ОТЗЫВ

официального оппонента Шамаева Алексея Станиславовича на диссертационную работу Мухаметрахимовой Альбины Ишбулдовны «Сходимость и асимптотики для задач в областях с непериодической перфорацией вдоль заданного многообразия», представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика

Диссертационная работа Мухаметрахимовой Альбины Ишбулдовны посвящена исследованию краевых задач для общих эллиптических уравнений второго порядка с переменными коэффициентами в многомерных областях, в которых устраивается мелкая перфорация вдоль заданного многообразия. Основная идея такой перфорации следующая. Выбирается многообразие без края, лежащее строго внутри области, вдоль которого задаются малые полости. В каждой полости произвольно выбирается точка, которая условно считается центром полости. Предполагается, что линейные размеры полостей малы, равно как и попарные расстояния между их центрами и расстояния от центров до многообразия. На границах полостей задаются либо первое краевое условие, либо нелинейное третье краевое условие, причем на границах разных полостей можно задавать разные краевые условия. Нелинейность в третьем краевом условии достаточно слабая, не более первой степени по неизвестной функции. Размеры полостей и попарные расстояния между их центрами описываются двумя характерными параметрами. Один из параметров малый и описывает расстояния между центрами полостей, а также расстояния от полостей до многообразия. Второй параметр описывает отношение линейных размеров полостей к попарным расстояниям между их центрами. При уменьшении малого параметра перфорация измельчается, а именно, размеры полостей уменьшаются и расстояния между их центрами уменьшается, полостей становится больше, тем самым перфорация измельчается. Основная цель диссертации – изучение поведения решений при измельчении перфорации.

Диссертация состоит из двух основных больших частей. В первой части рассматриваются общие непериодические перфорации, для которых при подходящих условиях выписываются усредненные задачи и затем доказываются соответствующие операторные оценки. Во второй части перфорация предполагается строго периодической и при таком предположении строятся асимптотические разложения решений. Диссертация состоит из введения, пяти глав и списка литературы, содержащего 75 наименований, полный объем работы – 195 страниц.

Во введении представлен обзор публикаций по теме диссертации, начиная классическими работами по усреднению, вышедшими еще в прошлом веке, и заканчивая совсем недавними статьями по операторным оценкам. В первой главе ставятся задачи, описываются основные результаты, обсуждаются основные аспекты работы, приводятся сведения о публикациях и личном вкладе диссертанта.

В диссертации рассматриваются два основных случая. В первом из них усреднение приводит к краевому условию Дирихле на многообразии, во втором – к третьему краевому условию или условию Неймана. Усредненные задачи ставятся для исходных уравнений, но уже в области без перфорации и с усредненным краевым условием на многообразии. В каждом из рассматриваемых случаях на геометрию перфорации накладываются соответствующие условия, которые обеспечивают возникновению упомянутых усредненных условий. В обоих случаях на полости и многообразие накладываются естественные геометрические условия, смысл которых состоит в том, что между любыми двумя полостями имеется минимальное расстояние порядка малого параметра ε, а сами полости имеют примерно одинаковый размер порядка $\varepsilon\eta(\varepsilon)$, где $\eta(\varepsilon)$ – некоторая положительная функция, ограниченная единицей. Функция $\eta(\varepsilon)$ может быть и малой. При этом формы полостей и их распределение вдоль многообразия произвольны, никаких существенных условий на них не накладывается.

Усредненное условие Дирихле возникает в случае, когда полости с условием Дирихле на границе расположены достаточно часто, что строго выражено в условии A4 диссертации, при этом функция $\eta(\varepsilon)$ должна удовлетворять условию

