

На правах рукописи



Мустафина Ильмира Жаватовна

**ИССЛЕДОВАНИЕ ГРАНИЦ ОБЛАСТЕЙ УСТОЙЧИВОСТИ И
ГИПЕРБОЛИЧНОСТИ ТОЧЕК РАВНОВЕСИЯ
ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Уфа – 2026

Работа выполнена в Уфимском подразделении регионального научно-образовательного математического центра «Научно-образовательный математический центр Приволжского федерального округа» при Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Уфимский университет науки и технологий»

Научный руководитель: **Юмагулов Марат Гаязович**,
доктор физико-математических наук, профессор

Официальные оппоненты: **Малыгина Вера Владимировна**,
доктор физико-математических наук, доцент,
профессор кафедры вычислительной математики,
механики и биомеханики ФГАОУ ВО «Пермский
национальный исследовательский политехнический университет»

Мухамадиев Эргашбой,
доктор физико-математических наук, профессор,
член-корреспондент АН Республики Таджикистан,
профессор кафедры математики и информатики
ФГБОУ ВО «Вологодский государственный
университет»

Ведущая организация: ФГБОУ ВО «Челябинский государственный
университет», г. Челябинск

Защита состоится 25 декабря 2026 г. в 14:00 на заседании объединенного диссертационного совета 99.0.110.02, созданного на базе ФГБНУ Уфимский федеральный исследовательский центр Российской академии наук, ФГБОУ ВО «Уфимский университет науки и технологий», по адресу: 450008, г. Уфа, ул. К. Маркса, д. 12.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБОУ ВО «Уфимский университет науки и технологий» и на сайте <https://uust.ru>.

Автореферат разослан «_____» _____ 2026 года

Ученый секретарь
диссертационного совета доктор
физико-математических наук

Исаев Константин Петрович

Общая характеристика работы

Актуальность темы. В теории дифференциальных уравнений, теории динамических систем и их приложениях важное значение имеет задача построения в пространстве параметров областей устойчивости и гиперболичности точек равновесия и периодических решений. Здесь также актуальной является задача исследования поведения системы в окрестностях указанных границ.

Исследованию таких задач посвящены работы В.И. Арнольда, Н.Н. Баутина, Н.Н. Боголюбова, А.Д. Брюно, Б.П. Демидовича, Л.В. Левантовского, И.Г. Малкина, Н.Н. Моисеева, А. Найфэ, А.И. Перова, Л.П. Шильникова, В.А. Якубовича, L.F.C. Alberto, H.D. Chiang, F. M. Amaral, M. Loccufier и E. Noldus, Jianjun Paul Tiana и Jin Wangb и многих других математиков. Основное внимание в работах этих авторов уделяется исследованию систем, описываемых автономными дифференциальными уравнениями. Авторами этих работ разработан ряд эффективных методов исследования указанных задач, решены многие практически и теоретически важные задачи. Исследования продолжаются в разных направлениях.

Важную роль в общей теории дифференциальных уравнений и её приложениях занимают исследования систем, описываемых неавтономными дифференциальными уравнениями, в частности, уравнениями с периодическими коэффициентами. Классическими работами в теории дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами являются работы А.М. Ляпунова, А. Пуанкаре, Г. Флоке. Важное место в современной теории дифференциальных уравнений и её приложениях занимают исследования задач об устойчивости и бифуркациях в неавтономных периодических системах с малым параметром. Здесь отметим работы В.А. Якубовича и В.М. Старжинского, И.Г. Малкина, М. Розо, Л. Чезари, И.З. Штокало, А.А. Майлыбаева и А.П. Сейраняна, А.О. Белякова и др. Наряду с классическими методами теории Флоке-Ляпунова, в этих работах использовались методы теории возмущений, позволяющие перейти от уравнений с периодическими коэффициентами к уравнениям с постоянными коэффициентами при младших степенях малого параметра. Большая часть этих работ направлена на исследование определенных классов дифференциальных уравнений, в частности, гамильтоновых и консервативных систем.

Многие задачи из теории динамических систем, описываемых неавтономными периодическими дифференциальными уравнениями общего вида, остаются недостаточно изученными. Такими являются, в частности, задачи о разработке асимптотических (по степеням малого параметра) формул, позволяющих получать приближенное представление границ областей гиперболичности и устойчивости точек равновесия и периодических решений линей-

ных и нелинейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Важными являются задачи исследования основных сценариев бифуркаций при переходе параметров через границы области гиперболичности и устойчивости. Особый интерес здесь вызывают вопросы о разработке эффективных признаков опасности и безопасности границ областей устойчивости.

Цель исследовательской работы. Разработка асимптотических формул в задаче о приближенном построении границ областей гиперболичности и устойчивости точек равновесия и периодических решений динамических систем, описываемых неавтономными дифференциальными уравнениями с периодическими коэффициентами. Исследование основных сценариев бифуркаций системы при переходе параметров через границы областей гиперболичности и устойчивости. Разработка формул, приводящих к признакам опасности и безопасности указанных границ.

Задачи исследования:

1. Разработка схемы приближенного построения границ областей гиперболичности и устойчивости точек равновесия и периодических решений неавтономных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами.
2. Исследование бифуркационного поведения однопараметрических и двухпараметрических динамических систем при переходе параметров через границы областей устойчивости и гиперболичности точек равновесия и периодических решений.
3. Определение необходимых и достаточных признаков опасности и безопасности границ областей устойчивости решений неавтономных периодических дифференциальных уравнений.

Научная новизна. В диссертации получены следующие научные результаты:

1) Разработаны новые асимптотические формулы для приближенного построения границ областей гиперболичности и устойчивости точек равновесия и периодических решений неавтономных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами.

2) Получены новые достаточные признаки для основных сценариев бифуркаций в окрестностях точек равновесия и периодических решений неавтономных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, возникающих при переходе параметров через границы областей гиперболичности и устойчивости.

3) Определены числовые характеристики, позволяющие классифицировать и исследовать границы областей устойчивости точек равновесия и периодических решений неавтономных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами по типу безопасности и опасности.

