

УТВЕРЖДАЮ  
Проректор по научно-исследовательской работе  
ФГБОУ ВО  
«Башкирский государственный педагогический университет  
им. М. Акмуллы»  
канд. биол. наук  
С.А. Гареева  
«22 » сентября 2025 г.



## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы»

**Диссертация** Мухаметрахимовой Альбины Ишбулдовны «Сходимость и асимптотики для задач в областях с непериодической перфорацией вдоль заданного многообразия» выполнена на кафедре математики и статистики Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы».

В период подготовки диссертации соискатель А.И. Мухаметрахимова обучалась в аспирантуре по очной форме обучения по направлению подготовки 01.06.01 Математика и механика Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы».

В 2019 году окончила с отличием Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы» по направлению подготовки 44.04.04 Профессиональное обучение (по отраслям), направленность: Современные физико-математические технологии с присвоением квалификации Магистр.

В 2023 году окончила аспирантуру по очной форме обучения Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы» по направлению подготовки 01.06.01 Математика и механика, научной специальности Дифференциальные уравнения и математическая физика с присвоением квалификации «Исследователь. Преподаватель-исследователь».

**Диплом об окончании аспирантуры** выдан Федеральным государственным бюджетным образовательным учреждением высшего образования «Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы» в 2023 году.

**Справка об обучении со сведениями о сданных кандидатских экзаменах** выдана Федеральным государственным бюджетным образовательным учреждением высшего образования «Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы» в 2025 году.

**Научный руководитель** – Борисов Денис Иванович, доктор физико-математических наук, профессор РАН, главный научный сотрудник Института математики с вычислительным центром – обособленного структурного подразделения Федерального государственного бюджетного научного учреждения Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук.

**По итогам обсуждения принято следующее заключение.**

Диссертационная работа Мухаметрахимовой Альбины Ишбулдовны «Сходимость и асимптотики для задач в областях с непериодической перфорацией вдоль заданного многообразия» является законченной научно-квалификационной работой, соответствующей п. 9 Положения о присуждении учёных степеней, утвержденного постановлением Правительства Российской Федерации от 24.09.2013 № 842 (ред. от 16.10.2024 г.). Работа посвящена изучению краевых задач для эллиптического уравнения второго порядка в многомерной области с произвольной непериодической перфорацией вдоль заданного многообразия.

Тема диссертации связана с темами научных исследований, проводимых в научно-исследовательской лаборатории «Операторные методы в механике», являющейся структурным подразделением Института физики, математики, цифровых и нанотехнологий Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы». Тема диссертации соответствует паспорту научной специальности 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика, а именно: пункту 12 – «Асимптотическая теория дифференциальных уравнений и систем».

Основные результаты диссертации изложены в пяти главах.

В 1-й главе описывается история вопроса, известные результаты, дается постановка задач, формулируются и обсуждаются основные результаты, а также описывается личный вклад соискателя.

Во 2-й главе исследования краевая задача для эллиптического уравнения второго порядка в многомерной области с произвольной непериодической перфорацией вдоль заданного многообразия в случае, когда в усредненной задаче вместо перфорации возникает условие Дирихле на многообразии. Основной результат второй главы – операторная оценка, а именно, оценка на

разность нормы решения возмущенной и усредненной задач, равномерная по  $L_2$ -норме правой части уравнения.

В 3-й главе рассмотрена краевая задача для эллиптического уравнения второго порядка в многомерной области с произвольной непериодической перфорацией вдоль заданного многообразия в случае, когда в усредненной задаче вместо перфорации возникает нелинейное третье краевое условие или условие Неймана на многообразии. В этом случае также доказывается соответствующая операторная оценка.

В 4-й главе рассматривается случай строго периодического чередования вдоль гиперплоскости, правая часть уравнения считается достаточно гладкой в окрестности данной гиперплоскости, на границах полостей задается условие Дирихле, а размеры этих полостей и расстояния между ними выбираются так, что в усредненной задаче возникает условие Дирихле на гиперплоскости. В таких предположениях строится и строго обосновывается полное асимптотическое разложение решение возмущенной задачи.

В 5-й главе вновь рассматривается случай строго периодического чередования вдоль гиперплоскости с достаточно гладкой правой частью, но на границах полостей ставится третье нелинейное краевое условие и в усредненной задаче на гиперплоскости также возникает третье нелинейное краевое условие. В таких предположениях строится и строго обосновывается полное асимптотическое разложение решение возмущенной задачи.

Рассматриваемый в диссертации круг задач является весьма актуальным, поскольку речь идет о развитии теории операторных оценок на задачи граничного усреднения о мелкой перфорации вдоль заданного многообразия. Развитие теории операторных оценок было инициировано в работах М.Ш. Бирмана, Т.А. Суслиной и В.В. Жикова, С.Е. Пастуховой по операторам с быстро осциллирующими коэффициентами, и перенос этой теории на задачи граничного усреднения – важное современное актуальное направление исследований.

Краевые задачи в перфорированных областях исследовались многими учеными. Не имея возможности их всех перечислить, для примера упомянем лишь некоторых: В.А. Марченко, Е.Я. Хруслов, В.В. Жиков, О.А. Олейник, Т.А. Шапошникова, F. Murat, D. Cioranescu, А.Г. Беляев, А.Л. Пятницкий, Г.А. Чечкин, O. Bodart, J.I. Diaz, D. Gomez, D. Gomez-Castro, A. Meidell, M. Lobo, L.E. Persson, M.E. Perez и другие.