$$\frac{\varepsilon}{\eta^{n-2}(\varepsilon)} \to 0.$$

Усредненное условие третьего типа, или условие Неймана как частный случай, возникает если нет полостей с условием Дирихле на границе. Условие Неймана возникает если исходно на полостях задается только условие Неймана или же если $\eta(\varepsilon)\to 0$. В остальных подслучаях возникает усредненное третье нелинейное краевое условие, вид которого определяется геометрией перфорации. В обоих случаях в работе получены операторные оценки, а именно, даны оценки W_2^1-нормы разности решений исходной и усредненных задач через малую функцию от параметра ε, умноженную на L_2-норму правой части уравнения. Тот факт, что в данной оценке отдельно выделена L_2-норма правой части уравнения, и означает ее «операторность». В частном случае, когда задача линейна, данную оценку можно переформулировать на языке сходимости резольвент исходного и усредненного операторов. И данная оценка означает, что сходимость резольвент имеет место в операторной норме. И такой полученный результат существенно сильнее и заметно отличается от имеющихся классических результатов по усреднению, где зависимость оценок скорости сходимости от правой части уравнения обычно не отслеживалась, и фактически устанавливалась сильная или слабая резольвентные сходимости. Отдельно следует подчеркнуть, что результаты об операторных оценках получены для существенно непериодических перфораций, без каких-либо предположений о периодичности или локальной периодичности перфорации. Это тоже существенное продвижение по сравнению с классическими результатами из теории усреднения, где периодичность возмущений часто присутствует в том или ином виде. Поэтому результаты диссертации по операторным оценкам безусловно новые и очень сильные, так как удалось одновременно рассмотреть широкие классы непериодических перфораций и получить для них самые сильные возможные оценки скорости сходимости.

Доказательство операторных оценок приводится во второй и третьей главах диссертации. Во второй – для случая усредненного краевого условия

Дирихле, в третьей – для усредненного третьего краевого условия и условия Неймана как частного случая. Подход основан на использовании подходящих граничных корректоров и соответствующих интегральных тождеств для обобщенных решений рассматриваемых задач. Непериодичность перфорации удается рассмотреть за счет использования тонких локальных оценок L_2-норм функций из различных функциональных классов в окрестностях полостей. Все эти локальные оценки равномерны по форме и положению полостей, что в итоге и позволяет получить описанные общие результаты.

Во второй части работы, в четвертой и пятой главах, рассматривается случай строго периодической перфорации вдоль заданной гиперплоскости. В окрестности этой гиперплоскости правая часть уравнения предполагается бесконечно дифференцируемой и быстро убывающей вдоль гиперплоскости. Вновь рассматриваются два случая, когда усреднение дает условие Дирихле или третье краевое условие на гиперплоскости. Первый случай рассматривается в четвертой главе, второй – в пятой. Здесь основные полученные результаты – это полные асимптотические разложения для решения исходной возмущенной задачи. Асимптотики строятся на основе классического метода согласования асимптотических разложений из книги академика Ильина Арлена Михайловича, к научной школе которого и принадлежит диссертантка. Однако асимптотики здесь оказываются достаточно неклассическими в том смысле, что они строятся как степенные ряды по параметру ε с коэффициентами, зависящими от $\eta=\eta(\varepsilon)$. Для обоснования асимптотики требуется провести анализ зависимости асимптотик от параметра η, и такой анализ оказывается весьма нетривиальным. Для этого в четвертой главе, для исследования модельной задачи для функций внутреннего разложения, применяется оригинальная схема сведения такой модельной задачи к подходящему операторному уравнению. Далее проводится достаточно нетривиальный анализ этого уравнения в совокупности с применением оценок типа Шаудера, но в области, которая сама зависит от η. В итоге на основе весьма нетривиальных лемм такой анализ успешно завершается и оказывается, что коэффициенты как внутреннего, так и внешнего разложений имеют нарастающие особенности по η. В работе отслеживается порядок таких особенностей и оказывается, что m-ый члены как внешнего, так и внутреннего разложений ведут себя как $\left|\frac{\varepsilon}{\eta^{(n-2)}}\right|^{m}$, что в силу условия $\frac{\varepsilon}{\eta^{n-2}(\varepsilon)} \to 0$ обеспечивает асимптотичность построенных формальных разложений и дает в итоге возможность строго эти разложения обосновать.

В случае, когда усреднение приводит к третьему краевому условию, коэффициенты внутреннего и внешнего разложений оказываются гладкими по параметру η, никаких особенностей уже нет и в итоге структура асимптотик оказывается фактически качественно иной. Исследование зависимости от параметра η здесь также оказывается весьма нетривиальным, требует привлечения различных техник для оценок C- и L_p-норм решений вспомогательных задач в духе известной книги О.А. Ладыженской, Н.Н. Уральцевой «Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа», М. Наука (1973).