Теоретическая и практическая значимость работы. Работа носит теоретический характер. Полученные в диссертации результаты позволяют отвечать на следующие вопросы:

1) По данной граничной точке области устойчивости (гиперболичности) точек равновесия или периодических решений неавтономных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами получить локальное представление границы области гиперболичности или устойчивости в нерезонансном и основных резонансных случаях.

2) Определить топологические типы состояний равновесия или периодических решений нелинейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами в окрестностях границы области устойчивости (гиперболичности).

3) Определить сценарии бифуркаций при трансверсальном переходе параметров системы через границы области устойчивости или гиперболичности.

4) Определить качественные характеристики бифуркационных решений в окрестности границы области устойчивости (устойчивость решений, их топологические типы, направленность бифуркаций и др.).

5) Построить числовые характеристики, позволяющие провести классификацию границ областей устойчивости по типу безопасности и опасности.

Результаты работы могут быть использованы в задачах об исследовании поведения неавтономных периодических дифференциальных уравнений в окрестностях основных режимов при значениях параметров, близких к границам областей гиперболичности и устойчивости.

Методология и методы исследования. В работе использованы качественные и аналитические методы теории дифференциальных уравнений, теории динамических систем, теории возмущений линейных операторов, теория Флоке – Ляпунова, методы малого параметра, метод Розо исследования устойчивости.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Предложены новые асимптотические формулы для приближенного построения границ областей гиперболичности и устойчивости точек равновесия и периодических решений неавтономных периодических дифференциальных уравнений.
2. Проведен анализ бифуркационного поведения однопараметрических и двухпараметрических систем при переходе параметров через границы об-

ластей устойчивости и гиперболичности и получены соответствующие признаки бифуркаций.

3. Получены числовые характеристики, позволяющие классифицировать и исследовать границы областей устойчивости неавтономных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами по типу безопасности и опасности.

Степень достоверности и апробация результатов. Основные результаты работы неоднократно докладывались автором и обсуждались на семинарах «Дифференциальные уравнения и математическая физика» под руководством профессоров З.Ф. Фазуллина, Х.К. Ишкина и М.Г. Юмагулова Института информатики, математики и робототехники Уфимского университета науки и технологий (2023-2025 г.), на семинаре кафедры математического анализа Челябинского государственного университета под руководством профессоров В.Е. Федорова и С.М. Воронина (2025 г.). Результаты диссертации были представлены в ходе выступлений на следующих конференциях:

- 1) Международная научная конференция "Спектральные задачи, нелинейный и комплексный анализ" (г. Уфа, 2015 г.);
- 2) Всероссийская научно-практическая конференция "Математическое моделирование процессов и систем" (г. Стерлитамак, 2016 г.);
- 3) Уфимская международная математическая конференция (г. Уфа, 2016 г.);
- 4) Международная конференция "Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения" (озеро Банное, 2018 г.);
- 5) Международная научная конференция "Дифференциальные уравнения и смежные проблемы" (г. Стерлитамак, 2018 г.);
- 6) Международная школа-конференция для студентов, аспирантов и молодых ученых "Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании" (г. Уфа, 2018 г.);
- 7) Международная научная конференция "Уфимская осенняя математическая школа" (г. Уфа, 2019-2025 г.);
- 8) VI Конференция математических центров России (г. Казань, 2026 г.).

Личный вклад. Основные результаты диссертации получены автором самостоятельно.

В статье [1], опубликованной в соавторстве, изучаются три случая (первый и второй нерезонансные случаи и резонансный случай) негиперболичности стационарного решения нелинейной неавтономной системы. Первые два случая проведены соискателем совместно с соавторами Юмагуловым М.Г. и Ибрагимовой Л.С., третий случай, а также схема построения областей устойчивости уравнения Матье, рассмотрен соискателем самостоятельно.

В статье [2], опубликованной в соавторстве, получены формулы построения границ областей устойчивости двухпараметрических автономных и периодических динамических систем; приведены схемы определения основных сценариев бифуркаций при переходе параметров через границы областей устойчивости; определены типы границ (безопасные или опасные). Исследование автономных уравнений проведено соавторами Юмагуловым М.Г. и Ибрагимовой Л.С., исследование неавтономных уравнений принадлежит соискателю.

В статье [3], опубликованной в соавторстве, изучаются вопросы построения границ областей устойчивости точек равновесия автономных и периодических дифференциальных уравнений, зависящих от двух скалярных параметров в плоскости параметров. Указываются условия, при которых через данную точку проходит единственная гладкая граничная кривая и предлагается схема приближенного построения этой кривой. Случай автономных уравнений рассмотрен соавторами Юмагуловым М.Г. и Ибрагимовой Л.С., а случай периодических дифференциальных уравнений соискателем рассмотрен самостоятельно.

При выполнении работы [4], опубликованной в соавторстве, соискателем вместе с соавтором Л.С. Ибрагимовой было проведено исследование построения границ областей устойчивости в случае нулевого собственного значения. Соавтором А.С. Беловой было исследовано построение границ областей устойчивости гамильтоновых систем в случае чисто мнимого собственного значения линеаризованной задачи.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 16 научных работах. Статьи [1–6] опубликованы в рецензируемых журналах, входящих в список ВАК РФ или приравненных к ним, в том числе работы [1–4] в изданиях, индексируемых в базах данных Web of Science и Scopus. Работы [7–16] опубликованы в сборниках трудов по итогам конференции.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и библиографии. Главы разбиты на параграфы. Полный объем диссертации составляет 126 страниц. Список литературы содержит 78 наименования.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируется цель, ставятся задачи работы, излагается научная новизна и практическая значимость полученных результатов.

Первая глава посвящена разработке схемы построения в пространстве параметров границ областей гиперболичности и устойчивости точек равновесия и периодических решений автономных дифференциальных уравнений. В главе также приводится ряд вспомогательных сведений из теории динамических систем. Глава состоит из 4 параграфов и носит вспомогательный характер для решения основных задач диссертации, представленных во второй и третьей главах.

В §1 приводятся постановка задачи, вспомогательные сведения из теории дифференциальных уравнений и теории динамических систем. Приводятся определения таким основным понятиям, как область гиперболичности и устойчивости точки равновесия, граничной точки и границы области гиперболичности (устойчивости), регулярности и нерегулярности граничной точки. Приводятся необходимые условия того, чтобы точка из пространства параметров была граничной точкой области гиперболичности или устойчивости.

