^{ex}_{\varepsilon,N} - u^{in}_{\varepsilon,N}$, а также тот факт, что функция $f^{(3)}_{\varepsilon,N}$ не равна нулю лишь при $\varepsilon^{\frac{1}{2}}\tau_0 \leqslant |x_n| \leqslant \varepsilon^{\frac{1}{2}}\tau_0$. В результате получаем

$$\|f^{(3)}_{\varepsilon,N}\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)} \leqslant C\varepsilon^{-\frac{1}{4}}\Big((\varepsilon\eta^{-n+2})^{N-1} + \varepsilon^{\frac{N}{2}}\Big).$$

Отсюда и из (4.4.6), (4.4.7) вытекает (4.4.2). Лемма доказана. $\square$

Функция $\hat{u}_{\varepsilon,N} := u_{\varepsilon,N} - u_\varepsilon$ является решением задачи

$$(\mathcal{L}-\lambda)\hat{u}_\varepsilon = f_{\varepsilon,N} \quad \text{в} \quad x \in \Omega^\varepsilon, \qquad \hat{u}_{\varepsilon,N} = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega \cup \theta^\varepsilon_{\mathrm{D}},$$
$$\frac{\partial \hat{u}_{\varepsilon,N}}{\partial N} + a(u_{\varepsilon,N}) - a(u_\varepsilon) = g_{\varepsilon,N} \quad \text{на} \quad \partial\theta^\varepsilon_R.$$

Решение этой задачи удовлетворяет интегральному тождеству

$$\begin{aligned}\mathfrak{h}_0(\hat{u}_{\varepsilon,N}, \hat{u}_{\varepsilon,N}) + (a(u_{\varepsilon,N}) - a(u_\varepsilon), \hat{u}_{\varepsilon,N})_{L_2(\partial\theta^\varepsilon_{\mathrm{R}})}& \\ = (f, \hat{u}_{\varepsilon,N})_{L_2(\Omega^\varepsilon)} + (g_\varepsilon, \hat{u}_{\varepsilon,N})_{L_2(\partial\theta^\varepsilon_{\mathrm{R}})}&,\end{aligned} \tag{4.4.8}$$

где, напомним, форма $\mathfrak{h}_0$ была определена в (1.0.7). Из неравенства (2.3.1) с $u = u_{\varepsilon,N}$, $v = u_\varepsilon$ следует

$$\mathfrak{h}_0(\hat{u}_{\varepsilon,N}, \hat{u}_{\varepsilon,N}) + (a(u_{\varepsilon,N}) - a(u_\varepsilon), \hat{u}_{\varepsilon,N})_{L_2(\partial\theta^\varepsilon_{\mathrm{R}})} \geqslant C\|\hat{u}_{\varepsilon,N}\|^2_{W^1_2(\Omega^\varepsilon)},$$

где константа C не зависит от $\hat{u}_{\varepsilon,N}$, ε и η. Оценим левую часть равенства (4.4.8) снизу с помощью последнего неравенства, а правую часть равенства — сверху с помощью неравенства Коши–Буняковского и (4.4.2), (4.4.3). В результате выводим оценку

$$\|u_{\varepsilon,N} - u_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega^\varepsilon)} \leqslant C\varepsilon^{-\frac{1}{4}}\Big((\varepsilon\eta^{-n+2})^{N-1} + \varepsilon^{\frac{N-1}{2}}\Big). \tag{4.4.9}$$

Аналогично тому, как были оценены функции $f_{\varepsilon,N}^{(2)}$ и $f_{\varepsilon,N}^{(3)}$, несложно проверить, что для членов разложения (4.4.1) верны соотношения (1.0.39). Эти соотношения позволяют пренебречь членами перед ε^{N-1} и ε^N в функции, не нарушая при этом оценку (4.4.9), так что в итоге получаем

$$\|u_{\varepsilon,N-2} - u_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega^\varepsilon)} \leqslant C\varepsilon^{-\frac{1}{4}}\Big((\varepsilon\eta^{-n+2})^{N-1} + \varepsilon^{\frac{N-1}{2}}\Big).$$

Полученная оценка завершает доказательство теоремы 1.0.4.

Глава 5

Асимптотика решения в случае усредненного третьего нелинейного краевого условия

5.1 Формальные асимптотики

Введём в окрестности полостей θ^ε растянутые переменные $\xi = (\xi', \xi_n) = (x'\varepsilon^{-1}, x_n\varepsilon^{-1})$. Асимптотическое разложение решения краевой задачи (1.0.4) будем искать в виде комбинации внешнего u_ε^{ex} и внутреннего u_ε^{in} разложений

$$u_\varepsilon(x, \xi, \eta) = \chi^\varepsilon(x_n) u_\varepsilon^{ex}(x, \eta) + (1 - \chi^\varepsilon(x_n)) u_\varepsilon^{in}(\xi, x', \eta).$$

Внешнее и внутреннее разложения вводятся следующим образом:

$$u_\varepsilon^{ex}(x, \eta) = u_0(x, \eta) + \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m u_m(x, \eta), \tag{5.1.1}$$

$$u_\varepsilon^{in}(\xi, x', \eta) = v_0(\xi, x', \eta) + \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m v_m(\xi, x', \eta). \tag{5.1.2}$$

Целью формального построения асимптотик является определение коэффициентов внутреннего и внешнего разложений.

Выпишем задачи для коэффициентов внешнего разложения. Для этого подставим разложение (5.1.1) в задачу (1.0.4) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε. Тогда для функции u_0 получим уравнение и краевое условие на $\partial\Omega$ из (1.0.18), а для остальных функций u_m — задачи (1.0.46).

Теперь выпишем задачи на коэффициенты внутреннего разложения. В силу теорем вложения соболевских пространств в пространства непрерывно дифференцируемых функций, условие (1.0.24) означает, что функция f бесконечно дифференцируема при $|x_n| < \tau_0$. Разложим функцию f в ряд Тейлора при $x_n \to 0$, а затем сделаем замену $x_n = \varepsilon\xi_n$:

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m f}{\partial x_n^m}(x', 0) x_n^m = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^m}{m!} \frac{\partial^m f}{\partial x_n^m}(x', 0) \xi_n^m. \tag{5.1.3}$$

Разлагая функцию $a(x', \varepsilon\xi_n, u_\varepsilon^{in})$ в асимптотический ряд по степеням ε, получаем соотношение (1.0.43), где T_m — некоторые фиксированные полиномы по ξ_n, $\operatorname{Re} v_1, \ldots, \operatorname{Re} v_m$, $\operatorname{Im} v_1, \ldots, \operatorname{Im} v_m$ с коэффициентами, бесконечно дифференцируемыми по x' и v_0, такие что для каждого монома вида

$$C(x', v_0)\xi_n^{p_0} (\operatorname{Re} v_1)^{p_1} (\operatorname{Im} v_1)^{q_1} (\operatorname{Re} v_2)^{p_2} (\operatorname{Im} v_2)^{q_2} \ldots (\operatorname{Re} v_m)^{p_m} (\operatorname{Im} v_m)^{q_m}$$

выполнено

$$p_0 + p_1 + q_1 + 2(p_2 + q_2) + \ldots + m(p_m + q_m) \leqslant m.$$

В частности,

$$T_1(x', \xi_n, v_1) = \frac{\partial a}{\partial u_\rho}(x', 0, v_0) \operatorname{Re} v_1 + \frac{\partial a}{\partial u_{\mathrm{i}}}(x', 0, v_0) \operatorname{Im} v_1 + \frac{\partial a}{\partial x_n} a(x', 0, v_0)\xi_n.$$

Подставляя последнее разложение, (5.1.3) и (5.1.2) в задачу (1.0.4) и собирая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим задачи (1.0.42) для функций внутреннего разложения.

Проведём согласование внешнего и внутреннего разложений. Выпишем (асимптотические) ряды Тейлора при $x_n \to \pm 0$ для функций u_m и сделаем замену $x_n = \varepsilon\xi_n$:

$$u_m(x, \eta) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \frac{\partial^j u_m}{\partial x_n^j}(x', \pm 0, \eta) x_n^j = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^j}{j!} \frac{\partial^j u_m}{\partial x_n^j}(x', \pm 0, \eta) \xi_n^j. \tag{5.1.4}$$

Согласно методу согласования асимптотических разложений, эти равенства означают, что функции v_m должны иметь следующие асимптотики при $\xi_n \to \pm\infty$:

$$\begin{aligned} v_m(\xi, x', \eta) = P_m^{\pm}(x', \xi_n, \eta) + \frac{\partial u_{m-1}}{\partial x_n}(x', \pm 0, \eta)\xi_n& \\ + u_m(x', \pm 0, \eta) + o(1)&, \end{aligned} \tag{5.1.5}$$

$$P_m^{\pm} := \sum_{j=2}^{m} \frac{1}{j!} \frac{\partial^j u_{m-j}}{\partial x_n^j}(x', \pm 0, \eta)\xi_n^j.$$

Краевые задачи (1.0.42), (5.1.5) обладают $\square$–периодической структурой по ξ'. Поэтому и решения этих задач будем строить периодическими. Для этого достаточно заменить краевые задачи (1.0.42), (5.1.5) на аналогичные задачи в $\Pi \setminus \overline{\omega^\eta}$ с периодическими граничными условиями на боковых гранях Π. Построив подходящие решения задач в $\Pi \setminus \overline{\omega^\eta}$, решения задач (1.0.42), (5.1.5) получим затем простым $\square$–периодическим продолжением по ξ'.

Решения упомянутых задач в $\Pi \setminus \overline{\omega^\eta}$ зависят от параметра η. Поэтому помимо разрешимости этих задач, необходимо исследовать также характер зависимости их решений от параметра η. Для этого в следующих параграфах мы вначале исследуем модельную краевую задачу в $\Pi \setminus \overline{\omega^\eta}$, а затем применим полученные результатам к полученным выше задачам для v_m. Это исследование составляет одну из основных трудностей в настоящей работе.

5.2 Модельная задача для коэффициентов внутреннего разложения

В данном параграфе рассматривается модельная краевая задача в области $\Pi \setminus \overline{\omega^\eta}$ для функций внутреннего разложения. Исследуется разрешимость рассматриваемой задачи и устанавливаются предварительные факты о зависимости её решения от параметра η.

5.2.1 Формулировка задачи

Рассмотрим модельную краевую задачу:

$$-\Delta_\xi v = F \quad \text{в} \quad \Pi \setminus \overline{\omega^\eta}, \qquad \frac{\partial v}{\partial \nu_\xi} = \phi \quad \text{на} \quad \partial\omega^\eta, \tag{5.2.1}$$

$$v|_{\xi_i=-b_i} = v|_{\xi_i=b_i}, \qquad \left.\frac{\partial v}{\partial \xi_i}\right|_{\xi_i=-b_i} = \left.\frac{\partial v}{\partial \xi_i}\right|_{\xi_i=b_i}, \quad i=1,\dots,n-1, \tag{5.2.2}$$

где $F \in L_2(\Pi \setminus \omega^\eta)$, $\phi \in L_2(\partial\omega^\eta)$ — некоторые функции. Решение краевой задачи (5.2.1), (5.2.2) мы понимаем в обобщенном смысле. Обобщенным решением задачи (5.2.1), (5.2.2) называется функция v, принадлежащая пространству $W_2^1(\Pi_R \setminus \omega^\eta)$ для каждого $R > 0$ и удовлетворяющая следующему интегральному тождеству:

$$(\nabla_\xi v, \nabla_\xi w)_{L_2(\Pi_R \setminus \omega^\eta)} - (\phi, w)_{L_2(\partial\omega^\eta)} = (F, w)_{L_2(\Pi_R \setminus \omega^\eta)}$$

для всех функций $w \in C^2(\overline{\Pi \setminus \omega^\eta})$ удовлетворяющих периодическим граничным условиям на боковых гранях Π и тождественно равных нулю при $|\xi_n| > d > 0$ для некоторого $d > 0$, зависящего от выбора функции w.

Поведение решения задачи (5.2.1), (5.2.2) на бесконечности мы уточним далее в процессе исследования ее разрешимости.

5.2.2 Операторное уравнение

В данном параграфе мы рассматриваем краевую задачу (5.2.1), (5.2.2) с финитной правой частью F и с однородным граничным условием на $\partial\omega^\eta$. На функцию F здесь налагаем те же условия, что и в §4.2.2. Решение такой задачи будем искать ограниченным на бесконечности, а именно удовлетворяющим условию (4.2.3).

Наша дальнейшая цель состоит в сведении краевой задачи (5.2.1), (5.2.2), (4.2.3) к подходящему операторному уравнению. Схема сведения краевой задачи (5.2.1), (5.2.2), (4.2.3) к операторному уравнению повторяет аналогичную схему, применявшуюся для задачи (4.2.1), (4.2.2) в §4.2.1, но имеются и некоторые отличия. Они связаны с тем, что в §4.2.1 в области Π вырезалась ещё одна полость, на границе которого ставилось условие Дирихле. Это гарантировало однозначную разрешимость модельной задачи для любых правых частей в уравнениях и граничных условиях. В нашем случае полость с краевым условием Дирихле отсутствует, что приводит к возникновению определенных условий разрешимости. Далее мы кратко описываем общую схему рассуждений, применявшуюся к задаче (4.2.1), (4.2.2) , детально останавливаясь только на основных необходимых модификациях.

Возьмем произвольную функцию $g \in L_2(\Pi_{R_6})$, продолжим её нулём $\Pi \setminus \Pi_{R_0}$ и рассмотрим вспомогательную задачу (4.2.4), (5.2.2). Данная задача решается методом разделения переменных и ответ дается рядом (4.2.5). Также несложно убедиться, что при $|\xi_n| \geqslant R_6$ функции $X_k^{\pm}$ имеют вид

$$
\begin{aligned}
&X_k^{\pm}(\xi) = A_k^{\pm} e^{-2\pi|k_b|(\xi_n - R_6)}, \qquad \pm\xi_n \geqslant R,\\
&A_k^{\pm} := -\frac{1}{2\pi|k_b|} \int\limits_{\Pi_{R_0}^{\pm}\setminus\Pi_{R_6-1}^{\pm}} g(t) e^{2\pi \mathrm{i} k_b\cdot t'} \operatorname{sh} 2\pi|k_b| t_n dt,
\end{aligned}
$$

и для констант $A_k^{\pm}$ верна оценка

$$
|A_k^{\pm}| \leqslant \frac{C e^{2\pi|k_b|R_6}}{|k_b|^{\frac{3}{2}}} \|g\|_{L_2(\Pi_{R_6}^{\pm}\setminus\Pi_{R_6-1}^{\pm})},
$$

где константа C не зависит от k и g.

Определим функцию $V_1 = V_1(\xi)$ так, как это было сделано перед леммой 4.2.1. Согласно лемме 4.2.1, функцию V_1 можно представить как $V_1 = \mathcal{B}_1 g$, где $\mathcal{B}_1$ — линейный ограниченный оператор, действующий из $L_2(\Pi_{R_6})$ в $W_2^2(\Pi_R^+ \setminus \Pi_{R_6-1}^+) \oplus W_2^2(\Pi_R^- \setminus \Pi_{R_6-1}^-)$ для каждого $R > R_6 - 1$.

Введем еще одну вспомогательную задачу:

$$
-\Delta_\xi V_2 = g \quad \text{в} \quad \Pi^\eta, \qquad V_2 = V_1^{\pm} \quad \text{на} \quad \square\times\{\pm R_6\}, \qquad \frac{\partial V_2}{\partial \nu_\xi} = 0 \quad \text{на} \quad \partial\omega^\eta,
$$

с периодическими граничными условиями (5.2.2). Аналогично тому, как это было сделано в §4.2.2, показывается, что эта задача однозначно разрешима и функция V_2 представима в виде: $V_2 = \mathcal{B}_2(\eta)g$, где $\mathcal{B}_2(\eta)$ — линейный ограниченный оператор, действующий из $L_2(\Pi_{R_6})$ в $W_2^2(\Pi^\eta)$. Справедлива оценка

$$\|V_2\|_{W_2^2(\Pi^\eta)} \leqslant C\|g\|_{L_2(\Pi_{R_6})}, \tag{5.2.3}$$

где константа C не зависит от V_2 и g, но зависит от R_6 и η.

Решение задачи (5.2.1), (5.2.2) строится в виде (4.2.11), где $\mathcal{B}_3(\eta)$ — линейный ограниченный оператор, действующий из $L_2(\Pi_{R_6})$ в $W_2^2(\Pi^\eta)$. Аналогично выводу уравнения (4.2.12) показывается, что функция v является решением краевой задачи (5.2.1), (5.2.2), если функция g является решением уравнения (4.2.12), где функцию F будем считать продолженной нулём внутрь ω^η. Отметим, что в силу определения (4.2.12) оператора $\mathcal{B}_4$, результат его действия отличен от нуля только в $\Pi_{R_6-\frac{1}{3}} \setminus \Pi_{R_6-\frac{2}{3}}$. Поэтому далее мы продолжим этот результат нулём внутрь ω^η и будем считать, что оператор $\mathcal{B}_4$ действует в пространстве $L_2(\Pi_{R_6})$. Также в силу продолжения функции F нулём внутрь ω^η решения уравнения (4.2.12) необходимо равны нулю в ω^η.

Следующая лемма утверждает эквивалентность исходной краевой задачи (5.2.1), (5.2.2), (4.2.3) операторному уравнению (4.2.12) и доказывается аналогично лемме 4.2.2.

Лемма 5.2.1. *Уравнение (4.2.12) эквивалентно задаче (5.2.1), (5.2.2), (4.2.3): для каждого решения g уравнения (4.2.12) существует решение задачи (5.2.1), (5.2.2), (4.2.3) определённое равенством (4.2.11), и для каждого решения v задачи (5.2.1), (5.2.2), (4.2.3) существует единственное решение g уравнения (4.2.12), связанное с v равенством (4.2.11).*

Для оператора $\mathcal{B}_4(\eta)$ остаётся в силе лемма 4.2.3. Так как оператор $\mathcal{B}_4(\eta)$ компактен, то к уравнению (4.2.12) применимы альтернативы Фредгольма. В частности, уравнение (4.2.12) разрешимо лишь при условии ортогональности правой части этого уравнения всем линейно независимым решениям соответствующего сопряжённого однородного уравнения

$$(\mathcal{I}+\mathcal{B}_4^*(\eta))h_0=0. \tag{5.2.4}$$

Лемма 5.2.2. *Однородное уравнение (5.2.4) и соответствующее однородное уравнение (4.2.12) с $F=0$ имеют ровно по одному нетривиальному решению, которые даются формулами*

$$\begin{aligned} &h_0(x)\equiv 1, \quad x\in\Pi^\eta, \qquad h_0(x)\equiv 0, \quad x\in\omega^\eta,\\ &g_0(x)=\Delta_\xi\left(\chi_1(\xi_n)(R_6-|\xi_n|)\right), \quad x\in\Pi_{R_6}. \end{aligned} \tag{5.2.5}$$

Доказательство. Обозначим $h_0=h_0(x)\equiv 1$ в Π^η. Для любой функции $g\in L_2(\Pi^\eta)$ справедливо равенство

$$((\mathcal{I}+\mathcal{B}_4(\eta))g,h_0)_{L_2(\Pi^\eta)}=-\int\limits_{\Pi^\eta}\Delta_\xi\mathcal{B}_3(\eta)g\,d\xi=0.$$

Следовательно, $h_0\equiv 1$ является решением уравнения (5.2.4). Покажем, что других решений нет.

Согласно альтернативам Фредгольма, уравнение (4.2.12) с $F=0$ и сопряжённое с ним однородное уравнение (5.2.4) имеют одно и то же конечное число линейно независимых решений. Уравнение (4.2.12) с $F=0$ эквивалентно краевой задаче (5.2.1), (5.2.2), (4.2.3) с однородной правой частью и однородным граничным условием на $\partial\omega^\eta$. Такая задача имеет единственное решение — константу. Поэтому уравнения (5.2.4) и (4.2.12) с $F=0$ имеют ровно по одному решению. Решение уравнения (5.2.4) уже было найдено выше. Решение уравнения (4.2.12) с $F=0$ соответствует функции $u\equiv 1$ по формуле (4.2.11). На основе рассуждений из доказательства леммы 4.2.2 несложно проверить, что это решение даётся формулой из (5.2.5). Лемма доказана. □

Пусть $\chi_4=\chi_4(\xi)$ — некоторая бесконечно дифференцируемая функция, равная единице в фиксированной окрестности полости ω^η для всех $\eta\in[0,1]$ и нулю вне некоторой большей окрестности, лежащей строго внутри Π_{R_6-1}. Определим вектор–функцию

$$\Xi(t,\xi) := (1+(t-1)\chi_4(\xi))\xi, \tag{5.2.6}$$

где t — положительный вещественный параметр. Ясно, что эта вектор–функция бесконечно дифференцируемая и является диффеоморфизмом области $\overline{\Pi}$ на себя при $t \in [1-t_0, 1+t_0]$ для некоторого фиксированного достаточно малого $t_0 > 0$. В окрестности полостей ω^η диффеоморфизм Ξ действует как локальное растяжение в t раз. Поэтому для произвольных $\eta_1, \eta_2 \in (0,1)$ таких, что $\eta_2\eta_1^{-1} \in [1-t_0, 1+t_0]$, диффеоморфизм $\Xi(\eta_2\eta_1^{-1}, \xi)$ переводит область $\Pi \setminus \omega^{\eta_1}$ в $\Pi \setminus \omega^{\eta_2}$, а область Π^{η_1} — в область Π^{η_2}. Через $\Xi^{-1}(t,\xi)$ обозначим обратный диффеоморфизм к Ξ.

Выберем теперь произвольно $\eta_0 \in (0,1]$ и в области $\overline{\Pi}\backslash\omega^\eta$ введём новые переменные $\tilde{\xi} = \Xi(\eta_0\eta^{-1}, \xi)$, где $\eta \in (0,1]$ — произвольное число, такое что $\eta_0\eta^{-1} \in [1-t_0, 1+t_0]$. В силу свойств диффеоморфизма Ξ, переменные $\tilde{\xi}$ изменяются в $\Pi \setminus \omega^{\eta_0}$. Через $\Upsilon = \Upsilon(\xi,\eta)$ обозначим соответствующий якобиан замены, а именно,

$$\Upsilon(\xi,\eta) := \det{}^{-1}\left(\frac{\partial \Xi}{\partial \xi_1}(\eta_0\eta^{-1},\xi)\ldots \quad \frac{\partial \Xi}{\partial \xi_n}(\eta_0\eta^{-1},\xi)\right). \tag{5.2.7}$$

В силу определения (5.2.6) диффеоморфизма Ξ, функция Υ представляется в виде

$$\Upsilon(\xi,\eta) = 1 + (\eta-\eta_0)\Upsilon_1(\tilde{\xi},\eta), \tag{5.2.8}$$

где функция Υ_1 бесконечно дифференцируема по $(\xi,\eta) \in \overline{\Pi} \setminus \omega^{\eta_0} \times [\eta_0 - \delta(\eta_0), \eta_0 + \delta(\eta_0)]$ с некоторым $\delta(\eta_0) > 0$ и обращается в нуль вне носителя функции χ_2 для всех рассматриваемых значений η. Выполнено соотношение

$$\Upsilon(\xi,\eta) = \frac{\eta^n}{\eta_0^n} \quad \text{на множестве} \quad \{\xi : \, \chi_2(\xi) = 1\}. \tag{5.2.9}$$

Отметим ещё очевидную формулу

$$\Upsilon\Delta_\xi = \Delta_{\tilde{\xi}} + (\eta-\eta_0)\mathcal{B}_9(\eta_0,\eta), \tag{5.2.10}$$

где $\mathcal{B}_9$ — некоторый дифференциальный оператор второго порядка с финитными коэффициентами, не равными нулю только на носителе функции χ_4. Эти коэффициенты бесконечно дифференцируемы по $(\tilde{\tilde{\xi}}, \eta)$, где $\tilde{\tilde{\xi}}$ меняется по носителю функции χ_4 и $\eta \in [\eta_0 - \delta(\eta_0), \eta_0 + \delta(\eta_0)]$, и равномерно ограничены вместе со всеми своими производными по пространственным переменным и параметру η. Оператор $\mathcal{B}_9$ удовлетворяет равенству

$$(\eta - \eta_0)\mathcal{B}_9(\eta_0, \eta) = \Upsilon \Delta_\xi \Upsilon^{-1} - \Delta_{\tilde{\xi}}. \tag{5.2.11}$$

Следующая лемма описывает зависимость оператора $\mathcal{B}_4$ от параметра η.

