

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«УФИМСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ НАУКИ И ТЕХНОЛОГИЙ»

На правах рукописи



Мустафина Ильмира Жаватовна

ИССЛЕДОВАНИЕ ГРАНИЦ ОБЛАСТЕЙ УСТОЙЧИВОСТИ И
ГИПЕРБОЛИЧНОСТИ ТОЧЕК РАВНОВЕСИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ
СИСТЕМ

1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физ.-мат. наук, профессор
Юмагулов Марат Гаязович

Уфа – 2026

Оглавление

Введение	3
1 Границы областей гиперболичности и устойчивости решений автономных систем	10
1.1 Вводные понятия и постановка задачи	10
1.2 Однопараметрические автономные системы	22
1.3 Двупараметрические автономные системы	24
1.4 Доказательства основных утверждений	30
2 Границы областей гиперболичности и устойчивости решений периодических систем.....	33
2.1 Постановка задачи	33
2.2 Однопараметрические неавтономные системы	34
2.3 Двупараметрические неавтономные системы	43
2.4 Доказательства основных утверждений	68
3 Поведение решений неавтономных периодических систем в окрестностях границ областей устойчивости	85
3.1 Вспомогательные сведения	85
3.2 Бифуркации в однопараметрических системах	91
3.3 Бифуркации в двупараметрических системах	95
3.4 Классификация безопасных и опасных границ областей устойчивости	101
3.5 Доказательства основных утверждений	108
Заключение.....	117
Литература	117

Введение

Актуальность темы. В теории дифференциальных уравнений, теории динамических систем и их приложениях важное значение имеет задача построения в пространстве параметров областей устойчивости и гиперболичности точек равновесия и периодических решений. Здесь также актуальной является задача исследования поведения системы в окрестностях указанных границ.

Исследованию таких задач посвящены работы В.И. Арнольда [1, гл. 3, с. 262–269], [2, гл. 3, с. 262–269], Н.Н. Баутина [5, гл. 2, с. 38–49; гл. 4, с. 110–140], [6, гл. 3, с. 65–80], Н.Н. Боголюбова [9, гл. 2], А.Д. Брюно [7, 8], Б.П. Демидовича [15, гл. 2, с. 90–97], Л.В. Левантовского [24, 25], И.Г. Малкина [29, 30, гл. 3], Н.Н. Моисеева [33, гл. 2], А. Найфэ [35, гл. 11], А.И. Перова [38], Л.П. Шильникова [44, гл. 9, 14], В.А. Якубовича [53, гл. 5], L.F.C. Alberto [54, §§ 4, 6, 7], H.D. Chiang [55], F. M. Amaral [56], M. Loccufier и E. Noldus [58], Jianjun Paul Tiana и Jin Wangb [59] и многих других математиков. Основное внимание в указанных работах уделяется исследованию систем, описываемых автономными дифференциальными уравнениями. Авторами этих работ разработан ряд эффективных методов исследования указанных задач, решены многие практически и теоретически важные задачи. Исследования продолжаются в разных направлениях.

Важную роль в общей теории дифференциальных уравнений и её приложениях занимают исследования систем, описываемых неавтономными дифференциальными уравнениями, в частности, уравнениями с периодически-ми коэффициентами. Классическими работами в теории дифференциальных уравнений с периодически-ми коэффициентами являются работы А.М. Ляпунова [26], А. Пуанкаре [39], Г. Флоке [15]. Важное место в современной теории дифференциальных уравнений и её приложениях занимают исследования задач об устойчивости и бифуркациях в неавтономных периодических системах с малым параметром. Здесь отметим работы В.А. Якубовича и В.М. Старжинского [53, гл. 5], И.Г. Малкина [31, гл. 5, § 66], М. Розо [40, гл. 14,

с. 162—203], Л. Чезари [42, гл. 2, с. 95—113], И.З. Штокало [45], А.А. Майлыбаева и А.П. Сейраняна [28, гл. 9, 10], А.О. Белякова [4] и др. Наряду с классическими методами теории Флоке-Ляпунова, в этих работах использовались методы теории возмущений, позволяющие перейти от уравнений с периодическими коэффициентами к уравнениям с постоянными коэффициентами при младших степенях малого параметра. Большая часть этих работ направлена на исследование определенных классов дифференциальных уравнений (в частности, гамильтоновы и консервативные системы).

Многие задачи из теории динамических систем, описываемых неавтономными периодическими дифференциальными уравнениями общего вида, остаются недостаточно изученными. Такими являются, в частности, задачи о разработке асимптотических формул, позволяющих получать приближенное представление границ областей гиперболичности и устойчивости линейных и нелинейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Важными являются задачи исследования основных сценариев бифуркаций при переходе параметров через границы области гиперболичности и устойчивости. Особый интерес здесь вызывают вопросы о разработке эффективных признаков опасности и безопасности границ областей устойчивости.

Цель исследовательской работы. Разработка асимптотических формул в задаче о приближенном построении границ областей гиперболичности и устойчивости точек равновесия и периодических решений динамических систем, описываемых неавтономными дифференциальными уравнениями с периодическими коэффициентами. Исследование основных сценариев бифуркаций системы при переходе параметров через границы областей гиперболичности и устойчивости. Разработка формул, приводящих к признакам опасности и безопасности указанных границ.

Задачи исследования:

1. Разработка схемы приближенного построения границ областей гиперболичности и устойчивости точек равновесия и периодических решений неавтономных дифференциальных уравнений с периодическими коэф-

фициентами.

2. Исследование бифуркационного поведения однопараметрических и двухпараметрических динамических систем при переходе параметров через границы областей устойчивости и гиперболичности.
3. Определение необходимых и достаточных признаков опасности и безопасности границ областей устойчивости решений неавтономных периодических дифференциальных уравнений.

Научная новизна. В диссертации получены следующие научные результаты:

1) Разработаны новые асимптотические формулы для приближенного построения границ областей гиперболичности и устойчивости неавтономных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами.

2) Получены новые достаточные признаки для основных сценариев бифуркаций в окрестностях точек равновесия и периодических решений неавтономных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, возникающих при переходе параметров через границы областей гиперболичности и устойчивости.

3) Определены числовые характеристики, позволяющие классифицировать и исследовать границы областей устойчивости неавтономных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами по типу безопасности и опасности.

Теоретическая и практическая значимость работы. Работа носит теоретический характер. Полученные в диссертации результаты позволяют отвечать на следующие вопросы:

1) По данной граничной точке области устойчивости (гиперболичности) точек равновесия или периодических решений неавтономных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами получить локальное представление границы области гиперболичности или устойчивости в нерезонансном и основных резонансных случаях.

2) Определить топологические типы состояний равновесия или периодических решений нелинейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами в окрестностях границы области устойчивости (гиперболичности).

3) Определить сценарии бифуркаций при трансверсальном переходе параметров системы через границы области устойчивости или гиперболичности.

4) Определить качественные характеристики бифуркационных решений в окрестности границы области устойчивости (устойчивость решений и их топологические типы).

5) Построить числовые характеристики, позволяющие провести классификацию границ областей устойчивости по типу безопасности и опасности.

Результаты работы могут быть использованы в задачах об исследовании поведения неавтономных периодических дифференциальных уравнений в окрестностях основных режимов при значениях параметров, близких к границам областей гиперболичности и устойчивости.

Методология и методы исследования. В работе использованы качественные и аналитические методы теории дифференциальных уравнений, теории динамических систем, теории возмущений линейных операторов, теория Флоке – Ляпунова, методы малого параметра, метод Розо исследования устойчивости.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Предложены новые асимптотические формулы для приближенного построения границ областей гиперболичности и устойчивости точек равновесия и периодических решений неавтономных периодических дифференциальных уравнений.
2. Проведен анализ бифуркационного поведения однопараметрических и двухпараметрических систем при переходе параметров через границы областей устойчивости и гиперболичности и получены соответствующие признаки бифуркаций.

3. Получены числовые характеристики, позволяющие классифицировать и исследовать границы областей устойчивости неавтономных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами по типу безопасности и опасности.

Степень достоверности и апробация результатов. Основные результаты работы неоднократно докладывались автором и обсуждались на семинарах «Дифференциальные уравнения и математическая физика» под руководством профессоров З.Ф. Фазуллина, Х.К. Ишкина и М.Г. Юмагулова института информатики, математики и робототехники Уфимского университета науки и технологий (2023-2025 г.), на семинаре кафедры математического анализа Челябинского государственного университета под руководством профессоров В.Е. Федорова и С.М. Воронина (2025 г.). Результаты диссертации были представлены в ходе выступлений на следующих конференциях:

- 1) Международная научная конференция "Спектральные задачи, нелинейный и комплексный анализ"(г. Уфа, 2015 г.);
- 2) Всероссийская научно-практическая конференция "Математическое моделирование процессов и систем"(г. Стерлитамак, 2016 г.);
- 3) Уфимская международная математическая конференция (г. Уфа, 2016 г.);
- 4) Международная конференция "Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения"(озеро Банное, 2018 г.);
- 5) Международная научная конференция "Дифференциальные уравнения и смежные проблемы"(г. Стерлитамак, 2018 г.);
- 6) Международная школа–конференция для студентов, аспирантов и молодых ученых "Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании"(г. Уфа, 2018 г.);
- 7) Международная научная конференция "Уфимская осенняя математическая школа"(г. Уфа, 2019-2025 г.);
- 8) VI Конференция математических центров России (г. Казань, 2026 г.).

Личный вклад. Основные результаты диссертации получены автором

самостоятельно.