Основным объектом исследования в диссертационной работе является нелинейное неавтономное дифференциальное уравнение

$$\frac{dh}{dt} = f(h, t, \mu), \quad h \in R^N, \quad \mu \in R^k, \quad (1)$$

где функция $f(h, t, \mu)$ является дважды непрерывно дифференцируемой по переменной h и параметру μ , непрерывной и T – периодической по t , т.е. $f(h, t + T, \mu) \equiv f(h, t, \mu)$.

Основной задачей диссертационной работы является исследование неавтономной системы (1) в окрестности ее точек равновесия или периодических решений. Пусть система (1) имеет гладко зависящую от параметра μ точку равновесия $h = h^*(\mu)$ или T – периодическое решение $h = \varphi(t, \mu)$. Можно считать, что $h \equiv 0$. Тогда система (1) представится в виде:

$$\frac{dx}{dt} = A(t, \mu)x + a(x, t, \mu), \quad x \in R^N, \quad \mu \in R^k, \quad (2)$$

в котором $A(t, \mu) = f'_h(0, t, \mu)$ – матрица Якоби вектор-функции $f(h, t, \mu)$ в точке $h = 0$, а функция $a(x, t, \mu)$ при $x \rightarrow 0$ равномерно по t и μ удовлетворяет соотношению: $\|a(x, t, \mu)\| = O(\|x\|^2)$. Здесь и ниже в тексте $\|\cdot\|$ будет означать евклидову норму в пространстве R^N .

Рассмотрим линейную систему

$$\frac{dx}{dt} = A(t, \mu)x, \quad x \in R^N, \quad \mu \in R^k. \quad (3)$$

Обозначим через $X(t, \mu)$ фундаментальную матрицу решений (ФМР), а через $V(\mu) = X(T, \mu)$ – матрицу монодромии системы (3).

Связное множество G в пространстве параметров R^k будем называть *областью гиперболичности с топологическим типом* $(p_-, 0, p_+)$ точки равновесия $x = 0$ системы (2), если при любых значениях параметра $\mu \in G$ точка равновесия $x = 0$ является гиперболической с указанным топологическим типом и не существует связного множества G_1 такого, что $G \subseteq G_1$ и, чтобы при любых значениях параметра $\mu \in G_1$ точка равновесия $x = 0$ являлась гиперболической с указанным топологическим типом. Множество G является открытым.

Точку $\mu_0 \in R^k$ будем называть *граничной точкой области гиперболичности* G , если в любой ее окрестности содержатся точки как из области G так и из области $R^k \setminus G$. Совокупность граничных точек множества G будем называть *границей* Γ множества G .

Обозначим через $V_0 = V(\mu_0)$ матрицу монодромии системы (3) в точке μ_0 .

Теорема 1. *Для того, чтобы точка $\mu_0 \in R^k$ была граничной для некоторой области гиперболичности решения $x = 0$ системы (2) необходимо, чтобы матрица V_0 имела хотя бы одно собственное значение, равное 1 по модулю.*

Область гиперболичности Q с топологическим типом $(p_-, 0, 0)$ будем называть *областью устойчивости* точки равновесия $x = 0$ системы (2).

Теорема 2. *Для того, чтобы точка $\mu_0 \in R^k$ была граничной для некоторой области устойчивости решения $x = 0$ системы (2) необходимо, чтобы матрица V_0 имела хотя бы одно собственное значение, равное 1 по модулю и не имела собственных значений больших 1 по модулю.*

Пусть матрица монодромии $V(\mu)$ системы (3) при $\mu = \mu_0$ имеет простое собственное значение $\rho_0 = e^{i\varphi_0}$. Тогда матрица $V(\mu)$ при μ , близких к μ_0 , имеет простое собственное значение $\rho(\mu) = r(\mu)e^{i\varphi(\mu)}$, где $r(\mu_0) = 1$ и $\varphi(\mu_0) = \varphi_0$.

Значение μ_0 называют регулярной граничной точкой области гиперболичности точки равновесия $x = 0$ системы (2), если $r'(\mu_0) \neq 0$.

Далее вводятся основные сведения относительно области устойчивости (гиперболичности) динамических систем, описываемых автономными дифференциальными уравнениями вида:

$$\frac{dh}{dt} = f(h, \mu), \quad h \in R^N, \quad \mu \in R^k, \quad (4)$$

где функция $f(h, \mu)$ является дважды непрерывно дифференцируемой второго порядка по переменной h и параметру μ .

В диссертационной работе предполагается, что $h = 0$ является точкой

равновесия системы (4) и система (4) представляется в виде:

$$\frac{dx}{dt} = A(\mu)x + a(x, \mu), \quad x \in R^N, \quad \mu \in R^k, \quad (5)$$

в котором $A(\mu) = f'_h(0, \mu)$ – матрица Якоби вектор-функции $f(h, \mu)$ в точке $x = 0$, а функция $a(x, \mu)$ при $x \rightarrow 0$ равномерно по μ удовлетворяет соотношению: $\|a(x, \mu)\| = O(\|x\|^2)$.

В §2 приводится схема приближенного построения границы областей гиперболичности и устойчивости нелинейной автономной системы (5) в случае, когда параметр μ является одномерным, т.е. $\mu \in R^1$.

В §3 приводится схема приближенного построения границы областей гиперболичности и устойчивости в случае, когда уравнение (5) является двухпараметрическим, т.е. $\mu = (\alpha, \beta)$, где α и β , – скалярные параметры.

В §4 приводятся доказательства основных утверждений.

Вторая глава состоит из четырех параграфов. Посвящена исследованию и построению границы областей гиперболичности и устойчивости точки равновесия системы неавтономных нелинейных дифференциальных уравнений (2).

В §1 приводится постановка задачи.

В §2 проводится исследование и построение границ областей гиперболичности и устойчивости решения $x = 0$ уравнения (2) в случае, когда параметр μ является одномерным, т.е. в случае, когда уравнение (2) имеет вид:

$$\frac{dx}{dt} = A(t, \mu)x + a(x, t, \mu), \quad x \in R^N, \quad \mu \in R^1. \quad (6)$$

При этом предполагается, что матрица $A(t, \mu)$ при $\mu = \mu_0$ от t не зависит, т.е. $A(t, \mu_0) \equiv A_0$, где A_0 – вещественная постоянная матрица.