Лемма 5.2.3. *Оператор $\mathcal{B}_4(\eta)$ непрерывен по $\eta \in [0,1]$.*

Доказательство. Для заданной функции $g \in L_2(\Pi_{R_6})$ через V_2^0 обозначим решение задачи

$$-\Delta_\xi V_2^0 = g \quad \text{в} \quad \Pi_{R_6}, \qquad V_2^0 = V_1^\pm \quad \text{на} \quad \square \times \{\pm R_6\},$$

с периодическими граничными условиями (5.2.2) и примем его в качестве функции V_2 для $\eta = 0$. Это позволяет доопределить оператор $\mathcal{B}_4$ для $\eta = 0$ прежней формулой (4.2.12). Из этой общей формулы также немедленно следует, что для любой пары значений $\eta_1, \eta_2 \in [0,1]$ верно равенство

$$\big(\mathcal{B}_4(\eta_2) - \mathcal{B}_4(\eta_1)\big) = 2\chi_1' \frac{\partial}{\partial \xi_n}\big(\tilde{V}_{\eta_2} - \tilde{V}_{\eta_1}\big) + \big(\tilde{V}_{\eta_2} - \tilde{V}_{\eta_1}\big)\chi_1'', \tag{5.2.12}$$

где обозначено

$$\tilde{V}_\eta(\xi) := V_2(\xi, \eta) - \chi_1(\xi_n) V_1(\xi, \eta).$$

Функция $\tilde{V}_\eta$ является решением уравнения

$$\mathcal{B}_{10}(\eta)\tilde{V}_\eta = \tilde{g}, \qquad \tilde{g} := (1 - \chi_1)g - 2\chi_1' \frac{\partial V_1}{\partial \xi_n} - \chi_1'' V_1, \tag{5.2.13}$$

где $\mathcal{B}_{10}(\eta)$ — оператор $-\Delta_\xi$ в области Π^η с краевым условием Дирихле на $\square \times \{\pm R_6\}$, краевым условием Неймана на $\partial\omega^\eta$ и периодическими краевыми условиями (5.2.2). Такой оператор самосопряжён и полуограничен снизу на области определения, состоящей из функций из $W_2^2(\Pi^\eta)$, удовлетворяющих указанным краевым условиям. Из [12, Теор. 1.1, Лем. 2.1] сразу следует, что при достаточно малых η верна оценка

$$\|\tilde{V}_\eta - \tilde{V}_0\|_{W_2^1(\Pi_{R_6}\setminus\Pi_{R_6-\frac{2}{3}})} \leqslant C\eta\|\tilde{g}\|_{L_2(\Pi_{R_6})}$$

с константой C, не зависящей от η и $\tilde{g}$. Отсюда, из (5.2.12) и ограниченности оператора $\mathcal{B}_1$ вытекает непрерывность оператора $\mathcal{B}_4(\eta)$ в точке $\eta = 0$.

Выберем и зафиксируем число $\eta_0 \in (0,1]$ и возьмём произвольное $\eta \in (0,1]$, достаточно близкое к η_0. В уравнении (5.2.13) затем перейдём к переменным $\tilde{\xi} = \Xi(\eta_0\eta^{-1}, \xi)$ и учтём формулу (5.2.10). Тогда получим следующее уравнение для функции $\tilde{V}_\eta$, выраженной в переменных $\tilde{\xi}$:

$$\big(\mathcal{B}_{10}(\eta_0) + (\eta-\eta_0)\mathcal{B}_9(\eta_0,\eta)\big)\tilde{V}_\eta(\Xi^{-1}) = \Upsilon\tilde{g}.$$

С учётом описанных выше свойств коэффициентов оператора $\mathcal{B}_9$ сразу заключаем, что данное уравнение можно решить следующим образом:

$$\tilde{V}_\eta(\Xi^{-1}) = \big(\mathcal{B}_{10}(\eta_0) + (\eta-\eta_0)\mathcal{B}_9(\eta_0,\eta)\big)^{-1}\Upsilon\tilde{g}.$$

Из этой формулы, (5.2.8) и равномерной ограниченности коэффициентов оператора $\mathcal{B}_9$ следует неравенство

$$\|\tilde{V}_\eta(\Xi^{-1}) - \tilde{V}_{\eta_0}\|_{W_2^2(\Pi^{\eta_0})} \leqslant C|\eta-\eta_0|\|\tilde{g}\|_{L_2(\Pi_{R_6})},$$

где константа C не зависит от η и $\tilde{g}$. Учитывая теперь определения диффеоморфизма Ξ, немедленно получаем:

$$\|\tilde{V}_\eta - \tilde{V}_{\eta_0}\|_{W_2^1(\Pi_{R_6}\setminus\Pi_{R_6-1})} \leqslant C|\eta-\eta_0|\|\tilde{g}\|_{L_2(\Pi_{R_6})},$$

где константа C не зависит от η и $\tilde{g}$. Отсюда и из (5.2.12) уже вытекает непрерывность оператора $\mathcal{B}_4(\eta)$ в точке η_0. Лемма доказана. $\square$

Так как уравнение (5.2.4) имеет единственное решение — константу, то уравнение (4.2.12) разрешимо, если выполнено условие

$$\int\limits_{\Pi^\eta} F\,d\xi = 0.$$

Тогда в силу теоремы Банаха об обратном операторе существует ограниченный обратный оператор $(\mathcal{I}+\mathcal{B}_4(\eta))^{-1}:\,\mathfrak{L}_*\to\mathfrak{L}$, где обозначено

$$\mathfrak{L}_*:=\{g\in L_2(\Pi_{R_6}):\,(g,h_0)_{L_2(\Pi^\eta)}=0,\;g=0\text{ в }\;\omega^\eta\},$$
$$\mathfrak{L}:=\{g\in L_2(\Pi_{R_6}):\,(g,g_0)_{L_2(\Pi^\eta)}=0,\;g=0\text{ в }\;\omega^\eta\}.$$

В силу непрерывности оператора $\mathcal{B}_4(\eta)$, установленной в лемме 5.2.3, обратный оператор $(\mathcal{I}+\mathcal{B}_4(\eta))^{-1}$ ограничен равномерно по $\eta\in[0,1]$.

Решение операторного уравнения (4.2.12) имеет вид:

$$g=\hat{g}+cg_0,\qquad \hat{g}:=(\mathcal{I}+\mathcal{B}_4(\eta))^{-1}F,\tag{5.2.14}$$

где c — произвольная константа, функция g_0 определяется формулой (5.2.5). Верно неравенство

$$\|\hat{g}\|_{L_2(\Pi^\eta)}\leqslant C\|F\|_{L_2(\Pi^\eta)},\tag{5.2.15}$$

где константа C не зависит от F. В силу (5.2.14) решение краевой задачи (5.2.1), (5.2.2) с однородным граничным условием на $\partial\omega^\eta$ имеет вид

$$v(\xi,\eta)=\hat{v}(\xi,\eta)+c,$$

где $\hat{v}$ — решение задачи (5.2.1), (5.2.2) с однородным граничным условием на $\partial\omega^\eta$, соответствующее решению $\hat{g}$ операторного уравнения (4.2.12) в смысле леммы 5.2.1, а константа c та же, что и в (5.2.14). Функция $\hat{v}$ имеет следующую асимптотику на бесконечности:

$$\hat{v}(\xi,\eta)=\hat{A}_\pm(\eta)+o(1),\qquad \xi_n\to\pm\infty,$$

где константы $\hat{A}_\pm$ определяются формулой

$$\hat{A}_\pm=\int\limits_{\Pi^\pm_{R_6}\setminus\Pi^\pm_{R_6-1}}|t_n|\hat{g}(t)\,dt.\tag{5.2.16}$$

При $|\xi_n|>R_6$ функция $\hat{v}$ имеет вид

$$\hat{v}(\xi,\eta)=\hat{A}_\pm(\eta)+\sum_{k\in\mathbb{Z}^{n-1}}\hat{A}^\pm_k(\eta)e^{-2\pi|k_b||\xi_n|}e^{2\pi\mathrm{i}k_b\cdot\xi'},\quad \pm\xi_n>R_6,$$

$$\hat{A}_k^{\pm} := -\frac{1}{2\pi|k_b|} \int\limits_{\Pi_{R_6}^{\pm} \setminus \Pi_{R_6-1}^{\pm}} \hat{g}(t) e^{2\pi \mathrm{i} k_b \cdot t'} \operatorname{sh} 2\pi|k_b| t_n dt.$$

В силу последнего равенства и неравенства (5.2.15) выполнено

$$|\hat{A}_k^{\pm}| \leqslant \frac{Ce^{2\pi|k_b|R_6}}{|k_b|^{\frac{3}{2}}} \|F\|_{L_2(\Pi^\eta)},$$

где константа C не зависит от k, F, η. Из формулы (4.2.11), неравенств (5.2.3), (5.2.15) и ограниченности оператора $\mathcal{B}_1$ вытекает оценка

$$\|\hat{v}\|_{W_2^1(\Pi^\eta)} \leqslant C\|F\|_{L_2(\Pi^\eta)},$$

где константа C не зависит от F и η.

Теперь к решению $\hat{v}$ задачи (5.2.1), (5.2.2) с однородным граничным условием на $\partial\omega^\eta$ добавим константу $-\frac{1}{2}(\hat{A}_+ + \hat{A}_-)$ и полученную функцию обозначим через $\tilde{v}$. Тогда функция $\tilde{v}$ имеет следующую асимптотику на бесконечности

$$\tilde{v}(\xi,\eta) = \tilde{A}_{\pm}(\eta) + o(1), \qquad \xi_n \to \pm\infty, \qquad \tilde{A}_{\pm} = \hat{A}_{\pm} - \frac{1}{2}(\hat{A}_+ + \hat{A}_-).$$

Для констант $\tilde{A}_{\pm}$ выполнено равенство $\tilde{A}_+ + \tilde{A}_- = 0$. Из равенства (5.2.16) и неравенства (5.2.15) выводим

$$|\hat{A}_+ + \hat{A}_-| \leqslant C\|F\|_{L_2(\Pi^\eta)},$$

где константа C не зависит от F. В силу формулы (4.2.11), неравенств (5.2.3), (5.2.15) и ограниченности оператора $\mathcal{B}_1$ тогда получаем

$$\|\tilde{v}\|_{W_2^1(\Pi^\eta)} \leqslant C\|F\|_{L_2(\Pi^\eta)},$$

где константа C не зависит от F и η. Таким образом, доказана следующая лемма.

Лемма 5.2.4. *Пусть функция $F \in L_2(\Pi^\eta)$ обращается в нуль вне Π_{R_6} и выполнено равенство*

$$\int\limits_{\Pi^\eta} F\, d\xi = 0.$$

Тогда краевая задача (5.2.1), (5.2.2) с однородным граничным условием на $\partial\omega^\eta$ разрешима. Существует единственное решение v задачи (5.2.1), (5.2.2) с однородным граничным условием на $\partial\omega^\eta$, имеющее при $\xi_n \to \pm\infty$ асимптотику (4.2.3), где константы $A_\pm$ удовлетворяют равенству $A_+ + A_- = 0$. Общее решение задачи (5.2.1), (5.2.2) с однородным граничным условием на $\partial\omega^\eta$ отличается от данного решения на произвольную константу.

При $|\xi_n| > R_6$ функция v имеет вид

$$v(\xi,\eta) = A_\pm(\eta) + \sum_{k\in\mathbb{Z}^{n-1}} A_k^\pm(\eta) e^{-2\pi|k_b||\xi_n|} e^{2\pi \mathrm{i} k_b\cdot\xi'}, \quad \pm\xi_n > R_6. \tag{5.2.17}$$

Верны оценки

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}^{n-1}} e^{-2\pi|k_b|R_0} |A_k^\pm(\eta)| \leqslant C\|F\|_{L_2(\Pi^\eta)}, \qquad \|v\|_{W_2^1(\Pi^\eta)} \leqslant C\|F\|_{L_2(\Pi^\eta)},$$

где константа C не зависит от F и η.

5.2.3 Разрешимость модельной задачи

В данном параграфе исследуется разрешимость модельной задачи (5.2.1), (5.2.2).

Лемма 5.2.5. *Пусть функция $F \in L_2(\Pi^\eta)$ обращается в нуль вне Π_{R_0}. Краевая задача (5.2.1), (5.2.2) разрешима, если и только если выполнено равенство*

$$\int\limits_{\Pi^\eta} F\, d\xi + \int\limits_{\partial\omega^\eta} \phi\, ds = 0. \tag{5.2.18}$$

Существует единственное решение v задачи (5.2.1), (5.2.2), имеющее при $\xi_n \to \pm\infty$ асимптотику (4.2.3), где константы $A_\pm$ удовлетворяют равенству: $A_+ + A_- = 0$. Общее решение задачи (5.2.1), (5.2.2) отличается от данного решения на произвольную константу.

При $|\xi_n| > R_6$ функция v имеет вид (5.2.17). Верны неравенства

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}^{n-1}} e^{-2\pi|k_b|R_0} |A_k^\pm(\eta)| \leqslant C\big(\|F\|_{L_2(\Pi^\eta)} + \eta^{n-1}\|\phi\|_{L_2(\partial\omega^\eta)}\big), \tag{5.2.19}$$

$$\|v\|_{W_2^1(\Pi^\eta)} \leqslant C\big(\|F\|_{L_2(\Pi^\eta)} + \eta^{n-1}\|\phi\|_{L_2(\partial\omega^\eta)}\big), \tag{5.2.20}$$

где константа C не зависит от F, ϕ и η.

Доказательство. Рассмотрим задачу

$$\Delta_\xi u = 0 \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^n \setminus \overline{\omega^\eta}, \qquad \frac{\partial u}{\partial \nu_\xi} = \phi \quad \text{на} \quad \partial\omega^\eta.$$

Сделаем замену $\tilde\xi := \xi\eta^{-1}$ и перепишем эту задачу в виде

$$\Delta_{\tilde\xi}\tilde u = 0 \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^n \setminus \overline{\omega}, \qquad \frac{\partial \tilde u}{\partial \nu_{\tilde\xi}} = \tilde\phi \quad \text{на} \quad \partial\omega, \tag{5.2.21}$$

где $\tilde u(\tilde\xi) := u(\tilde\xi\eta)$, $\tilde\phi(\tilde\xi) := \eta\phi(\tilde\xi\eta)$.

Функция Грина задачи (5.2.21) имеет вид

$$G(\tilde\xi, y) = \frac{1}{\sigma_n(n-2)|\tilde\xi - y|^{n-2}} + G_1(\tilde\xi, y), \tag{5.2.22}$$

где G_1 — функция, принадлежащая по переменной $\tilde\xi$ пространству $C^1(\mathbb{R}^n)$ и удовлетворяющая уравнению $\Delta_{\tilde\xi} G_1(\tilde\xi, y) = 0$ и равенству $G_1(\tilde\xi, y) = O(|\tilde\xi - y|^{-n+1})$ при $\xi_n \to \infty$. Функция G обладает следующими свойствами:

$$\begin{aligned} &G(\tilde\xi, y) = G(y, \tilde\xi), \quad \tilde\xi, y \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\omega}, \\ &\frac{\partial G}{\partial \nu_{\tilde\xi}}(\tilde\xi, y) = 0, \quad \tilde\xi \in \partial\omega, \quad y \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\omega}. \end{aligned} \tag{5.2.23}$$

Решение задачи (5.2.21) можно представить в виде

$$\tilde u(\tilde\xi) = \int\limits_{\partial\omega} G(\tilde\xi, y)\tilde\phi(y)\, ds. \tag{5.2.24}$$

В силу [17, Гл. I, §1.6] функция $\tilde u$ принадлежит пространству $C^1(\mathbb{R}^n)$.

Решение задачи (5.2.1), (5.2.2) будем искать в виде $v = \chi_4 u + \tilde v$. Функция $\tilde v$ является решением задачи

$$\begin{aligned} &\Delta_\xi \tilde v = \tilde F \quad \text{в} \quad \Pi^\eta, \quad \frac{\partial \tilde v}{\partial \nu_\xi} = 0 \quad \text{на} \quad \partial\omega^\eta, \\ &\tilde F := F - 2\sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial \xi_i}\frac{\partial \chi_4}{\partial \xi_i} - u\Delta_\xi \chi_4, \end{aligned} \tag{5.2.25}$$

с периодическими граничными условиями (5.2.2). В силу свойств функций χ_4 и G верно

$$\|\tilde{F}\|_{L_2(\Pi^\eta)} \leqslant C\big(\|F\|_{L_2(\Pi^\eta)} + \eta^{n-1}\|\phi\|_{L_2(\partial\omega^\eta)}\big), \tag{5.2.26}$$

где константа C не зависит от F, ϕ и η.

Согласно лемме 5.2.4, задача (5.2.25), (5.2.2) разрешима, если выполнено условие $\int\limits_{\Pi^\eta} \tilde{F}\,d\xi = 0$. Проинтегрируем теперь по частям

$$\int\limits_{\Pi^\eta} \tilde{F}\,d\xi = \int\limits_{\Pi^\eta} (F - \Delta_\xi(\chi_4 u))\,d\xi = \int\limits_{\Pi^\eta} F\,d\xi + \int\limits_{\partial\omega^\eta} \phi\,ds.$$

Следовательно, условие (5.2.18) гарантирует разрешимость задачи (5.2.25), (5.2.2). При его выполнении существует единственное решение $\tilde{v}$ этой задачи, имеющее при $\xi_n \to \pm\infty$ асимптотику (4.2.3), где константы $A_\pm$ удовлетворяют равенству $A_+ + A_- = 0$. При $|\xi_n| > R_6$ данное решение имеет вид (5.2.17). Верны оценки

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}^{n-1}} e^{-2\pi|k_b|}|A_k^\pm(\eta)| \leqslant C\|\tilde{F}\|_{L_2(\Pi^\eta)}, \qquad \|\tilde{v}\|_{W_2^1(\Pi^\eta)} \leqslant C\|\tilde{F}\|_{L_2(\Pi^\eta)},$$

где константы C не зависят от F, ϕ и η. Возвращаясь теперь к функции v и учитывая оценку (5.2.26), приходим к утверждению леммы. Лемма доказана. $\square$

5.3 Оценки максимума решения модельной задачи и его производных

Цель данного параграфа — оценка максимума модуля решения задачи (5.2.1), (5.2.2) и модуля его производных. Будем предполагать, что функции F и ϕ принадлежат пространствам $C^\vartheta(\overline{\Pi^\eta})$ и $C^{1+\vartheta}(\partial\omega^\eta)$ соответственно, где $\vartheta \in (0,1)$ — фиксированное число. Тогда в силу оценок Шаудера [26, Гл. Ⅲ, §§2,3] модельная краевая задача (5.2.1), (5.2.2) разрешима и её решение принадлежит пространству $C^{2+\vartheta}(\overline{\Pi})$. Классические оценки Шаудера не позволяют выяснить зависимость нормы решения этой задачи в пространстве $C^{2+\vartheta}$ от параметра η при малых η. Применение подхода, описанного в §4.2.5, даёт слишком грубую оценку, в первую очередь для производных. Поэтому в настоящем параграфе мы доказываем более тонкие оценки по сравнению с полученными в §4.2.5 с использованием другой техники.

5.3.1 Оценка максимума решения

В этом пункте оценивается максимум модуля решения задачи (5.2.1), (5.2.2).

Лемма 5.3.1. *Для единственного решения задачи (5.2.1), (5.2.2), существование которого было доказано в лемме 5.2.5, верно неравенство*

$$\|v\|_{C(\overline{\Pi^\eta})} \leqslant C\left(\|F\|_{C(\overline{\Pi^\eta})} + \eta\|\phi\|_{C(\partial\omega^\eta)}\right), \tag{5.3.1}$$

где константа C не зависит от функций F, ϕ и параметра η.

Доказательство. Доказательство этой леммы в целом проводится по той же схеме, что и доказательство неравенства (4.2.49) для случая $\eta < \eta_0$.

Функция $\tilde v = (1-\chi_3)v$, где, напомним, срезающая функция χ_3 была введена перед равенством (4.2.11), является решением задачи

$$\begin{gathered} -\Delta_\xi \tilde v = G \quad \text{в} \quad \Pi_{2R_6}\setminus\overline{\omega^\eta}, \\ \frac{\partial \tilde v}{\partial \nu_\xi} = \phi \quad \text{на} \quad \partial\omega^\eta, \quad \tilde v = 0 \quad \text{на} \quad \square\times\{-2R_6,\, 2R_6\}, \\ G = (1-\chi_3)F + 2\nabla_\xi\chi_3\cdot\nabla_\xi v + v\Delta_\xi\chi_3, \end{gathered}$$

с периодическими граничными условиями (5.2.2).

Пусть $\tilde\xi = (\tilde\xi_1,\ldots,\tilde\xi_n)$ — декартовы координаты в $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим внешние краевые задачи

$$\begin{gathered} -\Delta_{\tilde\xi} Y_i = 0 \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^n\setminus\overline{\omega}, \qquad i=0,1,2, \\ \frac{\partial Y_0}{\partial \nu_{\tilde\xi}} = 1, \qquad \frac{\partial Y_1}{\partial \nu_{\tilde\xi}} = \frac{\partial \tilde\xi_n}{\partial \nu_{\tilde\xi}}, \qquad \frac{\partial Y_2}{\partial \nu_{\tilde\xi}} = \tilde\xi_n \frac{\partial \tilde\xi_n}{\partial \nu_{\tilde\xi}} \quad \text{на} \quad \partial\omega, \end{gathered}$$

где $\nu_{\tilde\xi}$ — единичная нормаль к $\partial\omega$, направленная внутрь ω. Существуют классические решения этих задач, принадлежащие пространству $C^\infty(\mathbb{R}^n\setminus\omega)\cap C^{2+\vartheta}(\overline{B_R(0)})$, где R — достаточно большое фиксированное число, со следующими асимптотиками на бесконечности

$$Y_i(\tilde\xi)=O\big(|\tilde\xi|^{-n+2}\big),\qquad \tilde\xi\to\infty,\quad i=0,1,2.$$

Для функций Y_i, $i=0,1,2$ выполнены оценки

$$\big|\chi_4(\xi)Y_i(\xi\eta^{-1})\big|\leqslant C,\qquad \big|\Delta_\xi\eta\chi_4(\xi)Y_i(\xi\eta^{-1})\big|\leqslant C\eta^{n-1},\tag{5.3.2}$$

где C — некоторая константа, не зависящая от ξ и η, а χ_4 — срезающая функция, введённая после леммы 5.2.2.