В статье [63], опубликованной в соавторстве, изучаются три случая (первый и второй нерезонансные случаи и резонансный случай) негиперболичности стационарного решения нелинейной неавтономной системы. Первые два случая проведены соискателем совместно с соавторами Юмагуловым М.Г. и Ибрагимовой Л.С., третий случай, а также схема построения областей устойчивости уравнения Матье, рассмотрен соискателем самостоятельно.

В статье [64], опубликованной в соавторстве, получены формулы построения границ областей устойчивости двухпараметрических автономных и периодических динамических систем; приведены схемы определения основных сценариев бифуркаций при переходе параметров через границы областей устойчивости; определены типы границ (безопасные или опасные). Исследование автономных уравнений проведены соавторами Юмагуловым М.Г. и Ибрагимовой Л.С., исследование неавтономных уравнений принадлежит соискателю.

В статье [65], опубликованной в соавторстве, изучаются вопросы построения границ областей устойчивости точек равновесия автономных и периодических дифференциальных уравнений, зависящих от двух скалярных параметров в плоскости параметров. Указываются условия, при которых через данную точку проходит единственная гладкая граничная кривая и предлагается схема приближенного построения этой кривой. Случай автономных уравнений рассмотрен соавторами Юмагуловым М.Г. и Ибрагимовой Л.С., а случай периодических дифференциальных уравнений соискателем рассмотрен самостоятельно.

При выполнении работы [66], опубликованной в соавторстве, соискателем вместе с соавтором Л.С. Ибрагимовой было проведено исследование построения границ областей устойчивости в случае нулевого собственного значения. Соавтором А.С. Беловой было исследовано построение границ областей устойчивости гамильтоновых систем в случае чисто мнимого собственного значения линеаризованной задачи.

Публикации.

Основные результаты диссертации опубликованы в 16 научных работах. Статьи [63–68] опубликованы в рецензируемых журналах, входящих в список ВАК РФ или приравненных к ним, в том числе работы [63–66] в изданиях, индексируемых в базах данных Web of Science и Scopus. Работы [69–78] опубликованы в сборниках трудов по итогам конференции.

Глава 1

Границы областей гиперболичности и устойчивости решений автономных систем

Глава посвящена схеме построения в пространстве параметров границ областей гиперболичности и устойчивости точек равновесия и периодических решений автономных дифференциальных уравнений. В главе также приводится ряд вспомогательных сведений из теории дифференциальных уравнений и теории динамических систем.

1.1 Вводные понятия и постановка задачи

1.1.1 Постановка задачи

Основным объектом исследования в настоящей работе является нелинейное неавтономное дифференциальное уравнение

$$\frac{dh}{dt} = f(h, t, \mu), \quad h \in R^N, \quad \mu \in R^k, \quad (1.1)$$

где функция $f(h, t, \mu)$ является непрерывно дифференцируемой по переменной h и параметру μ , непрерывной и T – периодической по t , т.е. $f(h, t + T, \mu) \equiv f(h, t, \mu)$.

Основной задачей настоящей работы является исследование неавтоном-

ной системы (1.1) в окрестности ее точек равновесия или периодических решений.

Пусть сначала система (1.1) имеет точку равновесия $h = h^*(\mu)$, гладко зависящую от параметра μ . Можно считать, что $h^*(\mu) \equiv 0$. Тогда система (1.1) представится в виде

$$\frac{dx}{dt} = A(t, \mu)x + a(x, t, \mu), \quad x \in R^N, \quad \mu \in R^k, \quad (1.2)$$

в котором $A(t, \mu) = f'_h(0, t, \mu)$ – матрица Якоби вектор-функции $f(h, t, \mu)$ в точке $h = 0$, а функция $a(x, t, \mu)$ при $x \rightarrow 0$ равномерно по t и μ удовлетворяет соотношению:

$$\|a(x, t, \mu)\| = O(\|x\|^2). \quad (1.3)$$

Здесь и ниже в тексте $\|\cdot\|$ будет означать евклидову норму в пространстве R^N .

Пусть теперь система (1.1) имеет T – периодическое решение $h = \varphi(t, \mu)$, т.е. $\varphi(t, \mu) \equiv \varphi(t + T, \mu)$.

Тогда при помощи замены $x = h - \varphi(t, \mu)$ уравнение (1.1) можно представить в виде уравнения (1.2), в котором $A(t, \mu) = f'_h(\varphi(t, \mu), t, \mu)$ – матрица Якоби вектор-функции $f(h, t, \mu)$ на периодическом решении $h = \varphi(t, \mu)$, а функция $a(x, t, \mu)$ при $x \rightarrow 0$ равномерно по t и μ удовлетворяет соотношению (1.3). В этом случае система (1.2) при всех значениях параметра μ имеет точку равновесия $x = 0$, которая соответствует периодическому решению $h = \varphi(t, \mu)$ уравнения (1.1).

Таким образом, уравнение (1.1), как в случае стационарного решения $h = h^*(\mu)$, так и в случае периодического решения $h = \varphi(t, \mu)$, может быть представлено в виде (1.2). Свойства стационарного решения $h = h^*(\mu)$ и периодического решения $h = \varphi(t, \mu)$ уравнения (1.1) определяются по свойствам решения $x = 0$ уравнения (1.2). Уравнение (1.2) будет основным объектом исследования в настоящей работе. Будут изучаться вопросы о поведении решений этой системы в окрестностях нулевого решения $x = 0$ при изменении параметра μ .

1.1.2 Постановка задачи

Целью исследования является разработка асимптотических формул в задаче о приближенном построении границ областей гиперболичности и устойчивости точек равновесия и периодических решений динамических систем, описываемых неавтономными дифференциальными уравнениями с периодическими коэффициентами. Проведение анализа основных сценариев бифуркаций системы при переходе параметров через границы областей гиперболичности и устойчивости. Разработка формул, приводящих к признакам опасности и безопасности указанных границ.

Основными являются следующие задачи:

1. Разработка схемы приближенного построения границ областей гиперболичности и устойчивости точек равновесия и периодических решений динамических систем, описываемых неавтономными дифференциальными уравнениями с периодическими коэффициентами.
2. Исследование бифуркационного поведения однопараметрических и двухпараметрических динамических систем при переходе параметров через границы областей устойчивости и гиперболичности.
3. Определение необходимых и достаточных признаков опасности и безопасности границ областей устойчивости.

В работе приводятся новые результаты в решении указанных задач.

1.1.3 Вспомогательные сведения

Приведем некоторые сведения из теории динамических систем, необходимые для изложения основных результатов работы (см., например, [15, 20]).

1.1.3.1 Линейные периодические системы

Рассмотрим линейную периодическую систему

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad x \in R^N, \quad (1.4)$$

в котором $A(t)$ является непрерывной и T — периодической матрицей, т.е. $A(t + T) \equiv A(t)$.

Пусть $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_N(t)$ — это *фундаментальная система решений* (ФСР) уравнения (1.4) [48, стр. 68]. Матрицу $X(t)$ размера $N \times N$, столбцы которой состоят из вектор-функций $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_N(t)$, называют *фундаментальной матрицей решений* (ФМР) уравнения (1.4). Особый интерес представляет ФМР $X(t)$, составленная из ФСР $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_N(t)$ такой, что

$$\varphi_1(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \varphi_2(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad \varphi_N(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (1.5)$$

Матрицу $X(t)$ также можно рассматривать как оператор сдвига по траекториям системы (1.4) за время от 0 до t , т.е. решение $x(t)$ уравнения (1.4) такое, что $x(0) = x_0$, можно определить равенством $x(t) = X(t)x_0$.

Матрицу $V = X(T)$, т.е. оператор сдвига по траекториям системы (1.4) за время от 0 до T , называют *матрицей монодромии*, а ее собственные значения — *мультипликаторами* системы (1.4). Характер устойчивости стационарного решения $x = 0$ уравнения (1.4) определяются свойствами мультипликаторов этой системы: если все мультипликаторы по модулю меньше единицы, то решение $x = 0$ будет асимптотически устойчивым, если же хотя бы один мультипликатор по модулю больше единицы, то решение $x = 0$ будет неустойчивым [12, стр. 425].

Обозначим через p_- , p_0 и p_+ количество (с учетом кратности) мультипликаторов системы (1.4) меньших единицы, равных единице и больших единицы по модулю, соответственно. Тройку чисел (p_-, p_0, p_+) называют *топологическим типом* [2] точки равновесия $x = 0$ системы (1.4). Точку равновесия $x = 0$ системы (1.4) называют *гиперболической*, если $p_0 = 0$, т.е. если матрица монодромии $X(T)$ системы (1.4) не имеет собственных значений, равных единице по модулю. Иначе, ее называют *негиперболической*.

Отметим, что если точка равновесия $x = 0$ является гиперболической и ее топологический тип имеет вид $(p_-, 0, 0)$, т.е. если все мультипликаторы системы (1.4) будут меньше единицы по модулю, то точка равновесия $x = 0$ будет *асимптотически устойчивой*; если хотя бы один мультипликатор системы (1.4) больше единицы по модулю, т.е. если топологический тип точки равновесия $x = 0$ имеет вид (p_-, p_0, p_+) , где $p_+ \geq 1$, то точка равновесия $x = 0$ будет *неустойчивой* [21].

1.1.3.2 Области гиперболичности и устойчивости точки равновесия

Линеаризуем систему (1.2) в окрестности точки равновесия $x = 0$, т.е. перейдем к рассмотрению линейной системы

$$\frac{dx}{dt} = A(t, \mu)x, \quad x \in R^N, \quad \mu \in R^k. \quad (1.6)$$

Обозначим через $X(t, \mu)$ фундаментальную матрицу решений (ФМР), а через $V(\mu) = X(T, \mu)$ – матрицу монодромии системы (1.6).