Уравнение (6) представляется в виде:

$$\frac{dx}{dt} = [A_0 + A_1(t)(\mu - \mu_0) + \tilde{A}(t, \mu)]x + a(x, t, \mu), \quad x \in R^N, \quad \mu \in R^1, \quad (7)$$

где матрицы $A_1(t)$ и $\tilde{A}(t, \mu)$ являются T – периодическими по t , при этом матрица $\tilde{A}(t, \mu)$ равномерно по t удовлетворяет соотношению: $\|\tilde{A}(t, \mu)\| = O(\|(\mu - \mu_0)\|^2)$ при $\mu \rightarrow \mu_0$.

Граница областей гиперболичности и устойчивости точки равновесия $x = 0$ системы (7) строится в предположении, что матрица A_0 удовлетворяет одному из условий:

1⁰. A_0 имеет простое собственное значение 0;

2⁰. A_0 имеет пару простых собственных значений $\pm i\omega_0$, где $\omega_0 > 0$ и $\omega_0 \neq \frac{\pi k}{T}$, k - натуральное число;

3⁰. A_0 имеет пару простых собственных значений $\pm i\omega_0$, где $\omega_0 = \frac{\pi k_0}{T}$ при некотором натуральном k_0 .

При этом предполагается, что остальные собственные значения матрицы A_0 не лежат на мнимой оси.

Случай 1⁰. Обозначим через e и g собственные векторы матрицы A_0 и транспонированной матрицы A_0^* , соответственно, отвечающие собственному значению 0. Эти векторы можно считать нормированными равенствами:

$$\|e\| = 1, \quad (e, g) = 1. \quad (8)$$

Положим

$$\gamma_2 = \int_0^T (A'_\mu(t, \mu_0)e, g) dt. \quad (9)$$

Теорема 3. Пусть матрица A_0 имеет простое собственное значение 0. Пусть $\gamma_2 \neq 0$. Тогда топологический тип нулевой точки равновесия системы (7) равен $(1 + p_-, 0, p_+)$ при всех малых $|\mu - \mu_0|$ таких, что $(\mu - \mu_0)\gamma_2 < 0$; он равен $(p_-, 0, 1 + p_+)$, если $(\mu - \mu_0)\gamma_2 > 0$.

Случай 2⁰ рассматривается аналогично случаю 1⁰.

Случай 3⁰ является резонансным. Задачу построения границы области гиперболичности или устойчивости нулевой точки равновесия системы (7) будем изучать на основе метода М. Розо¹, позволяющего преобразовать зависящую от малого параметра периодическую систему к равносильному виду, в котором слагаемые при младших степенях малого параметра не зависят от t . Отметим, что в силу резонансности этот метод непосредственно не применим. В связи с этим преобразуем систему (7) к виду, в котором метод М. Розо уже будет применим.

Обозначим через $e, g, e^*, g^* \in R^N$ ненулевые векторы такие, что выполняются равенства

$$A_0(e + ig) = i\omega_0(e + ig), \quad A_0^*(e^* + ig^*) = -i\omega_0(e^* + ig^*), \quad (10)$$

$$(e, e^*) = 1, \quad (e, g^*) = 0, \quad (11)$$

¹Розо М. Нелинейные колебания и теория устойчивости. М.: Наука, 1971. 288 с.

в которых $\omega_0 = \frac{\pi k_0}{T}$. Положим

$$e_1 = \frac{e + ig}{\sqrt{2}}, \quad e_2 = \frac{e - ig}{\sqrt{2}}, \quad e_1^* = \frac{e^* + ig^*}{\sqrt{2}}, \quad e_2^* = \frac{e^* - ig^*}{\sqrt{2}}. \quad (12)$$

Матрица A_0 и транспонированная матрица A_0^* имеют пару простых собственных значений $\pm\omega_0 i$. При этом определенные равенствами (12) векторы $e_1, e_1^* \in C^N$ – это собственные векторы операторов A_0 и A_0^* , отвечающие собственным значениям $\omega_0 i$ и $-\omega_0 i$ соответственно. Определим действующий в C^N линейный оператор $Q_1 z = -2\omega_0 i P_1 z$, где $P_1 z = (z, e_1^*) e_1$; P_1 является оператором спектрального проектирования пространства C^N на одномерное собственное подпространство E_1 , отвечающее собственному значению $\omega_0 i$ оператора A_0 .

Уравнение (7) можно рассматривать в комплексном пространстве C^N . Произведем в (7) замену $y = e^{Q_1 t} x$ с невырожденной T -периодической матрицей $e^{Q_1 t}$. Эта замена не изменяет топологический тип точки равновесия и приведет (7) к виду:

$$\frac{dy}{dt} = [\tilde{A} + (\mu - \mu_0) \tilde{A}_1(t) + \tilde{A}_2(t, \mu)] y + \tilde{a}(y, t, \mu), \quad y \in C^N, \quad (13)$$

в котором

$$\tilde{A} = A_0 + Q_1, \quad \tilde{A}_j = e^{Q_1 t} A_j e^{-Q_1 t} \quad (j = 1, 2), \quad \tilde{a}(y, t, \mu) = e^{Q_1 t} a(e^{-Q_1 t} y, t, \mu). \quad (14)$$

Для уравнения (13) метод М. Розо уже применим.

