ОТЗЫВ

научного руководителя на диссертацию Мухаметрахимовой Альбины Ишбулдовны «Сходимость и асимптотики для задач в областях с непериодической перфорацией вдоль заданного многообразия», представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по научной специальности 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика

Диссертационная работа Мухаметрахимовой А.И. посвящена изучению краевых задача для эллиптических дифференциальных уравнений второго порядка общего вида в многомерных областях с мелкой непериодической перфорацией вдоль заданного многообразия. Размерность области от трёх и выше, область выбирается произвольно с достаточно гладкой границей, область может быть ограниченной или неограниченной. Многообразие не имеет края и считается достаточно гладким и в определенном смысле регулярным. Основная особенность работы – структура перфорации. Полости, описывающие перфорацию, имеют произвольную форму и произвольно распределены вдоль многообразия. На формы полостей и их распределение задаются минимальные естественные геометрические условия. Эти условия достаточно слабые и, кроме того, отказ от этих условий серьезно меняет как саму постановку задачи, так и ожидаемые результаты.

На границах полостей задается или краевое условие Дирихле, или третье нелинейное краевое условие. Нелинейность предполагается достаточно слабой, по неизвестной функции предполагается выполнение условия Липшица. Выбор краевого условия для каждой полости произволен, в результате в задаче полости с первым или третьим краевыми условиями распределены произвольно. Основная цель работы – для общих непериодических перфораций описать возможные усредненные краевые задачи, возникающие при измельчении перфорации и доказать соответствующие операторные оценки. В случае строго периодической перфорации целью является построение асимптотических разложений решений рассматриваемых задач.

Краевые задачи в областях, перфорированных вдоль заданного многообразия – это классическое направление исследований в современной теории усреднения. При этом подавляющее большинство работ, за исключением отдельных работ, посвящено случаю периодических или локально-периодических перфораций. Классификация усредненных задач на сегодняшний день известна, равно как и оценки скорости сходимости. Важно отметить и отдельно подчеркнуть, что все классические результаты устанавливают сходимость решений возмущенных задач к решениям усредненных в нормах подходящих соболевских пространств при заданных правых частях, причем константы в данных оценках как-то зависят от этих правых частей. В линейном случае на языке сходимости соответствующих резольвент такие оценки означают наличие сильной или слабой резольвентной сходимости. Подобного сорта результаты были получены большим кругом авторов, для примера упомянем лишь некоторых: В.А. Марченко, Е.Я. Хруслов, В.В. Жиков, О.А. Олейник, Т.А. Шапошникова, F. Murat, D. Cioranescu, А.Г. Беляев, А.Л. Пятницкий, Г.А. Чечкин, O. Bodart, J.I. Diaz, D. Gomez, D. Gomez-Castro, A. Meidell, M. Lobo, L.E. Persson, M.E. Perez и другие.

В последнее время активно развивается новой направление в теории усреднения – операторные оценки. Речь идет о доказательстве оценок скорости сходимости, равномерных по правым частям в рассматриваемых уравнениях и краевых условиях. На языке резольвент в линейном случае это означает наличие равномерной резольвентной сходимости, то есть, сходимости резольвент в соответствующей операторной норме. Это существенно более сильный результат по сравнению с классическими результатами теории усреднения, где зависимость оценок скорости сходимости решений возмущенных задач к решениям усредненных обычно не обсуждается. Кроме того, подобные операторные оценки позволяют перенести аппарат современной спектральной теории операторов на задачи в теории усреднения.

Основные результаты диссертационной работы следующие. В случае общей перфорации при усреднении полости пропадают, а на многообразии возникает подходящее усредненное краевое условие. Выделены случаи, когда при усреднении возникает краевое условие Дирихле, краевое условие Неймана или третье краевое условие типа нелинейного дельта-взаимодействия. В каждом из случаев приведены условия на размеры полостей, на распределение полостей с краевым условием Дирихле; в случае, когда в пределе возникает нелинейное дельта-взаимодействие, накладывается дополнительное условие на распределение полостей с третьим краевым условием. В каждом из случаев доказаны соответствующие операторные оценки. Основные достоинства полученных результатов, одновременно подчеркивающие их ценность для современной теории усреднения, следующие. В каждом из рассмотренных случаев перфорация носит существенно непериодический характер, никакой периодичности или локальной периодичности не предполагается. Налагаемые условия весьма слабые и, кроме того, очень естественные; разумно ожидать, что они минимальны в том смысле, что нарушение этих условий скорее всего приведет к неверности утверждаемого результата о сходимости. В итоге полученные результаты применимы для очень широкого класса непериодических перфораций. Одновременно с этим, утверждается сходимость, равномерная по правой части уравнения, а именно, доказывается соответствующая операторная оценка. Таким образом, в работе удалось доказать максимально сильную версию сходимости, установив попутно операторные оценки, и это сделано для очень широкого круга непериодических перфораций. По сравнению с классическими результатами теории усреднения существенное продвижение сделано как по геометрии перфорации, так и по качеству оценок скорости сходимости.

В случае строго периодической перфорации для тех же случаев, для которых были установлены результаты о сходимости, были построены асимптотические разложения рассматриваемых краевых задач. Построение основано на методе согласования асимптотических разложений и методе многих масштабов. Асимптотические разложения имеют степенной вид по малому параметру – характерное расстояние между полостями, с коэффициентами, зависящими от второго параметра, описывающему отношение характерного линейного размера полостей к характерному расстоянию между ними. Оказалось, что зависимость коэффициентов асимптотик от второго параметра существенно зависит от того, какое усредненное краевое условие возникает в пределе. Проведен детальный анализ коэффициентов асимптотик от данного параметра. Все асимптотики строго обоснованы, то есть, получены соответствующие оценки остатков.

Результаты, полученные в диссертационной работе Мухаметрахимовой А.И., новые и интересные. Они существенно обобщают и обогащают результаты предшественников. Предложены подходы, которые позволяют изучать самые общие постановки задач с общими непериодическими перфорациями. Результаты диссертационного исследования опубликованы в пяти рецензируемых изданиях, индексируемых в международных базах данных Web of Science и Scopus. Четыре из этих статей написаны совместно с научным руководителем, одна статья личная. Все результаты в диссертационной работе получены лично Мухаметрахимовой А.И. Основные положения диссертационной работы неоднократно докладывались соискателем на ведущих международных конференциях, на региональных конференциях, а также на семинарах Института математики с вычислительным центром Уфимского федерального исследовательского центра Российской Академии наук.

Считаю, что А.И. Мухаметрахимова является сформировавшимся специалистом в области теории усреднения и её диссертационная работа удовлетворяет п. 9-11, 13, 14 Постановления Правительства Российской Федерации от 24 сентября 2013 г. № 842 «О порядке присуждения ученых степеней». Соискатель безусловно заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по научной специальности 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика.

Научный руководитель

Доктор физико-математических наук (01.01.02 – Дифференциальные уравнения), профессор РАН, главный научный сотрудник Института математики с вычислительным центром – обособленного структурного подразделения Федерального государственного бюджетного научного учреждения Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук

_____________ / Борисов Денис Иванович

«15» сентября 2025 г.

450008, г. Уфа, ул. Чернышевского, 112

Телефон: 8(347)272-59-36
E-mail: borisovdi@yandex.ru

Подпись Борисова Д.И. заверяю:
Ученый секретарь ИМВЦ УФИЦ РАН
к. физ.-мат. наук, доцент В.Ф. Вильданова

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ С ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫМ ЦЕНТРОМ
КАНЦЕЛЯРИЯ