Система (1.2) при любых значениях параметра μ имеет точку равновесия $x = 0$, которая при одних значениях параметра может иметь один топологический тип, а при других – другой. Таким образом, в пространстве параметров возникают области гиперболичности.

Связное множество G в пространстве параметров R^k будем называть *областью гиперболичности с топологическим типом* $(p_-, 0, p_+)$ точки равновесия $x = 0$ системы (1.2), если при любых значениях параметра $\mu \in G$ точка равновесия $x = 0$ является гиперболической с указанным топологическим типом и не существует связного множества G_1 такого, что $G \Subset G_1$ и, чтобы при любых значениях параметра $\mu \in G_1$ точка равновесия $x = 0$ являлась гиперболической с указанным топологическим типом. Множество G является открытым.

Точку $\mu_0 \in R^k$ будем называть *граничной точкой области гиперболичности* G , если в любой ее окрестности содержатся точки как из области G так и из области $R^k \setminus G$. Совокупность граничных точек множества G будем называть *границей* Γ множества G . Граница обычно представляет собой

некоторую поверхность коразмерности 1 в пространстве R^k . В частности, при $k = 1$ граница области гиперболичности обычно состоит из отдельных точек; при $k = 2$ границей области гиперболичности обычно является некоторая кривая, которую будем называть *граничной кривой*.

Обозначим через $V_0 = V(\mu_0)$ матрицу монодромии системы (1.6) в точке μ_0 . Верно следующее утверждение [10, стр. 18], [40, гл. 14, стр. 162].

Теорема 1.1. *Для того, чтобы точка $\mu_0 \in R^k$ была граничной для некоторой области гиперболичности решения $x = 0$ системы (1.2) необходимо, чтобы матрица V_0 имела хотя бы одно собственное значение, равное 1 по модулю.*

Точка равновесия $x = 0$ системы (1.2) при одних значениях параметра μ может быть асимптотически устойчивой по Ляпунову, а при других – неустойчивой. Область гиперболичности Q с топологическим типом $(p_-, 0, 0)$ будем называть *областью устойчивости* точки равновесия $x = 0$ системы (1.2). В этом случае при любом $\mu \in Q$ точка равновесия $x = 0$ является асимптотически устойчивой. Множество Q является открытым.

По аналогии с областью гиперболичности введем основные понятия для области устойчивости. Точку $\mu_0 \in R^k$ будем называть *граничной точкой области устойчивости* Q , если в любой ее окрестности содержатся точки как из области Q так и из области $R^k \setminus Q$. Совокупность граничных точек множества Q будем называть *границей* Γ множества Q . Граница обычно представляет собой некоторую поверхность коразмерности 1 в пространстве R^k . В частности, при $k = 1$ граница области устойчивости обычно состоит из отдельных точек; при $k = 2$ границей области устойчивости обычно является некоторая кривая, которую будем называть *граничной кривой*.

Замечание 1.1. *Отметим, что само понятие области устойчивости решения дифференциального уравнения может пониматься по-разному. Во-первых, это понятие может определяться как множество в пространстве параметров, где данное решение является устойчивым. Во-вторых, область устойчивости может пониматься как множество при-*

тяжения в фазовом пространстве соответствующего решения дифференциального уравнения (см. [54, 60, 62]). В настоящей работе понятие области устойчивости понимается в смысле первого определения.

Имеет место аналог теоремы 1.1.

Теорема 1.2. *Для того, чтобы точка $\mu_0 \in R^k$ была граничной для некоторой области устойчивости решения $x = 0$ системы (1.2) необходимо, чтобы матрица V_0 имела хотя бы одно собственное значение, равное 1 по модулю, и не имела собственных значений, по модулю больших 1.*

1.1.3.3 Регулярные и нерегулярные граничные точки

Рассмотрим матрицу монодромии $V(\mu)$ линейной системы (1.6) при $\mu = \mu_0$, т.е. матрицу $V(\mu_0)$. Будем говорить, что для системы (1.2) выполнено условие **R1**, если матрица $V(\mu_0)$ имеет либо простое собственное значение $\rho = 1$ и не имеет других собственных значений $\rho : |\rho| = 1$, либо имеет пару простых собственных значений $\rho_{1,2} = e^{\pm i\varphi_0}$, где $0 < \varphi_0 < \pi$, и не имеет других собственных значений $\rho : |\rho| = 1$.

Замечание 1.2. *Матрица $V(\mu_0)$ не может иметь простого собственного значения $\lambda_0 = -1$.*

Пусть выполнено условие **R1**. Тогда по теории возмущений линейных операторов [17, гл. 2] матрица $V(\mu)$ при μ , близких к μ_0 , будет иметь либо простое собственное значение $\rho(\mu) = r(\mu)$, где $r(\mu_0) = 1$, либо $\rho(\mu) = r(\mu)e^{\pm i\varphi(\mu)}$, где $r(\mu_0) = 1$ и $\varphi(\mu_0) = \varphi_0$.

Пусть выполнено условие **R1**. Тогда точку μ_0 будем называть *регулярной* граничной точкой области гиперболичности точки равновесия $x = 0$ системы (1.2), если $\nabla r(\mu_0) \neq 0$. Иначе ее будем называть *нерегулярной*.

Аналогичные постановки о свойствах граничных точек рассматриваются и в других работах (см., например, [27, 28]).

Отметим, что в случае однопараметрической системы понятие регулярной граничной точки означает, что μ_0 является изолированной граничной точкой.

Теорема 1.3. Пусть точка μ_0 является регулярной граничной точкой области гиперболичности. Тогда через точку μ_0 проходит единственная гладкая граничная поверхность.

Особое внимание в данной работе уделяется рассмотрению двухпараметрических уравнений, т.е. случая, когда $\mu \in R^2$. Предполагая, что $\mu = (\alpha, \beta)$, представим систему (1.2) в виде

$$\frac{dx}{dt} = A(t, \alpha, \beta)x + a(x, t, \alpha, \beta), \quad x \in R^N, \quad (1.7)$$

где α и β – скалярные параметры.

Рассмотрим линеаризованную систему:

$$\frac{dx}{dt} = A(t, \alpha, \beta)x, \quad x \in R^N. \quad (1.8)$$

Здесь будет удобно переформулировать приведенное выше понятие регулярных граничных точек для двухпараметрической задачи.

Будем говорить, что для системы (1.7) выполнено условие **R2**, если матрица монодромии $V(\alpha, \beta)$ системы (1.8) при $\alpha = \alpha_0$ и $\beta = \beta_0$ имеет либо простое собственное значение $\rho = 1$ и не имеет других собственных значений $\rho : |\rho| = 1$, либо имеет пару простых собственных значений $\rho_{1,2} = e^{\pm i\varphi_0}$, где $0 < \varphi_0 < \pi$ и не имеет других собственных значений $\rho : |\rho| = 1$.

Тогда по теории возмущений линейных операторов матрица $V(\alpha, \beta)$ при α , близких к α_0 , и β , близких к β_0 , будет иметь либо простое собственное значение $\rho(\alpha, \beta) = r(\alpha, \beta)$, где $r(\alpha_0, \beta_0) = 1$, либо $\rho(\alpha, \beta) = r(\alpha, \beta)e^{\pm i\varphi(\alpha, \beta)}$, где $r(\alpha_0, \beta_0) = 1$ и $\varphi(\alpha_0, \beta_0) = \varphi_0$.

Пусть выполнено условие **R2**. Тогда точку (α_0, β_0) будем называть *регулярной* граничной точкой области гиперболичности точки равновесия $x = 0$ системы (1.7), если $\nabla r(\alpha_0, \beta_0) \neq 0$. Иначе ее будем называть *нерегулярной*.

Здесь теорема 1.3 принимает вид.

Теорема 1.4. Пусть точка (α_0, β_0) является регулярной граничной точкой области гиперболичности. Тогда через точку (α_0, β_0) проходит единственная гладкая граничная кривая.

Доказательство теоремы 1.4.

Пусть точка (α_0, β_0) является регулярной граничной точкой области гиперболичности решения $x = 0$ уравнения (1.7). Это говорит о том, что для матрицы монодромии $V(\alpha_0, \beta_0)$ выполнено одно из условий **R2** и $\nabla r(\alpha_0, \beta_0) \neq 0$, т.е. $(r'_\alpha(\alpha_0, \beta_0))^2 + (r'_\beta(\alpha_0, \beta_0))^2 > 0$.

Рассмотрим доказательство в случае выполнения первого из условий **R2**. Случай выполнения второго условия **R2** доказывается аналогично. Пусть матрица монодромии $V(\alpha, \beta)$ системы (1.8) при $\alpha = \alpha_0$ и $\beta = \beta_0$ имеет простое собственное значение $\rho = 1$ и не имеет других собственных значений $\rho : |\rho| = 1$. Тогда по теории возмущений линейных операторов матрица $V(\alpha, \beta)$ при α , близких к α_0 , и β , близких β_0 , будет иметь простое собственное значение $\rho(\alpha, \beta) = r(\alpha, \beta)$, гладко зависящее от обеих переменных, где $r(\alpha_0, \beta_0) = 1$. Пусть для определенности $r'_\alpha(\alpha_0, \beta_0) \neq 0$. Тогда по теореме о неявной функции уравнение $r(\alpha, \beta) - 1 = 0$ определяет единственную кривую $\alpha = f(\beta)$, определенную и гладкую в некоторой окрестности числа β_0 и такую, что $\alpha_0 = f(\beta_0)$. То, что кривая $\alpha = f(\beta)$ является граничной кривой, получаем из того, что $r(\alpha, \beta) = 1$ при любых α и β , принадлежащих этой кривой.