Положим

$$D_0 = \begin{bmatrix} \int_0^T (e^{-\tilde{A}t} \tilde{A}_1(t) e^{\tilde{A}t} e, e^*) dt & \int_0^T (e^{-\tilde{A}t} \tilde{A}_1(t) e^{\tilde{A}t} g, e^*) dt \\ \int_0^T (e^{-\tilde{A}t} \tilde{A}_1(t) e^{\tilde{A}t} e, g^*) dt & \int_0^T (e^{-\tilde{A}t} \tilde{A}_1(t) e^{\tilde{A}t} g, g^*) dt \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Теорема 4. Пусть матрица A_0 имеет пару простых собственных значений $\pm i\omega_0$, где $\omega_0 = \frac{\pi k_0}{T}$ при некотором натуральном k_0 . Пусть собственные значения $\lambda^{(1)}$ и $\lambda^{(2)}$ матрицы D_0 не являются чисто мнимыми. Тогда, при условии $\operatorname{Re} \lambda^{(1)} \cdot \operatorname{Re} \lambda^{(2)} < 0$, топологический тип нулевой точки равновесия системы (7) равен $(1 + p_-, 0, 1 + p_+)$ при всех малых $|\mu - \mu_0|$. Если же $\operatorname{Re} \lambda^{(1)} < 0$ и $\operatorname{Re} \lambda^{(2)} < 0$, то топологический тип нулевой точки равновесия системы (7) равен $(2 + p_-, 0, p_+)$ при $\mu > \mu_0$; он равен $(p_-, 0, 2 + p_+)$ при $\mu < \mu_0$. Если же $\operatorname{Re} \lambda^{(1)} > 0$ и $\operatorname{Re} \lambda^{(2)} > 0$, то топологический тип нулевой точки равновесия системы (7) равен $(2 + p_-, 0, p_+)$ при $\mu < \mu_0$; он равен $(p_-, 0, 2 + p_+)$ при $\mu > \mu_0$.

В §3 приводится схема построения границ областей гиперболичности (устойчивости) нулевого решения системы (2) в случае, когда μ является двумерным параметром, т.е. система (2) имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = A(t, \alpha, \beta)x + a(x, t, \alpha, \beta), \quad x \in R^N. \quad (16)$$

Здесь α и β скалярные параметры, матрица $A(t, \alpha, \beta)$ является T – периодической по t , а функция $a(x, t, \alpha, \beta)$ удовлетворяет соотношению:

$\max_{\alpha, \beta, t} \|a(x, t, \alpha, \beta)\| = O(\|x\|^2)$ при $x \rightarrow 0$. При этом предполагается, что матрица $A(t, \alpha, \beta)$ при $\alpha = \alpha_0$ и $\beta = \beta_0$ от t не зависит, т.е. $A(t, \alpha_0, \beta_0) \equiv A_0$, где A_0 – вещественная постоянная матрица.

Уравнение (16) представляется в виде:

$$\frac{dx}{dt} = [A_0 + (\alpha - \alpha_0)B_1(t) + (\beta - \beta_0)B_2(t) + \tilde{D}(t, \alpha, \beta)]x + a(x, t, \alpha, \beta), \quad x \in R^N, \quad (17)$$

где $B_1(t)$, $B_2(t)$ и $\tilde{D}(t, \alpha, \beta)$ являются T -периодическими по t , при этом $\tilde{D}(t, \alpha, \beta)$ равномерно по t удовлетворяет соотношению: $\|\tilde{D}(t, \alpha, \beta)\| = O((\alpha - \alpha_0)^2 + (\beta - \beta_0)^2)$ при $(\alpha, \beta) \rightarrow (\alpha_0, \beta_0)$.

Предполагается, что матрица A_0 удовлетворяет одному из указанных на стр. 10 условий 1⁰-3⁰.

Случай 1°. Пусть e и g ненулевые векторы, удовлетворяющие условиям:

$$A_0 e = 0, \quad A_0^* g = 0, \quad \|e\| = 1, \quad (e, g) = 1. \quad (18)$$

Положим

$$\chi_1 = \int_0^T (B_1(t)e, g)dt, \quad \chi_2 = \int_0^T (B_2(t)e, g)dt. \quad (19)$$

Теорема 5. Пусть матрица A_0 имеет простое собственное значение 0 и выполнено условие

$$\chi_1^2 + \chi_2^2 > 0. \quad (20)$$

Тогда (α_0, β_0) является регулярной граничной точкой области гиперболичности решения $x = 0$ системы (17). А именно, через точку (α_0, β_0) плоскости параметров (α, β) проходит единственная гладкая граничная кривая γ_0 . При этом параметрически заданная прямая

$$\alpha = \alpha_0 + \delta \cos \varphi_0, \quad \beta = \beta_0 + \delta \sin \varphi_0$$

является касательной к граничной кривой γ_0 . Здесь φ_0 является решением уравнения

$$\chi_1 \cos \varphi + \chi_2 \sin \varphi = 0. \quad (21)$$

Зададимся произвольным $\varphi^* \in [0, 2\pi)$ таким, чтобы

$$\psi_0 = \chi_1 \cos \varphi^* + \chi_2 \sin \varphi^* \neq 0; \quad (22)$$

и параметрически заданной прямой

$$\alpha = \alpha_0 + \delta \cos \varphi^*, \quad \beta = \beta_0 + \delta \sin \varphi^*. \quad (23)$$

Теорема 6. Пусть матрица A_0 имеет простое собственное значение 0, при этом остальные собственные значения этой матрицы имеют отрицательные вещественные части и выполнено условие (20). Тогда решение $x = 0$ системы (17), в котором α и β определяются равенством (23), будет асимптотически устойчивым при всех малых $|\delta|$ таких, что $\delta\psi_0 < 0$; оно будет неустойчивым, если $\delta\psi_0 > 0$.

Случай 2°. В этом случае существуют ненулевые векторы $e, g, e^*, g^* \in R^N$ такие, что выполняются равенства (10) и (11). Положим

$$\kappa_1 = \int_0^T [(B_1(t)e, e^*) + (B_1(t)g, g^*)]dt, \quad \kappa_2 = \int_0^T [(B_2(t)e, e^*) + (B_2(t)g, g^*)]dt. \quad (24)$$

Ниже будем предполагать, что выполнено соотношение:

$$\kappa_1^2 + \kappa_2^2 > 0. \quad (25)$$

Теорема 7. Пусть матрица A_0 имеет пару простых собственных значений $\pm i\omega_0$, где $\omega_0 > 0$. Пусть выполнено условие (25). Тогда через точку (α_0, β_0) проходит единственная гладкая граничная кривая области гиперболичности решения $x = 0$ системы (17).

Таким образом, в условиях теоремы 7 имеем то, что точка (α_0, β_0) является регулярной граничной точкой области гиперболичности G решения $x = 0$ системы (17). Изучение вопроса о построении касательной к этой кривой проводится по той же схеме, что и случае 1°.

