ОТЗЫВ

официального оппонента Дородного Марка Александровича на диссертационную работу Мухаметрахимовой Альбины Ишбулдовны «Сходимость и асимптотики для задач в областях с непериодической перфорацией вдоль заданного многообразия», представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика

В диссертационной работе Мухаметрахимовой А.И. рассматриваются краевые задачи в многомерных областях с перфорацией вдоль заданной поверхности для общих эллиптических уравнений второго порядка с переменными коэффициентами. Перфорация производится малыми полостями, которые расположены вдоль выбранной поверхности. Она зависит от малого характерного параметра ε, при уменьшении которого размеры полостей и расстояния между ними уменьшаются, а количество полостей возрастает. Основной целью работы является выяснение вида усредненных задач, доказательство соответствующих операторных оценок, и построение асимптотических разложений решений возмущенных задач в случае строго периодической перфорации. Общий объем диссертации – 195 страниц, она состоит из введения, пяти глав и списка литературы из 75 использованных источников.

Диссертация начинается с введения, в котором описывается текущее состояние дел по тематике диссертации, приводятся ссылки на имеющиеся работы, кратко описываются основные результаты диссертации. Представленный обзор литературы дает исчерпывающее представление как о классических результатах теории усреднения в части задач в перфорированных областях, так и о работах по операторным оценкам, которые вышли в свет за последние 20 лет.

В первой главе ставятся задачи, даются основные предположения и формулируются основные результаты. В конце первой главы проводится обсуждение особенностей поставленных задач и полученных основных результатов, подчеркиваются главные достоинства работы. Также приведены исчерпывающие сведения о личном вкладе диссертанта в совместные с научным руководителем статьи.

Главная особенность рассматриваемых задач – это непериодичность перфорации. На геометрию перфорации накладываются минимальные ограничения, которые являются весьма естественными. Никакой периодичности или локальной периодичности не предполагается. Далее выделяется два дополнительных условия, которые обеспечивают возможность провести усреднение в двух основных случаях. В обоих случаях усредненная задача ставится для того же уравнения, что и возмущенная, но при этом в области пропадают полости и возникает усредненное условие на поверхности. Первое из упомянутых условий обеспечивает усредненное условие Дирихле, второе – третье краевое условие или условие Неймана в виде частного случая.

Случай усредненного условия Дирихле исследуется во второй главе. Дополнительное условие, которое обеспечивает такую ситуацию, требует достаточно плотного распределения полостей с первым краевым условием на границах вдоль многообразия. Также предполагается, что характерные размеры полостей и характерные расстояния между ними удовлетворяют определенному условию, зависящему от размерности области. Главный полученный результат – это операторная оценка, которая дает оценку нормы разности решений возмущенной и усредненной задач в пространстве Соболева W_2^1 равномерно по L_2-норме правой части. Основное его достоинство состоит в том, что он оказывается верным для очень широкого класса непериодических перфораций. Интересна и техника исследования данной задачи. А именно, вместо корректора используется локальная срезающая функция возле полостей, и для разности решения возмущенной задачи и срезанного решения усредненной задачи достаточно стандартным образом выписывается соответствующее интегральное тождество. Правая часть в этом тождестве затем аккуратно оценивается на основе различных локальных вспомогательных оценок, которые оказываются верными равномерно по форме и расположению полостей. Это и позволяет получить итоговую операторную оценки.

В третьей главе рассматривается случай, когда на полостях задается только третье краевое условие, или условие Неймана как частный случай. Здесь при усреднении на поверхности возникает третье краевое условие с подходящим усредненным коэффициентом. Техника здесь отличается от предыдущей главы. А именно, никаких корректоров здесь уже не требуется, оценивается непосредственно разность решений возмущенной и усредненных задач. При этом в процессе вычислений, за счет применения подходящих локальных оценок, удается заменить задачу в перфорированной области на задачу с быстро и непериодически осциллирующим третьим краевым условием. Структура коэффициента в этом условии зависит от расположения полостей, а также от площадей границ полостей. После этого проводится усреднение такого осциллирующего краевого условия. Для этого применяется оригинальный и нетривиальный подход, основанный на введение специальной нормы, в смысле которой осциллирующий коэффициент должен иметь предел. Данный предел и есть коэффициент в итоговом усредненном краевом условии. Сама упомянутая норма вводится в терминах краевых задач для оператора Лапласа с определенным граничными условиями. И хотя это явно не говорится в работе, фактически речь идет о норме мультипликаторов между пространствами Соболева на границе с дробными показателями. Это интересный подход, который позволил одновременно рассмотреть широкий класс непериодических перфораций. Кроме того, геометрическое возмущение, перфорация полостями, было заменено на непериодически и быстро осциллирующий коэффициент в третьем краевом условии на поверхности. Последняя задача в этом смысле оказалась эталонной – достаточно усреднить только такую задачу, чтобы решить исходную. В результате в третьей главе также были получены операторные оценки, но уже в случае, когда при усреднении возникает третье краевое условие, или второе как частный случай.