Введем функции:

$$\begin{aligned}&Y_3(\xi,\eta):=(\xi_n^2-4R_6^2)-\chi_4(\xi)\Big(2\eta^2Y_2\big(\xi\eta^{-1}\big)+2\eta\xi_nY_1\big(\xi\eta^{-1}\big)\Big),\\&Y_4(\xi,\eta):=\eta\chi_4(\xi)Y_0\big(\xi\eta^{-1}\big).\end{aligned}$$

В силу определения функций Y_i, $i=0,1,2$ и неравенств (5.3.2) функции Y_3 и Y_4 удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned}-\Delta_\xi Y_3\geqslant 1 &\quad \text{в}\quad \Pi^\eta, &\quad \frac{\partial Y_3}{\partial\nu_\xi}=0\quad\text{на}\quad\partial\omega^\eta,\\ |\Delta_\xi Y_4|\leqslant C\eta^{n-1} &\quad \text{в}\quad \Pi^\eta, &\quad \frac{\partial Y_4}{\partial\nu_\xi}=1\quad\text{на}\quad\partial\omega^\eta,\end{aligned}$$

с периодическими граничным условиями (5.2.2), где C — некоторая константа, не зависящая от ξ и η. Рассматривая функции

$$u\pm 2\|\phi\|_{C(\overline{\Pi^\eta})}Y_4+2\big(\|G\|_{C(\overline{\Pi^\eta})}+C\eta^n\|\phi\|_{C(\overline{\Pi^\eta})}\big)Y_3,$$

аналогично выводу неравенств (4.2.53) и (4.2.54) показывается, что

$$|u|\leqslant 2\|\phi\|_{C(\overline{\Pi^\eta})}Y_4+2\big(\|G\|_{C(\Pi^\eta)}+C\eta^n\|\phi\|_{C(\overline{\Pi^\eta})}\big)Y_3.$$

Из последнего неравенства, (5.3.2) и определения функций Y_3, Y_4 следует

$$\|\tilde v\|_{C(\overline{\Pi^\eta})}\leqslant C\big(\|G\|_{C(\overline{\Pi^\eta})}+\eta\|\phi\|_{C(\partial\omega^\eta)}\big),$$

где константа C не зависит от F, ϕ и η. Отсюда уже вытекает (5.3.1). Лемма доказана. □

5.3.2 Оценка максимума производных решения

В данном параграфе будут получены оценки максимума модуля производных единственного решения задачи (5.2.1), (5.2.2), существование которого доказано в лемме 5.2.5.

Обозначим: $\breve{v}(\xi) := (1-\chi_4(\xi))v(\xi)$, где, напомним, χ_4 — срезающая функция из доказательства леммы 5.2.5. Продолжим функции F и $\breve{v}$ нулём внутрь полостей ω^η. В силу определения срезки χ_4 функция $\breve{v}$ равна нулю в окрестности полости ω^η. Поэтому продолжение функции $\breve{v}$ нулём внутрь ω^η не ухудшает её гладкость, а именно, $\breve{v} \in C^{2+\vartheta}(\overline{\Pi})$. Функция $\breve{v}$ является решением задачи

$$-\Delta_\xi \breve{v} = F_1 \quad \text{в} \quad \Pi, \qquad F_1 := (1-\chi_4)F + 2\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \chi_4}{\partial \xi_i}\frac{\partial v}{\partial \xi_i} + v\Delta_\xi \chi_4, \quad (5.3.3)$$

с периодическими граничными условиями (5.2.2), где функция F_1 считается продолженной нулём внутрь полости ω^η. Функция F_1 равна нулю в окрестности полости ω^η и принадлежит пространству $C^\vartheta(\overline{\Pi})$.

Отметим, что задача (5.3.3), (5.2.2) рассматривается во всей области Π без полости. Для такой задачи удаётся явно построить функцию Грина, а именно на основе идей из [46, §3.1] можно доказать следующую лемму.

Лемма 5.3.2. *Функция Грина задачи (5.3.3), (5.2.2) даётся равенством*

$$\begin{aligned} G_\Pi(\xi) &= \frac{1}{\sigma_n(n-2)|\xi|^{n-2}} + \tilde{G}_\Pi(\xi), \\ \tilde{G}_\Pi(\xi) &:= \xi_n + \frac{1}{\sigma_n(n-2)}\sum_{m\in\mathbb{L}}\Bigg(\frac{1}{|\xi+(m,0)|^{n-2}} - \frac{1}{|(m,0)|^{n-2}} \\ &\qquad - \sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial}{\partial t_i}\frac{1}{|t|^{n-2}}\bigg|_{y=(m,0)}\Bigg), \end{aligned} \quad (5.3.4)$$

где σ_n — площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$,

$$\mathbb{L} := 2b_1\mathbb{Z}_1 \times \ldots \times 2b_{n-1}\mathbb{Z}_{n-1} \setminus \{0\}.$$

Функция G_Π является $\square$-периодической по ξ' и имеет дифференцируемую асимптотику на бесконечности

$$G_\Pi(\xi) = C_1 + O(e^{-C_2|\xi_n|}), \qquad \xi_n \to \pm\infty, \tag{5.3.5}$$

где C_1, C_2 — некоторые константы. Функция $\tilde{G}_\Pi$ бесконечно дифференцируема в $\overline{\Pi}$.

Так как решение задачи (5.3.3), (5.2.2) принадлежит $C^{2+\vartheta}(\overline{\Pi})$, то оно представимо в виде

$$\breve{v}(\xi) = \int\limits_{\Pi_{R_6}} G_\Pi(\xi - y) F_1(y)\, dy. \tag{5.3.6}$$

Лемма 5.3.3. *Верно неравенство*

$$\max_{\overline{\Pi_{R_6}}} |\nabla \breve{v}| \leqslant C\Big(\max_{\overline{\Pi_{R_6}}} |F| + \max_{\overline{\Pi_{R_6}}} |v| \Big), \tag{5.3.7}$$

где константа C не зависит от функций v, F и параметра η.

Доказательство. В силу формулы (5.3.6) и определения функции F_1 в (5.3.3) выполнено равенство

$$\begin{aligned}\breve{v}(\xi) = &\int\limits_{\Pi_{R_6}} \big(1 - \chi_4(y)\big)(y) F(y) G_\Pi(\xi - y)\, dy\\ &+ 2\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Pi_{R_6}} \frac{\partial v}{\partial y_i}(y) \frac{\partial \chi_4}{\partial y_i}(y) G_\Pi(\xi - y)\, dy\\ &+ \int\limits_{\Pi_{R_6}} v(y) G_\Pi(\xi - y) \Delta_y \chi_4(y)\, dy.\end{aligned}$$

Проинтегрируем однократно по частям во втором интеграле в правой части этого равенства:

$$\breve{v}(\xi) = \int\limits_{\Pi_{R_6}} \Big((1 - \chi_4(y)) F(y) - v(y) \Delta_y \chi_4(y) \Big) G_\Pi(\xi - y)\, dy$$

$$+ 2\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Pi_{R_6}} v(y)\frac{\partial\chi_4}{\partial y_i}(y)\frac{\partial G_\Pi}{\partial\xi_i}(\xi-y)\,dy.$$

Применяя формулу (1.24) из [26, Гл. III, §1], выводим

$$\begin{aligned}\frac{\partial\breve{v}}{\partial\xi_j}(\xi)=&\int\limits_{\Pi_{R_6}}\Big((1-\chi_4(y))F(y)-v(y)\Delta_y\chi_4(y)\Big)\frac{\partial G_\Pi}{\partial\xi_j}(\xi-y)\,dy\\ &-2\lim_{\rho\to+0}\int\limits_{\Pi\cap\{y:|\xi-y|\geqslant\rho\}} v(y)\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\chi_4}{\partial y_i}(y)\frac{\partial^2 G_\Pi}{\partial\xi_i\partial\xi_j}(\xi-y)\,dy\\ &-\frac{2\delta_{ij}}{n}v(\xi)\frac{\partial\chi_4}{\partial\xi_i}(\xi),\end{aligned}\tag{5.3.8}$$

где $j=1,\ldots,n$, δ_{ij} — символ Кронекера–Капелли. Так как функция $\tilde{G}_\Pi$ бесконечно дифференцируема в $\overline{\Pi}$, то из формулы для G_Π в (5.3.4) и асимптотики (5.3.5) сразу следует, что все производные функции $\tilde{G}_\Pi$ равномерно ограничены в $\overline{\Pi}$. С учётом этого факта и $\square$–периодичности функции G_Π по ξ' оценим первый интеграл в правой части последнего равенства:

$$\begin{aligned}&\left|\int\limits_{\Pi_{R_6}}\Big((1-\chi_4(y))F(y)-v(y)\Delta_y\chi_4(y)\Big)\frac{\partial G_\Pi}{\partial\xi_j}(\xi-y)\,dy\right|\\ &\quad\leqslant C\Big(\max_{\overline{\Pi_{R_6}}}|F|+\max_{\overline{\Pi_{R_6}}}|v|\Big)\int\limits_{\Pi_{R_6}}\left(\frac{1}{|\xi-y|^{n-1}}+\left|\frac{\partial\tilde{G}_\Pi}{\partial\xi_j}(\xi-y)\right|\right)dy,\\ &\quad\leqslant C\Big(\max_{\overline{\Pi_{R_6}}}|F|+\max_{\overline{\Pi_{R_6}}}|v|\Big)\int\limits_{\Pi_{R_6}}\left(\frac{1}{|\xi-y|^{n-1}}+1\right)dy,\end{aligned}\tag{5.3.9}$$

где C — константа, не зависящая от F и ξ. Пусть $\xi\notin\Pi_{2R_6}$, тогда верно неравенство: $|\xi-y|\geqslant R_6>1$, из которого сразу следует, что

$$\int\limits_{\Pi_{R_6}}\frac{1}{|\xi-y|^{n-1}}\,dy\leqslant|\Pi_{R_6}|.\tag{5.3.10}$$

При $\xi \in \Pi_{2R_6}$, $y \in \Pi_{R_6}$ верно

$$|\xi - y| < \rho_1, \qquad \rho_1 := 3R_6 + 2\left(\sum_{i=1}^{n-1} b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Это приводит к оценке

$$\int\limits_{\Pi_{R_6}} \frac{1}{|\xi - y|^{n-2}}\,dy < \int\limits_{B_{\rho_1}(0)} \frac{dt}{|t|^{n-1}} \leqslant \rho_1^n |B_1(0)|.$$

Данное неравенство и (5.3.10) позволяют продолжить оценки в (5.3.9):

$$\left|\int\limits_{\Pi_{R_6}} \Big((1-\chi_4(y))F(y)-v(y)\Delta_y\chi_4(y)\Big)\frac{\partial G_\Pi}{\partial \xi_j}(\xi-y)\,dy\right| \leqslant C\Big(\max_{\overline{\Pi_{R_6}}}|F|+\max_{\overline{\Pi_{R_6}}}|v|\Big), \tag{5.3.11}$$

где константа C не зависит от ξ, y, j и F.

Интеграл под пределом в правой части (5.3.8) представим в виде

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Pi\cap\{y:|\xi-y|\geqslant\rho\}} v(y)\frac{\partial \chi_4}{\partial y_i}(y)\frac{\partial^2 G_\Pi}{\partial \xi_i \partial \xi_j}(\xi, y)\,dy \\
&\quad= \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Pi\cap\{y:\rho\leqslant|\xi-y|\leqslant\rho_2\}} v(y)\frac{\partial \chi_4}{\partial y_i}(y)\frac{\partial^2 G_\Pi}{\partial \xi_i \partial \xi_j}(\xi, y)\,dy \\
&\qquad+ \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Pi\cap\{y:|\xi-y|\geqslant\rho_2\}} v(y)\frac{\partial \chi_4}{\partial y_i}(y)\frac{\partial^2 G_\Pi}{\partial \xi_i \partial \xi_j}(\xi, y)\,dy,
\end{aligned} \tag{5.3.12}$$

где $\rho_2 > 0$ — некоторое достаточно малое фиксированное число, не зависящее от ξ и y. Оценим второе слагаемое в правой части этого равенства:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Pi\cap\{y:|\xi-y|\geqslant\rho_2\}} v(y)\frac{\partial \chi_4}{\partial y_i}(y)\frac{\partial^2 G_\Pi}{\partial \xi_i \partial \xi_j}(\xi, y)dy\right| \leqslant \frac{C}{\rho_2^n}\max_{\overline{\Pi_{R_6}}}|v|, \tag{5.3.13}$$

где константа C не зависит от ξ, y и j.

Аналогично доказательству неравенства (1.27) из [26, Гл. III, §1] проверяется, что

$$\left| \int\limits_{\Pi\cap\{y:\rho\leqslant|\xi-y|\leqslant\rho_3\}} \frac{\partial^2 G_\Pi}{\partial\xi_i\partial\xi_j}(\xi,y)\,dy \right| \leqslant C, \tag{5.3.14}$$

где константа C не зависит от ξ, y и ρ_2. При $|\xi-y|<\rho_2$ выполнено

$$|v(y)-v(\xi)| \leqslant C|\xi-y| \max_{\overline{\Pi_{R_6}}} |\nabla v|,$$

где константа C не зависит от v, ξ и y. Тогда в силу последнего неравенства и (5.3.14) верно

$$\begin{aligned}
&\left| \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Pi\cap\{y:\rho\leqslant|\xi-y|\leqslant\rho_2\}} v(y)\frac{\partial\chi_4}{\partial y_i}(y)\frac{\partial^2 G_\Pi}{\partial\xi_i\partial\xi_j}(\xi,y)\,dy \right| \\
&= \left| v(\xi)\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Pi\cap\{y:\rho\leqslant|\xi-y|\leqslant\rho_2\}} \frac{\partial\chi_4}{\partial y_i}(y)\frac{\partial^2 G_\Pi}{\partial\xi_i\partial\xi_j}(\xi,y)\,dy \right| \\
&\quad + \left| \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Pi\cap\{y:\rho\leqslant|\xi-y|\leqslant\rho_2\}} (v(y)-v(\xi))\frac{\partial\chi_4}{\partial y_i}(y)\frac{\partial^2 G_\Pi}{\partial\xi_i\partial\xi_j}(\xi,y)\,dy \right| \\
&\leqslant C\Big(\max_{\overline{\Pi_{R_6}}} |v| + \rho_2 \max_{\overline{\Pi_{R_6}}} |\nabla v| \Big),
\end{aligned} \tag{5.3.15}$$

где константы C и C_5 не зависят от ρ_2, v, j, ξ и y.

В силу (5.3.8), (5.3.11), (5.3.12), (5.3.13) и (5.3.15) выполнено неравенство

$$\max_{\overline{\Pi_{R_6}}} |\nabla\check{v}| \leqslant C\Big(\max_{\overline{\Pi_{R_6}}} |F| + \max_{\overline{\Pi_{R_6}}} |v| \Big) + C\rho_2 \max_{\overline{\Pi_{R_6}}} |\nabla v|,$$

где константа C не зависит от F, ρ_2, v и ξ. Перенося последнее слагаемое в левую часть неравенства и выбрав ρ_2 достаточно малым, получим оценку (5.3.7). Лемма доказана. □

Обозначим $\check{v}(\xi) := v(\xi)\chi_5(\xi)$, где $\chi_5 = \chi_5(\xi)$ — бесконечно дифференцируемая срезающая функция, равная единице на носителе функции

$1-\chi_4$ и нулю вне некоторого окрестности этого носителя, лежащей строго внутри Π. Функция $\check{v}$ является решением задачи

$$-\Delta_\xi \check{v} = F_2 \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^n \setminus \overline{\omega^\eta}, \quad \frac{\partial \check{v}}{\partial \nu_\xi} = \phi \quad \text{на} \quad \partial\omega^\eta, \tag{5.3.16}$$

$$F_2 := \chi_5 F - 2\sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial \xi_i}\frac{\partial \chi_5}{\partial \xi_i} - v\Delta_\xi \chi_5.$$

Лемма 5.3.4. *Верно неравенство*

$$\max_{\overline{\Pi^\eta}} |\nabla \check{v}| \leqslant C\Big(\max_{\overline{\Pi^\eta}} |F| + \max_{\overline{\Pi^\eta}} |v| + \eta \max_{\partial\omega^\eta} |\phi| + \max_{\partial\omega^\eta} |\nabla\phi|\Big), \tag{5.3.17}$$

где константа C не зависит от F, v, ϕ и η.

Доказательство. В задаче (5.3.16) сделаем замену $\tilde{\xi} := \xi\eta^{-1}$. Тогда эта задача перепишется в виде

$$-\Delta_{\tilde{\xi}} \tilde{v} = \tilde{F}_2 \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^n \setminus \overline{\omega}, \quad \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \nu_{\tilde{\xi}}} = \tilde{\phi} \quad \text{на} \quad \partial\omega, \tag{5.3.18}$$

где $\tilde{v}(\tilde{\xi}) := \check{v}(\tilde{\xi}\eta)$, $\tilde{F}_2(\tilde{\xi}) := \eta^2 F_2(\tilde{\xi}\eta)$, $\tilde{\phi}(\tilde{\xi}) := \eta\phi(\tilde{\xi}\eta)$. Отметим, что по своему определению функция $\tilde{v}$ финитна.

Решение задачи (5.3.18) представим в виде

$$\tilde{v}(\tilde{\xi}) = \tilde{v}_1(\tilde{\xi}) + \tilde{v}_2(\tilde{\xi}),$$
$$\tilde{v}_1(\tilde{\xi}) := \int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus\omega} G(\tilde{\xi}, y)\tilde{F}_2(y)\,dy, \qquad \tilde{v}_2(\tilde{\xi}) := \int\limits_{\partial\omega} G(\tilde{\xi}, y)\tilde{\phi}(y)\,ds, \tag{5.3.19}$$

где G — функция Грина задачи (5.3.18), определяемая формулой (5.2.22). В силу [17, Гл. I, §1.6] функция $\tilde{v}$ принадлежит пространству $C^1(\mathbb{R}^n)$.

Обозначим

$$\tilde{v}_1(\tilde{\xi}) := \int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus\omega} G(\tilde{\xi}, y)\tilde{F}_2(y)\,dy, \qquad \tilde{v}_2(\tilde{\xi}) := \int\limits_{\partial\omega} G(\tilde{\xi}, y)\tilde{\phi}(y)\,ds.$$

Оценим производные функции $\tilde{v}_1$. Из формулы (5.2.22) следует оценка

$$\left|\frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial \tilde{\xi}_i}(\tilde{\xi})\right| \leqslant C\max_{B^\eta} |\tilde{F}_2| \left(\left|\int\limits_{B^\eta} \frac{\partial}{\partial \tilde{\xi}_i}\frac{1}{|\tilde{\xi} - y|^{n-2}}\,dy\right| + \left|\int\limits_{B^\eta} \frac{\partial G_1}{\partial \tilde{\xi}_i}(\tilde{\xi}, y)\,dy\right|\right), \tag{5.3.20}$$

где $B^\eta := B_{R_2\eta^{-1}}(0)\setminus\omega$, а C — константа, не зависящая от $\tilde{F}_2$, $\tilde{\xi}$ и y. В первом интеграле в правой части (5.3.20) произведем замену переменных $z=\tilde{\xi}-y$ и затем перейдем к сферической системе координат. В результате получим

$$\left|\int\limits_{B^\eta}\frac{\partial}{\partial\tilde{\xi}_i}\frac{1}{|\tilde{\xi}-y|^{n-2}}\,dy\right|\leqslant\left|\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}}d\varphi\int\limits_0^{\eta^{-1}}dr\right|\leqslant C\eta^{-1},$$

где $\mathbb{S}^{n-1}$ — единичная сфера $\mathbb{R}^n$, C — константа, не зависящая от η, $\tilde{\xi}$, y и i. В силу свойств функции G_1 верно

$$\left|\int\limits_{B^\eta}\frac{\partial G_1}{\partial\tilde{\xi}_i}(\tilde{\xi},y)\,dy\right|\leqslant C,$$

где константа C не зависит от $\tilde{\xi}$, y и i. Из последних двух неравенств и (5.3.20) вытекает

$$\left|\frac{\partial\tilde{v}_1}{\partial\tilde{\xi}_i}(\tilde{\xi})\right|\leqslant C\eta^{-1}\max_{B^\eta}|\tilde{F}_2|,\qquad \tilde{\xi}\in\mathbb{R}^n\setminus\omega, \tag{5.3.21}$$

где константа C не зависит от η, $\tilde{\xi}$, y и i.

Пусть $\tilde{\xi}\notin\partial\omega$. Тогда верно равенство

$$\frac{\partial\tilde{v}_2}{\partial\tilde{\xi}_i}(\tilde{\xi})=\int\limits_{\partial\omega}\frac{\partial G}{\partial\tilde{\xi}_i}(\tilde{\xi},y)\tilde{\phi}(y)\,ds.$$

Введем гладкие локальные координаты $s=(s_1,\ldots,s_{n-1})$ на $\partial\omega$, тогда якобиан замены $J=J(s)$, возникающий при переходе от переменных y к s, является функцией класса C^1, ограниченной равномерно вместе со своими производными. В силу свойств (5.2.23) выполнены соотношения

$$\begin{aligned}\int\limits_{\partial\omega}\tilde{\phi}\frac{\partial\tilde{G}}{\partial\tilde{\xi}_i}\,ds&=\int\limits_{\partial\omega}\tilde{\phi}\frac{\partial\tilde{G}}{\partial y_i}\,ds\\&=\int\limits_{\partial\omega}J\phi\left(\frac{\partial s_1}{\partial y_i}\frac{\partial G}{\partial s_1}+\ldots+\frac{\partial s_{n-1}}{\partial y_i}\frac{\partial G}{\partial s_{n-1}}\right)ds,\quad \tilde{\xi}\notin\partial\omega.\end{aligned}$$

Проинтегрируем по частям

$$\int\limits_{\partial\omega} J\phi\left(\frac{\partial s_1}{\partial y_i}\frac{\partial G}{\partial s_1}+\ldots+\frac{\partial s_{n-1}}{\partial y_i}\frac{\partial G}{\partial s_{n-1}}\right)ds$$
$$=-\int\limits_{\partial\omega} G\left(\frac{\partial}{\partial s_1}\frac{\partial s_1}{\partial y_i}J\phi+\ldots+\frac{\partial}{\partial s_{n-1}}\frac{\partial s_{n-1}}{\partial y_i}J\phi\right)ds, \quad \tilde{\xi}\notin\partial\omega.$$

Отсюда в силу ограниченности J получим неравенство

$$\left|\frac{\partial\tilde{v}_2}{\partial\tilde{\xi}_i}(\tilde{\xi})\right|\leqslant C\left(\max_{\partial\omega}|\tilde{\phi}|+\max_{\partial\omega}\left|\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial y_i}\right|\right), \quad \tilde{\xi}\notin\partial\omega, \tag{5.3.22}$$

где константа C не зависит от $\tilde{\phi}$, i, $\tilde{\xi}$ и y.

Пусть $\tilde{\xi}_0\in\partial\omega$. Переходя в последнем неравенстве к пределу при $\tilde{\xi}\to\tilde{\xi}_0$, в силу непрерывности $\frac{\partial\tilde{v}_2}{\partial\xi_i}$, получим, что неравенство (5.3.22) верно для всех $\tilde{\xi}\in\mathbb{R}^n\setminus\omega$. Возвращаясь обратно к переменным ξ и используя (5.3.19), (5.3.21) и (5.3.22), выводим

$$\max_{\overline{\Pi^\eta}}|\nabla\breve{v}|\leqslant C\left(\max_{\overline{\Pi^\eta}}|F_2|+\max_{\partial\omega}|\phi|+\max_{\partial\omega}|\nabla\phi|\right),$$

где константа C не зависит от F_2, ϕ, ξ и y. Неравенство (5.3.17) следует из последней оценки и лемм 5.3.1, 5.3.3. Лемма доказана. □

Из лемм 5.3.1, 5.3.3 и 5.3.4 вытекает следующее утверждение.

Лемма 5.3.5. *Для единственного решения задачи (5.2.1), (5.2.2), существование которого доказано в лемме 5.2.5, верно неравенство*

$$\max_{\overline{\Pi^\eta}}|\nabla v|\leqslant C\Big(\max_{\overline{\Pi^\eta}}|F|+\eta\max_{\partial\omega}|\phi|+\max_{\partial\omega}|\nabla\phi|\Big),$$

где константа C не зависит от η, F, ϕ.