Случай 3°. Этот случай является резонансным. Будем предполагать, что матрица $A(t, \alpha, \beta)$ в уравнении (16) представляется в виде:

$$\begin{aligned} A(t, \alpha, \beta) = & A_0 + (\alpha - \alpha_0)B_1(t) + (\beta - \beta_0)B_2(t) + (\alpha - \alpha_0)^2 B_{11}(t) + \\ & + (\beta - \beta_0)^2 B_{22}(t) + (\alpha - \alpha_0)(\beta - \beta_0)B_{12}(t) + B_3(t, \alpha, \beta), \end{aligned} \quad (26)$$

где A_0 – постоянная матрица, матрицы $B_j(t)$, $B_{ij}(t)$ и $B_3(t, \alpha, \beta)$ являются T -периодическими по t , при этом матрица $B_3(t, \alpha, \beta)$ равномерно по t удовлетворяет соотношению:

$$\|B_3(t, \alpha, \beta)\| = O((\alpha - \alpha_0)^2 + (\beta - \beta_0)^2)^{3/2} \text{ при } (\alpha, \beta) \rightarrow (\alpha_0, \beta_0).$$

Кривую $\mathcal{Y}$, определяющую границу области гиперболичности, будем (для определенности) строить в виде $\beta = f(\alpha)$, где

$$f(\alpha) = \beta_0 + \beta_1(\alpha - \alpha_0) + \beta_2(\alpha - \alpha_0)^2 + \eta(\alpha - \alpha_0), \quad (27)$$

в котором (α_0, β_0) – граничная точка, коэффициенты β_1 и β_2 требуют определения, а нелинейность $\eta(\delta)$ удовлетворяет соотношению $\eta(\delta) = O(\delta^3)$ при $\delta \rightarrow 0$.

Полагая $\delta = \alpha - \alpha_0$ и подставляя (27) в (16) получим уравнение

$$\frac{dx}{dt} = [A_0 + \delta A_1(t, \beta_1) + \delta^2 A_2(t, \beta_1, \beta_2) + A_3(t, \delta)]x + a(x, t, \alpha, \beta), \quad x \in R^N, \quad (28)$$

где обозначено:

$$A_1(t, \beta_1) = B_1(t) + \beta_1 B_2(t),$$

$$A_2(t, \beta_1, \beta_2) = B_{11}(t) + \beta_1 B_{12}(t) + \beta_1^2 B_{22}(t) + \beta_2 B_2(t),$$

а матрица $A_3(t, \delta)$ удовлетворяет соотношению: $\|A_3(t, \delta)\| = O(\delta^3)$ при $\delta \rightarrow 0$ равномерно по t .

Положим

$$e_1 = \frac{e + ig}{\sqrt{2}}, \quad e_2 = \frac{e - ig}{\sqrt{2}}, \quad e_1^* = \frac{e^* + ig^*}{\sqrt{2}}, \quad e_2^* = \frac{e^* - ig^*}{\sqrt{2}}. \quad (29)$$

Определим действующий в C^N линейный оператор $Q_1 z = -2\omega_0 i P_1 z$, где $P_1 z = (z, e_1^*)e_1$; P_1 является оператором спектрального проектирования пространства C^N на одномерное собственное подпространство E_1 , отвечающее собственному значению $\omega_0 i$ оператора A_0 .

Замена $y = e^{Q_1 t} x$ с невырожденной T -периодической матрицей $e^{Q_1 t}$ не изменяет топологический тип точки равновесия и приведет (28) к виду:

$$\frac{dy}{dt} = [\tilde{A} + \delta \tilde{A}_1(t, \beta_1) + \delta^2 \tilde{A}_2(t, \beta_1, \beta_2) + \tilde{A}_3(t, \delta)]y + \tilde{a}(y, t, \alpha, \beta), \quad y \in C^N, \quad (30)$$

в котором $\tilde{A} = A_0 + Q_1$, $\tilde{A}_j = e^{Q_1 t} A_j e^{-Q_1 t}$, ($j = 1, 2, 3$), $\tilde{a}(y, t, \alpha, \beta) = e^{Q_1 t} a(e^{-Q_1 t} y, t, \alpha, \beta)$.

Вычисление коэффициента β_1 .

Рассмотрим зависящее от вспомогательного параметра ξ матричное уравнение

$$\int_0^T e^{-\tilde{A}t} S e^{\tilde{A}t} dt = \int_0^T e^{-\tilde{A}t} \tilde{A}_1(t, \xi) e^{\tilde{A}t} dt, \quad (31)$$

в котором неизвестной является квадратная матрица S .

Лемма 1. *Уравнение (31) имеет единственное решение $S = S(\xi)$, при этом матрица $S(\xi)$ гладко зависит от ξ .*

Положим

$$S_0(\xi) = P_0 S(\xi) P_0. \quad (32)$$

Теорема 8. *Пусть существуют ξ^* и $\delta_0 > 0$ такие, что матрица $S_0(\xi^*)$ является негиперболической, при этом матрица $S_0(\xi)$ гиперболична при $\xi \in (\xi^* - \delta_0, \xi^*)$ и $\xi \in (\xi^*, \xi^* + \delta_0)$ с различным топологическим типом на этих интервалах. Тогда граница Υ области гиперболичности решения $x = 0$ уравнения (16), описывается функцией (27), в которой $\beta_1 = \xi^*$. При этом если указанное ξ^* единственное, то граничная точка (α_0, β_0) будет регулярной. Если же существуют два значения ξ_1^* и ξ_2^* , удовлетворяющие указанным условиям, то граничная точка будет нерегулярной и через точку (α_0, β_0) проходят по меньшей мере две гладкие граничные кривые.*

Далее по аналогичной схеме вычисляется коэффициент β_2 .

В конце параграфа в качестве примера проводится приближенное построение границ областей устойчивости для уравнений Матье и Дюффинга.

В §4 приводятся вспомогательные сведения: метод М. Розо, формулы теории возмущений и доказательства основных утверждений, приводимых во второй главе.