1.1.3.4 Случай автономных систем

Введем основные сведения относительно области устойчивости (гиперболичности) динамических систем, описываемых автономными дифференциальными уравнениями вида:

$$\frac{dh}{dt} = f(h, \mu), \quad h \in R^N, \quad \mu \in R^k, \quad (1.9)$$

где функция $f(h, \mu)$ является непрерывно дифференцируемой по переменной h и параметру μ .

Пусть $h = 0$ является точкой равновесия системы (1.9). Тогда система (1.9) представима в виде:

$$\frac{dx}{dt} = A(\mu)x + a(x, \mu), \quad x \in R^N, \quad \mu \in R^k, \quad (1.10)$$

в котором $A(\mu) = f'_h(0, \mu)$ – матрица Якоби вектор-функции $f(h, \mu)$ в точке $x = 0$, а функция $a(x, \mu)$ при $x \rightarrow 0$ равномерно по μ удовлетворяет соотношению:

$$\|a(x, \mu)\| = O(\|x\|^2). \quad (1.11)$$

Точка равновесия $x = 0$ системы (1.10) при одних значениях параметра μ может быть устойчивой, а при других неустойчивой. В пространстве параметров возникают области устойчивости и неустойчивости.

Положим $A_0 = A(\mu_0)$. Обозначим через p_- , p_0 и p_+ количество (с учетом кратности) собственных значений матрицы A_0 при $\mu = \mu_0$, вещественная часть которых отрицательна, равна нулю и положительна, соответственно. Тройку чисел (p_-, p_0, p_+) называют *топологическим типом* точки равновесия $x = 0$. Точку равновесия $x = 0$ называют *гиперболической*, если $p_0 = 0$, т.е. если матрица A_0 не имеет чисто мнимых собственных значений. Иначе ее называют *негиперболической*.

Отметим также, что если точка равновесия $x = 0$ является гиперболической и ее топологический тип равен $(p_-, 0, 0)$, то она будет *асимптотически устойчивой*; если же точка равновесия x^* имеет топологический тип (p_-, p_0, p_+) , где $p_+ \geq 1$, то она будет неустойчивой.

Понятия области гиперболичности, граничной точки области гиперболичности, границы области гиперболичности для автономного уравнения (1.10) вводятся аналогично неавтономной системе (1.2).

Верны следующие утверждения [10, стр. 18], [40, гл. 14, стр. 162].

Теорема 1.5. *Для того, чтобы точка $\mu_0 \in R^k$ была граничной для некоторой области гиперболичности решения $x = 0$ системы (1.10), необходимо, чтобы матрица A_0 имела хотя бы одно собственное значение с нулевой вещественной частью.*

Теорема 1.6. *Для того, чтобы точка $\mu_0 \in R^k$ была граничной для некоторой области устойчивости решения $x = 0$ системы (1.10), необходимо, чтобы матрица A_0 имела хотя бы одно собственное значение с нулевой вещественной частью и не имела собственных значений с положительной*

вещественной частью.

Пусть μ_0 является граничной точкой какой-либо области гиперболичности. Тогда A_0 имеет хотя бы одно чисто мнимое собственное значение. Вообще говоря, обратное неверно. А именно, если A_0 имеет чисто мнимое собственное значение, это не означает, что μ_0 является граничной точкой какой-либо области гиперболичности. Рассмотрим, например, линейную систему вида $x' = A(\mu)x$, в которой собственные значения матрицы $A(\mu_0)$ при всех μ являются чисто мнимыми (такowymi могут являться, например, гамильтоновы системы). Таким образом, требуются дополнительные условия, при которых μ_0 будет граничной точкой какой-либо области гиперболичности.

Замечание 1.3. *Область устойчивости и гиперболичности точек равновесия автономных систем определяется только линейной частью системы, т.е. матрицей $A(\mu)$. Поэтому изучение задачи о построении области устойчивости (гиперболичности) можно свести к изучению характеристического уравнения матрицы $A(\mu)$. Именно таким образом изучаются задачи об областях устойчивости и гиперболичности в ряде работ (см., например, [7, 15]). В настоящей работе обсуждается другая постановка. А именно, по известной граничной точке μ_0 области устойчивости (гиперболичности) требуется получить локальное представление границы этой области устойчивости (гиперболичности), а также провести качественное исследование поведения системы в окрестности этой граничной кривой. Такая постановка будет использована и при решении аналогичных задач для неавтономных систем.*

1.1.3.5 Регулярные и нерегулярные граничные точки

Рассмотрим матрицу $A(\mu)$ системы (1.10) при $\mu = \mu_0$, т.е. матрицу $A(\mu_0)$. Будем говорить, что для системы (1.10) выполнено условие **R3**, если матрица $A(\mu_0)$ имеет либо простое собственное значение $\rho = 0$ и не имеет других собственных значений с нулевой вещественной частью, либо имеет пару простых собственных значений $\rho_{1,2} = \pm i\omega_0$, где $\omega_0 > 0$, и не имеет

других собственных значений с нулевой вещественной частью.

Пусть выполнено условие **R3**. Тогда по теории возмущений линейных операторов матрица $A(\mu)$ при μ , близких к μ_0 , будет иметь либо простое собственное значение $\rho(\mu) = r(\mu)$, где $r(\mu_0) = 0$, либо $\rho(\mu) = \pm ir(\mu)$, где $r(\mu_0) = \omega_0$.

Пусть выполнено условие **R3**. Тогда точку μ_0 будем называть *регулярной* граничной точкой области гиперболичности точки равновесия $x = 0$ системы (1.10), если $\nabla r(\mu_0) \neq 0$. Иначе ее будем называть *нерегулярной*.

Особое внимание в данной работе уделяется рассмотрению двухпараметрических уравнений, т.е. случая, когда $\mu \in R^2$. Предполагая, что $\mu = (\alpha, \beta)$, представим систему (1.10) в виде

$$\frac{dx}{dt} = A(\alpha, \beta)x + a(x, \alpha, \beta), \quad x \in R^N, \quad (1.12)$$

где α и β – скалярные параметры.

Приведенное понятие регулярности граничной точки в двухпараметрическом случае имеет следующий вид.

Будем говорить, что для системы (1.12) выполнено условие **R4**, если матрица $A(\alpha, \beta)$ системы (1.12) при $\alpha = \alpha_0$ и $\beta = \beta_0$ имеет либо простое собственное значение $\rho = 0$ и не имеет других собственных значений с нулевой вещественной частью, либо имеет пару простых собственных значений $\rho_{1,2} = \pm i\omega_0$, где $\omega_0 > 0$ и не имеет других собственных значений с нулевой вещественной частью.

Пусть выполнено условие **R4**. Тогда по теории возмущений линейных операторов матрица $A(\alpha, \beta)$ при α , близких к α_0 , и β , близких к β_0 , будет иметь либо простое собственное значение $\rho(\alpha, \beta) = r(\alpha, \beta)$, где $r(\alpha_0, \beta_0) = 0$, либо $\rho(\alpha, \beta) = \pm ir(\alpha, \beta)$, где $r(\alpha_0, \beta_0) = \omega_0$.

Пусть выполнено условие **R4**. Тогда точку (α_0, β_0) будем называть *регулярной* граничной точкой области гиперболичности точки равновесия $x = 0$ системы (1.12), если $\nabla r(\alpha_0, \beta_0) \neq 0$. Иначе ее будем называть *нерегулярной*.

1.2 Однопараметрические автономные системы

В этой главе основной является задача построения границ областей гиперболичности и устойчивости динамических систем, описываемых автономными дифференциальными уравнениями. Ограничимся рассмотрением однопараметрических и двухпараметрических систем.

Пусть сначала параметр μ является одномерным. Тогда система (1.10) имеет следующий вид:

$$\frac{dx}{dt} = A(\mu)x + a(x, \mu), \quad x \in R^N, \quad \mu \in R^1. \quad (1.13)$$

В силу теоремы 1.5 значение параметра $\mu = \mu_0$ будет граничной точкой области гиперболичности, если матрица $A_0 = A(\mu_0)$ имеет хотя бы одно чисто мнимое собственное значение. Здесь основными будут являться следующие случаи:

D 1°. A_0 имеет простое собственное значение 0;

D 2°. A_0 имеет пару простых собственных значений $\pm i\omega_0$, где $\omega_0 > 0$.

В первом случае топологический тип точки равновесия $x = 0$ равен $(p_-, 1, p_+)$, во втором случае — $(p_-, 2, p_+)$.

Для выполнения условий теоремы 1.6 необходимо, чтобы матрица A_0 , удовлетворяющая одному из двух приведенных случаев, имела остальные собственные значения с отрицательной вещественной частью.

Рассмотрим каждый из этих случаев подробно.

1.2.1 Случай D 1°

Пусть сначала матрица A_0 имеет простое собственное значение 0. Обозначим через e и g собственные векторы матрицы A_0 и транспонированной матрицы A_0^* соответственно, отвечающие собственному значению 0. Эти векторы можно считать нормированными равенствами:

$$\|e\| = 1, \quad (e, g) = 1. \quad (1.14)$$

Здесь и ниже символ $(\cdot, \cdot)$ обозначает скалярное произведение векторов в пространстве R^N .

Положим

$$\gamma_0 = (A'(\mu_0)e, g). \quad (1.15)$$

Теорема 1.7. Пусть матрица A_0 имеет простое собственное значение 0. Пусть $\gamma_0 \neq 0$. Тогда μ_0 является регулярной граничной точкой. При этом топологический тип нулевой точки равновесия системы (1.13) равен $(1 + p_-, 0, p_+)$ при всех малых $|\mu - \mu_0|$ таких, что $(\mu - \mu_0)\gamma_0 < 0$; он равен $(p_-, 0, 1 + p_+)$, если $(\mu - \mu_0)\gamma_0 > 0$.