5.4 Разрешимость модельных задач

В данном параграфе результаты предыдущего параграфа применяются для исследования разрешимости модельной задачи (5.2.1), (5.2.2) с правой частью общего вида и описания зависимости решения от параметра

η. Аналогичные вопросы изучаются и для модельной задачи для коэффициентов внешнего разложения, постановка которой также приводится в данном параграфе.

Как и в §4.2.6, мы вновь воспользуемся пространством $\mathfrak{H}$ и нормой в этом пространстве.

Лемма 5.4.1. *Пусть*

$$\int\limits_{\Pi^\eta} F\,d\xi + \int\limits_{\partial\omega^\eta} \phi\,ds = 0, \qquad F = F_0 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial F_j}{\partial \xi_j},$$
$$F_0 \in C^{\vartheta}(\overline{\Pi^\eta}) \cap \mathfrak{H}, \qquad F_j \in C^{1+\vartheta}(\overline{\Pi^\eta}) \cap \mathfrak{H}, \qquad \phi \in C^{1+\vartheta}(\partial\omega^\eta),$$

для функций F_j, $j = 0, \ldots, n-1$ верны представления (4.2.57) с некоторыми полиномами $T_k^\pm = T_{k,j}^\pm$. Тогда задача (5.2.1), (5.2.2) разрешима и существует её единственное решение v, имеющее при $\xi_n \to \pm\infty$ асимптотику (4.2.3), где константы $A_\pm$ удовлетворяют равенству $A_+ + A_- = 0$. Это решение принадлежит пространству $C^{1+\vartheta}(\overline{\Pi^\eta}) \cap \mathfrak{H}$ и при $|\xi_n| > R_6$ имеет вид (4.2.57), где полиномы $T_k^\pm$ заменяются на полиномы $Q_k^\pm = Q_k^\pm(\xi, \eta)$, обладающими свойствами

$$-\frac{\partial^2 Q_0^\pm}{\partial \xi_n^2} = T_{0,0}^\pm, \qquad \frac{\partial Q_0^\pm}{\partial \xi_n}(0,\eta) = 0,$$
$$-\frac{\partial^2 Q_k^\pm}{\partial \xi_n^2} \pm 4\pi\,|k_b|\,\frac{\partial Q_k^\pm}{\partial \xi_n} = T_{k,0}^\pm + \pi\mathrm{i}\sum_{j=1}^{n-1} \frac{k_j}{b_j} T_{k,j}.$$

Справедливы оценки

$$\begin{aligned}\sup_{k\in\mathbb{Z}^{n-1}} e^{-2\pi|k_b|R_6} |Q_k^\pm(0,\eta)| \leqslant C\Bigg(&\eta^{n-1}\|\phi\|_{C(\partial\omega^\eta)} + \|F_0\|_{C(\overline{\Pi^\eta})} \\ &+ \sum_{j=1}^{n-1} \|\nabla_\xi F_j\|_{C(\overline{\Pi^\eta})} + \sum_{j=0}^{n-1} \|F_j\|_{\mathfrak{H}})\Bigg),\end{aligned} \tag{5.4.1}$$

$$
\begin{gathered}
\|v\|_{C^1(\overline{\Pi^\eta})} \leqslant C\Big(\eta\|\phi\|_{C(\partial\omega^\eta)} + \|\nabla\phi\|_{C(\partial\omega^\eta)} + \|F_0\|_{C(\overline{\Pi^\eta})} \\
+ \sum_{j=1}^{n-1}\|\nabla_\xi F_j\|_{C(\overline{\Pi^\eta})} + \sum_{j=0}^{n}\|F_j\|_{\mathfrak{H}}\Big),
\end{gathered} \tag{5.4.2}
$$

где C — некоторые константы, не зависящие от функций F_j, $j = 0,\ldots,n-1$, и параметров η и k.

Доказательство. Задачи

$$
-\Delta_\xi v_F^\pm = F_0 + \sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial F_j}{\partial \xi_j} \quad \text{в} \quad \Pi^\pm_{R_0-1},
$$

с периодическими граничными условиями (5.2.2) были решены методом разделения переменных, см. (4.2.67), (4.2.68). Для этого решения верна оценка (4.2.70).

Решение задачи (5.2.1), (5.2.2) будем искать в виде

$$
v = \tilde{v} + \chi_3 v_F, \qquad v_F(\xi) := v_F^\pm(\xi) \quad \text{при} \quad \pm\xi_n > R_6 - 1,
$$

где срезающая функция χ_3 была введена перед равенством (4.2.11). Функция $\tilde{v}$ является решением задачи

$$
\begin{gathered}
-\Delta_\xi\tilde{v} = \tilde{F} \quad \text{в} \quad \Pi_R\setminus\omega^\eta, \qquad \frac{\partial\tilde{v}}{\partial\nu_\xi} = 0 \quad \text{на} \quad \partial\omega^\eta, \\
\tilde{F} := F\chi_3 - 2\frac{\partial v_F}{\partial\xi_n}\chi_3' - v_F\chi_3',
\end{gathered} \tag{5.4.3}
$$

с периодическими граничными условиями (5.2.2).

Используя неравенства (5.2.26) и (4.2.70), выводим

$$
\begin{gathered}
\|\tilde{F}\|_{L_2(\Pi_{R_6})} \leqslant C\Big(\eta^{n-1}\|\phi\|_{L_2(\partial\omega^\eta)} + \|F_0\|_{L_2(\Pi^\pm_{R_6}\setminus\Pi^\pm_{R_6-1})} \\
+ \sum_{j=1}^{n-1}\|\nabla F_j\|_{L_2(\Pi^\pm_{R_6}\setminus\Pi^\pm_{R_6-1})} + \sum_{j=0}^{n-1}\|F_j\|_{\mathfrak{H}}\Big),
\end{gathered}
$$

где константа C не зависит от η, ϕ, F_j, $j = 0, \ldots, n-1$.

Проверим условие разрешимости для задачи (5.4.3), (5.2.2), указанное в лемме 5.2.4. Для этого проинтегрируем по частям

$$\int\limits_{\Pi^\eta} \tilde{F}\, d\xi + \int\limits_{\partial\omega^\eta} \phi\, ds = \int\limits_{\Pi^\eta} (F - \Delta_\xi \chi_3 v_F)\, d\xi = \int\limits_{\Pi^\eta} F d\,\xi + \int\limits_{\partial\omega^\eta} \phi\, ds = 0.$$

Следовательно, согласно лемме 5.2.4, существует единственное решение задачи (5.4.3), (5.2.2), имеющее при $\xi_n \to \pm\infty$ асимптотику (4.2.3), где константы $A_\pm$ удовлетворяют равенству $A_+ + A_- = 0$. При $|\xi_n| > R_6$ данное решение представляется в виде (5.2.17), где для коэффициентов $\hat{A}_k^\pm(\eta)$ верны оценки:

$$\begin{aligned} \sup_{k\in\mathbb{Z}^{n-1}} e^{-2\pi|k_b|}|\hat{A}_k^\pm(\eta)| \leqslant \frac{C}{|k_b|}\Bigg(&\eta^{n-1}\|\phi\|_{C(\partial\omega^\eta)} + \|F_0\|_{C(\overline{\Pi^\eta})} \\ &+ \sum_{j=1}^{n-1} \|\nabla_\xi F_j\|_{C(\overline{\Pi^\eta})} + \sum_{j=0}^{n-1} \|F_j\|_{\mathfrak{H}}\Bigg), \end{aligned} \tag{5.4.4}$$

где константа C не зависит от η, ϕ, F_j, $j = 0, \ldots, n-1$. Поэтому задача (5.2.1), (5.2.2) также разрешима и имеет единственное решение, имеющее при $\xi_n \to \pm\infty$ асимптотику (4.2.3), где константы $A_\pm$ удовлетворяют $A_+ + A_- = 0$. При $|\xi_n| > R_6$ данное решение имеет вид (4.2.57) с

$$T_k^\pm = Q_k^\pm, \quad Q_k^\pm(\xi, \eta) := \tilde{Q}_k^\pm(\xi_n) + \hat{A}_k^\pm(\eta).$$

Неравенство (5.4.1) для этого решения является прямым следствием (5.4.4).

Пусть $\chi_6 = \chi_6(\xi_n)$ — бесконечно дифференцируемая срезающая функция, равная единице при $|\xi_n| < R_6 + \frac{4}{3}$ и нулю при $|\xi_n| > R_6 + \frac{5}{3}$. Функция $\chi_6 v$ является решением задачи

$$\begin{aligned} &-\Delta_\xi \chi_6 v = \chi_6 F - 2\nabla_\xi \chi_6 \cdot \nabla_\xi v - v\Delta_\xi \chi_6 \quad \text{в} \quad \Pi_{R_6+2} \setminus \overline{\omega^\eta}, \\ &\frac{\partial \chi_6 v}{\partial \nu_\xi} = \phi \quad \text{на} \quad \partial\omega^\eta, \qquad \chi_6 v = 0 \quad \text{на} \quad \square \times \{\pm(R_6+2)\} \end{aligned} \tag{5.4.5}$$

с периодическими граничными условиями (5.2.2). Применяя к этой функции лемму 5.3.5 и учитывая оценки (5.4.1), получим оценку (5.4.2). Лемма доказана. $\square$

5.5 Бесконечная дифференцируемость по η

В настоящем параграфе мы исследуем гладкость по параметру $\eta \in (0,1]$ решения задачи (5.2.1), (5.2.2), существование которого доказано в лемме 5.2.5, а также гладкость по $\eta \in [0,1]$ решения пары модельных задач в $\Omega \setminus S$ для функций внешнего разложения.

5.5.1 Гладкость решения модельной задачи для коэффициентов внутреннего разложения

В данном разделе мы исследуем гладкость по η решения задачи (5.2.1), (5.2.2). Всюду в разделе считаем, что функция F обращается в нуль вне Π_{R_6} и является бесконечно дифференцируемой вместе ϕ, а именно $F \in C^\infty(\overline{\Pi_{R_6}} \setminus \omega^\eta)$, $\phi \in C^\infty(\partial\omega^\eta)$.

С учётом поведения решения задачи (5.2.1), (5.2.2) на бесконечности, описанного в лемме 5.4.1, решение бесконечно дифференцируемо по ξ в $\overline{\Pi} \setminus \Pi_{R_6+1}$. Функция $\tilde{v} = v\chi_6$ является решением задачи (5.4.5) с периодическими граничными условиями на боковых гранях. Правая часть уравнения в этой задаче очевидно бесконечно дифференцируемая в $\overline{\Pi_{R_6+2}} \setminus \omega^\eta$, а потому в силу стандартных оценок Шаудера сразу заключаем, что $\tilde{v} \in C^\infty(\overline{\Pi_{R_6+2}} \setminus \omega^\eta)$. С учётом бесконечной дифференцируемости v в $\overline{\Pi} \setminus \Pi_{R_6+1}$ отсюда немедленно следует, что $v \in C^\infty(\overline{\Pi} \setminus \omega^\eta)$. Отметим ещё очевидные оценки

$$\|v\|_{C^{k+2+\frac{1}{2}}(\overline{\Pi}\setminus\omega^\eta)} \leqslant C_k(\eta)\Big(\|F\|_{C^{k+\frac{1}{2}}(\overline{\Pi_{R_6}}\setminus\omega^\eta)} + \|\phi\|_{C^{k+1+\frac{1}{2}}(\partial\omega^\eta)}\Big), \tag{5.5.1}$$

где $C_k(\eta)$ — некоторые константы, не зависящие от F и ϕ, а параметр η строго положителен.

Далее всюду предполагаем, что для всех $\eta \in (0,1]$ функция ϕ в граничном условии на $\partial\omega^\eta$ в (5.2.1) является следом некоторой гладкой функции $\Phi = \Phi(\xi,\eta)$, заданной в $\overline{\Pi} \setminus \omega^\eta$ и обращающейся в нуль вне множества $\{\xi : \chi_4(\xi) = 1\}$.

Основное утверждение настоящего раздела выглядит следующим образом.

Лемма 5.5.1. *Пусть функции $\Phi = \Phi(\xi, \eta)$, $F = F(\xi, \eta)$ определены и бесконечно дифференцируемы по ξ в $\overline{\Pi} \setminus \omega^\eta$ для каждого $\eta \in (0, 1]$, функция F обращается в нуль вне Π_{R_6}, функция Φ обращается в нуль вне множества $\{\xi : \chi_4(\xi) = 1\}$ для всех $\eta \in (0, 1]$ и выполнены равенства*

$$\phi = \Phi\big|_{\partial\omega^\eta}, \qquad \int\limits_{\Pi\setminus\omega^\eta} F(\xi, \eta)\, d\xi + \int\limits_{\partial\omega^\eta} \phi(\xi, \eta)\, ds = 0, \qquad \eta \in (0, 1]. \quad (5.5.2)$$

Предположим, что для каждого $\eta_0 \in (0, 1]$ и каждого $k \in \mathbb{N}$ существует достаточно малое число $\delta_k = \delta_k(\eta_0) > 0$ такое, что для функций $\Phi\big(\Xi^{-1}(\eta_0\eta^{-1}, \xi), \eta\big)$ и $F\big(\Xi^{-1}(\eta_0\eta^{-1}, \xi), \eta\big)$ выполнено

$$\begin{aligned} &\Phi\big(\Xi^{-1}(\eta_0\eta^{-1}, \xi), \eta\big) \in C^{k+\frac{1}{2}}\big(\overline{\Pi} \setminus \omega^{\eta_0} \times [\eta_0 - \delta_k(\eta_0), \eta_0 + \delta_k(\eta_0)]\big), \\ &F\big(\Xi^{-1}(\eta_0\eta^{-1}, \xi), \eta\big) \in C^{k+1+\frac{1}{2}}\big(\overline{\Pi} \setminus \omega^{\eta_0} \times [\eta_0 - \delta_k(\eta_0), \eta_0 + \delta_k(\eta_0)]\big), \end{aligned} \quad (5.5.3)$$

где диффеоморфизм Ξ был введён формулой (5.2.6). Тогда решение $v = v(\xi, \eta)$ задачи (5.2.1), (5.2.2), существование которого доказано в лемме 5.4.1, также бесконечно дифференцируемо в $\overline{\Pi} \setminus \omega^\eta$ для каждого $\eta \in (0, 1]$ и для каждого $k \in \mathbb{N}$ существует $\tilde{\delta}_k = \tilde{\delta}_k(\eta_0) > 0$ такое, что для функции $v\big(\Xi(\eta\eta_0^{-1}, \xi), \eta\big)$ выполнено

$$v\big(\Xi(\eta\eta_0^{-1}, \xi), \eta\big) \in C^{k+\frac{1}{2}}\big(\overline{\Pi} \setminus \omega^{\eta_0} \times [\eta_0 - \tilde{\delta}_k(\eta_0), \eta_0 + \tilde{\delta}_k(\eta_0)]\big). \quad (5.5.4)$$

Полиномы $Q_k(\xi, \eta)$, соответствующие функции v, имеют бесконечно дифференцируемые по η коэффициенты.

Оставшаяся часть раздела посвящена доказательству этой леммы.

В силу леммы 5.4.1 второе равенство в (5.5.2) гарантирует разрешимость задачи (5.2.1), (5.2.2) для каждого $\eta \in (0, 1]$. Бесконечная дифференцируемость решения по ξ была установлена выше, а также были доказаны оценки (5.5.1).

Выберем $\eta_0 \in (0,1]$ и $k \in \mathbb{N}$, и пусть $\eta \in [\eta_0 - \delta_k(\eta_0), \eta_0 + \delta_k(\eta_0)]$. Рассмотрим краевую задачу

$$\Delta_\xi v_\phi = 0 \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^d \setminus \overline{\omega^\eta}, \qquad \frac{\partial v_\phi}{\partial \nu_\xi} = \Phi(\xi, \eta) \quad \text{на} \quad \partial\omega^\eta.$$

Растяжение $\hat{\xi} = \eta_0 \eta^{-1} \xi$ переводит эту задачу в

$$\Delta_{\hat{\xi}} v_\phi = 0 \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^d \setminus \overline{\omega^{\eta_0}}, \qquad \frac{\partial v_\phi}{\partial \nu_{\hat{\xi}}} = \eta_0 \eta^{-1} \Phi\big(\eta_0 \eta^{-1} \xi, \eta\big) \quad \text{на} \quad \partial\omega^{\eta_0}. \tag{5.5.5}$$

В силу определения функции Φ и диффеоморфизма Ξ на носителе функции Φ диффеоморфизм Ξ действует как простое растяжение в $(t-1)$ раз, а потому

$$\Phi\big(\eta_0 \eta^{-1} \xi, \eta\big) = \Phi\big(\Xi(\eta_0 \eta^{-1}, \xi), \eta\big)$$

и данная функция является элементом пространства, указанного в первой принадлежности в (5.5.3). Ещё одним растяжением в η_0 раз задача (5.5.5) сводится к задаче (5.2.21), решение которой уже дается сверткой с фиксированной функцией Грина, см. (5.2.24). В результате заключаем, что функция $v_\phi = v_\phi(\xi, \eta)$ бесконечно дифференцируема по ξ в $\mathbb{R}^n \setminus \omega^\eta$ для каждого $\eta \in (0,1]$, а функция $v_\phi(\xi, \eta)\chi_2(\xi)$, рассматриваемая как заданная в $\Pi \setminus \omega^\eta$, удовлетворяет условию (5.5.4).

Решение задачи (5.2.1), (5.2.2) представим в виде $v = v_\phi \chi_4 + v_F$ и на функцию v_F тогда получаем краевую задачу

$$\begin{gathered} -\Delta v_F = F_1 \quad \text{в} \quad \Pi \setminus \overline{\omega^\eta}, \qquad \frac{\partial v_F}{\partial \nu_\xi} = 0 \quad \text{на} \quad \partial\omega^\eta, \\ F_1 := F + 2\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v_\phi}{\partial \xi_j} \frac{\partial \chi_4}{\partial \xi_j} + v_\phi \Delta_\xi \chi_4, \end{gathered} \tag{5.5.6}$$

с периодическими краевыми условиями на боковых границах. В силу установленных выше свойств функции v_ϕ, функция F_1 обладает теми же свойствами, что и функция F с единственным исключением, что второе равенство в (5.5.2) заменяется на

$$\int\limits_{\Pi \setminus \omega^\eta} F_1(\xi, \eta)\, d\xi = 0, \quad \eta \in (0,1]. \tag{5.5.7}$$

Определим пространство функций

$$\mathfrak{C}^k := \left\{ f \in C^{k+\frac{1}{2}}(\overline{\Pi} \setminus \omega^{\eta_0}) : \int\limits_{\Pi^{\eta_0}} f(\xi)\, d\xi = 0, \quad f = 0 \quad \text{вне} \quad \Pi_{R_6} \right\}$$

с нормой пространства $C^{k+\frac{1}{2}}(\overline{\Pi^{\eta_0}})$. С такой нормой пространство $\mathfrak{C}^k$ оказывается банаховым.

В области $\overline{\Pi} \setminus \omega^{\eta}$ введём новые переменные $\tilde{\xi} = \Xi(\eta_0\eta^{-1}, \xi)$. В силу свойств диффеоморфизма Ξ, переменные $\tilde{\xi}$ изменяются в $\Pi \setminus \overline{\omega^{\eta_0}}$. Напомним, что соответствующий якобиан замены $\Upsilon = \Upsilon(\xi, \eta)$ был введён в (5.2.7) и для него верны соотношения (5.2.8), (5.2.9). Учитывая эти соотношения и гладкость функций F_1 и Υ, в интеграле (5.5.7) перейдём к переменным $\tilde{\xi}$ и сразу получим, что функция ΥF_1, выраженная в переменных $\tilde{\xi}$, принадлежит пространству $\mathfrak{C}^k$. Далее перейдём к переменным $\tilde{\xi}$ в задаче (5.5.6) и введём новую неизвестную функцию по правилу $\tilde{v}_F(\tilde{\xi}, \eta) := v_F(\xi, \eta)\Upsilon(\xi, \eta)$. Тогда ввиду равенств (5.2.8), (5.2.9), (5.2.10), (5.2.11) получим задачу

$$\begin{aligned} &-(\Delta_{\tilde{\xi}} + (\eta - \eta_0)\mathcal{B}_9(\eta_0, \eta))\tilde{v}_F = \Upsilon F_1 \quad \text{в} \quad \Pi \setminus \overline{\omega^{\eta_0}}, \\ &\frac{\partial v_F}{\partial \nu_{\tilde{\xi}}} = 0 \quad \text{на} \quad \partial\omega^{\eta_0}, \end{aligned} \tag{5.5.8}$$

с периодическими краевыми условиями на боковых границах. В силу свойств оператора $\mathcal{B}_9$, описанных после (5.2.10), этот оператор является ограниченным равномерно по $\eta \in [\eta_0 - \delta_k(\eta_0), \eta_0 + \delta_k(\eta_0)]$ как действующий из $C^{k+2+\frac{1}{2}}(\overline{\Pi_{R_6}} \setminus \omega^{\eta_0})$ в $C^{k+\frac{1}{2}}(\overline{\Pi_{R_6}} \setminus \omega^{\eta_0})$.

Пусть $v \in C^{k+\frac{1}{2}}(\overline{\Pi} \setminus \omega^{\eta_0})$ — произвольная функция, удовлетворяющая краевому условию Неймана на $\partial\omega^{\eta_0}$. Тогда с учётом определения диффеоморфизма Ξ и соотношения (5.2.9) интегрированием по частям получаем

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Pi\setminus\omega^{\eta_0}} (\eta-\eta_0)\mathcal{B}_9(\eta_0,\eta)v\,d\tilde{\xi} &= \int\limits_{\Pi_{R_0}\setminus\omega^{\eta_0}} (\Upsilon\Delta_\xi\Upsilon^{-1}-\Delta_{\tilde{\xi}})v\,d\tilde{\xi}\\ &= \int\limits_{\Pi_{R_0}\setminus\omega^{\eta}} \Delta_\xi\Upsilon^{-1}v\,d\xi - \int\limits_{\Pi_{R_0}\setminus\omega^{\eta_0}} \Delta_{\tilde{\xi}}v\,d\tilde{\xi}\\ &=\frac{\eta_0^n}{\eta^n}\int\limits_{\partial\omega^\eta}\frac{\partial v}{\partial\nu_\xi}\,ds-\int\limits_{\partial\omega^{\eta_0}}\frac{\partial v}{\partial\nu_{\tilde{\xi}}}\,ds=0.\end{aligned} \tag{5.5.9}$$

Для произвольной функции $f\in\mathfrak{C}^k$ рассмотрим краевую задачу

$$-\Delta_{\tilde{\xi}}v=f \quad \text{в} \quad \Pi\setminus\omega^{\eta_0}, \qquad \frac{\partial v}{\partial\nu_{\tilde{\xi}}}=0 \quad \text{на} \quad \partial\omega^{\eta_0}, \tag{5.5.10}$$

с периодическими краевыми условиями на боковых границах. В силу леммы 5.4.1 эта задача разрешима, а в силу доказанного выше её решение попадает в пространство $\mathfrak{C}^{k+2}$. Пусть $\mathcal{B}_{11}:\mathfrak{C}^k\to C^{k+2+\frac{1}{2}}(\overline{\Pi}\setminus\omega^{\eta_0})$ — линейный оператор, отображающий функции f в решение задачи (5.5.10). В силу оценок (5.5.1) данный оператор является ограниченным.