В третьей главе изучаются основные сценарии бифуркаций и определяются признаки «опасности» и «безопасности» границ областей устойчивости решений неавтономных периодических систем. Глава состоит из пяти параграфов.

В §1 приводятся необходимые сведения о бифуркациях в дискретных динамических системах и динамических системах, описываемых неавтономными периодическими дифференциальными уравнениями.

В §2 изучаются вопросы о бифуркациях, возникающих при переходе параметрами системы через границы области устойчивости неавтономных однопараметрических динамических систем.

Отметим, что в однопараметрическом случае граница области устойчивости является точкой $\mu = \mu_0$ на прямой μ . Поэтому задача о бифуркации при переходе через границу области устойчивости равносильна обычной задаче о бифуркации в системе (6) со скалярным параметром μ . Эта задача хорошо изучена в общей теории бифуркаций и в диссертации приводится в качестве вспомогательного материала.

В §3 изучаются вопросы о бифуркациях, возникающих при переходе параметрами системы через границы области устойчивости неавтономных двупараметрических динамических систем.

Представим систему (16) в виде:

$$\frac{dx}{dt} = A(t, \alpha, \beta)x + a_2(x, t, \alpha, \beta) + a_3(x, t, \alpha, \beta) + \tilde{a}_4(x, t, \alpha, \beta), \quad x \in R^N, \quad (33)$$

где $a_2(x, t, \alpha, \beta)$ и $a_3(x, t, \alpha, \beta)$ содержат соответственно квадратичные и кубические по x слагаемые, а $\tilde{a}_4(x, t, \alpha, \beta)$ является гладкой и удовлетворяющей соотношению: $\|\tilde{a}_4(x, t, \alpha, \beta)\| = O(\|x\|^4)$ при $x \rightarrow 0$ равномерно по t, α и β . При этом (как и в рассмотренных выше аналогичных ситуациях) предполагается, что матрица $A(t, \alpha, \beta)$ при $\alpha = \alpha_0$ и $\beta = \beta_0$ от t не зависит, т.е. $A(t, \alpha_0, \beta_0) \equiv A_0$, где A_0 – вещественная постоянная матрица.

В диссертации рассматриваются два основных случая:

S1°. матрица A_0 имеет простое собственное значение 0;

S2°. матрица A_0 имеет пару простых собственных значений $\pm i\omega_0$, где $\omega_0 > 0$, причем выполнены условия отсутствия резонанса:

$$\frac{T\omega_0}{2\pi} \neq \frac{k}{2}, \frac{k}{3}, \frac{k}{4} \quad \text{для натуральных } k. \quad (34)$$

При этом в обоих случаях предполагается, что остальные собственные значения матрицы A_0 имеют отрицательные вещественные части.

Случай S1°. Пусть e и g ненулевые векторы, удовлетворяющие условиям (18).

Положим

$$\tau_1 = \int_0^T (a_2(e, t, \alpha_0, \beta_0), g) dt, \quad \tau_2 = \int_0^T (a_3(e, t, \alpha_0, \beta_0), g) dt.$$

Теорема 9. Пусть матрица A_0 имеет простое собственное значение 0, при этом остальные собственные значения матрицы A_0 имеют отрицательные вещественные части. Пусть выполнены соотношения (20) и $\tau_1 \neq 0$. Тогда при трансверсальном переходе параметров (α, β) через граничную кривую γ_0 вблизи точки (α_0, β_0) в системе (33) реализуется сценарий транскритической бифуркации вынужденных колебаний.

Теорема 10. Пусть матрица A_0 имеет простое собственное значение 0, при этом остальные собственные значения матрицы A_0 имеют отрицательные вещественные части. Пусть выполнены соотношения (20),

$a_2(x, t, \alpha, \beta) \equiv 0$ и $\tau_2 \neq 0$. Тогда при трансверсальном переходе параметров (α, β) через граничную кривую γ_0 вблизи точки (α_0, β_0) в системе (33) реализуется сценарий бифуркации вынужденных колебаний типа вилки.

Случай S2°. Пусть e, g, e^* и g^* ненулевые векторы, удовлетворяющие условиям (10) и (11).

Для описания возможных сценариев бифуркации в системе (33) удобно перейти к дискретной системе.

$$x_{n+1} = U(x_n, \alpha, \beta), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (35)$$

где $U(\cdot, \alpha, \beta) : R^N \rightarrow R^N$ — оператор сдвига по траекториям системы (33) за время от 0 до T .

Система (35) может быть представлена в виде:

$$x_{n+1} = V(\alpha, \beta)x_n + v(x_n, \alpha, \beta), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (36)$$

где $V(\alpha, \beta)$ — матрица монодромии линеаризованной системы, а нелинейность $v(x_n, \alpha, \beta)$ удовлетворяет соотношению: $\|v(x_n, \alpha, \beta)\| = O(\|x\|^2)$ при $\|x\| \rightarrow 0$. При этом $V(\alpha_0, \beta_0) = e^{A_0 T}$.

Пусть для простоты $N = 2$. Тогда основным сценарием локальных бифуркаций в окрестности точки равновесия $x = 0$ системы (36) (и, соответственно, системы (33)) при переходе параметров (α, β) через кривую γ_0 является возникновение в окрестности точки $x = 0$ замкнутой инвариантной кривой $\gamma(\alpha, \beta)$, ограничивающей бассейн притяжения или отталкивания этой точки. Такой сценарий часто (по аналогии с автономным случаем) называют бифуркацией Андронова-Хопфа.

Теорема 11. Пусть матрица A_0 имеет пару простых собственных значений $\pm i\omega_0$, где $\omega_0 > 0$, при этом остальные собственные значения матрицы A_0 имеют отрицательные вещественные части. Пусть выполнены условия (25), (34). Тогда при трансверсальном переходе параметров (α, β) через граничную кривую γ_0 вблизи точки (α_0, β_0) в системе (33) реализуется сценарий бифуркации Андронова-Хопфа.

В §4 определяются признаки «опасности» и «безопасности» границ областей устойчивости.

Точку μ_0 называют *безопасной точкой бифуркации*, если решение $x = 0$ системы (2) при $\mu = \mu_0$ асимптотически устойчиво. Точку μ_0 называют *опасной точкой бифуркации*, если решение $x = 0$ системы (2) при $\mu = \mu_0$ неустойчиво.