Доказательства основных утверждений приводится в конце этой главы.

Из теоремы 1.7 вытекает

Теорема 1.8. Пусть матрица A_0 имеет простое собственное значение 0, а остальные собственные значения матрицы A_0 имеют отрицательные вещественные части. Пусть $\gamma_0 \neq 0$. Тогда решение $x = 0$ уравнения (1.13) будет асимптотически устойчивым при всех малых $|\mu - \mu_0|$ таких, что $(\mu - \mu_0)\gamma_0 < 0$; оно будет неустойчивым, если $(\mu - \mu_0)\gamma_0 > 0$.

Следствие 1.1. Пусть $\gamma_0 \neq 0$. Тогда в условиях теоремы 1.7 при некотором $\delta_0 > 0$ интервалы $(\mu_0 - \delta_0, \mu_0)$ и $(\mu_0, \mu_0 + \delta_0)$ содержатся в областях гиперболичности с различным топологическим типом решения $x = 0$ уравнения (1.13). Пусть $\gamma_0 > 0$ ($\gamma_0 < 0$). Тогда в условиях теоремы 1.8 интервал $(\mu_0 - \delta_0, \mu_0)$ (интервал $(\mu_0, \mu_0 + \delta_0)$) содержится в области асимптотической устойчивости, а интервал $(\mu_0, \mu_0 + \delta_0)$ (интервал $(\mu_0 - \delta_0, \mu_0)$) — в области неустойчивости решения $x = 0$ уравнения (1.13).

1.2.2 Случай D 2°

Пусть теперь матрица A_0 имеет пару простых чисто мнимых собственных значений $\pm i\omega_0$, где $\omega_0 > 0$. Обозначим через $e, g, e^*, g^* \in R^N$ ненулевые векторы такие, что выполняются равенства:

$$A_0(e + ig) = i\omega_0(e + ig), \quad A_0^*(e^* + ig^*) = -i\omega_0(e^* + ig^*). \quad (1.16)$$

Эти векторы можно считать нормированными равенствами:

$$(e, e^*) = 1, \quad (e, g^*) = 0. \quad (1.17)$$

Положим

$$\gamma_1 = (A'(\mu_0)e, e^*) + (A'(\mu_0)g, g^*). \quad (1.18)$$

Теорема 1.9. Пусть матрица A_0 имеет пару простых собственных значений $\pm i\omega_0$, где $\omega_0 > 0$. Пусть $\gamma_1 \neq 0$. Тогда топологический тип нулевой точки равновесия системы (1.13) равен $(2 + p_-, 0, p_+)$ при всех малых $|\mu - \mu_0|$ таких, что $(\mu - \mu_0)\gamma_1 < 0$; он равен $(p_-, 0, 2 + p_+)$, если $(\mu - \mu_0)\gamma_1 > 0$.

Из теоремы 1.9 вытекает

Теорема 1.10. Пусть матрица A_0 имеет пару простых собственных значений $\pm i\omega_0$, где $\omega_0 > 0$, а остальные собственные значения матрицы A_0 имеют отрицательные вещественные части. Пусть $\gamma_1 \neq 0$. Тогда решение $x = 0$ системы (1.13) будет асимптотически устойчивым при всех малых $|\mu - \mu_0|$ таких, что $(\mu - \mu_0)\gamma_1 < 0$; оно будет неустойчивым, если $(\mu - \mu_0)\gamma_1 > 0$.

Следствие 1.2. Пусть $\gamma_1 \neq 0$. Тогда в условиях теоремы 1.9 при некотором $\delta_0 > 0$ интервалы $(\mu_0 - \delta_0, \mu_0)$ и $(\mu_0, \mu_0 + \delta_0)$ содержатся в областях гиперболичности с различным топологическим типом решения $x = 0$ системы (1.13). Пусть $\gamma_1 > 0$ ($\gamma_1 < 0$). Тогда в условиях теоремы 1.10 интервал $(\mu_0 - \delta_0, \mu_0)$ (интервал $(\mu_0, \mu_0 + \delta_0)$) содержится в области асимптотической устойчивости, а интервал $(\mu_0, \mu_0 + \delta_0)$ (интервал $(\mu_0 - \delta_0, \mu_0)$) – в области неустойчивости решения $x = 0$ системы (1.13).

1.3 Двупараметрические автономные системы

Пусть теперь параметр μ является двумерным, т.е. $\mu = (\alpha, \beta)$. Тогда уравнение (1.10) представится в виде уравнения (1.12).

В силу теоремы 1.5 точка (α_0, β_0) будет граничной точкой области гиперболичности, если матрица $A_0 = A(\alpha_0, \beta_0)$ имеет хотя бы одно чисто

мнимое собственное значение. Здесь основными будут являться следующие случаи:

P1°. A_0 имеет простое собственное значение 0;

P2°. A_0 имеет пару простых собственных значений $\pm i\omega_0$, где $\omega_0 > 0$.

В первом случае топологический тип точки равновесия $x = 0$ равен $(p_-, 1, p_+)$, во втором случае — $(p_-, 2, p_+)$.

Для выполнения условий теоремы 1.6 необходимо, чтобы матрица A_0 , удовлетворяющая одному из двух приведенных выше случаев, имела остальные собственные значения с отрицательной вещественной частью.

Рассмотрим каждый из этих случаев подробно.

Для этого сначала представим матрицу $A(\alpha, \beta)$ в виде:

$$A(\alpha, \beta) = A_0 + (\alpha - \alpha_0)A_1 + (\beta - \beta_0)A_2 + A_3(\alpha, \beta), \quad (1.19)$$

где $A_1 = A'_\alpha(\alpha_0, \beta_0)$, $A_2 = A'_\beta(\alpha_0, \beta_0)$, а матрица $A_3(\alpha, \beta)$ удовлетворяет соотношению: $\|A_3(\alpha, \beta)\| = O((\alpha - \alpha_0)^2 + (\beta - \beta_0)^2)$ при $(\alpha, \beta) \rightarrow (\alpha_0, \beta_0)$.

1.3.1 Случай P1°

Пусть матрица A_0 имеет простое собственное значение 0. Обозначим через e и g собственные векторы матрицы A_0 и транспонированной матрицы A_0^* соответственно, отвечающие собственному значению 0. Эти векторы можно считать нормированными равенствами (1.14).

Положим

$$\zeta_1 = (A_1 e, g), \quad \zeta_2 = (A_2 e, g). \quad (1.20)$$

Ниже будем предполагать, что выполнено соотношение:

$$\zeta_1^2 + \zeta_2^2 > 0. \quad (1.21)$$

Тогда уравнение

$$\zeta_1 \cos \varphi + \zeta_2 \sin \varphi = 0 \quad (1.22)$$

имеет на промежутке $0 \leq \varphi < 2\pi$ в точности два решения $\varphi = \varphi_0$ и $\varphi = \varphi_0 + \pi$.

Теорема 1.11. Пусть матрица A_0 имеет простое собственное значение 0 и выполнено условие (1.21). Пусть φ_0 является решением уравнения (1.22). Тогда точка (α_0, β_0) плоскости параметров (α, β) является регулярной граничной точкой области гиперболичности G точки равновесия $x = 0$ системы (1.12), и при этом параметрически заданная прямая

$$\alpha = \alpha_0 + \varepsilon \cos \varphi_0, \quad \beta = \beta_0 + \varepsilon \sin \varphi_0$$

является касательной к граничной кривой γ_0 .

Зададимся произвольным $\varphi^* \in [0, 2\pi)$ таким, чтобы

$$\psi_0 = \zeta_1 \cos \varphi^* + \zeta_2 \sin \varphi^* \neq 0; \quad (1.23)$$

и параметрически заданной прямой

$$\alpha = \alpha_0 + \varepsilon \cos \varphi^*, \quad \beta = \beta_0 + \varepsilon \sin \varphi^*. \quad (1.24)$$

Теорема 1.12. Пусть матрица A_0 имеет простое собственное значение 0, при этом остальные собственные значения этой матрицы имеют отрицательные вещественные части и выполнено условие (1.21). Тогда решение $x = 0$ системы (1.12), в котором α и β определяются равенством (1.24), будет асимптотически устойчивым при всех малых $|\varepsilon|$ таких, что $\varepsilon\psi_0 < 0$; оно будет неустойчивым, если $\varepsilon\psi_0 > 0$.

Таким образом, в условиях теоремы 1.12 имеем то, что параметрически заданная прямая (1.24) при малых $|\varepsilon|$ содержится в области устойчивости (в области неустойчивости) точки равновесия $x = 0$ системы (1.12), если $\varepsilon\psi_0 < 0$ (если $\varepsilon\psi_0 > 0$).

1.3.2 Случай R^2

Пусть теперь матрица A_0 имеет пару простых собственных значений $\pm \omega_0 i$, где $\omega_0 > 0$. Обозначим через $e, g, e^*, g^* \in R^N$ ненулевые векторы такие,

что выполняются равенства (1.16). Эти векторы можно считать нормированными равенствами (1.17).

Положим

$$\eta_1 = (A_1 e, e^*) + (A_1 g, g^*), \eta_2 = (A_2 e, e^*) + (A_2 g, g^*). \quad (1.25)$$

Ниже будем предполагать, что выполнено соотношение:

$$\eta_1^2 + \eta_2^2 > 0. \quad (1.26)$$

Тогда уравнение

$$\eta_1 \cos \varphi + \eta_2 \sin \varphi = 0 \quad (1.27)$$

имеет на промежутке $0 \leq \varphi < 2\pi$ в точности два решения $\varphi = \varphi_0$ и $\varphi = \varphi_0 + \pi$.

