


Министерство  
науки и высшего образования  
Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение  
высшего образования  
«Владимирский государственный  
университет  
имени Александра Григорьевича  
и Николая Григорьевича Столетовых»  
(ВлГУ)  
ул. Горького, д.87, г. Владимир, 600000  
тел. (4922) 53-25-75;  
тел./факс (4922) 47-98-88  
e-mail: [vic@vlsu.ru](mailto:vic@vlsu.ru), сайт: <http://www.vlsu.ru>

07.11.2025 № 8/76-5545

на № \_\_\_\_\_ от \_\_\_\_\_

«УТВЕРЖДАЮ»

проректор по научной работе  
и цифровому развитию ФГБОУ ВО  
«Владимирский государственный  
университет имени Александра  
Григорьевича и Николая  
Григорьевича Столетовых» доктор  
физико-математических наук, доцент  
Кучерик Алексей Олегович

  
« 31 » 10 2025 г.

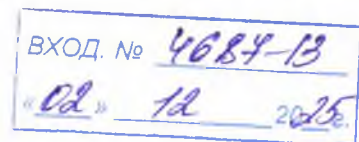


### ОТЗЫВ ВЕДУЩЕЙ ОРГАНИЗАЦИИ

на диссертационную работу Мухаметрахимовой Альбины Ишбулдовны  
«Сходимость и асимптотики для задач в областях с непериодической  
перфорацией вдоль заданного многообразия», представленную на соискание  
ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности  
1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика

Объектом исследования диссертационной работы  
А.И. Мухаметрахимовой выступают краевые задачи для общих эллиптических  
уравнений второго порядка с переменными коэффициентами в многомерной  
области, перфорированной вдоль заданного многообразия. В работе изучаются  
вопросы усреднения и асимптотического поведения решений рассматриваемых  
задач.

Задачи с перфорацией вдоль заданного многообразия являются одним из  
классических примеров в современной теории усреднения и имеется большое  
число работ, посвященных усреднению таких задач. Как правило, классические  
результаты описывают вид усредненных задач и утверждают сходимость  
решения возмущенной задачи к решению усредненной в смысле сильной или  
слабой сходимости в подходящем пространстве Соболева  $W_2^1$  или в пространстве  
 $L_2$  для фиксированных данных задачи, например, при заданной правой части



уравнения. Зависимость от данных задач обычно не отслеживается. Кроме того, в подавляющем большинстве работ структура перфорации предполагается периодической или локально-периодической в подходящем смысле. Это существенно облегчает исследования, так как дает возможность использования решений различных вспомогательных задач на ячейках периодичности.

В последние 20 лет в теории усреднения интенсивно развивается новое направление, нацеленное на доказательство операторных оценок. В случае линейных задач классические результаты о сходимости можно переформулировать как утверждения о сильной или слабой резольвентных сходимостях. Операторные оценки устанавливают равномерную операторную сходимость, то есть, сходимость резольвент в операторной норме. В терминах самих оценок это означает, что норма разности решений возмущенной и усредненной задач оценивается некоторой фиксированной малой величиной, зависящей от одного или нескольких малых параметров в задаче, умноженной на норму правой части уравнения. При этом малая величина в оценке не зависит от нормы правой части и характеризует скорость сходимости, то есть, оценка является равномерной по правой части уравнения. Это существенно более сильное утверждение по сравнению с классическим подходом и в частности, оно является своеобразным мостом между теорией усреднения и спектральной теорией неограниченных операторов, позволяя использовать методы спектральной теории для задач усреднения.

В диссертационной работе А.И. Мухаметрахимовой для рассматриваемых эллиптических задач с перфорацией вдоль заданного многообразия сделано существенное продвижение одновременно по двум направлениям. Во-первых, в работе рассматриваются существенно непериодические перфорации без каких-либо предположений о периодичности или локальной периодичности. Это исключает наличие каких-либо ячеек периодичности. Формы отверстий и их распределение вдоль поверхности практически произвольные, на них накладываются только минимальные разумные геометрические возмущения. Кроме того, на границах разных полостей допускается постановка краевых

условий разных типов, а именно, на границах одних полостей ставится условие Дирихле, а на для других полостей – третье нелинейное краевое условие. Нелинейность достаточно слабая, а именно, предполагается выполнение условия Липшица по неизвестной функции. За счет существенной неперiodичности постановка задач оказывается шире, чем постановки задач в классических задачах усреднения. Во-вторых, для таких задач доказываются операторные оценки – наиболее сильный возможный результат о сходимости. А именно, доказываются оценки для норм разности решений возмущенных и усредненных задач, равномерных по норме правой части уравнения. Тем самым, для широких классов существенно неперiodических перфораций устанавливается самый сильный возможный результат о сходимости. Это обеспечивает новизну и важность полученных результатов, которые являются важным вкладом в развитие современной теории операторных оценок для задач усреднения.

В работе рассматриваются два основных случая перфорации. В первом усреднение приводит к усредненному условию Дирихле на поверхности, во втором – к третьему нелинейному краевому условию, которое включает частный случай условия Неймана. Для каждого из случаев формулируются весьма общие условия на геометрию перфорации, которые обеспечивают указанные усредненные краевые условия. Отметим еще, что усредненные задачи ставятся для тех же уравнения, но уже в исходной, неперфорированной области.

Случай усредненного условия Дирихле разбирается во второй главе, случай усредненного третьего краевого условия – в третьей. Техника исследований основано на стандартных определениях обобщенных решений для возмущенной и усредненных задач, что быстро дает подходящее интегральное тождество для разности решений возмущенной и усредненной задачи с некоторой правой части. А самая нетривиальная часть – это оценить данную правую часть. Здесь уже используются разнообразные локальные оценки в малых окрестностях полостей, основное достоинство и нетривиальность которых – это равномерность по форме и распределению полостей. В конечном



счете именно данная равномерность позволяет рассмотреть широкий круг неперiodических перфораций.