Результаты второй и третьей глав об операторных оценках я оцениваю как существенные и важные. Основное достоинство состоит в том, что операторные оценки удалось доказать для сильно непериодических перфораций, без опоры на какую-либо периодичность или локальную периодичность. Иными словами, никаких задач на ячейках периодичности не возникает, вместо них применяются хорошие локальные оценки, которые не зависят ни от формы полостей, ни от их распределения вдоль поверхности.

В четвертой и пятой главах рассматривается случай строго периодической перфорации вдоль заданной гиперплоскости. Дополнительно предполагается, что правая часть уравнения бесконечно дифференцируема в окрестности этой гиперплоскости и интегрируема с квадратом вместе со всеми своими частными производными. При таких условиях удается построить полное асимптотическое разложение решения возмущенной задачи. Здесь вновь рассматривается два случая, как и в предыдущих главах. А именно, в четвертой главе предполагается, что на полостях периодически задаются условие Дирихле и третье краевое условие, а в пределе возникает условие Дирихле на гиперплоскости. В пятой главе на границах полостей задаются только третье краевое условие, а в пределе возникает третье краевое условие. В обоих случаях асимптотика решений возмущенной задачи строится как комбинация внутреннего и внешнего разложений, подходящим образом согласованных на основе метода согласования асимптотических разложений. Большую часть четвертой и пятой глав занимает весьма сложный анализ зависимости асимптотических разложений от параметра, характеризующего отношение характерного линейного размера полостей и характерных расстояний между ними. В зависимости от типа усредненного условия, эта зависимость оказывается существенно различной.

Результаты четвертой и пятой глав я также оцениваю как интересные и нетривиальные. Помимо воспроизведения результата о сходимости, они дают более точную информацию о поведении решений возмущенной задачи, при этом оказывается, что тип усредненного условия сильно влияет на вид последующих поправок.

Результаты диссертации опубликованы в 5 статьях, которые были опубликованы в ведущих российских математических журналах. Все эти издания входят в международные реферативные базы данных и системы цитирования.

Одна работа выполнена без соавторов, остальные четыре совместно с научным руководителем. Личный вклад диссертанта в совместные работы в диссертации указан, в диссертации использованы только личные результаты диссертанта. Результаты диссертации были доложены на серии международных конференций. Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

В качестве замечаний к работе отмечу следующие.

1. На стр. 12 автореферата после формулы 15 указана ссылка на лемму без номера, которая в автореферате не присутствует. По всей видимости, речь идет о лемме 3.1.3 диссертации, а сама некорректная ссылка в автореферате возникла из-за перенесения текста из диссертации и последующей небрежной корректировки.
2. В четвертой главе предполагается, что функция a из третьего краевого условия на границах полостей не зависит от пространственной переменной, а в пятой главе она уже от этой переменной зависит. В обсуждении результатов по этому поводу ничего не сказано, поэтому остается вопрос – такое ограничение на зависимость в третьей главе является условием по существу или же это просто техническое упрощающее предположение? Данный вопрос явно требовал пояснения в тексте диссертации.
3. В известных работах по операторным оценкам очень часто обсуждается вопрос о неулучшаемости по порядку доказываемых операторных оценок. В диссертации этот вопрос не затрагивается, но его следовало бы прояснить хотя бы кратко в обсуждении результатов в конце первой главы. Что диссертант может сказать по этому поводу?
4. В диссертации прослеживается некоторая небрежность в оформлении, имеются опечатки. Например, на стр. 158 размерность пространства обозначается буквой d, см. задачу (5.5.5) и задачу перед ней, хотя во всем тексте используется буква n. По всему тексту в формулах вида F_j, j=0,1,2 после второй части ставится запятая, хотя ее там быть не должно. На стр. 169, 4 строка, два раза подряд стоит предлог «в».

Вместе с тем, приведенные замечания не влияют на общую высокую положительную оценку работы.

Диссертация А.И. Мухаметрахимовой «Сходимость и асимптотики для задач в областях с непериодической перфорацией вдоль заданного многообразия» удовлетворяет п. 9-11, 13, 14 Постановления Правительства Российской Федерации от 24 сентября 2013 г. №842 «О порядке присуждения ученых степеней».

Учитывая вышеизложенное, считаю, что Мухаметрахимова А.И. заслуживает присуждения ей ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика.

Официальный оппонент
Кандидат физико-математических наук ____________/ Дородный
(01.01.03 – Математическая физика) Марк Александрович
доцент кафедры высшей математики и «31» октября 2025 г.
математической физики физического факультета
ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет»

Даю согласие на обработку персональных данных.
Адрес организации: 199034, г. Санкт-Петербург, Университетская наб., д. 7-9
Тел. организации: +7 812 328 20 00
E-mail органиции: spbu@spbu.ru