Теорема 1.13. Пусть матрица A_0 имеет пару простых собственных значений $\pm \omega_0 i$, где $\omega_0 > 0$ и выполнено условие (1.26). Пусть φ_0 является решением уравнения (1.27). Тогда точка (α_0, β_0) плоскости параметров (α, β) является регулярной граничной точкой области гиперболичности G точки равновесия $x = 0$ системы (1.12), и при этом параметрически заданная прямая

$$\alpha = \alpha_0 + \varepsilon \cos \varphi_0, \quad \beta = \beta_0 + \varepsilon \sin \varphi_0$$

является касательной к граничной кривой γ_0 .

Зададимся произвольным $\varphi^* \in [0, 2\pi)$ таким, чтобы

$$\psi_1 = \eta_1 \cos \varphi^* + \eta_2 \sin \varphi^* \neq 0; \quad (1.28)$$

и параметрически заданной прямой

$$\alpha = \alpha_0 + \varepsilon \cos \varphi^*, \quad \beta = \beta_0 + \varepsilon \sin \varphi^*. \quad (1.29)$$

Теорема 1.14. Пусть матрица A_0 имеет пару простых собственных значений $\pm \omega_0 i$, где $\omega_0 > 0$, при этом остальные собственные значения этой матрицы имеют отрицательные вещественные части и выполнено условие (1.26). Тогда решение $x = 0$ системы (1.12), в которой α и β определяются

равенством (1.29), будет асимптотически устойчивым при всех малых $|\varepsilon|$ таких, что $\varepsilon\psi_1 < 0$; оно будет неустойчивым, если $\varepsilon\psi_1 > 0$.

Таким образом, в условиях теоремы 1.14 имеем то, что параметрически заданная прямая (1.29) при малых $|\varepsilon|$ содержится в области устойчивости (в области неустойчивости) точки равновесия $x = 0$ системы (1.12), если $\varepsilon\psi_1 < 0$ (если $\varepsilon\psi_1 > 0$).

Пример 1.1. Рассмотрим модель Лоренца :

$$\begin{cases} x_1' = -\sigma x_1 + \sigma x_2, \\ x_2' = -x_1 x_3 + \alpha x_1 - x_2, \\ x_3' = x_1 x_2 - \beta x_3. \end{cases} \quad (1.30)$$

При $\alpha > 1$ система (1.30) имеет три точки равновесия

$$u_0 = (0, 0, 0), \quad u_{1,2} = (\pm\sqrt{\beta(\alpha-1)}, \pm\sqrt{\beta(\alpha-1)}, \alpha-1).$$

Систему (1.30) можно представить в виде системы (1.10), в котором параметр μ является трехмерным, т.е. $\mu = (\sigma, \alpha, \beta)$, а матрица $A(\mu)$ и нелинейность $a(x, t, \mu)$ соответственно равны:

$$A(\mu) = A(\sigma, \alpha, \beta) = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \alpha & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{bmatrix}, \quad a(x, t, \mu) = \begin{bmatrix} 0 \\ -x_1 x_3 \\ x_1 x_2 \end{bmatrix}. \quad (1.31)$$

Можно показать (см., например, [49, с. 257-261], [50, с. 335-340]), что при $\sigma > \beta + 1$ и $\alpha = \sigma(\sigma + \beta + 3)/(\sigma - \beta - 1)$ собственные значения матрицы Якоби $A(\sigma, \alpha, \beta)$ в точке u_1 равны

$$\lambda_0 = -(\sigma + \beta + 1), \quad \lambda_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{2\sigma\beta(\sigma+1)}{\sigma-\beta-1}}.$$

Пусть $\sigma = 10$. В плоскости параметров (α, β) рассмотрим точку с координатами $(\frac{470}{19}, \frac{8}{3})$. Проведем исследование точки $(\frac{470}{19}, \frac{8}{3})$ плоскости параметров (α, β) для точки равновесия u_1 системы (1.30).

С этой целью перенесем начало координат в системе (1.30) в точку u_1 сделав следующую замену:

$$x_1 = y_1 + \sqrt{\beta(\alpha - 1)}, \quad x_2 = y_2 + \sqrt{\beta(\alpha - 1)}, \quad x_3 = y_3 + (\alpha - 1).$$

Тогда система (1.30) перепишется в виде

$$\begin{cases} y_1' = -10y_1 + 10y_2, \\ y_2' = -y_1y_3 + y_1 + \sqrt{\beta(\alpha - 1)}y_3 - y_2, \\ y_3' = y_1y_2 + \sqrt{\beta(\alpha - 1)}y_2 + \sqrt{\beta(\alpha - 1)}y_1 - \beta y_3. \end{cases} \quad (1.32)$$

Система (1.32) имеет вид (1.12), где

$$A(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 1 & -1 & -k \\ k & k & -\beta \end{bmatrix}, \quad a(y) = \begin{bmatrix} 0 \\ -y_1y_3 \\ y_1y_2 \end{bmatrix}, \quad (1.33)$$

здесь $k = \sqrt{\beta(\alpha - 1)}$.

Поставленную выше задачу можно переформулировать следующим образом: проведем исследование точки $(\frac{470}{19}, \frac{8}{3})$ плоскости параметров (α, β) для точки равновесия $y = 0$ системы (1.32).

При $\alpha_0 = \frac{470}{19}$ и $\beta_0 = \frac{8}{3}$ матрица $A_0 = A(\alpha_0, \beta_0)$ имеет собственные значения $\lambda_{1,2} = \pm i4\sqrt{\frac{110}{19}}$ и $\lambda_3 = -\frac{41}{3}$.

В качестве ненулевых векторов e , e^* , g и g^* можно выбрать векторы:

$$e = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} -\frac{5}{2}\sqrt{\frac{19}{110}} \\ \frac{1}{4}\sqrt{\frac{19}{110}} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{41}{15}} \end{bmatrix}, \quad e^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad g^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{41}{15}} \end{bmatrix}.$$

Вычисления по формулам (1.25) показывают, что $\eta_1 = \frac{57}{440}$ и $\eta_2 = \frac{451}{960}$. Согласно условиям теоремы 1.13 через точку $(\frac{470}{19}, \frac{8}{3})$ плоскости параметров (α, β) проходит единственная гладкая граничная кривая области гиперболичности G точки равновесия u_1 системы (1.30). Уравнение касательной к этой кривой имеет вид:

$$\beta = -\frac{1368}{4961}\alpha + \frac{141208}{14883}. \quad (1.34)$$

Согласно условиям теоремы 1.14, выбрав в качестве φ^* величину, удовлетворяющую неравенству (1.28), можно убедиться в том, что выше касательной (1.34) находится область неустойчивости, а ниже – область устойчивости. На рис. 1.1 область устойчивости заштрихована.

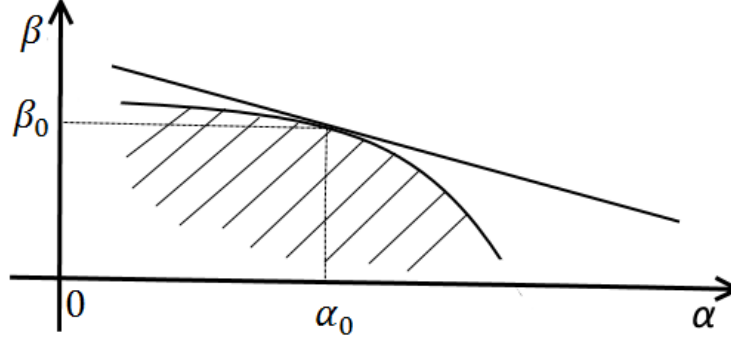


Рис. 1.1. Граница области устойчивости точки равновесия системы Лоренца

1.4 Доказательства основных утверждений

Доказательство теоремы 1.7. Доказательство данной теоремы проводится с использованием формул теории возмущений [17], [22].

Рассмотрим уравнение (1.13). При $\mu = \mu_0$ матрица $A_0 = A(\mu_0)$ имеет простое собственное значение 0 и топологический тип этой матрицы равен $(p_-, 1, p_+)$. Согласно теории возмущений (см. [22] или вспомогательные сведения на стр. 75 данной работы) при μ близких к μ_0 матрица $A(\mu)$ имеет единственное близкое к 0 простое вещественное собственное значение, представимое в виде

$$\lambda(\mu) = \lambda_0 + \lambda_1(\mu - \mu_0) + O((\mu - \mu_0)^2), \quad (1.35)$$

где $\lambda_0 = 0$ и $\lambda_1 = (A'e, g)$. Тогда при всех малых $|\mu - \mu_0|$ таких, что $(\mu - \mu_0)\lambda_1 < 0$ топологический тип нулевой точки равновесия системы (1.13) равен $(1 + p_-, 0, p_+)$; он равен $(p_-, 0, 1 + p_+)$, если $(\mu - \mu_0)\lambda_1 > 0$.

Доказательство теоремы 1.9. Теорема 1.9 доказывается аналогично теореме 1.7.