Так как функция ΥF_1 является элементом пространства $\mathfrak{C}^k$ и выполнены соотношения (5.5.9), то из задачи (5.5.8) следует, что

$$\tilde{v}_F=\mathcal{B}_{11}f, \qquad f=\Upsilon F_1+(\eta-\eta_0)\mathcal{B}_9(\eta_0,\eta)\tilde{v}_F\in\mathfrak{C}^k. \tag{5.5.11}$$

Подставляя это равенство в задачу (5.5.8), приходим к операторному уравнению

$$\big(\mathcal{I}-(\eta-\eta_0)\mathcal{B}_5(\eta_0,\eta)\mathcal{B}_7\big)g=\Upsilon F_1$$

в пространстве $\mathfrak{C}^k$, где $\mathcal{I}$ — единичный оператор. Ограниченность оператора $\mathcal{B}_7$ гарантирует малость нормы оператора $(\eta-\eta_0)\mathcal{B}_5(\eta_0,\eta)\mathcal{B}_7$ при η, достаточно близких к η_0. Это гарантирует существование обратного оператора $\big(\mathcal{I}-(\eta-\eta_0)\mathcal{B}_5(\eta_0,\eta)\mathcal{B}_7\big)^{-1}$, что позволяет определить функцию g и затем функцию $\tilde{v}_F$ по формуле (5.5.11):

$$\tilde{v}_F\mathcal{B}_7=\big(\mathcal{I}-(\eta-\eta_0)\mathcal{B}_9(\eta_0,\eta)\mathcal{B}_{11}\big)^{-1}\Upsilon F_1.$$

Из этой формулы и бесконечной дифференцируемости коэффициентов оператора $\mathcal{B}_9(\eta_0,\eta)$ по η и пространственным переменным теперь легко выводим, что

$$\tilde{v}_F \in C^{k+\frac{1}{2}}\big(\overline{\Pi}\setminus\omega^{\eta_0}\times[\eta_0-\tilde{\delta}_k(\eta_0),\eta_0+\tilde{\delta}_k(\eta_0)]\big).$$

Возвращаясь теперь к функции v и учитывая установленные выше свойства функции v_ϕ, приходим к утверждению леммы 5.5.1. Лемма доказана.

5.5.2 Гладкость решения по параметру задачи для функций внешнего разложения

В настоящем разделе мы исследуем гладкость по параметру решений двух модельных задач для внешнего разложения.

Обозначим: $\Omega^\pm := \{x:\, \pm x_n > 0\}\cap\Omega$, $\Omega^\pm_r := \{x:\, 0<\pm x_n<r\}$.

Лемма 5.5.2. *Существует λ_0 такое, что при $\lambda<\lambda_0$ задача*

$$\begin{aligned}&(\mathcal{L}-\lambda)u=f,\quad x\in\Omega,\qquad u=0,\quad x\in\partial\Omega,\\&[u]_0=\phi_1,\qquad \left[\frac{\partial u}{\partial x_n}\right]_0=\phi_2\quad \text{на}\quad S,\end{aligned}\tag{5.5.12}$$

однозначно разрешима в пространстве $W^1_2(\Omega^+)\oplus W^1_2(\Omega^-)$ для всех $f\in L_2(\Omega)$, $\phi_1,\phi_2\in W^2_2(S)$. Пусть для f выполнено условие (1.0.24) и $\phi_1,\phi_2\in W^p_2(S)$ для всех $p\in\mathbb{N}$. Тогда решение этой задачи также принадлежит $W^p_2(\Omega^+_{\tau_0})\oplus W^p_2(\Omega^-_{\tau_0})$ для всех $p\in\mathbb{N}$ и $\tau_0\in(0,\tau)$ и верны оценки

$$\begin{aligned}&\|u\|_{W^1_2(\Omega)}\leqslant C\left(\|f\|_{L_2(\Omega)}+\|\phi_1\|_{W^1_2(S)}+\|\phi_2\|_{W^1_2(S)}\right),\\&\|u\|_{W^p_2(\Omega^+_{\tau_0})}+\|u\|_{W^p_2(\Omega^-_{\tau_0})}\leqslant C(p,\delta)\Big(\|f\|_{W^{p-2}_2(\Omega^+_\tau)}+\|f\|_{W^{p-2}_2(\Omega^-_\tau)}\\&\qquad\qquad+\|f\|_{L_2(\Omega)}+\|\phi_1\|_{W^p_2(S)}+\|\phi_2\|_{W^p_2(S)}\Big),\end{aligned}\tag{5.5.13}$$

где $\tau_0\in(0,\tau)$ — произвольное фиксированное число, константы C и $C(p,\delta)$ не зависят от u, f и ϕ_1, ϕ_2, во второй оценке $p\geqslant 2$ — произвольное натуральное число. Функция u бесконечно дифференцируема в $\Omega^\pm_{\tau_0}$ и для каждого $\tau_0\in(0,\tau)$ все её производные равномерно ограничены в области $\overline{\Omega^\pm_{\tau_0}}$.

Доказательство. Пусть $\chi_7 = \chi_7(x_n)$ — функция, равная нулю при $x_n \geqslant \frac{2\tau}{3}$ и $x_n < 0$ и единице при $0 < x_n \leqslant \frac{\tau}{3}$. Решение задачи (5.5.12) будем искать в виде:

$$u(x) = \chi_7(x_n)(\phi_1(x') + x_n\phi_2(x')) + \tilde{u}. \tag{5.5.14}$$

Функция $\tilde{u}$ является решением задачи

$$(\mathcal{L} - \lambda)\tilde{u} = \tilde{f}, \quad x \in \Omega, \qquad \tilde{u} = 0, \quad x \in \partial\Omega, \tag{5.5.15}$$

где $\tilde{f} = f - (\mathcal{L} - \lambda)(\chi_7(x_n)\phi_1(x') + x_n\chi_7(x_n)\phi_2(x'))$ при $x_n > 0$, $\tilde{f} = f$ при $x_n < 0$.

Через $\mathcal{H}$ обозначим оператор в $L_2(\Omega)$ с дифференциальным выражением $\mathcal{L}$ и краевым условием Дирихле на $\partial\Omega$. Соответствующая полуторалинейная форма — это форма $\mathfrak{h}_0$, рассматриваемая на пространстве $\mathring{W}_2^1(\Omega, \partial\Omega)$. Такой оператор является m–секториальным, а потому его спектр содержится в некотором угле в комплексной плоскости с вершиной на вещественной оси и раствором вдоль положительного направления на этой оси. Выберем теперь число λ_0 так, чтобы оно лежало левее вершины упомянутого конуса. Тогда при $\lambda < \lambda_0$ определена резольвента $(\mathcal{H} - \lambda)^{-1}$, и следовательно, задача (5.5.15) разрешима. Поэтому задача (5.5.12) тоже разрешима.

Ясно, что оператор $(\mathcal{H} - \lambda)$ ограничен как действующий из $\mathring{W}_2^2(\Omega, \partial\Omega)$ в $L_2(\Omega)$. И так как по доказанному выше у него существует обратный $(\mathcal{H} - \lambda)^{-1}$, по теореме Банаха об обратном операторе немедленно заключаем, что оператор $(\mathcal{H} - \lambda)^{-1} : L_2(\Omega) \to \mathring{W}_2^2(\Omega, \partial\Omega)$ ограничен. Это означает справедливость оценки

$$\|\tilde{u}\|_{W_2^2(\Omega)} \leqslant C\|\tilde{f}\|_{L_2(\Omega)}. \tag{5.5.16}$$

Здесь и всюду далее в доказательстве через C обозначаем различные несущественные константы, не зависящие от $\tilde{f}$, $\tilde{u}$, $x \in \Omega$, а также индекса k, который будет введен ниже.

Докажем оценку (5.5.13). В пространстве $\mathbb{R}^{n-1}$ выберем разбиение единицы бесконечно дифференцируемыми финитными функциями $\zeta_k = \zeta_k(x')$, $k \in \mathbb{N}$, удовлетворяющими следующим условиям

$$0 \leqslant \zeta_k \leqslant 1, \qquad \left|\frac{\partial \zeta_k}{\partial x_i}\right| + \left|\frac{\partial^2 \zeta_k}{\partial x_i \partial x_j}\right| \leqslant C, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k = 1.$$

Дополнительно предполагаем, что носитель каждой функции ζ_k с помощью некоторого сдвига можно вложить в фиксированное ограниченное множество Q, не зависящее от k. Также предполагаем, что в каждой точке $x \in \Omega$ пересекается конечное число носителей функции ζ_k, при этом число пересечений ограничено некоторой константой, не зависящей от x и k. Обозначим: $\Omega^{(k)} := \operatorname{supp} \zeta_k \times \mathbb{R}$, $\Omega_\tau^{(k)} := \operatorname{supp} \zeta_k \times (-\tau, \tau)$.

Функцию $\tilde{u}$ представим в виде

$$\tilde{u}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x), \quad \text{где} \quad u_k(x) = \tilde{u}(x)\zeta_k(x'). \tag{5.5.17}$$

Каждая из функций u_k является решением задачи

$$(\mathcal{L} - \lambda)u_k = \zeta_k \tilde{f} + \tilde{F}_k, \quad x \in \Omega_\tau^{(k)}, \qquad u_k = 0, \quad x \in \partial\Omega_\tau^{(k)},$$
$$\tilde{F}_k = \tilde{u} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial x_i} A_{ij} \frac{\partial \zeta_k}{\partial x_j} + 2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n-1} A_{ij} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_i} \frac{\partial \zeta_k}{\partial x_j} - \sum_{j=1}^{n-1} A_j \tilde{u} \frac{\partial \zeta_k}{\partial x_j}.$$

В силу гладкости функций f, $\tilde{u}$ и теорем повышения гладкости [17, глава 4, §2] выполнены априорные оценки

$$\|u_k\|^2_{W_2^p(\Omega_{\tau_0}^{(k)})} \leqslant C \left(\|\zeta_k \tilde{f}\|^2_{W_2^{p-2}(\Omega_{\tau_1}^{(k)})} + \|\tilde{F}_k\|^2_{W_2^{p-2}(\Omega_{\tau_1}^{(k)})} + \|u_k\|^2_{L_2(\Omega^{(k)})} \right), \tag{5.5.18}$$

где $p \geqslant 2$, $p \in \mathbb{N}$, $\tau_0 < \tau_1 < \tau$.

Используя определение функций ζ_k и неравенство $0 \leqslant \zeta_k \leqslant 1$, для произвольной функции $w \in L_2(\Omega)$ и произвольного τ выводим

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|\zeta_k w\|^2_{L_2(\Omega_\tau^{(k)})} \leqslant C \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{\Omega_\tau^{(k)}} \zeta_k^2 |w|^2 \, dx = \|w\|^2_{L_2(\Omega_\tau)}.$$

В силу последнего неравенства, предполагаемых равномерных оценок для производных ζ_k и (5.5.16) выполнено

$$\sum_{k=1}^{\infty}\|u_k\|^2_{L_2(\Omega^{(k)})}\leqslant C\|\tilde{f}\|^2_{L_2(\Omega)},$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}\|\zeta_k\tilde{f}\|^2_{W_2^{p-2}(\Omega_{\tau_1}^{(k)})}+\sum_{k=1}^{\infty}\|\tilde{F}_k\|^2_{W_2^{p-2}(\Omega_{\tau_1}^{(k)})}\leqslant C\left(\|\tilde{f}\|^2_{W_2^{p-2}(\Omega_\tau)}+\|\tilde{u}\|^2_{W_2^{p-1}(\Omega)}\right).$$

Из последних двух неравенств и (5.5.17), (5.5.18) следует

$$\|\tilde{u}\|^2_{W_2^p(\Omega_{\tau_0})}\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\|u_k\|^2_{W_2^p(\Omega_{\tau_0}^{(k)})}\leqslant C\left(\|\tilde{f}\|^2_{W_2^{p-2}(\Omega_{\tau_1})}+\|\tilde{u}\|^2_{W_2^{p-1}(\Omega_{\tau_1})}\right).$$

Применяя полученное неравенство по индукции для $p\geqslant 2$ на подходящей монотонной последовательности $\tau'\to\tau_0$, с учётом неравенства (5.5.16) получаем

$$\|\tilde{u}\|_{W_2^p(\Omega_{\tau_0})}\leqslant C\Big(\|\tilde{f}\|_{W_2^{p-2}(\Omega_{\tau_1})}+\|\tilde{f}\|_{L_2(\Omega)}\Big)$$

для произвольных $\tau_0<\tau_1<\tau$. Неравенство (5.5.13) следует из последней оценки и (5.5.14). Лемма доказана. $\square$

Следующее утверждение является прямым следствием доказанной леммы.

Лемма 5.5.3. *Пусть $\lambda<\lambda_0$, где λ_0 — из утверждения леммы 5.5.2, а функции $f=f(x,\eta)$, $\phi_1=\phi_1(x',\eta)$, $\phi_2=\phi_2(x',\eta)$ являются элементами пространств $L_2(\Omega)\cap(W_2^p(\Omega_{\tau_1}^+)\oplus W_2^p(\Omega_{\tau_1}^-))$, $W_2^p(S)$ для всех $p\in\mathbb{N}$ с некоторым $0<\tau_1<\tau$, бесконечно дифференцируемы по $\eta\in(0,1]$ и ограничены равномерно по $\eta\in[0,1]$ в нормах указанных пространств. Тогда решение задачи (5.5.12) принадлежит $\mathring{W}_2^1(\Omega)$ и $W_2^p(\Omega_{\tau_0}^+)\oplus W_2^p(\Omega_{\tau_0}^-)$ для всех $p\in\mathbb{N}$ и $0<\tau_0<\tau_1$, бесконечно дифференцируемо по $\eta\in(0,1]$ и ограничено равномерно по $\eta\in[0,1]$ в нормах указанных пространств.*

Действительно, линейный оператор, сопоставляющий тройкам (f,ϕ_1,ϕ_2) решение задачи (5.5.12), является ограниченным из пространств

$$L_2(\Omega)\cap(W_2^p(\Omega_{\tau_1}^+)\oplus W_2^p(\Omega_{\tau_1}^-))\times W_2^{p+2}(S)\times W_2^{p+2}(S)$$

в

$$(W_2^1(\Omega^+) \oplus W_2^1(\Omega^-)) \cap (W_2^{p+2}(\Omega_{\tau_0}^+) \oplus W_2^{p+2}(\Omega_{\tau_0}^-))$$

согласно лемме 5.5.2. Поэтому бесконечная дифференцируемость и равномерная ограниченность по параметру его аргументов немедленно влечёт аналогичные свойства для результата действия этого оператора.

Остальная часть параграфа посвящена изучению гладкости решения задачи (1.0.18), (1.0.19) по пространственным переменным и параметру α.

Начнём с рассмотрения вспомогательной задачи, свойства решения которой далее будут играть ключевую роль:

$$\begin{aligned} &(-\Delta - \lambda)u = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_{\tau_0} \setminus S, \qquad u = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega_{\tau_0} \setminus S, \\ &[u]_0 = 0, \qquad \left[\frac{\partial u}{\partial x_n}\right]_0 + \mathrm{a}(x,u) = h \quad \text{на} \quad S, \end{aligned} \tag{5.5.19}$$

где $\tau_0 < \tau$ — некоторое фиксированное число, a — комплекснозначная функция, заданная для тех же значений аргументов, что и функция a, и удовлетворяющая условиям (1.0.40), $h = h(x')$ — некоторая заданная функция, относительно которой пока предполагаем, что $h \in L_2(S)$.

Сразу же отметим, что существует фиксированное число λ_0, зависящее от a, но не зависящее от h такое, что задача (5.5.19) однозначно разрешима в $W_2^1(\Omega_{\tau_0})$ для любой функции $h \in L_2(S)$. Этот факт проверяется аналогично тому, как была доказана разрешимость задачи (1.0.4) в лемме 3.2.3 для произвольной функции $\mathrm{a}(x,u)$, удовлетворяющей условиям (1.0.40). Всюду далее считаем, что $\lambda < \lambda_0$.

Из постановки задачи (5.5.19) немедленно вытекает, что решение этой задачи чётно по x_n и в силу стандартных теорем о внутренней гладкости решений линейных эллиптических задач верны принадлежности

$$u \in W_2^p(\Omega_{\tau_0} \setminus \Omega_{\tau_1}) \qquad \text{для любых} \qquad \tau_1 < \tau_0, \quad p \in \mathbb{N}. \tag{5.5.20}$$

Обозначим:

$$\begin{gathered} u_\rho := \operatorname{Re} u, \quad u_{\mathrm{i}} := \operatorname{Im} u, \quad h_\rho := \operatorname{Re} h, \\ h_{\mathrm{i}} := \operatorname{Im} h, \quad a_\rho := \operatorname{Re} \mathrm{a}, \quad a_{\mathrm{i}} := \operatorname{Im} \mathrm{a}. \end{gathered}$$

В силу условий (1.0.40) для функции a выполнена оценка

$$\begin{aligned} |a_\rho(x,u)u_\rho + a_{\mathrm{i}}(x,u)u_{\mathrm{i}}| \leqslant & |u_r|^2 \sup_{x,u}\left|\frac{\partial a_\rho}{\partial u_\rho}\right| + |u_i|^2 \sup_{x,u}\left|\frac{\partial a_{\mathrm{i}}}{\partial u_\rho}\right| \\ & + |u_r||u_i| \left(\sup_{x,u}\left|\frac{\partial a_\rho}{\partial u_{\mathrm{i}}}\right| + \sup_{x,u}\left|\frac{\partial a_{\mathrm{i}}}{\partial u_\rho}\right|\right) \\ \leqslant & a_1(|u_\rho| + |u_{\mathrm{i}}|)^2 \leqslant 2a_1(|u_\rho|^2 + |u_{\mathrm{i}}|^2). \end{aligned} \tag{5.5.21}$$

Следующая лемма было доказана в [14]. Доказательство было проведено Д.И. Борисовым и здесь мы его не приводим.

Лемма 5.5.4. *Пусть $h \in L_2(S) \cap L_\infty(S)$. Существует абсолютная константа $\tilde{\lambda}_0$, не зависящая от* a *и h, такая что при $\lambda < \tilde{\lambda}_0$ обобщённое решение задачи (5.5.19) необходимо принадлежит пространству $L_\infty(\Omega_{\tau_0}) \cap C^\vartheta(\overline{\Omega_{\tau_0}})$, где ϑ — некоторая абсолютная константа, не зависящая от h и* a*. Верно неравенство*

$$\max_{\overline{\Omega_{\tau_0}}} |u(x)| \leqslant C(\lambda, \|h\|_{L_\infty(S)}, \|u\|_{L_2(\Omega_{\tau_0})}), \tag{5.5.22}$$

где константа C не зависит от a*, но зависит от указанных аргументов. Эти аргументы можно заменить на их верхние оценки, не нарушая при этом неравенство (5.5.22).*

Доказанная лемма вместе со стандартными теоремами о повышении гладкости для линейных задач позволит нам доказать следующее ключевое утверждение.

Лемма 5.5.5. *Пусть $\lambda < \min\{\lambda_0, \tilde{\lambda}_0\}$ и $h \in W_2^p(S)$ для всех $p \in \mathbb{N}$. Тогда решение задачи (5.5.19) является элементом пространства $W_2^p(\Omega_{\tau_0}^-) \oplus W_2^p(\Omega_{\tau_0}^+)$ для всех $p \in \mathbb{N}$ и некоторого $\tau_0 < \tau$. Нормы решения u в этих пространствах оцениваются константами, зависящими лишь от констант a_1 и $a_{\beta,\gamma}$ из (1.0.40), нормы $\|u\|_{W_2^1(\Omega_{\tau_0})}$ и норм $\|h\|_{W_2^p(S)}$.*

Доказательство. В силу второй оценки в (1.0.40) для функции a, функция $\mathrm{a}(x, u(x))$ является элементом пространства $W_2^1(\Omega_{\tau_0})$. След этой функции является одним из слагаемых в правой части граничного условия в

(5.5.19) и согласно [**?**, §25, Теор. 25.1] существует функция из $W_2^2(\Omega_{\tau_0}^+)\oplus W_2^2(\Omega_{\tau_0}^-)$, удовлетворяющая краевым условиям в задаче (5.5.19). Поэтому в силу стандартных теорем о повышении гладкости для линейных краевых задач сразу заключаем, что $u\in W_2^2(\Omega_{\tau_0}^+)\oplus W_2^2(\Omega_{\tau_0}^-)$. Кроме того, применение леммы 5.5.4 позволяет утверждать, что функция u также является элементом пространства $L_\infty(\Omega_{\tau_0})\cap C^\vartheta(\overline{\Omega_{\tau_0}})$.

С учётом установленной принадлежности для функции u продифференцируем уравнение и краевые условия в (5.5.19) по x_j, $j=1,\ldots,n-1$. Тогда видим, что функции $u_j:=\frac{\partial u}{\partial x_j}$, $j=1,\ldots,n-1$, являются обобщёнными решениями краевой задачи

$$\begin{aligned} &(-\Delta-\lambda)u_j=0 \quad \text{в} \quad \Omega_{\tau_0}\setminus S, \qquad u_j=0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega_{\tau_0}\setminus S,\\ &[u_j]_0=0, \qquad \left[\frac{\partial u_j}{\partial x_n}\right]_0+\mathrm{a}_j(x,u_j)=h_j \quad \text{на} \quad S, \end{aligned} \tag{5.5.23}$$

где обозначено

$$\begin{aligned} &\mathrm{a}_j(x,u_j):=\frac{\partial a}{\partial u_\rho}(x,u(x))\operatorname{Re}u_j+\mathrm{i}\frac{\partial a}{\partial u_\mathrm{i}}(x,u(x))\operatorname{Im}u_j,\\ &h_i(x):=\frac{\partial a}{\partial x_i}(x,u(x))+\frac{\partial h}{\partial x_i}(x). \end{aligned}$$

В силу условий (1.0.40), принадлежности $u\in L_\infty(\Omega_{\tau_0})$ и предполагаемой гладкости функции h легко видеть, что функции a_j также удовлетворяют условиям (1.0.40). Это позволяет применить лемму 5.5.4 к задачам (5.5.23) и заключить, что $\frac{\partial u}{\partial x_j}=u_j\in L_\infty(\Omega_{\tau_0})\cap C^\vartheta(\overline{\Omega_{\tau_0}})$.

С учётом чётности функции u по x_n и принадлежностей (5.5.20), функция $u_n:=\frac{\partial u}{\partial x_n}$ является решением того же уравнения из (5.5.19), нечётна по x_n, её след на поверхности $\partial\Omega\setminus S$ является элементом пространств $W_2^p(\partial\Omega\setminus S)$ для всех $p\in\mathbb{N}$ и выполнено краевое условие $u_n\big|_{x_n=\pm0}=\pm a(x,u(x))\big|_{x_n=0}$. В силу предположений относительно функции a и уже установленных свойств функции u видим, что функции $\pm a(x,u(x))\big|_{x_n=0}$ являются элементами пространств $L_\infty(S)\cap C^\vartheta(S)$ с некоторым показателем ϑ и следами функций $a(x,u(x))$, принадлежащих $W_2^1(\Omega_{\tau_0}^\pm)$. Это позволяет применить к ней теорему 13.1 из [26, Гл. III, §13] и теорему 14.1 из [42, Гл. III, §13], из которых уже следует, что $u_n \in L_\infty(\Omega^\pm_{\tau_0}) \cap C^\vartheta(\overline{\Omega_{\tau_0}})$.