В итоге следует подчеркнуть, что полученные результаты об асимптотических разложениях также весьма нетривиальные и очень интересные, в первую очередь двупараметричностью асимптотик и нетривиальной зависимостью коэффициентов асимптотик от параметра η. Эти результаты не уступают по качеству и новизне описанным выше операторным оценкам. Кроме того, если первые две главы по операторным оценкам занимают 52 страницы в диссертации, то главы по асимптотикам потребовали уже 102 страницы, в первую очередь для анализа зависимости по параметру η. Это является косвенным доказательством нетривиальности проведенных в диссертации исследований по асимптотическим разложениям.

Подытоживая сказанное выше, подчеркнём, что в диссертации получены новые, важные и интересные результаты, которые вносят хороший вклад в современную теорию усреднения и асимптотический анализ.

По содержанию и оформлению диссертации можно сделать следующие замечания.

1. Формулировка леммы 10.1 содержит оценку (1.0.34), в которой используются нормы $\|\cdot\|_{\eta}$, а также полунорма $\langle\cdot\rangle^{(\theta)}_{\Pi^{\eta}}$. Однако данные объекты ни перед леммой, ни после не вводятся, а определяются лишь на стр. 111 после формулы (4.2.57) и на стр. 105 формулой (4.2.47). Следовало бы ввести эти объекты непосредственно перед леммой 10.1 на стр. 23. Аналогичное замечание относится и к тексту автореферата, где определение этих объектов отсутствует.
2. Для упомянутой выше нормы $\|\cdot\|_{\eta}$ используется стандартное обозначение нормы. И хотя термин «норма» для этого объекта не применяется, из текста это следует по умолчанию. Вместе с тем, данный объект нормой не является, как следует из его определения на стр. 111. Хотя данное обстоятельство никак не влияет на рассуждения, в которых используется данный объект, в диссертации следовало бы явно сказать, что данный объект – полунорма, и более того, использовать для него иное обозначение, нежели принятое для норм.
3. В диссертации присутствует определенное грамматических неточностей. Например, на стр. 22, в 1-2 строках использован оборот «Так как…, то», который является грамматическим некорректным в русском языке: «так как» и «то» не следует использовать вместе. Этот же оборот используется ещё в ряде мест по тексту диссертации. На стр. 147 в строке перед формулой (5.3.10) двоеточие излишне.
4. Имеются также огрехи в оформлении работы. Например, на стр. 148 формула (5.3.11) не выравнена подходящим образом и в итоге вылезла на правое поле. На стр. 167 в первой строке вместо ссылки на подходящий пункт из списка литературы стоит знак вопроса.
5. В диссертации всего два рисунка, на стр. 7 и стр. 21. Первый имеет номер 1, второй – номер 1.1. В конце названия первого точки нет, в конце названия второго точка есть. Следовало бы единообразно оформить все рисунки.

Указанные замечания не снижают значимости полученных результатов и не влияют на общую положительную оценку диссертационного исследования А.И. Мухаметрахимовой.

Считаю, что диссертация А.И. Мухаметрахимовой «Сходимость и асимптотики для задач в областях с непериодической перфорацией вдоль заданного многообразия» удовлетворяет всем требованиям п. 9-11, 13, 14 Постановления Правительства Российской Федерации от 24 сентября 2013 г. №842 «О порядке присуждения ученых степеней», предъявляемых к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, и её автор, Мухаметрахимова А.И. заслуживает присуждения ей ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика.

Официальный оппонент
Доктор физико-математических наук ________________/ Шамаев
(01.01.02 – Дифференциальные уравнения Алексей Станиславович
и математическая физика), профессор,
главный научный «11» ноября 2025 г.
сотрудник Лаборатории механики управляемых
систем ФГБУН Институт проблем механики
им. А. Ю. Ишлинского РАН

Даю согласие на обработку персональных данных.
Адрес основного места работы:
119526, г. Москва, пр-т Вернадского, д. 101, корп.1
Телефон: +7 903 180 67 32
E-mail: sham@rambler.ru

Подпись Шамаева А. С. заверяю.
Ст. инспектор ИПМех РАН С. Ю. Гвоздева.
11.11.2025 г.