Доказательство теоремы 1.11. Так как матрица $A(\alpha_0, \beta_0)$ имеет простое собственное значение 0, то при малых $|\alpha - \alpha_0|$ и $|\beta - \beta_0|$ матрица $A(\alpha, \beta)$ имеет простое собственное значение $\lambda(\alpha, \beta)$ такое, что функция $\lambda(\alpha, \beta)$ является непрерывной и $\lambda(\alpha_0, \beta_0) = 0$. Пусть остальные собственные значения матрицы $A(\alpha_0, \beta_0)$ имеют отрицательные вещественные части. Предположим для определенности, что $\zeta_1 = (A'_\alpha e, g) \neq 0$. Из формул теории возмущений линейных операторов (см. [22] или вспомогательные сведения на стр. 75 данной работы) при малых $|\alpha - \alpha_0|$ имеем: $\lambda(\alpha, \beta_0) = \zeta_1(\alpha - \alpha_0) + O((\alpha - \alpha_0)^2)$. Поэтому $\lambda'_\alpha(\alpha_0, \beta_0) = \zeta_1 \neq 0$. Тогда по теореме о неявной функции уравнение $\lambda(\alpha, \beta) = 0$ задает единственную кривую $\alpha = f(\beta)$, определенную и гладкую в некоторой окрестности числа β_0 и такую, что $\alpha_0 = f(\beta_0)$. То, что эта кривая является искомой граничной кривой области гиперболичности уравнения (1.12) устанавливается ниже при доказательстве теоремы 1.12.

При доказательстве первого утверждения теоремы 1.11 получены равенства: $\lambda'_\alpha(\alpha_0, \beta_0) = \zeta_1$ и $\lambda'_\beta(\alpha_0, \beta_0) = \zeta_2$. Перейдем к доказательству второго утверждения теоремы 1.11. Вектор с координатами (ζ_1, ζ_2) ортогонален направляющему вектору касательной к кривой γ_0 в плоскости параметров (α, β) . Рассмотрим прямую, проходящую через точку (α_0, β_0) и заданную параметрически уравнениями: $\alpha = \alpha_0 + \varepsilon \cos \varphi$ и $\beta = \beta_0 + \varepsilon \sin \varphi$, где φ – некоторый угол. Справедливость второго утверждения теоремы 1.11 следует из того, что вектор $(\cos \varphi, \sin \varphi)$ будет направляющим вектором касательной к кривой γ_0 , если $\zeta_1 \cos \varphi + \zeta_2 \sin \varphi = 0$.

Доказательство теоремы 1.12. Рассмотрим параметрически заданную прямую (1.24):

$$\alpha = \alpha_0 + \varepsilon \cos \varphi^*, \quad \beta = \beta_0 + \varepsilon \sin \varphi^*, \quad (1.36)$$

где $\varphi^* \neq \varphi_0$, $\varphi^* \neq \varphi_0 + \pi$ (здесь φ_0 – число из теоремы 1.11). Эта прямая трансверсально пересекает кривую γ_0 в точке (α_0, β_0) . Матрица $A(\alpha(\varepsilon), \beta(\varepsilon))$ при малых $|\varepsilon|$ имеет собственное значение $\lambda(\varepsilon)$, представимое в виде $\lambda(\varepsilon) = \psi_0 \varepsilon + O(\varepsilon^2)$ (см. [22]), где ψ_0 – число (1.23). Следовательно, при трансверсаль-

ном переходе параметров (α, β) через кривую γ_0 (вблизи точки (α_0, β_0)) изменяется топологический тип точки равновесия $x = 0$ системы (1.12). Отсюда получим, во-первых, тот факт, что кривая γ_0 является граничной кривой области устойчивости уравнения (1.12), и во-вторых, справедливость утверждения теоремы 1.12.

Доказательство теоремы 1.13. Теорема 1.13 доказывается аналогично теореме 1.11.

Доказательство теоремы 1.14. Теорема 1.14 доказывается аналогично теореме 1.12.

Глава 2

Границы областей гиперболичности и устойчивости решений периодических систем

В этой главе изучается задача построения границ областей гиперболичности и устойчивости точек равновесия и периодических решений дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами.

2.1 Постановка задачи

Основным объектом исследования в этой главе является уравнение

$$\frac{dx}{dt} = A(t, \mu)x + a(x, t, \mu), \quad x \in R^N, \quad \mu \in R^k, \quad (2.1)$$

в котором матрица $A(t, \mu)$ и функция $a(x, t, \mu)$ являются непрерывными и T –периодическими по переменной t , а матрица $A(t, \mu)$ – дважды непрерывно дифференцируемой по μ , при этом функция $a(x, t, \mu)$ равномерно по t и μ удовлетворяет соотношению:

$$\|a(x, t, \mu)\| = O(\|x\|^2) \text{ при } x \rightarrow 0. \quad (2.2)$$

Уравнение (2.1) при всех значениях параметра μ имеет точку равновесия $x = 0$. В данной главе решается задача приближенного построения

границы области устойчивости точки равновесия $x = 0$ уравнения (2.1) в пространстве параметров системы.

Напомним, что значение $\mu = \mu_0$ является граничной точкой области гиперболичности точки равновесия $x = 0$ системы (2.1), если линейная система

$$\frac{dx}{dt} = A(t, \mu_0)x, \quad x \in R^N, \quad (2.3)$$

имеет мультипликатор $\lambda_0 : |\lambda_0| = 1$.

В основной части этой главы изучается случай, когда в системе (2.1) матрица $A(t, \mu)$ при $\mu = \mu_0$ не зависит от t , т.е. при $\mu = \mu_0$ система (2.1) имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = A_0x + a(x, t, \mu_0), \quad x \in R^N. \quad (2.4)$$

где A_0 – постоянная матрица.

2.2 Однопараметрические неавтономные системы

В этом параграфе обсудим задачу о построении границы области гиперболичности (устойчивости) в случае, когда уравнение (2.1) является однопараметрическим:

$$\frac{dx}{dt} = A(t, \mu)x + a(x, t, \mu), \quad x \in R^N, \quad \mu \in R^1. \quad (2.5)$$

Пусть матрица $A(t, \mu)$ при $\mu = \mu_0$ не зависит от t , т.е. $A(t, \mu_0) \equiv A_0$. Тогда

$$A(t, \mu) = A_0 + (\mu - \mu_0)A_1(t) + \tilde{A}(t, \mu), \quad (2.6)$$

где матрицы $A_1(t)$ и $\tilde{A}(t, \mu)$ являются T -периодическими по t , при этом матрица $\tilde{A}(t, \mu)$ равномерно по t удовлетворяет соотношению:

$$\|\tilde{A}(t, \mu)\| = O(\|\mu - \mu_0\|^2) \quad \text{при } \mu \rightarrow \mu_0. \quad (2.7)$$

Тогда уравнение (2.5) представимо в виде:

$$\frac{dx}{dt} = [A_0 + (\mu - \mu_0)A_1(t) + \tilde{A}(t, \mu)]x + a(x, t, \mu), \quad x \in R^N, \quad \mu \in R^1. \quad (2.8)$$

Как и в случае автономных однопараметрических уравнений, здесь также границей области гиперболичности (устойчивости) является точка μ_0 на прямой параметров μ , а областями гиперболичности будут интервалы вида $(\mu_0 - \delta_0, \mu_0)$ и $(\mu_0, \mu_0 + \delta_0)$ при некотором $\delta_0 > 0$.

Предполагается, что матрица A_0 удовлетворяет одному из условий:

S1°. A_0 имеет простое собственное значение 0;

S2°. A_0 имеет пару простых собственных значений $\pm i\omega_0$, где $\omega_0 > 0$ и $\omega_0 \neq \frac{\pi k}{T}$, k - натуральное число.

S3°. A_0 имеет пару простых собственных значений $\pm i\omega_0$, где $\omega_0 = \frac{\pi k_0}{T}$ при некотором натуральном k_0 .

При этом предполагается, что остальные собственные значения матрицы A_0 не лежат на мнимой оси. В первом случае топологический тип точки равновесия $x = 0$ равен $(p_-, 1, p_+)$, во втором и третьем случаях — $(p_-, 2, p_+)$. Первые два случая будем называть *первым нерезонансным случаем* и *вторым нерезонансным случаем*, соответственно; а третий — *резонансным случаем*.

2.2.1 Случай S1°

Пусть матрица A_0 имеет простое собственное значение 0. Обозначим через e и g собственные векторы матрицы A_0 и транспонированной матрицы A_0^* соответственно, отвечающие собственному значению 0. Эти векторы можно считать нормированными равенствами (1.14) (см. стр. 22).

Положим

$$\gamma_2 = \int_0^T (A'_\mu(t, \mu_0)e, g) dt. \quad (2.9)$$

Теорема 2.1. Пусть матрица A_0 имеет простое собственное значение 0. Пусть $\gamma_2 \neq 0$. Тогда топологический тип нулевой точки равнове-

сия системы (2.8) равен $(1 + p_-, 0, p_+)$ при всех малых $|\mu - \mu_0|$ таких, что $(\mu - \mu_0)\gamma_2 < 0$; он равен $(p_-, 0, 1 + p_+)$, если $(\mu - \mu_0)\gamma_2 > 0$.

Доказательство основных утверждений приводится в конце этой главы.

Из теоремы 2.1 вытекает следующее утверждение.

Теорема 2.2. Пусть матрица A_0 имеет простое собственное значение 0, а остальные собственные значения матрицы A_0 имеют отрицательные вещественные части. Пусть $\gamma_2 \neq 0$. Тогда решение $x = 0$ уравнения (2.8) будет асимптотически устойчивым при всех малых $|\mu - \mu_0|$ таких, что $(\mu - \mu_0)\gamma_2 < 0$; оно будет неустойчивым, если $(\mu - \mu_0)\gamma_2 > 0$.

Следствие 2.1. Пусть $\gamma_2 \neq 0$. Тогда в условиях теоремы 2.1 при некотором $\delta_0 > 0$ интервалы $(\mu_0 - \delta_0, \mu_0)$ и $(\mu_0, \mu_0 + \delta_0)$ содержатся в областях гиперболичности с различным топологическим типом решения $x = 0$ уравнения (2.8). Пусть $\gamma_2 > 0$ ($\gamma_2 < 0$). Тогда в условиях теоремы 2.2 интервал $(\mu_0 - \delta_0, \mu_0)$ (интервал $(\mu_0, \mu_0 + \delta_0)$) содержится в области асимптотической устойчивости, а интервал $(\mu_0, \mu_0 + \delta_0)$ (интервал $(\mu_0 - \delta_0, \mu_0)$) – в области неустойчивости решения $x = 0$ уравнения (2.8).