Так как $u, \frac{\partial u}{\partial x_j} \in L_\infty(\Omega^\pm_{\tau_0}) \cap C^\vartheta(\overline{\Omega_{\tau_0}})$, $j = 1, \ldots, n$, то с учётом предполагаемой гладкости функции a и условий (1.0.40), (1.0.11) теперь легко проверить, что функция $a(x, u(x))$ является элементом пространств $W_2^2(\Omega^\pm_{\tau_0})$. Поэтому, аналогично началу доказательства, функция u является элементом пространства $W_2^3(\Omega^+_{\tau_0}) \oplus W_2^3(\Omega^-_{\tau_0})$. Это позволяет уже дважды продифференцировать задачу (5.5.19) по пространственным переменным и установить в итоге, что вторые производные функции u принадлежат $L_\infty(\Omega^\pm_{\tau_0}) \cap C^\vartheta(\overline{\Omega_{\tau_0}})$. Повторяя данный процесс по индукции, приходим к утверждению леммы. Лемма доказана. $\square$

Лемма 5.5.6. *Существует λ_0, такое что при $\lambda < \lambda_0$ задача*

$$\Big(- \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} A_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^n A_j \frac{\partial}{\partial x_j} + A_0 - \lambda \Big) u = f \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{5.5.24}$$

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega, \qquad [u]_0 = 0 \quad \text{на} \quad S, \tag{5.5.25}$$
$$\left[\frac{\partial u}{\partial \mathrm{n}}\right]_0 + \alpha a(x, u) = g \quad \text{на} \quad S,$$

однозначно разрешима в $W_2^1(\Omega)$ для всех $\alpha \in [0, \alpha_*]$, $\alpha_* := \frac{|\partial\omega|}{|\square|}$, всех функций f, удовлетворяющих условию (1.0.24) и всех функций h, таких что $h \in W_2^p(S)$ для всех $p \in \mathbb{N}$. Справедливо неравенство

$$\|u\|_{W_2^1(\Omega)} + \|u\|_{W_2^2(\Omega^+_{\tau_0})} + \|u\|_{W_2^2(\Omega^-_{\tau_0})} \leqslant C \big(\|f\|_{L_2(\Omega)} + \|g\|_{W_2^1(S)} \big), \tag{5.5.26}$$

где константа C не зависит от f и g. Решение задачи (5.5.24), (5.5.25) принадлежит пространствам $W_2^p(\Omega^+_{\tau_0}) \oplus W_2^p(\Omega^-_{\tau_0})$, $W_\infty^p(\Omega^+_{\tau_0}) \oplus W_\infty^p(\Omega^-_{\tau_0})$ для всех $p \in \mathbb{N}$, а также пространствам $C^\infty(\overline{\Omega^+_{\tau_0}}) \oplus C^\infty(\overline{\Omega^-_{\tau_0}})$ для всех $\tau_0 < \tau$. Нормы решения в этих пространствах оцениваются константами, зависящими лишь от чисел a_1 и $a_{\beta,\gamma}$ из (1.0.40), и норм $\|f\|_{L_2(\Omega)}$, $\|f\|_{W_2^p(\Omega_{\tau_0})}$, $\|g\|_{W_2^p(S)}$.

Доказательство. Пусть $\chi_8 = \chi_8(x_n)$ — бесконечно дифференцируемая срезающая функция, равная единице при $|x_n| < \frac{\tau_0}{3}$ и нулю при $|x_n| > \frac{2\tau_0}{3}$.

Замена функции $u = \tilde{u} + \frac{1}{2}\chi_8(x_n)|x_n|h(x')$ сводит задачу (5.5.24), (5.5.25) к её частному случаю $h = 0$ с некоторой новой правой частью в уравнении, причём эта правая часть также удовлетворяет условию (1.0.24). Разрешимость задачи (5.5.24), (5.5.25) в случае $h = 0$ была показана в в лемме 3.2.3 для произвольной функции $a(x, u)$, при этом величина параметра λ_0 фактически определялась лишь константой a_1 из условий (1.0.40). Поэтому для рассматриваемой задачи достаточно выбрать общую константу a_1 сразу для всех значений $\alpha \in [0, \alpha_*]$ и применить затем лемму 3.2.3

Докажем гладкость решения по пространственным переменным. Выберем произвольно значение $\alpha_0 \in [0, \alpha_*]$, через u_0 обозначим соответствующее решение задачи (5.5.24), (5.5.25) для некоторой заданной функции f. Тогда функция $\tilde{u}_0 := u_0\chi_8$ является решением краевой задачи

$$\begin{aligned} &(-\Delta - \lambda)\tilde{u}_0 = \tilde{f} \quad \text{в} \quad \Omega_{\tau_0}, \qquad \tilde{u}_0 = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega_{\tau_0}, \\ &[\tilde{u}_0]_0 = 0, \qquad \left[\frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial x_n}\right]_0 + a(x, \tilde{u}_0) = g \quad \text{на} \quad S, \end{aligned} \tag{5.5.27}$$

где функция $\tilde{f} := \chi_f - 2\chi_8' \frac{\partial u_0}{\partial x_n} - \chi_8'' u_0$ принадлежит $W_2^p(\Omega_{\tau_0})$ для всех $p \in \mathbb{N}$.

Пусть u_f — решение уравнения в (5.5.27) с краевыми условиями Дирихле на $\partial\Omega_{\tau_0} \cup S$. Такая задача разрешима при $\lambda < 0$, поэтому без ограничения считаем, что $\lambda_0 < 0$. В силу стандартных теорем о повышении гладкости линейных эллиптических задач выполнено $u_f \in W_2^p(\Omega_{\tau_0}^\pm)$ для всех $p \in \mathbb{N}$.

Обозначим: $u_a := \tilde{u}_0 - u_f$. Тогда для u_a получаем задачу (5.5.19), где $h = g + \left[\frac{\partial u_f}{\partial x_n}\right]_0$. В силу свойств функции u_f выполнено $h \in W_2^p(S)$ для всех $p \in \mathbb{N}$. Применяя теперь лемму 5.5.5, заключаем, что $u_a \in W_2^p(\Omega_{\tau_0}^+) \oplus W_2^p(\Omega_{\tau_0}^-)$ для всех $p \in \mathbb{N}$. Возвращаясь теперь обратно к решению задачи (5.5.27) и учитывая гладкость функции u_f, приходим к утверждению леммы. $\square$

Лемма 5.5.7. *В условиях леммы 5.5.6 решение задачи (1.0.18), (1.0.19) бесконечно дифференцируемо по $\alpha \in [0, \alpha_*]$ в нормах пространств $W_2^1(\Omega)$*

и $W_2^p(\Omega_{\tau_0}^+)\cap W_2^p(\Omega_{\tau_0}^-)$ *для всех* $p\in\mathbb{N}$.

Доказательство. Выберем теперь достаточно малое ϵ и через u_ϵ обозначим решение задачи (1.0.18), (1.0.19) для $\alpha=\alpha_0+\epsilon\in[0,\alpha_*]$. Разностное отношение $w_\epsilon:=(u_\epsilon-u_0)\epsilon^{-1}$ является решением краевой задачи

$$\begin{aligned}
&\Big(-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}A_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}+\sum_{j=1}^{n}A_j\frac{\partial}{\partial x_j}+A_0-\lambda\Big)w_\epsilon=0 \quad \text{в} \quad \Omega,\\
&w_\epsilon=0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega, \qquad [w_\epsilon]_0=0,\\
&\left[\frac{\partial w_\epsilon}{\partial \mathrm{n}}\right]_0+a_\epsilon(x,w_\epsilon)+a(x,u_0(x))=0 \quad \text{на} \quad S,
\end{aligned}$$

где обозначено

$$a_\epsilon(x,w):=(\alpha_0+\epsilon)\epsilon^{-1}\big(a(x,u_0(x)+\epsilon w)-a(x,u_0(x))\big)\big|_{x_n=0}.$$

Отметим, что в силу оценки $0\leqslant\alpha_0+\epsilon\leqslant\alpha_*$ и леммы Адамара для функции a_ϵ выполнены условия (1.0.40), причём с теми же константами, что и для функции a. Согласно лемме 5.5.5 и теоремам о вложении пространств W_2^p в $C^{p-[\frac{n}{2}]-1}$, след функции u_0 на S принадлежит $W_2^p(S)$ для всех $p\in\mathbb{N}$, бесконечно дифференцируем и равномерно ограничен вместе со всеми своими производными. Это позволяет применить лемму 5.5.6 и получить равномерные по ϵ оценки

$$\begin{aligned}
&\|w_\epsilon\|_{W_2^1(\Omega)}\leqslant C,\\
&\|w_\epsilon\|_{W_2^p(\Omega_{\tau_0}^+)}+\|w_\epsilon\|_{W_2^p(\Omega_{\tau_0}^-)}\leqslant C,\\
&\|w_\epsilon\|_{W_\infty^p(\Omega_{\tau_0}^+)}+\|w_\epsilon\|_{W_\infty^p(\Omega_{\tau_0}^-)}\leqslant C,\\
&\max_{\overline{\Omega_{\tau_0}^+}}|\partial^\beta w_\epsilon|+\max_{\overline{\Omega_{\tau_0}^-}}|\partial^\beta w_\epsilon|\leqslant C,
\end{aligned}\tag{5.5.28}$$

где $p\in\mathbb{N}$, $\beta\in\mathbb{Z}_+^n$, а C — некоторые константы, не зависящие от ϵ.

Рассмотрим задачу

$$
\begin{aligned}
&\Big(-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}A_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}+\sum_{j=1}^{n}A_j\frac{\partial}{\partial x_j}+A_0-\lambda\Big)w_0=0 \quad \text{в} \quad \Omega,\\
&w_0=0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega, \qquad [w_0]_0=0,\\
&\left[\frac{\partial w_0}{\partial \mathrm{n}}\right]_0+\mathrm{a}_0(x,w_0)+a(x,u_0(x))=0 \quad \text{на} \quad S,
\end{aligned}
\tag{5.5.29}
$$

где обозначено

$$
\mathrm{a}_0(x,w):=\alpha_0\left(\frac{\partial a}{\partial u_\rho}(x,u_0)\operatorname{Re}w+\mathrm{i}\frac{\partial a}{\partial u_\mathrm{i}}(x,u_0)\operatorname{Im}w\right).
$$

Ясно, что для функции a_0 верны условия (1.0.40) причём с теми же константами a_1, $a_{\beta,\gamma}$, что и для функции a. Поэтому, не меняя указанный выше выбор константы λ_0, для функции w_0 получаем оценки, аналогичные (5.5.28), достаточно лишь заменить w_ϵ на w_0.

Обозначим: $\Theta_\epsilon:=w_\epsilon-w_0$. Эта функция является решением задачи

$$
\begin{aligned}
&\Big(-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}A_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}+\sum_{j=1}^{n}A_j\frac{\partial}{\partial x_j}+A_0-\lambda\Big)\Theta_\epsilon=0 \quad \text{в} \quad \Omega,\\
&\Theta_\epsilon=0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega, \qquad [\Theta_\epsilon]_0=0,\\
&\left[\frac{\partial \Theta_\epsilon}{\partial \mathrm{n}}\right]_0+a_\epsilon(x,w_0+\Theta_\epsilon)=a_0(x,w_0) \quad \text{на} \quad S.
\end{aligned}
\tag{5.5.30}
$$

Несложно проверить, что

$$
\begin{aligned}
&a_\epsilon(x,w_0+\Theta_\epsilon)-a_0(x,w_0)=a^\epsilon(x,\Theta_\epsilon)+h^\epsilon(x),\\
&a^\epsilon(x,\Theta):=(\alpha_0+\epsilon)\epsilon^{-1}\big(a(x,u_0(x)+\epsilon w_0(x)+\epsilon\Theta)-a(x,u_0(x)+\epsilon w_0(x))\big),\\
&h^\epsilon(x):=(\alpha_0+\varepsilon)\epsilon^{-1}\big(a(x,u_0(x)+\epsilon w_0(x))\\
&\qquad -a(x,u_0(x))\big)-\alpha_0\left(\frac{\partial a}{\partial u_\rho}(x,u_0)\operatorname{Re}w_0(x)+\mathrm{i}\frac{\partial a}{\partial u_\mathrm{i}}(x,u_0)\operatorname{Im}w_0(x)\right).
\end{aligned}
$$

С учётом гладкости функций u_0 и v_0 и оценок типа (5.5.28) для этих функций сразу заключаем, что $h^\epsilon\in W_2^p(S)\cap W_\infty^p(S)\cap C^\infty(S)$ для всех

$p \in \mathbb{N}$ и верны оценки

$$\max_S |\partial^\beta h^\epsilon| \leqslant C\epsilon, \qquad \|h^\epsilon\|_{W_2^p(S)} \leqslant C\epsilon, \qquad p \in \mathbb{N}, \qquad \beta \in \mathbb{Z}_+^n, \quad (5.5.31)$$

с некоторыми константами C, не зависящими от ϵ. Функция a^ϵ удовлетворяет условиям (1.0.40) с теми же константами, что и функция a. Используя этот факт, оценки (5.5.31) и оценку (5.5.26), заключаем, что

$$\|\Theta_\epsilon\|_{W_2^1(\Omega)} + \|\Theta_\epsilon\|_{W_2^2(\Omega_{\tau_0}^+)} + \|\Theta_\epsilon\|_{W_2^2(\Omega_{\tau_0}^-)} \leqslant C\epsilon,$$

где константа C не зависит от ε. Дифференцируя теперь задачу (5.5.30) по пространственным переменным, выписывая соответствующие краевые задачи для производных функции Θ_ϵ, на основе оценок (5.5.31), (5.5.26) по индукции несложно проверить, что

$$\|\Theta_\epsilon\|_{W_2^p(\Omega_{\tau_0}^+)} + \|\Theta_\epsilon\|_{W_2^p(\Omega_{\tau_0}^-)} \leqslant C\epsilon,$$

где константа C не зависит от ε. Полученные оценки означают сходимость функции w_ϵ к w_0 при $\epsilon \to +0$ в нормах пространств $W_2^1(\Omega)$ и $W_2^p(\Omega_{\tau_0}^+) \oplus W_2^p(\Omega_{\tau_0}^-)$ для всех $p \in \mathbb{N}$. Следовательно, решение задачи (1.0.18), (1.0.19) дифференцируемо по α в нормах указанных пространств, причём производная — это решение w_0 задачи (5.5.29). Эта задача такого же типа, что и исходная задача (1.0.18), (1.0.19) и дифференцируемость её решения по α доказывается аналогично. Продолжая этот процесс по индукции, приходим к утверждению леммы. $\square$

5.6 Свойства коэффициентов внутреннего и внешнего разложений

В настоящем параграфе мы устанавливаем разрешимость задач для коэффициентов внешнего и внутреннего разложений и исследуем их свойства.

Начнём с задачи (1.0.42), (5.1.5) для $m = 0$. Это однородная задача, которая в силу леммы 5.4.1 имеет единственное решение, ограниченное на бесконечности — константу. С учётом асимптотик (5.1.5) это означает выполнение равенств

$$u_0(x',+0,\eta)=u_0(x',-0,\eta),\qquad v_0(\xi,x',\eta)\equiv u_0(x',0,\eta). \tag{5.6.1}$$

Для определения решения задачи (1.0.42), (5.1.5) с $m=1$ рассмотрим вспомогательные задачи

$$\Delta_\xi Z_\pm=0\quad\text{в}\quad \Pi\setminus\overline{\omega^\eta},\qquad \frac{\partial Z_-}{\partial\nu_\xi}=0,\qquad \frac{\partial Z_+}{\partial\nu_\xi}=\frac{|\Box|}{|\partial\omega|},\quad\text{на}\quad\partial\omega^\eta, \tag{5.6.2}$$

с периодическими граничными условиями (5.2.2) и следующим поведением на бесконечности:

$$Z_-(\xi)=\frac{1}{2}\xi_n+O(1),\qquad Z_+(\xi)=\frac{\eta^{n-1}}{2}|\xi_n|+O(1),\qquad \xi_n\to\pm\infty. \tag{5.6.3}$$

Решение задач (5.6.2), (5.6.3) будем искать в виде

$$Z_-(\xi)=\tilde Z_-(\xi)+\frac{1}{2}\chi_3(\xi_n)\xi_n,\qquad Z_+(\xi)=\tilde v_+(\xi)+\frac{\eta^{n-1}}{2}\chi_3(\xi_n)|\xi_n|.$$

Тогда для функций $\tilde v_\pm$ получаем задачи

$$\begin{aligned}
&\Delta_\xi\tilde Z_-=-\frac{1}{2}\Delta_\xi(\chi_3\xi_n)\quad\text{в}\quad\Pi\setminus\overline{\omega^\eta}, && \frac{\partial\tilde Z_-}{\partial\nu_\xi}=0\quad\text{на}\quad\partial\omega^\eta,\\
&\Delta_\xi\tilde Z_+=-\frac{\eta^{n-1}}{2}\Delta_\xi(\chi_3|\xi_n|)\quad\text{в}\quad\Pi\setminus\overline{\omega^\eta}, && \frac{\partial\tilde Z_+}{\partial\nu_\xi}=\frac{|\Box|}{|\partial\omega|}\quad\text{на}\quad\partial\omega^\eta,
\end{aligned} \tag{5.6.4}$$

с периодическими граничными условиями (5.2.2). Проверим, что для этих задач выполнено условие разрешимости из леммы 5.4.1. Для этого проинтегрируем по частям

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\partial\omega^\eta}\frac{|\Box|}{|\partial\omega^\eta|}\,ds-\frac{\eta^{n-1}}{2}\int\limits_{\Pi\setminus\omega^\eta}\Delta_\xi(|\xi_n|\chi_3)\,d\xi\\
&\qquad=|\Box|\eta^{n-1}-\frac{1}{2}\lim_{R\to+\infty}\int\limits_{|\Box|}\frac{\partial|\xi_n|}{\partial\xi_n}\Bigg|_{\xi_n=-R}^{\xi_n=R}d\xi=0.
\end{aligned}$$

Аналогично проверяется выполнение условия разрешимости задачи для Z_-. Тогда в силу лемм 5.4.1, 5.5.1 сразу следует, что задачи (5.6.4), а следовательно, и задачи (5.6.2), (5.6.3) разрешимы и для каждого $\eta \in (0,1]$ имеют бесконечно дифференцируемые в $\overline{\Pi} \setminus \omega^\eta$ решения. Функции $Z_\pm$ при $|\xi_n| > R_0$ имеют вид

$$Z_+(\xi,\eta) = \frac{\eta^{n-1}}{2}|\xi_n| + \sum_{k\in\mathbb{Z}^{n-1}} A_k^{+,\pm}(\eta) e^{-2\pi|k_b||\xi_n|} e^{2\pi \mathrm{i} k_b\cdot\xi'}, \quad \pm\xi_n > R_6, \quad (5.6.5)$$

$$Z_-(\xi,\eta) = \frac{1}{2}\xi_n + \sum_{k\in\mathbb{Z}^{n-1}} A_k^{-,\pm}(\eta) e^{-2\pi|k_b||\xi_n|} e^{2\pi \mathrm{i} k_b\cdot\xi'}, \qquad \pm\xi_n > R_6, \quad (5.6.6)$$

где $A_k^{+,\pm}$, $A_k^{-,\pm}$ — некоторые бесконечно дифференцируемые по $\eta \in (0,1]$ функции. Выполнены оценки

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}^{n-1}} e^{-2\pi|k_b|R_6}|A_k^{+,\pm}(\eta)| + \sup_{k\in\mathbb{Z}^{n-1}} e^{-2\pi|k_b|R_6}|A_k^{-,\pm}(\eta)| \leqslant C, \qquad \|v_\pm\|_{C^1(\overline{\Pi^\eta})} \leqslant C,$$

где константа C не зависит от η. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ и $\eta_0 \in (0,1]$ существует $\delta_k(\eta_0)$ такое, что

$$Z_\pm\big(\Xi^{-1}(\eta_0\eta^{-1},\xi),\eta\big) \in C^{k+\frac{1}{2}}\big(\overline{\Pi} \setminus \omega^{\eta_0} \times [\eta_0 - \delta_k(\eta_0), \eta_0 + \delta_k(\eta_0)]\big). \quad (5.6.7)$$

Рассмотрим теперь краевые задачи

$$\Delta_\xi \varphi_{1j} = 0 \quad \text{в} \quad \Pi \setminus \omega^\eta, \qquad \frac{\partial \varphi_{1j}}{\partial \nu_\xi} = \nu_j \quad \text{на} \quad \partial\omega^\eta,$$

с периодическими краевыми условиями на боковых границах. Для этих задач выполнены условия разрешимости из леммы 5.4.1, так как

$$0 = \int\limits_{\omega^\eta} \Delta_\xi \xi_j \, d\xi = \int\limits_{\partial\omega^\eta} \frac{\partial \xi_j}{\partial \nu}\, ds = \int\limits_{\partial\omega^\eta} \nu_j \, ds.$$

Согласно леммам 5.4.1, 5.5.1, функции φ_{1j} имеют вид:

$$\varphi_{1j}(\xi,\eta) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^{n-1}} A_{1j,k}^{\pm}(\eta) e^{-2\pi|k_b||\xi_n|} e^{2\pi \mathrm{i} k_b\cdot\xi'}, \quad \pm\xi_n > R_6, \qquad (5.6.8)$$

где $A^{\pm}_{1j,k} = A^{\pm}_{1j,k}(\eta) \in C^\infty(0,1]$ — некоторые функции. Имеют место оценки

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}^{n-1}} e^{-2\pi|k_b|R_6}|A^{\pm}_{1j,k}| \leqslant C, \qquad \|\varphi_{1j}\|_{C^1(\overline{\Pi^\eta})} \leqslant C,$$

где константа C не зависит от η. Для функций φ_{1j} верны принадлежности, аналогичные (5.6.7).

Теперь решение задачи (1.0.42), (5.1.5) для $m = 1$ можно найти явно:

$$\begin{aligned} v_1(\xi, x', \eta) = {} & \left(\frac{\partial u_0}{\partial x_n}(x', +0, \eta) + \frac{\partial u_0}{\partial x_n}(x', -0, \eta)\right) Z_-(\xi, \eta) \\ & + \eta^{-n+1}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x_n}(x', +0, \eta) - \frac{\partial u_0}{\partial x_n}(x', -0, \eta)\right) Z_+(\xi, \eta) \\ & - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial u_0}{\partial x_j}(x', 0, \eta)\varphi_{1j}(\xi, \eta) + v_1^{(0)}(x', \eta), \end{aligned} \tag{5.6.9}$$

где $v_1^{(0)}$ — некоторая функция, которая будет определена ниже. Предъявленная функция удовлетворяет уравнению из (1.0.42) и периодическим краевым условиям на боковых границах и обладает поведением (5.1.5) при $m = 1$. Выполнение для неё краевого условия из (1.0.42) для $m = 1$ с учётом формулы для $T_0(x', v_0)$, равенств (5.6.1) и краевых условий для функций $Z_\pm$ из (5.6.2) приводит к следующему краевому условию для u_0:

$$[u_0]_0 = 0, \qquad \left[\frac{\partial u_0}{\partial x_n}\right]_0 + \frac{\eta^{n-1}|\partial\omega|}{|\square|} a(x', 0, u_0(x', 0, \eta)) = 0,$$

где первое условие следует из первого равенства в (5.6.1). Второе краевое условие позволяет переписать формулу (5.6.9):

$$\begin{aligned} v_1(\xi, x', \eta) = {} & \left(\frac{\partial u_0}{\partial x_n}(x', +0, \eta) + \frac{\partial u_0}{\partial x_n}(x', -0, \eta)\right) Z_-(\xi, \eta) \\ & - \frac{|\partial\omega|}{|\square|} a(x', 0, u_0(x', 0, \eta)) Z_+(\xi, \eta) \\ & - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial u_0}{\partial x_i}(x', 0, \eta)\varphi_{1j}(\xi, \eta) + v_1^{(0)}(x', \eta). \end{aligned}$$

Сравнивая третий член в асимптотике (5.1.5) для v_1 с аналогичным членов, вытекающим из последней формулы и (5.6.5), (5.6.6), (5.6.8), приходим к граничным условиям

$$\begin{aligned}
u_1(x',\pm 0,\eta) = &\left(\frac{\partial u_0}{\partial x_n}(x',+0,\eta) + \frac{\partial u_0}{\partial x_n}(x',-0,\eta)\right) A_0^{-,\pm}(\eta) \\
&- \frac{|\partial\omega|}{|\square|} a(x',0,u_0(x',0,\eta)) A_0^{+,\pm}(\eta) \\
&- \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial u_0}{\partial x_i}(x',0,\eta) A_{1j,0}^{\pm}(\eta) + v_1^{(0)}(x',\eta), \\
[u_1]_0 = &\left(\frac{\partial u_0}{\partial x_n}(x',+0,\eta) + \frac{\partial u_0}{\partial x_n}(x',-0,\eta)\right) \big(A_0^{-,+}(\eta) - A_0^{-,-}(\eta)\big) \\
&- \frac{|\partial\omega|}{|\square|} a(x',0,u_0(x',0,\eta)) \big(A_0^{+,+}(\eta) - A_0^{+,-}(\eta)\big) \\
&- \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial u_0}{\partial x_j}(x',0,\eta) \big(A_{1j,0}^{+}(\eta) - A_{1j,0}^{-}(\eta)\big).
\end{aligned} \tag{5.6.10}$$

Отметим, что в силу леммы 5.5.7 функции $\dfrac{\partial u_0}{\partial x_n}(\,\cdot\,,\pm 0,\eta)$ бесконечно дифференцируемы по $\eta \in [0,1]$ в нормах пространств $W_2^p(S)$ для всех $p \in \mathbb{N}$.