Помимо результатов об операторных оценках в общем неперiodическом случае, в диссертационной работе исследован и случай строго перiodической перфорации. В этом случае получены полные асимптотические разложения решений возмущенных задач. Здесь вновь рассмотрены два случая, когда усреднение приводит к усредненному условию Дирихле (в четвертой главе) и к усредненному третьему краевому условию (в пятой главе). Перфорация устраивается вдоль заданной гиперплоскости. Кроме того, налагаются дополнительные условия на гладкость и убывание правой части уравнения и на поведение коэффициентов в окрестности гиперплоскости. Асимптотики построены как комбинация внешнего и внутреннего разложений, которые сшиваются на основе метода согласования асимптотических разложений. Асимптотические разложения имеют вид степенных рядов по малому параметру, описывающему расстояния между полостями, с коэффициентами, которые зависят от второго параметра, описывающего отношение линейного размера полости к расстоянию между ними. Оказалось, что зависимость коэффициентов асимптотик от второго параметра играет существенную роль, в частности, она непосредственно влияет на возможность строго обоснования построенных асимптотик. Поэтому данная зависимость коэффициентов от второго параметра детально в диссертации исследуется, для чего применяются весьма нетривиальные подходы и комбинации известных методов. Результаты об асимптотических разложениях интересные, новые и весьма нетривиальные и вносят хороший вклад в современный асимптотический анализ.

Подытоживая сказанное выше, можно уверенно утверждать, что в диссертации получены важные, новые и оригинальные результаты об операторных оценках и асимптотических разложениях для решений общих эллиптических задач второго порядка в областях с перфорацией вдоль заданного многообразия. Все результаты строго доказаны и носят законченный характер. Методы и подходы, разработанные в диссертации, могут быть использованы при

исследовании схожих задач из теории усреднения. В частности, результаты и подходы работы могут быть использованы в фундаментальных исследованиях, которые проводятся в Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова, Санкт-Петербургском государственном университете, Владимирском государственном университете имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых, Санкт-Петербургском отделении Математического института им. В.А. Стеклова РАН, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Институте гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН и других университетах и научных институтах.

Все результаты диссертации являются новыми и опубликованы в пяти научных публикациях, индексируемых в международных реферативных базах данных и системах цитирования (Web of Science, Scopus). Одна из этих публикаций выполнена лично, четыре в соавторстве с научным руководителем. Личный вклад диссертанта в эти работы четко в работе расписан. Диссертация основана на результатах, полученных диссертантом лично. Результаты были доложены на серии ведущих международных конференций, проводимых в России. Автореферат ясно и полно отражает содержание диссертации.

По содержанию и оформлению диссертации можно сделать следующие замечания:

1. Стр. 52, 5 строка снизу: вместо «окрестности» должно быть «окрестностях».
2. Стр. 93, 3 строка сверху: вместо «соответствует» должно быть «соответствуют».
3. Стр. 145, последняя строка: непонятно, что означает нижний индекс у множества целых чисел, судя по контексту, он здесь вовсе не нужен.
4. Стр. 158, 3 строка снизу, оборот «с единственным исключением, что» является просторечием, правильная версия выглядит «за исключением того, что».
5. Стр. 180, 11 строка сверху: вместо «в полученном равенстве» должно быть «в полученном равенстве».

6. Просматривается небрежность в оформлении списка литературы. Например, ссылка [31] содержит только фамилию автора и название статьи, но не указаны ни журнал, ни выходные данные. Причем это работа диссертанта, судя по всему, имеется в виду ее личная работа [5] из списка литературы автореферата. В ссылке [15] не указан номер выпуска, при этом между «Т.» и номером тома «35» отсутствует пробел. Аналогичный пробел отсутствует и в ссылках [8], [12], [14], [18]. Книга [25] оформлена как статья, присутствует лишний знак «//».

Указанные замечания не влияют на общую положительную оценку диссертационной работы А.И. Мухаметрахимовой.

На основе вышеизложенного считаем, что диссертационная работа А.И. Мухаметрахимовой «Сходимость и асимптотики для задач в областях с непериодической перфорацией вдоль заданного многообразия» удовлетворяет всем требованиям п. 9-11, 13, 14 Постановления Правительства Российской Федерации от 24 сентября 2013 г. №842 «О порядке присуждения ученых степеней», предъявляемых к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, и её автор, Мухаметрахимова А.И. заслуживает присуждения ей ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика.

Отзыв обсужден и утвержден на совместном заседании кафедры физико-математического образования и информационных технологий Педагогического Института ФГБОУ ВО «Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых», протокол № 2а от 31 октября 2025 г.

Отзыв подготовил:

профессор кафедры физико-математического образования и информационных технологий ПИ ВлГУ, доктор физико-математических наук, профессор

Алхутов Юрий Александрович



« 31 » 10 2025 г.

Председательствующий заседания:  
заведующей кафедрой физико-математического образования и информационных технологий,  
кандидат физико-математических наук, доцент



ПОДПИСЬ ЗАВЕДУЮЩЕЙ  
КАФЕДРОЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО  
ОБРАЗОВАНИЯ И ИНФОРМАЦИОННЫХ  
ТЕХНОЛОГИЙ

Евсеева Юлия Юрьевна



« 31 » 10 2025 г.

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

Адрес организации: 600000, г. Владимир, ул. Горького, д.87

Телефон: +7(4922) 53-25-75

E-mail: [od@vlsu.ru](mailto:od@vlsu.ru)

Сайт: <https://www.vlsu.ru/>