В параграфе приводится обсуждение задачи об опасных и безопасных границах областей устойчивости для однопараметрических и двухпараметрических неавтономных нелинейных периодических дифференциальных уравнений. Ограничимся приведением некоторых результатов касательно двухпараметрических уравнений.

Теорема 12. Пусть выполнены условия теоремы 9. Тогда граничная кривая γ_0 является опасной границей области устойчивости решения $x = 0$ системы (33).

Теорема 13. Пусть выполнены условия теоремы 10. Тогда граничная кривая γ_0 является безопасной (опасной) границей области устойчивости решения $x = 0$ системы (33), если $\tau_2 < 0$ ($\tau_2 > 0$).

В §5 приводятся доказательства основных утверждений, приводимых в третьей главе.

Заключение

1. Предложены новые асимптотические формулы для приближенного построения границ областей гиперболичности и устойчивости точек равновесия и периодических решений автономных и неавтономных периодических дифференциальных уравнений.
2. Получены необходимые и достаточные признаки для основных сценариев бифуркаций в окрестностях точек равновесия и периодических решений неавтономных дифференциальных уравнений с периодически коэффициентами, при переходе параметров через границы областей устойчивости и гиперболичности.
3. Получены числовые характеристики, позволяющие классифицировать и исследовать границы областей устойчивости динамических систем, описываемых неавтономными дифференциальными уравнениями с периодическими коэффициентами, по типу безопасности и опасности.

Основные публикации по теме диссертации в изданиях, рекомендованных ВАК и в рецензируемых научных журналах, входящих в международные реферативные базы данных (Web of Science, Scopus)

1. *Ибрагимова, Л.С.* Асимптотические формулы в задаче построения областей гиперболичности и устойчивости динамических систем / Л.С. Ибрагимова, И.Ж. Мустафина, М.Г. Юмагулов // Уфимский математический журнал. – 2016. – Т. 8, № 3. – С. 59–81.
2. *Ибрагимова, Л.С.* Исследование границ областей устойчивости двухпараметрических динамических систем / Л.С. Ибрагимова, И.Ж. Мустафина, М.Г. Юмагулов // Автоматика и телемеханика. – 2017. – № 10. – С. 74–89.

3. *Yumagulov, M.G.* Boundaries of stability domains for equilibrium points of differential equations with parameters / M.G. Yumagulov, L.S. Ibragimova, I.Zh. Mustafina // Journal of Mathematical Sciences. – 2018. – V. 230, № 5. – Pp. 818–821.
4. *Belova, A.S.* Boundaries of the region of stability of autonomous Hamiltonian systems / A.S. Belova, L.S. Ibragimova, I.G. Mustafina // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2023. – Vol. 44, no. 5. – P. 1823–1828.
5. *Мустафина, И.Ж.* О безопасных и опасных точках бифуркации в периодических динамических системах / И.Ж. Мустафина // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2024. – Вып. 3(66). – С. 47–54.
6. *Мустафина, И.Ж.* Исследование границ областей устойчивости двупараметрических дифференциальных уравнений второго порядка / И.Ж. Мустафина // Вестник Башкирского университета. – 2017. – Т. 22, № 3. – С. 597–602.

Статьи и тезисы, опубликованные в других изданиях

7. *Ибрагимова, Л.С.* О построений областей устойчивости решений дифференциальных уравнений, зависящих от параметров / Л.С. Ибрагимова, И.Ж. Фанина (Мустафина), М.Г. Юмагулов // Вестник Пермского Университета. Математика. Механика. Информатика. – 2016. – Вып. 2. – С. 61–66.
8. *Фанина (Мустафина), И.Ж.* Признаки устойчивости линейных уравнений с периодическими коэффициентами / И.Ж. Фанина (Мустафина) // Устойчивость и процессы управления: материалы III международной научной конференции. – Санкт-Петербург, 2015. – С. 51–52.
9. *Юмагулов, М.Г.* О построений областей устойчивости решений дифференциальных уравнений, зависящих от параметров / М.Г. Юмагулов, И.Ж. Фанина (Мустафина), Л.С. Ибрагимова // Математика и глобальные вызовы XXI века: материалы симпозиума, посвященного столетию Пермского государственного национального исследовательского университета. – Пермь, 2016. – С. 145–147.
10. *Фанина (Мустафина), И.Ж.* Приближенное построение мультипликаторов линейной системы с периодическими коэффициентами / И.Ж. Фанина (Мустафина) // Воронежская зимняя математическая школа: материалы международной конференции. – Воронеж, 2016. – С. 399–402.

11. *Мустафина, И.Ж.* Признаки опасных и безопасных точек бифуркации неавтономных динамических систем / И.Ж. Мустафина // Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения: материалы международной научной конференции (оз. Банное). – Уфа, 2018. – С. 56.
12. *Юмагулов, М.Г.* Приближенное построение границ областей устойчивости неавтономных дифференциальных уравнений / М.Г. Юмагулов, Л.С. Ибрагимова, И.Ж. Мустафина // Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании: материалы международной школы-конференции студентов, аспирантов и молодых ученых. – Уфа, 2018. – С. 155–156.
13. *Мустафина, И.Ж.* О приближенном построении границы области устойчивости неавтономных периодических систем / И.Ж. Мустафина // Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения: материалы международной научной конференции (оз. Банное). – Уфа, 2020. – С. 47.
14. *Мустафина, И.Ж.* О приближенном построении границы области устойчивости нелинейных периодических систем / И.Ж. Мустафина // Уфимская осенняя математическая школа: материалы международной научной конференции. – Уфа, 2020. – С. 74–76.
15. *Мустафина, И.Ж.* Числовые характеристики свойств гиперболичности точек равновесия нелинейных автономных систем / И.Ж. Мустафина // Уфимская осенняя математическая школа: материалы международной научной конференции. – Уфа, 2022. – С. 59–60.
16. *Мустафина, И.Ж.* Исследование границ областей устойчивости и гиперболичности точек равновесия динамических систем / И.Ж. Мустафина // VI Конференция Математических центров России. Тезисы докладов. – Казань: Изд-во КФУ, 2026. – С. 208–209.