Для определения скачка производной $\left[\frac{\partial u_1}{\partial x_n}\right]_0$ необходимо провести анализ разрешимости задачи для функции v_2. Зная данный скачок, с одной стороны далее можно построить функцию u_1, решив для неё соответствующую краевую задачу, а с другой стороны — решить задачу для функции v_2. Повторяя эту процедуру по индукции, удаётся определить все функции внешнего и внутреннего разложений. Такое построение и его результаты сформулируем в виде следующей леммы.

Лемма 5.6.1. *Задачи (1.0.42), (5.1.5) разрешимы. Для решений этих задач справедливы представления (1.0.45). При $|\xi_n| > R_6$ функции v_{mj} представляются в виде*

$$\begin{aligned}
v_{mj}(\xi,\eta) = &K_{mj}^{\pm}(\xi_n) + A_{mj}^{\pm}(\eta) \\
&+ \sum_{k\in\mathbb{Z}^{n-1}} Q_{mjk}^{\pm}(\xi_n,\eta) e^{-2\pi|k_b||\xi_n|} e^{2\pi \mathrm{i} k_b\cdot\xi'}, \qquad \pm\xi_n > R_6,
\end{aligned} \tag{5.6.11}$$

где $K^{\pm}_{mj}$ — некоторые полиномы степени не выше m, причём $K^{\pm}_{mj}(0)=0$, а $Q^{\pm}_{mjk}$ — некоторые полиномы по ξ_n степени не выше $(m-1)$ с коэффициентами, зависящими от η, $A^{\pm}_{mj}$ — некоторые функции. Функции $v^{(0)}_m$, φ_{mj} принадлежат пространству $W^p_2(S)$ для всех $p\in\mathbb{N}$, бесконечно дифференцируемы по $\eta\in(0,1]$ и равномерно ограничены по $\eta\in[0,1]$ в нормах указанных пространств.

Функции v_{mj} бесконечно дифференцируемы в $\overline{\Pi}\setminus\omega^\eta$ для каждого $\eta\in(0,1]$ и бесконечно дифференцируемы по $\eta\in(0,1]$ в смысле соотношения (5.5.4). Справедливы оценки

$$\|v_{mj}\|_{\mathfrak{H}}+\|v_{mj}\|_{C^1(\overline{\Pi^\eta})}\leqslant C,\tag{5.6.12}$$

где константы C не зависят от $\eta\in[0,1]$ и j, но зависят от m. На плоскости S функции u_m удовлетворяют краевым условиям

$$[u_m]_0=\sum_{j=1}^{N_m}\varphi_{mj}(x',\eta)(A^+_{mj}(\eta)-A^-_{mj}(\eta)),\tag{5.6.13}$$

$$\begin{aligned}\left[\frac{\partial u_m}{\partial x_n}\right]_0=&-\frac{1}{|\square|}\int\limits_{\partial\omega^\eta}\psi_{m+1}\,ds\\&-\frac{1}{|\square|}\lim_{R\to+\infty}\Bigg(\int\limits_{\Pi_R\setminus\omega^\eta}f_{m+1}\,d\xi+\int\limits_{\square\times\{R\}}\frac{\partial P^+_{m+1}}{\partial\xi_n}\,d\xi'\\&-\int\limits_{\square\times\{-R\}}\frac{\partial P^-_{m+1}}{\partial\xi_n}\,d\xi'\Bigg).\end{aligned}\tag{5.6.14}$$

Задачи (1.0.46) с данными краевыми условиями однозначно разрешимы. Функции u_m принадлежат пространствам $W^1_2(\Omega)$ и $W^p_2(\Omega^+_{\tau_0})\oplus W^p_2(\Omega^-_{\tau_0})$ для всех $p\in\mathbb{N}$, $\tau_0<\tau$, бесконечно дифференцируемы по $\eta\in(0,1]$ и равномерно ограничены по $\eta\in[0,1]$ в нормах указанных пространств.

Доказательство. Доказательство леммы проведём по индукции. База индукции, случай $m=1$, разобрана выше: построены функции u_0, v_1, и для функции u_1 получено граничное условие (5.6.10).

Предположим, что построены решения задач (1.0.42), (5.1.5) до некоторого значения m, решения задач (1.0.46) построены до значения $m-1$, и получено граничное условие (5.6.13) для $[u_m]_0$. Функция v_m имеет вид (1.0.45) с неизвестной пока функцией $v_m^{(0)}$. Для нахождения функции $v_m^{(0)}$ достаточно определить функцию u_m. Зная последнюю, в силу (5.1.5) мы можем найти $v_m^{(0)}$ по формуле

$$v_m^{(0)}(x',\eta) = u_m(x',+0,\eta) - \sum_{j=1}^{N_m} \varphi_{mj}(x',\eta) A_{mj}^{+}(\eta). \tag{5.6.15}$$

В задаче для u_m на данный момент уже определена правая часть через функции $u_j, j \leqslant m-1$, известно граничное условие на $\partial\Omega$ и задан скачок самой функции на S, см. (5.6.13). С учётом леммы 5.5.2 достаточно определить скачок нормальной производной u_m на поверхности S, чтобы затем уже однозначно разрешить полученную задачу для u_m. Данный скачок мы найдем из анализа разрешимости задачи для функции v_{m+1}.

Функции f, u_j, $j \leqslant m-1$, являются элементами пространств $W_2^1(\Omega)$ и $W_2^p(\Omega_{\tau_0}^+) \oplus W_2^p(\Omega_{\tau_0}^-)$ для всех $p \in \mathbb{N}$ и $0 < \tau_0 < \tau_1$. Поэтому в силу стандартных теорем вложения пространств Соболева в пространства непрерывно дифференцируемых функций приходим к выводу, что функции u_j, $j \leqslant m-1$, бесконечно дифференцируемы в $\overline{\Omega_{\tau_0}^+}$ и $\overline{\Omega_{\tau_0}^-}$. Поэтому справедливы формулы (5.1.4), и верна аналогичная формула для f.

Подставим (5.1.4) и (5.1.3) в уравнения из (1.0.18), (1.0.19) и (1.0.46) с учётом сделанных предположений относительно вида коэффициентов A_{ij}, A_j при малых x_n. Тогда получим равенства

$$\begin{aligned}
&-\frac{\partial u_0}{\partial x_n}(x',\pm 0) = f(x',0),\\
&-(\Delta_{x'}+\lambda)\frac{\partial^j u_0}{\partial x_n^j}(x',\pm 0) - \frac{\partial^{j+2} u_0}{\partial x_n^{j+2}}(x',\pm 0) = \frac{\partial^j f}{\partial x_n^j}(x',0), \quad j \geqslant 1,\\
&-(\Delta_{x'}+\lambda)\frac{\partial^j u_p}{\partial x_n^j}(x',\pm 0) - \frac{\partial^{j+2} u_p}{\partial x_n^{j+2}}(x',\pm 0) = 0, \quad j \geqslant 0.
\end{aligned} \tag{5.6.16}$$

Решение задачи (1.0.42), (5.1.5) для v_{m+1} будем строить в виде

$$v_{m+1} = \tilde{v}_{m+1} + \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_n}(x', +0, \eta)\xi_n + \frac{\partial u_m}{\partial x_n}(x', -0, \eta)\xi_n + P^+_{m+1} + P^-_{m+1}\right)\chi_1.$$

где χ_1 — срезающая функция, введённая перед (4.2.11). Тогда для функции $\tilde{v}_{m+1}$ получим следующую задачу:

$$-\Delta_\xi \tilde{v}_{m+1} = \tilde{F}_{m+1} \quad \text{в} \quad \Pi \setminus \overline{\omega^\eta}, \quad \frac{\partial \tilde{v}_{m+1}}{\partial \nu_\xi} = \psi_{m+1} \quad \text{на} \quad \partial\omega^\eta, \tag{5.6.17}$$

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{m+1} &:= f_{m+1} \\ &+ \Delta_\xi \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_n}(x', +0, \eta)\xi_n + \frac{\partial u_m}{\partial x_n}(x', -0, \eta)\xi_n + P^+_{m+1} + P^-_{m+1}\right)\chi_1, \end{aligned} \tag{5.6.18}$$

с периодическими граничными условиями (5.2.2).

Исследуем поведение функции $\tilde{F}_{m+1}$ при $\xi_n \to \pm\infty$. Для этого в $\tilde{F}_{m+1}$ вместо функций v_{m-1} и v_m подставим их асимптотики при $\xi_n \to \pm\infty$, и с учётом равенств (5.6.16) получим

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{m+1} =& \frac{\xi_n^{m-1}}{(m-1)!}\Bigg(\frac{\partial^{m-1} f}{\partial x_n^{m-1}}(x', 0) + (\Delta_{x'} + \lambda)\frac{\partial^{m-1} u_0}{\partial x_n^{m-1}}(x', \pm 0, \eta) \\ &+ \frac{\partial^{m+1} u_0}{\partial x_n^{m+1}}(x', \pm 0, \eta)\Bigg) + (\Delta_{x'} + \lambda)\sum_{j=0}^{m-2}\frac{\xi_n^j}{j!}\frac{\partial^j u_{m-1-j}}{\partial x_n^j}(x', \pm 0, \eta) \\ &+ \sum_{j=2}^{m}\frac{\xi_n^{j-2}}{(j-2)!}\frac{\partial^{j-2} u_{m+1-j}}{\partial x_n^{j-2}}(x', \pm 0, \eta) + o(1) = o(1), \quad \xi_n \to \pm\infty, \end{aligned}$$

где $o(1)$ обозначает члены, экспоненциально убывающие при $\xi_n \to \pm\infty$. Согласно лемме (5.4.1), задача (5.6.17) разрешима, если выполнено условие разрешимости

$$\begin{aligned} &\int\limits_{\partial\omega^\eta} \psi_{m+1}\, ds \\ &+ \int\limits_{\Pi\setminus\omega^\eta} \Delta_\xi \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_n}(x', +0, \eta)\xi_n + \frac{\partial u_m}{\partial x_n}(x', -0, \eta)\xi_n\right)\chi_3\, d\xi \\ &+ \int\limits_{\Pi\setminus\omega^\eta} \left(f_{m+1} + \Delta_\xi(P^+_{m+1} + P^-_{m+1})\chi_3\right) d\xi = 0. \end{aligned} \tag{5.6.19}$$

Проинтегрируем по частям

$$\int\limits_{\Pi\setminus\omega^\eta} \Delta_\xi \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_n}(x',+0,\eta)\xi_n + \frac{\partial u_m}{\partial x_n}(x',-0,\eta)\xi_n\right)\chi_3\,d\xi$$
$$= \lim_{R\to+\infty} \int\limits_{\Pi_R\setminus\omega^\eta} \Delta_\xi \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_n}(x',+0,\eta)\xi_n + \frac{\partial u_m}{\partial x_n}(x',-0,\eta)\xi_n\right)\chi_3\,d\xi$$
$$= |\square| \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_n}(x',+0,\eta) - \frac{\partial u_m}{\partial x_n}(x',-0,\eta)\right).$$

Аналогичным образом представляя в виде предела третий интеграл в (5.6.19) и интегрируя по частям, перепишем это условие разрешимости в виде

$$\int\limits_{\partial\omega^\eta} \psi_{m+1}\,ds + |\square| \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_n}(x',+0,\eta) - \frac{\partial u_m}{\partial x_n}(x',-0,\eta)\right)$$
$$+ \lim_{R\to+\infty}\left(\int\limits_{\Pi_R\setminus\omega^\eta} f_{m+1}\,d\xi + \int\limits_{\square\times\{R\}} \frac{\partial P^+_{m+1}}{\partial\xi_n}\,d\xi' - \int\limits_{\square\times\{-R\}} \frac{\partial P^-_{m+1}}{\partial\xi_n}\,d\xi'\right) = 0.$$

Отметим, что так как в исходном равенстве (5.6.19) все интегралы были сходящимися, то предел в полученным равенстве существует и конечен. Это позволяет выписать граничное условие (5.6.14) для функции u_m. В силу предположения индукции о гладкости функций u_j, $j \leqslant m$, и функций v_j, $j \leqslant m$, по пространственным переменным и формулы (1.0.45) для v_j, $j \leqslant m$, мы сразу заключаем, что правая часть (5.6.14), являясь функцией переменной x', принадлежит пространствам $W_2^p(S)$ для всех $p \in \mathbb{N}$. Из индукционного предположения об ограниченности по $\eta \in [0,1]$ функций v_j, $j \leqslant m$, немедленно следует, что правая часть (5.6.14) равномерно ограничена по $\eta \in [0,1]$ в нормах пространств $W_2^p(S)$ для всех $p \in \mathbb{N}$. С учётом индукционного предположения о бесконечно дифференцируемости по $\eta \in (0,1]$ функций v_j, $j \leqslant m$, и точной формулировки этого свойства в (5.5.4), для каждого $\eta_0 \in (0,1]$ сделаем замену переменных $\xi \mapsto \Xi^{-1}(\eta_0\eta^{-1},\xi)$ в интеграле по $\partial\omega^\eta$ в правой части (5.6.14).

Тогда из индукционного предположения относительно бесконечной дифференцируемости по $\eta \in (0,1]$ функций u_j, v_{mj}, $j \leqslant m$, и представлений (1.0.45) сразу заключаем, что интеграл по $\partial\omega^\eta$ в правой части (5.6.14) является бесконечно дифференцируемой функцией по $\eta \in (0,1]$ в нормах пространств $W_2^p(S)$ для всех $p \in \mathbb{N}$. Далее выпишем аналог представления (1.0.45) для функции f_{m+1} и воспользуемся формулами (5.6.16). Тогда получим, что при $\pm\xi_n > R_6$ функция f_{m+1} имеет вид

$$
\begin{aligned}
&f_{m+1}(\xi,\eta) = -\frac{\partial^2}{\partial\xi_n^2}\big(P^+_{m+1}(\xi_n,\eta) + P^-_{m+1}(\xi_n,\eta)\big) + \tilde f_{m+1},\\
&\tilde f_{m+1} := \sum_{k\in\mathbb{Z}^{n-1}} F^\pm_{(m+1)jk}(\xi_n,\eta) e^{-2\pi|k_b||\xi_n|} e^{2\pi\mathrm{i}k_b\cdot\xi'},
\end{aligned}
$$

где $F^\pm_{mjk}$ — некоторые полиномы по ξ_n степени не выше $(m-1)$ с коэффициентами, бесконечно дифференцируемыми по $\eta \in (0,1]$, причём величина $\|f_{m+1}\|_{\mathfrak{H}}$ ограничена равномерно по $\eta \in [0,1]$. Такое представление позволяет переписать предел в (5.6.14)

$$
\begin{aligned}
\lim_{R\to+\infty}&\Bigg(\int\limits_{\Pi_R\setminus\omega^\eta} f_{m+1}\,d\xi + \int\limits_{\square\times\{R\}} \frac{\partial P^+_{m+1}}{\partial\xi_n}\,d\xi' - \int\limits_{\square\times\{-R\}} \frac{\partial P^-_{m+1}}{\partial\xi_n}\,d\xi'\Bigg)\\
&= \int\limits_{\Pi_{2R_6}\setminus\omega^\eta} f_{m+1}\,d\xi + \int\limits_{\Pi\setminus\Pi_{2R_6}} \tilde f_{m+1}\,d\xi\\
&\quad - \int\limits_{\square\times\{2R_6\}} \frac{\partial P^+_{m+1}}{\partial\xi_n}\,d\xi' + \int\limits_{\square\times\{-2R_6\}} \frac{\partial P^-_{m+1}}{\partial\xi_n}\,d\xi'.
\end{aligned}
$$

Из индукционного предположения о бесконечной дифференцируемости по $\eta \in (0,1]$ функций v_{mj} и u_j, $j \leqslant m$, и полученной формулы теперь следует, что предел в (5.6.14) является бесконечно дифференцируемой по $\eta \in (0,1]$ функцией в нормах пространств $W_2^p(S)$ для всех $p \in \mathbb{N}$.

С учётом сказанного выше, найденное граничное условие (5.6.14) замыкает задачу для u_m, и в силу леммы 5.5.2 эта задача разрешима. Функция $v_m^{(0)}$ определяется формулой (5.6.15). В силу индукционного предположения о свойствах функций u_j, $j \leqslant m$ и леммы 5.5.3 функция u_{m+1}

является элементом пространств $W_2^1(\Omega)$ и $W_2^p(\Omega^+_{\tau_0}) \oplus W_2^p(\Omega^-_{\tau_0})$ для всех $\tau_0 < \tau$, а также равномерно ограничена по $\eta \in [0,1]$ и бесконечно дифференцируема по $\eta \in (0,1)$ в нормах этих пространств.

В силу леммы 5.4.1, условие (5.6.14) обеспечивает разрешимость задачи (5.6.17). Так как в решениях задач (1.0.42), (5.1.5) для функций v_{m-1} и v_m имеется разделение переменных (x',η) и (ξ,η), то такое же разделение переменных присутствует и в f_{m+1}, ψ_{m+1}, $\tilde{F}_{m+1}$. Следовательно, такое же разделение переменных имеется в решении задачи (1.0.42), (5.1.5) для функции $\tilde{v}_{m+1}$:

$$\tilde{v}_{m+1}(\xi,x',\eta) = \sum_{j=1}^{\tilde{N}_m} \varphi_{m+1j}(x',\eta)\tilde{v}_{m+1j}(\xi,\eta),$$

где $\tilde{N}_m$ — некоторые числа, φ_{m+1j} — некоторые функции из $W_2^p(S)$ для всех $p \in \mathbb{N}$, равномерно ограниченные по $\eta \in [0,1]$ и бесконечно дифференцируемые по $\eta \in (0,1]$ в нормах этих пространств. В силу индукционного предположения относительно функций v_{ij}, $i \leqslant m$, и леммы 5.5.1 функции v_{mj} бесконечно дифференцируемы по ξ в $\overline{\Pi} \setminus \omega^\eta$ для каждого $\eta \in (0,1]$ и бесконечно дифференцируемы по $\eta \in (0,1]$ в смысле соотношения (5.5.4) и справедливы оценки (5.6.12). Возвращаясь теперь к функции v_{m+1}, заключаем, что задача (1.0.42), (5.1.5) для этой функции также разрешима. Для функции v_{m+1} справедливы представления (1.0.45), (5.6.11) и оценки (5.6.12), где для функций, участвующих в этих соотношениях, верны все свойства, указанные в формулировке леммы. Выписывая ещё аналог представления (5.6.11) для функции v_m и сравнивая его с асимптотиками (5.1.5), получаем равенство (5.6.13) с заменой m на $m+1$, что завершает доказательство индукционного перехода. Лемма доказана. $\square$

Отметим, что из доказанной леммы сразу следует, что функции u_m и v_m обладают всеми свойствами, указанными в формулировке теоремы 1.0.5.

5.7 Обоснование асимптотики

Обозначим:

$$
\begin{aligned}
&u_{\varepsilon,N}(x,\eta) := \chi^{\varepsilon}(x_n)u^{ex}_{\varepsilon,N}(x,\eta) + (1-\chi^{\varepsilon}(x_n))u^{in}_{\varepsilon,N}\big(x\varepsilon^{-1},x',\eta\big),\\
&u^{ex}_{\varepsilon,N}(x,\eta) := u_0(x) + \sum_{m=1}^{N}\varepsilon^m u_m(x,\eta),\\
&u^{in}_{\varepsilon,N}(\xi,x',\eta) := v_0(x',\xi,\eta) + \sum_{m=1}^{N}\varepsilon^m v_m(x',\xi,\eta),
\end{aligned}
$$

где $N \geqslant 3$ — натуральное число.

Лемма 5.7.1. *Функция $u_{\varepsilon,N}$ является решением задачи*

$$
\begin{aligned}
&(\mathcal{L}-\lambda)u_{\varepsilon,N} = f + f_{\varepsilon,N} \quad \text{в} \quad \Omega^{\varepsilon}, \qquad u_{\varepsilon,N}=0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega,\\
&\frac{\partial u_{\varepsilon,N}}{\partial \mathrm{n}} + a(\,\cdot\,,u_{\varepsilon,N}) = \phi_{\varepsilon,N} \quad \text{на} \quad \partial\theta^{\varepsilon},
\end{aligned}
$$

где $f_{\varepsilon,N}\in L_2(\Omega^{\varepsilon})$, $\phi_{\varepsilon,N}\in L_2(\partial\theta^{\varepsilon})$. Верны оценки

$$
\|f_{\varepsilon,N}\|_{L_2(\Omega^{\varepsilon})} \leqslant C\varepsilon^{\frac{N}{2}-\frac{1}{4}}, \qquad \|\phi_{\varepsilon,N}\|_{L_2(\partial\theta^{\varepsilon})} \leqslant C\varepsilon^{N+\frac{n-1}{2}}, \tag{5.7.1}
$$

где константы C не зависят от ε и η, но зависят от N. Справедливы оценки (1.0.47).

Доказательство. Однородное краевое условие Дирихле для функции $u_{\varepsilon,N}$ на $\partial\Omega$ сразу следует из такого же условия для функций внешнего разложения в задачах (1.0.46).

Обозначим:

$$
\phi_{\varepsilon,N}(x) := \frac{\partial u^{in}_{\varepsilon,N}}{\partial\mathrm{n}}(x) + a(x,u^{in}_{\varepsilon,N}(x)) \quad \text{на} \quad \partial\theta^{\varepsilon}.
$$

Отметим, что в силу леммы 5.6.1 для функций $v_j(x\varepsilon^{-1},x',\eta)$ верны равномерные по ε, η и x оценки на $\partial\theta^{\varepsilon}$

$$
|v_j(x\varepsilon^{-1},x',\eta)| \leqslant CV_j(x'),
$$

где C — некоторые константы, не зависящие от x, ε, η, а $V_j(x')$ — некоторые функции из $W_2^p(S)$ для всех $p \in \mathbb{N}$. Этот факт, гладкость функции a и условия (1.0.11) обеспечивают справедливость формулы Тейлора при $x \in \partial\theta^\varepsilon$

$$
\begin{aligned}
a(x, u_\varepsilon^{in}(x)) = a(x', &\varepsilon\xi_n, u_\varepsilon^{in}) \\
&= T_0(x', v_0(x', \xi, \eta)) + \sum_{m=1}^{N-1} \varepsilon^m T_m\big(x', v_1(x', \xi, \eta), \ldots, v_m(x', \xi, \eta)\big) \\
&\quad + \varepsilon^N T_{N,\varepsilon}\big(x', \xi_n, v_1(x', \xi, \eta), \ldots, v_N(x', \xi, \eta)\big),
\end{aligned}
$$

где $T_{N,\varepsilon}$ — некоторая функция, для которой верна равномерная оценка

$$
\big|T_{N,\varepsilon}\big(x', \xi_n, v_1(x', \xi, \eta), \ldots, v_N(x', \xi, \eta)\big)\big| \leqslant C\tilde{T}_N(x'),
$$

константа C не зависит от ε, η, x, ξ, а функция $\tilde{T}_N$ принадлежит $W_2^p(S)$ для всех $p \in \mathbb{N}$. Учитывая теперь краевые условия на $\partial\theta_\eta$ из задач (1.0.42) и свойства функций v_j, установленные в лемме 5.6.1, немедленно получаем оценку для $\phi_{\varepsilon,N}$ из (5.7.1).