Все основные результаты диссертации являются новыми, представляют научный интерес и носят законченный характер. Они значительно дополняют исследования предыдущих авторов и вносят существенный вклад в теорию граничного усреднения.

**Новизна и значение выводов диссертационной работы** заключается в том, что удалось доказать операторные оценки для общих эллиптических краевых задач второго порядка в произвольных областях с мелкой перфорацией вдоль заданного многообразия в двух основных случаях, когда при усреднении на многообразии возникает условие Дирихле (2-ая глава) или

третье нелинейное краевое условие (3-я глава). Важный аспект, серьезно отличающий диссертационную работу от предыдущих исследований – непериодичность перфорации и применимость полученных результатов для широкого круга существенного непериодических перфораций. В случае строго периодической перфорации удалось продвинуться дальше и построить полные асимптотические разложения решений рассматриваемых задач (4-ая и 5-ая главы). Наиболее значимыми и нетривиальными являются результаты 2-ой и 3-ей глав об операторных оценках, для доказательства которых применялись известные подходы, а также были разработаны новые методы.

Результаты, полученные в диссертации А.И. Мухаметрахимовой, достоверны и строго обоснованы. Они получены соискателем лично и в достаточно полной мере опубликованы в 5 статьях в российских журналах, которые входят в международные реферативные базы данных и системы цитирования (Web of Science, Scopus). Личный вклад соискателя подробно описан в диссертации и автореферате.

#### **Основные публикации по теме диссертации**

1. Борисов Д.И., Мухаметрахимова А.И. О равномерной резольвентной сходимости для эллиптических операторов в многомерных областях с малыми отверстиями / Д.И. Борисов, А.И. Мухаметрахимова // Проблемы математического анализа – 2018. – Т. 92. – С. 69–81.

2. Борисов Д.И., Мухаметрахимова А.И. Равномерная сходимость и асимптотики для задач в областях с мелкой перфорацией вдоль заданного многообразия в случае усредненного условия Дирихле / Д.И. Борисов, А.И. Мухаметрахимова // Математический сборник – 2021. – Т. 212, № 8. – С. 33–88.

3. Борисов Д.И., Мухаметрахимова А.И. Асимптотики для задач в перфорированных областях с третьим нелинейным краевым условием на границах полостей / Д.И. Борисов, А.И. Мухаметрахимова // Математический сборник – 2022. – Т. 213, № 10. – С. 3–59.

4. Борисов Д.И., Мухаметрахимова А.И. Равномерная сходимость для задач с перфорацией вдоль заданного многообразия и третьим нелинейным краевым условием на границах полостей / Д.И. Борисов, А.И. Мухаметрахимова // Алгебра и анализ – 2023. – Т. 35. – С. 20–78.

5. Мухаметрахимова А.И. Операторные оценки для непериодической перфорации вдоль границы: усредненное условие Дирихле / А.И. Мухаметрахимова // Уфимский математический журнал – 2024. – Т.16. – С. 84–94.

**Основные результаты диссертации докладывались на** Общегородском семинаре им. А.М. Ильина по дифференциальным уравнениям математической физики в Институте математике с вычислительным центром Уфимского федерального исследовательского центра Российской Академии наук (14 мая 2019) и на следующих конференциях: Международная математическая конференция по теории функций (Уфа, 2017 г.), Международная конференция «Комплексный анализ,

математическая физика и нелинейные уравнения» (оз. Яктыкуль (Банное), 2018 г., 2019 г. и 2021 г.), Международная конференция «Спектральная теория и смежные вопросы» (Уфа, 2018 г.), IX Международная школа-конференция «Фундаментальная математика и её приложения в естествознании» (Уфа, 2020 г.), XXVII и XXVIII Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов—2020» и «Ломоносов—2021» (Москва, 2020 г. и 2021 г.), Международная конференция «Дифференциальные уравнения, математическое моделирование и вычислительные алгоритмы» (Белгород, 2021 г.), Конференция И. Г. Петровского «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы» (Москва, 2021 г.), 14-ая Санкт-Петербургская конференция по спектральной теории, посвящённая памяти М.Ш. Бирмана (Санкт-Петербург, 2023 г.).

Текст диссертации представляет собой самостоятельную научно-квалификационную работу, не содержит заимствованного материала без ссылок на автора или источник.

Диссертация Мухаметрахимовой А.И. «Сходимость и асимптотики для задач в областях с непериодической перфорацией вдоль заданного многообразия» удовлетворяет п. 9-11, 13, 14 Постановления Правительства Российской Федерации от 24 сентября 2013 г. № 842 «О порядке присуждения ученых степеней» и рекомендуется к защите на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по научной специальности 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика.

Заключение принято на расширенном заседании кафедры математики и статистики Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы».

На заседании присутствовало 13 человек (в том числе 4 доктора наук), с правом голоса 7 человек.

Результаты голосования: «за» – 7 чел., «против» – 0 чел., «воздержалось» – 0 чел. (протокол № 2 от 16 сентября 2025 г.).

Председательствующий расширенного заседания кафедры математики и статистики, кандидат физ.-мат. наук, доцент, заведующий кафедрой математики и статистики Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы»

Подпись Е.Г. Кудашева  
Заверяю: Начальник отдела документационного обеспечения  
ФГБОУ ВО «БППУ им. М.Акмуллы» О.С. Шилов



Е.Г. Кудашева