Обозначим: $f_{\varepsilon,N} := (\mathcal{L} - \lambda)u_{\varepsilon,N} - f$. С учётом уравнений из задач (1.0.42), (1.0.46) непосредственно проверяем, что

$$
\begin{aligned}
&f_{\varepsilon,N} = f_{\varepsilon,N}^{(1)} + f_{\varepsilon,N}^{(2)} + f_{\varepsilon,N}^{(3)}, \\
&f_{\varepsilon,N}^{(1)} := (\chi^\varepsilon(x_n) - 1)\left(f(x) - \sum_{j=1}^{N-2} \frac{x_n^j}{j!} \frac{\partial^j f}{\partial x_n^j}(x', 0)\right), \\
&f_{\varepsilon,N}^{(2)} = \varepsilon^{N-1}\big(\chi^\varepsilon(x_n) - 1\big) \left(\lambda(v_{N-1} + \varepsilon v_N) + 2\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial^2 v_N}{\partial \xi_j \partial x_j}\right), \\
&f_{\varepsilon,N}^{(3)} := -2(\chi^\varepsilon)' \frac{\partial}{\partial x_n}(u_{\varepsilon,N}^{ex} - u_{\varepsilon,N}^{in}) - (u_{\varepsilon,N}^{ex} - u_{\varepsilon,N}^{in})(\chi^\varepsilon)''.
\end{aligned}
$$

Гладкость функции f позволяет сразу оценить $f_{\varepsilon,N}^{(1)}$ с помощью формулы Тейлора с остатком в форме Лагранжа

$$
\|f_{\varepsilon,N}^{(1)}\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)} \leqslant C\varepsilon^{\frac{N}{2} - \frac{1}{4}}, \tag{5.7.2}
$$

где константа C не зависит от ε.

Функция $f^{(2)}_{\varepsilon,N}$ не равна нулю лишь при $|x_n| \leqslant 2\varepsilon^{\frac{1}{2}}$, что в терминах переменных ξ соответствует слою $\{\xi : |\xi_n| < 2\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\}$. Лемма 5.6.1 даёт требуемые оценки для функций v_{mj}, φ_{mj}, $v_m^{(0)}$, $K^{\pm}_{mj}$, $A^{\pm}_{mj}$, $Q^{\pm}_{mjk}$, $m = N-1, N$, и их производных, что сразу позволяет оценить функцию $f^{(2)}_{\varepsilon,N}$

$$\|f^{(2)}_{\varepsilon,N}\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)} \leqslant C\varepsilon^{\frac{N}{2}-\frac{1}{4}}. \tag{5.7.3}$$

В силу определения срезки χ^ε, функция $f^{(3)}_{\varepsilon,N}$ не равна нулю лишь при $\varepsilon^{\frac{1}{2}} < |x_n| < 2\varepsilon^{\frac{1}{2}}$. Поэтому для оценки функции $f^{(3)}_{\varepsilon,N}$ следует учитывать условия согласования (5.1.5), обеспечивающие требуемую малость разности $u^{ex}_{\varepsilon,N} - u^{in}_{\varepsilon,N}$, а также гладкость и оценки для функций v_j и u_j, установленные в лемме 5.6.1. В итоге имеем

$$\|f^{(3)}_{\varepsilon,N}\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)} \leqslant C\varepsilon^{\frac{N}{2}-\frac{1}{2}}.$$

Отсюда и из (5.7.2), (5.7.3) вытекает первая оценка в (5.7.1).

Оценка (1.0.47) устанавливается аналогично доказательству приведённым выше оценкам функций $f^{(i)}_{\varepsilon,N}$. Лемма доказана. $\square$

Обозначим $\hat{u}_{\varepsilon,N} := u_{\varepsilon,N} - u_\varepsilon$. Функция $\hat{u}_{\varepsilon,N}$ является решением задачи

$$\begin{aligned}
&(\mathcal{L}-\lambda)\hat{u}_\varepsilon = f_{\varepsilon,N} \quad \text{в} \quad \Omega^\varepsilon, \qquad \hat{u}_{\varepsilon,N} = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega,\\
&\frac{\partial \hat{u}_{\varepsilon,N}}{\partial N} + a(\,\cdot\,, u_{\varepsilon,N}) - a(\,\cdot\,, u_\varepsilon) = \phi_{\varepsilon,N} \quad \text{на} \quad \partial\theta^\varepsilon.
\end{aligned}$$

Решение этой задачи удовлетворяет интегральному тождеству

$$\begin{aligned}
\mathfrak{h}_0(\hat{u}_{\varepsilon,N}, \hat{u}_{\varepsilon,N}) + &(a(u_{\varepsilon,N}) - a(u_\varepsilon), \hat{u}_{\varepsilon,N})_{L_2(\partial\theta^\varepsilon)}\\
&= (f_{\varepsilon,N}, \hat{u}_{\varepsilon,N})_{L_2(\Omega^\varepsilon)} + (\phi_{\varepsilon,N}, \hat{u}_{\varepsilon,N})_{L_2(\partial\theta^\varepsilon)}.
\end{aligned} \tag{5.7.4}$$

Согласно лемме 2.1.4, для любой функции $u \in W^1_2(\Omega^\varepsilon)$ с нулевым следом на $\partial\Omega$ верна оценка

$$\|u\|^2_{L_2(\partial\theta^\varepsilon)} \leqslant (c\varepsilon + \delta)\|\nabla u\|^2_{L_2(\Omega^\varepsilon)} + C(\delta)\|u\|^2_{L_2(\Omega^\varepsilon)}, \tag{5.7.5}$$

где $\delta > 0$ — произвольное фиксированное число, c — некоторая константа, не зависящая от u, ε, δ, а константа $C(\delta)$ не зависит от ε и u. Отметим ещё очевидное неравенство, выполненное в силу условий (1.0.2):

$$|\mathfrak{h}_0(u,u)| \geqslant \frac{3c_0}{4}\|\nabla u\|^2_{L_2(\Omega^\varepsilon)} - C\|u\|^2_{L_2(\Omega^\varepsilon)},$$

где константа C не зависит от ε и u. Это неравенство и (1.0.40), (5.7.5) позволяют оценить левую часть равенства (5.7.4) для $\lambda < \lambda_0$, предполагая, что λ_0 отрицательно и достаточно велико по модулю:

$$\begin{aligned}\Big|\mathfrak{h}_0(\hat{u}_{\varepsilon,N},\hat{u}_{\varepsilon,N}) + (a(u_{\varepsilon,N}) - a(u_\varepsilon), \hat{u}_{\varepsilon,N})_{L_2(\partial\theta^\varepsilon)} - \lambda\|\hat{u}_{\varepsilon,N}\|^2_{L_2(\Omega^\varepsilon)}\Big|&\\ \geqslant \Big|\mathfrak{h}_0(\hat{u}_{\varepsilon,N},\hat{u}_{\varepsilon,N}) - \lambda\|\hat{u}_{\varepsilon,N}\|^2_{L_2(\Omega^\varepsilon)}\Big| - 2|a_1|\|\hat{u}_{\varepsilon,N}\|^2_{L_2(\theta^\varepsilon)}&\\ \geqslant \frac{c_0}{2}\|\hat{u}_{\varepsilon,N}\|^2_{W_2^1(\Omega^\varepsilon)},&\end{aligned}$$

а также оценить правую часть равенства (5.7.4)

$$\begin{aligned}&\Big|(f,\hat{u}_{\varepsilon,N})_{L_2(\Omega^\varepsilon)} + (\phi_{\varepsilon,N},\hat{u}_{\varepsilon,N})_{L_2(\partial\theta^\varepsilon)}\Big|\\ &\leqslant C\Big(\|f_{\varepsilon,N}\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)} + \|\phi_{\varepsilon,N}\|_{L_2(\partial\theta^\varepsilon)}\Big)\|\hat{u}_{\varepsilon,N}\|_{W_2^1(\Omega^\varepsilon)},\end{aligned}$$

где константа C не зависит от ε. Из полученных оценок и (5.7.4) теперь следует, что

$$\|\hat{u}_{\varepsilon,N}\|_{W_2^1(\Omega^\varepsilon)} = \|u_{\varepsilon,N} - u_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega^\varepsilon)} \leqslant C\varepsilon^{\frac{N}{2}-\frac{1}{4}}.$$

Заменим теперь в этой оценке N на $N+2$ и учтём оценки (1.0.47) для $m = N+1, N+2$. Тогда получим равенство (1.0.44). Теорема доказана.

Литература

[1] Беляев А.Г. Усреднение смешанной краевой задачи для уравнения Пуассона в области, перфорированной вдоль границы // Усп. мат. наук. — 1990. — Т. 45. № 4. — С. 123.

[2] Бирман М.Ш. О процедуре усреднения для периодических операторов в окрестности края внутренней лакуны // Алгебра анал. — 2003. — Т. 15. № 4. — С. 67–71.

[3] Бирман М.Ш., Суслина Т.А. Периодические дифференциальные операторы второго порядка. Пороговые свойства и усреднения // Алгебра анал. — 2003. — Т. 15. № 5. — С. 1–108.

[4] Бирман М.Ш., Суслина Т.А. Усреднение многомерного периодического эллиптического оператора в окрестности края внутренней лакуны // Зап. научн. семин. ПОМИ. — 2004. — Т. 318. — С. 60–74.

[5] Бирман М.Ш., Суслина Т.А. Усреднение периодических эллиптических дифференциальных операторов с учетом корректора // Алгебра анал. — 2005. — Т. 17. № 6. — С. 1–104.

[6] Бирман М.Ш., Суслина Т.А. Усреднение периодических дифференциальных операторов с учетом корректора. Приближение решений в классе Соболева $H^1(R^d)$ // Алгебра анал. — 2006. — Т. 18. № 6. — С. 1–130.

[7] Бирман М.Ш., Суслина Т.А. Принцип предельного поглощения и процедура усреднения для периодических эллиптических операторов // Функц. анал. прилож. — 2008. — Т. 42. № 4. — С. 105–108.

[8] Борисов Д.И. Дискретный спектр пары несимметричных волноводов, соединенных окном // Мат. сб. — 2006. — Т.4. № 197. — С. 3–40

[9] Борисов Д.И., Шарапов Т.Ф. О резольвенте многомерных операторов с частой сменой краевых условий в случае третьего усреднённого условия // Пробл. мат. анал. — 2015. — № 83. — С. 3–40.

[10] Борисов Д. И. Об усреднении оператора Шредингера в полосе с быстро меняющимся типом краевых условий // Вестн. Челяб. унив. — 2011. — № 14. — С. 6–11.

[11] Борисов Д. И. О PT-симметричном волноводе с парой малых отверстий // Тр. ИММ УрО РАН — 2012. — Т. 18. № 2. — С. 22–37.

[12] Борисов Д.И., Мухаметрахимова А.И. О равномерной резольвентной сходимости для эллиптических операторов в многомерных областях с малыми отверстиями // Пробл. мат. анал. — 2018. — Т.92. — С. 69–81.

[13] Борисов Д.И., Мухаметрахимова А.И. Равномерная сходимость и асимптотики для задач в областях с мелкой перфорацией вдоль заданного многообразия в случае усредненного условия Дирихле // Мат. сб. – 2021. – Т.212. № 8.– С. 33–88.

[14] Борисов Д.И., Мухаметрахимова А.И. Асимптотики для задач в перфорированных областях с третьим нелинейным краевым условием на границах полостей // Мат. сб. — 2022. — Т.213. № 10. — С. 3–59.

[15] Борисов Д.И., Мухаметрахимова А.И. Равномерная сходимость для задач с перфорацией вдоль заданного многообразия и третьим нелинейным краевым условием на границах полостей // Алгебра анал. — 2023. — Т.35. — С. 20–78.

[16] Вайнберг М.М. Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений. М.: Наука, 1972. — 415 с.

[17] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. // М.: Наука, 1972. — 438 с.

[18] Дубинский Ю.А. Нелинейные эллиптические и параболические уравнения // Итоги науки тех., сер. соврем. пробл. мат. – 1976. – Т.9. – С. 5–130.

[19] Гадыльшин Р.Р., Пятницкий А.Л., Чечкин Г.А. Об асимптотиках собственных значений краевой задачи в плоской области типа сита Стеклова // Изв. Росс. акад. наук, сер. мат. — 2018. — Т. 82. № 6. — С. 3–30.

[20] Жиков В.В., Козлов С.М., Олейник О.А. Усреднение дифференциальных операторов. М.: Наука, 1993. — 462 с.

[21] Жиков В.В. О спектральном методе в теории усреднения // Труды МИАН. — 2005. — Т. 250. — С. 95–104.

[22] Жиков В.В., Пастухова С.Е. Усреднение вырождающихся эллиптических уравнений // Сиб. мат. ж. – 2008. – Т. 49. № 1. – С. 80–101.

[23] Жиков В.В. Усреднение и двухмасштабная сходимость в соболевском пространстве с осциллирующим показателем // Алгебра анал. — 2018. — Т. 30. № 2. — С. 114–144.

[24] Жиков В.В., Пастухова С.Е. Об операторных оценках в теории усреднения // Усп. мат. наук. — 2016. — Т. 71. № 3. — С. 27–122.

[25] Ильин А.М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. // М.: Наука, 1989. — 336 с.

[26] Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973. — 576 с.

[27] Лионс Ж.–Л. Некоторые решения нелинейных краевых задач. М.: Наука, 1972. — 588 с.

[28] Лобо М., Перес М.Е., Сухарев В.В., Шапошникова Т.А. Об усреднении краевой задачи в области, перфорированной вдоль $(N-1)$–мерного многообразия с нелинейным краевым условием третьего типа на границе полостей // Докл. акад. наук. — 2011. — Т. 436. № 2. — С. 163–167.

[29] Марченко В.А., Хруслов Е.Я. Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей. Киев: Наукова Думка, 1974. — 278 с.

[30] Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных // М.: Наука, 1976. — 391 с.

[31] Мухаметрахимова А.И. Операторные оценки для непериодической перфорации вдоль границы: усредненное условие Дирихле

[32] Пастухова С.Е. Приближения резольвенты для несамосопряженного оператора диффузии с быстро осциллирующими коэффициентами // Мат. заметки. — 2013. — Т. 94. № 1. — С. 127–145.

[33] Пастухова С.Е. Задача Неймана для эллиптических уравнений с многомасштабными коэффициентами: операторные оценки усреднения // Мат. сб. — 2016. — Т. 207. № 3. — С. 111–136.

[34] Пастухова С.Е. Операторные оценки усреднения для эллиптических уравнений четвертого порядка // Алгебра анал. — 2016. — Т. 28. № 2. — С. 204–226.

[35] Пастухова С.Е. Задача Неймана для эллиптических уравнений с многомасштабными коэффициентами: операторные оценки усреднения // Мат. сб. — 2016. — Т. 207. № 3. — С. 111–136.

[36] Пастухова С.Е. L_2-аппроксимация резольвенты в усреднении эллиптических операторов четвертого порядка // Мат. сб. — 2021. — Т. 212. № 1. — С. 119–142.

[37] Суслина Т.А. Об усреднении периодического эллиптического оператора в полосе // Алгебра анал. — 2004. — Т. 16. № 1. — С. 269–292.

[38] Суслина Т.А. Усреднение в классе Соболева $H^1(R^d)$ для периодических эллиптических дифференциальных операторов второго порядка при включении членов первого порядка // Алгебра анал. — 2004. — Т. 22. № 1. — С. 108–222.

[39] Суслина Т.А. Операторные оценки погрешности в L_2 при усреднении эллиптической задачи Дирихле // Функц. анал. прилож. — 2012. — Т. 46. № 3. — С. 91–96.

[40] Суслина Т.А. Усреднение эллиптических задач в зависимости от спектрального параметра // Функц. анал. прилож. — 2014. — Т. 48. № 4. — С. 88–94.

[41] Суслина Т.А. Усреднение эллиптических систем с периодическими коэффициентами: операторные оценки погрешности в $L_2(R^d)$ с учетом корректора // Алгебра анал. — 2014. — Т. 26. № 4. — С. 195–263.

[42] Суслина Т.А. Усреднение задачи Дирихле для эллиптических уравнений высокого порядка с периодическими коэффициентами // Алгебра анал. — 2017. — Т. 29. № 2. — С. 139–192.

[43] Шарапов Т.Ф. О резольвенте многомерных операторов с частой сменой краевых условий в случае усреднённого условия Дирихле // Мат. сб. — 2014. — Т. 205. № 10. — С. 1492–1527.

[44] Шарапов Т. Ф. О резольвенте многомерных операторов с частой сменой краевых условий: критический случай // Уфим. мат. ж. — 2016. — Т. 8. № 2. — С. 66–96.

[45] Amirat Y., Bodart O., Chechkin G.A., Piatnitski A.L. Asymptotics of a spectral-sieve problem // J. Math. Anal. Appl. — 2016. — V. 435. № 2. — P. 1652–1671.

[46] Belyaev A., Chechkin G., Gadylshin R. Effective membrane permeability: estimates and low concentration asymptotics // SIAM J. Appl. Math. — 1999. — V.60. № 1. — P. 84–108.

[47] Borisov D., Exner P., Gadyl'shin R. Geometric coupling thresholds in a two-dimensional strip // J. Math. Phys. — 2002. — V.12. № 12. — P. 6265–6278.

[48] Borisov D., Cardone G. Homogenization of the planar waveguide with frequently alternating boundary conditions // J. Phys. A, Math. Theor. — 2009. — V. 42. № 36. — P. 365–205.

[49] Borisov D., Bunoiu R., Cardone G. On a waveguide with frequently alternating boundary conditions: homogenized Neumann condition // Ann. Henri Poincaré. — 2010. — V. 11. № 8. — P. 1591–1627.

[50] Borisov D., Bunoiu R., Cardone G. On a waveguide with an infinite number of small windows // C.R., Math., Acad. Sci. Paris. — 2011. — V. 349. № 1. — P. 53–56.

[51] Borisov D., Bunoiu R., Cardone G. Homogenization and asymptotics for a waveguide with an infinite number of closely located small windows // J. Math. Sci. — 2011. — V. 176. № 6. — P. 774–785.

[52] Borisov D., Bunoiu R., Cardone G. Waveguide with non-periodically alternating Dirichlet and Robin conditions: homogenization and asymptotics // Z. Angew. Math. Phys. — 2013. — V. 64. № 3. — P. 439–472.

[53] Borisov D., Cardone G., Faella L., Perugia C. Uniform resolvent convergence for a strip with fast oscillating boundary // J. Differ. Equations — 2013. — V. 255. № 12. — P. 4378–4402.

[54] Borisov D.,Cardone G., Durante T. Homogenization and uniform resolvent convergence for elliptic operators in a strip perforated along a curve // Proc. R. Soc. Edinb., Sect. A, Math. — 2016. — V. 146. № 6. — P. 1115–1158.

[55] Borisov D.I., Křížž J. Operator estimates for non-periodically perforated domains with Dirichlet and nonlinear Robin conditions: vanishing limit // Anal. Math. Phys. — 2023. — V. 13. — id. 5.

[56] Chechkin G.A., Koroleva Yu. O., Meidell A., Persson L.–E. On the Friedrichs inequality in a domain perforated aperiodically along the boundary. Homogenization procedure. Asymptotics for parabolic problems // Russ. J. Math. Phys. — 2009. — V. 16. № 1. — P. 1–16.

[57] Chechkin G.A., Chechkina T.A., D'Apice C., Maio U. De. Homogenization in domains randomly perforated along the boundary // Discrete Contin. Dyn. Syst., Ser. B. — 2009. — V. 12. № 4. — P. 713–730.

[58] Chechkin G.A., Gadyl'shin R.R., D'Apice C., Maio U. De. On the Steklov problem in a domain perforated along a part of the boundary // ESAIM, Math. Model. Numer. Anal. — 2017. — V. 51. № 4. – P. 1317–1342.

[59] Daz J.I., Gomez–Castro D., Shaposhnikova T.A. Nonlinear Reaction–Diffusion Processes for Nanocomposites: Anomalous Improved Homogenization. Berlin: De Gruyter, 2021. — 210 p.

[60] Díaz J.I., Gómez–Castro D., Shaposhnikova T.A., Zubova M.N. Classification of homogenized limits of diffusion problems with spatially dependent reaction over critical-size particles // Appl. Anal. — 2019. — V. 98. № 1-2. – P. 232–255.

[61] Gómez D., Pérez M.E., Shaposhnikova T.A. On homogenization of nonlinear Robin type boundary conditions for cavities along manifolds

and associated spectral problems // Asymptotic Anal. — 2012. — V. 80. № 3–4. — P. 289–322.

[62] Gómez D., Lobo M., Pérez M.E., Shaposhnikova T.A. Averaging of variational inequalities for the Laplacian with nonlinear restrictions along manifolds // Appl. Anal. — 2013. — V. 92. № 2. — P. 218–237.

[63] Griso G. Error estimate and unfolding for periodic homogenization // Asymptotic Anal. — 2004. — V. 40. № 3–4. — P. 269–286.

[64] Griso G. Interior error estimate for periodic homogenization // Anal. Appl. — 2006. — V. 4. № 1. — P. 61–79.

[65] Kenig C.E., Lin F., Shen Z. Convergence rates in L_2 for elliptic homogenization problems // Arch. Ration. Mech. Anal. — 2012. — V. 203. № 3. — P. 1009-–1036.

[66] Khrabustovskyi A., Post. O. Operator estimates for the crushed ice problem // Asymptotic Anal. — 2018. — V.110. — P. 137–161.

[67] Khrabustovskyi A., Plum, M. Operator estimates for homogenization of the Robin Laplacian in a perforated domain // J. Differ. Equations — 2022. — V. 338. — P. 474–517.

[68] Lobo M., Oleinik O.A., Pérez M.E, Shaposhnikova T.A. On homogenizations of solutions of boundary value problems in domains, perforated along manifolds // Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci. — 1997. — V. 25. № 3–4. — P. 611–629.

[69] Oleinik O.A., Iosifyan G.A., Shamaev A.S. Mathematical Problems in Elasticity and Homogenization. Amsterdam: North–Holland, 1992. — 398 p.

[70] Pastukhova, S.E. Resolvent approximations in L_2-norm for elliptic operators acting in a perforated space // Contemp. Math. — 2020. — V. 66. — P. 314–334.

[71] Senik N.N. Homogenization for non-self-adjoint periodic elliptic operators on an infinite cylinder // SIAM J. Math. Anal. — 2017. — V. 49. № 2. — P. 874–898.

[72] Senik N.N. Homogenization for locally periodic elliptic operators // J. Math. Anal. Appl. — 2021. — V. 505. № 2. — id. 5.

[73] Suslina T.A. Homogenization of the Neumann problem for elliptic systems with periodic coefficients // Mathematika. — 2013. — V. 59. № 2. — P. 463–476.

[74] Suslina T.A. Homogenization of the Dirichlet problem for elliptic systems: L_2-operator error estimates // SIAM J. Math. Anal. — 2017. — V. 49. № 2. — P. 874–898.

[75] Suslina T.A. Spectral approach to homogenization of elliptic operators in a perforated space // Rev. Math. Phys. — 2018. — V.30. № 8. — id. 125398258