Пример 2.1. Рассмотрим неавтономную модель Лоренца, описываемую системой

$$\begin{cases} x_1' = -10(x_1 - x_2), \\ x_2' = -x_1x_3 + [1 + \mu\varphi(t)]x_1 - x_2, \\ x_3' = x_1x_2 - (8/3)x_3, \end{cases} \quad (2.10)$$

в которой $\varphi(t)$ – некоторая T -периодическая функция, μ – скалярный параметр.

Система (2.10) имеет решение $x = 0$ при всех значениях параметра μ .

Система (2.10) имеет вид (2.5), где

$$A(t, \mu) = \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 1 + \mu\varphi(t) & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -8/3 \end{bmatrix}, \quad a(x, t, \mu) = \begin{bmatrix} 0 \\ -x_1x_3 \\ x_1x_2 \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

Матрица $A(t, \mu)$ при $\mu = 0$ имеет вид:

$$A_0 = A(t, 0) = \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -8/3 \end{bmatrix}.$$

Собственные значения матрицы A_0 равны $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -11$, $\lambda_3 = -8/3$.

Вычисления по формуле (2.9) показывают, что $\gamma_2 = \frac{11}{10} \int_0^T \varphi(t) dt$. При этом в качестве собственных векторов e и g были взяты векторы $e = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$ и $g = (\sqrt{2}/11, 10\sqrt{2}/11, 0)$, нормированные равенствами (1.14) (см. стр. 22). Согласно условиям теорем 2.1 и 2.2 при $\gamma_2 > 0$ интервалы $(-\delta_0, 0)$ и $(0, \delta_0)$, где $\delta_0 > 0$, содержатся в области гиперболичности с топологическими типами $(3, 0, 0)$ и $(2, 0, 1)$, соответственно, решения $x = 0$ системы (2.10). Первый из этих интервалов содержится в области асимптотической устойчивости, а второй – в области неустойчивости решения $x = 0$ системы (2.10).

2.2.2 Случай S2°

Пусть теперь матрица A_0 имеет пару простых собственных значений $\pm i\omega_0$, где $\omega_0 > 0$. Обозначим через $e, g, e^*, g^* \in R^N$ ненулевые векторы такие, что выполняются равенства (1.16). Эти векторы можно считать нормированными равенствами (1.17) (см. стр. 24).

Положим

$$\gamma_3 = \int_0^T [(A'_\mu(t, \mu_0)e, e^*) + (A'_\mu(t, \mu_0)g, g^*)] dt. \quad (2.12)$$

Теорема 2.3. Пусть матрица A_0 имеет пару простых собственных значений $\pm i\omega_0$, где $\omega_0 > 0$ и $\omega_0 \neq \frac{\pi k}{T}$ (k – натуральное число). Пусть $\gamma_3 \neq 0$. Тогда топологический тип нулевой точки равновесия системы (2.8) равен $(2 + p_-, 0, p_+)$ при всех малых $|\mu - \mu_0|$ таких, что $(\mu - \mu_0)\gamma_3 < 0$; он равен $(p_-, 0, 2 + p_+)$, если $(\mu - \mu_0)\gamma_3 > 0$.

Из теоремы 2.3 вытекает следующее утверждение.

Теорема 2.4. Пусть матрица A_0 имеет пару простых собственных значений $\pm i\omega_0$, где $\omega_0 > 0$ и $\omega_0 \neq \frac{\pi k}{T}$ (k – натуральное число), а остальные собственные значения матрицы A_0 имеют отрицательные вещественные части. Пусть $\gamma_3 \neq 0$. Тогда решение $x = 0$ системы (2.8) будет асимптотически устойчивым при всех малых $|\mu - \mu_0|$ таких, что $(\mu - \mu_0)\gamma_3 < 0$; оно будет неустойчивым, если $(\mu - \mu_0)\gamma_3 > 0$.

Следствие 2.2. Пусть $\gamma_3 \neq 0$. Тогда в условиях теоремы 2.3 при некотором $\delta_0 > 0$ интервалы $(\mu_0 - \delta_0, \mu_0)$ и $(\mu_0, \mu_0 + \delta_0)$ содержатся в области гиперболичности с различным топологическим типом решения $x = 0$ уравнения (2.8). Пусть $\gamma_3 > 0$ ($\gamma_3 < 0$). Тогда в условиях теоремы 2.4 интервал $(\mu_0 - \delta_0, \mu_0)$ (интервал $(\mu_0, \mu_0 + \delta_0)$) содержится в области асимптотической устойчивости, а интервал $(\mu_0, \mu_0 + \delta_0)$ (интервал $(\mu_0 - \delta_0, \mu_0)$) – в области неустойчивости решения $x = 0$ уравнения (2.8).

2.2.3 Вспомогательное утверждение

Прежде чем перейти к исследованию резонансного случая, приведем вспомогательное утверждение, которое понадобится в дальнейшем [40, 43, 50, 53].

Рассмотрим уравнение

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad x \in C^N, \quad (2.13)$$

где $A(t)$ – непрерывная T -периодическая матрица. Пусть $U(t)$ – невырожденная непрерывная T -периодическая матрица. Матрицы $A(t)$ и $U(t)$ могут быть как вещественными, так и комплексными.

Замена $y = U(t)x$ приводит уравнение (2.13) к виду

$$\frac{dy}{dt} = B(t)y, \quad y \in C^N, \quad (2.14)$$

где

$$B(t) = U'(t)U^{-1}(t) + U(t)A(t)U^{-1}(t).$$

Лемма 2.1. *Невырожденное T -периодическое преобразование $y = U(t)x$ не изменяет топологический тип точки равновесия $x = 0$ системы (2.13), т.е. топологические типы нулевых точек равновесия систем (2.13) и (2.14) одинаковы.*

Доказательство. Рассмотрим матричные задачи Коши:

$$\begin{cases} X' = A(t)X, \\ X(0) = I, \end{cases} \quad \begin{cases} Y' = B(t)Y, \\ Y(0) = I, \end{cases}$$

где $A(t)$ и $B(t)$ – матрицы из (2.13) и (2.14). Пусть $X(t)$ и $Y(t)$ – решения этих задач. Тогда матрицы $X(T)$ и $Y(T)$ являются матрицами монодромии для линейных систем $x' = A(t)x$ и $y' = B(t)y$, т.е. собственные значения этих матриц (мультипликаторы) определяют топологические типы нулевых точек равновесия систем (2.13) и (2.14). Лемма 2.1 будет доказана, если показать, что матрицы $X(T)$ и $Y(T)$ подобны [23, стр. 59].

С этой целью рассмотрим еще одну задачу Коши

$$\begin{cases} Z' = B(t)Z, \\ Z(0) = U_0, \end{cases} \quad (2.15)$$

где $U_0 = U(0)$. Пусть $Z(t)$ – решение задачи (2.15). Несложно видеть, что матрицы $X(t)$ и $Z(t)$ связаны равенством $Z(t) = U(t)X(t)$, а матрицы $Y(t)$ и $Z(t)$ – равенством $Y(t) = Z(t)U_0^{-1}$. Отсюда получим равенство $Y(T) = U_0X(T)U_0^{-1}$. Лемма 2.1 доказана.

2.2.4 Случай S3°

Рассмотрим теперь резонансный случай, т.е. случай когда матрица A_0 имеет пару простых собственных значений $\pm i\omega_0$, где $\omega_0 = \frac{\pi k_0}{T}$ при некотором натуральном k_0 .

Резонансный случай является наиболее сложным. С целью изучения этого случая рассмотрим уравнение (2.8):

$$\frac{dx}{dt} = [A_0 + (\mu - \mu_0)A_1(t) + \tilde{A}(t, \mu)]x + a(x, t, \mu), \quad x \in R^N, \quad \mu \in R^1. \quad (2.16)$$

Задачу построения границы области гиперболичности или устойчивости будем изучать на основе метода М. Розо [40]. В этой связи отметим, что непосредственно этот метод не проходит, так как матрица A_0 имеет пару простых собственных значений $\pm i\omega_0$, где $\omega_0 = \frac{\pi k_0}{T}$ при некотором натуральном k_0 . Поэтому необходимое условие метода М. Розо, заключающееся в том, чтобы матрица A_0 не имела собственных значений λ_1 и λ_2 таких, что $\lambda_1 - \lambda_2 = \frac{2\pi ki}{T}$, где k – некоторое целое число, здесь не выполнено. В связи с этим преобразуем систему (2.16) к виду, в котором метод М. Розо применим.

Обозначим через $e, g, e^*, g^* \in R^N$ ненулевые векторы такие, что выполняются равенства (1.16) и (1.17) (см. на стр. 24), в которых $\omega_0 = \frac{\pi k_0}{T}$. Положим

$$e_1 = \frac{e + ig}{\sqrt{2}}, \quad e_2 = \frac{e - ig}{\sqrt{2}}, \quad e_1^* = \frac{e^* + ig^*}{\sqrt{2}}, \quad e_2^* = \frac{e^* - ig^*}{\sqrt{2}}. \quad (2.17)$$

По построению эти векторы нормированы в соответствии с равенствами

$$(e_1, e_1^*) = (e_2, e_2^*) = 1, \quad (e_1, e_2^*) = (e_2, e_1^*) = 0.$$

Матрица A_0 и транспонированная матрица A_0^* имеют пару простых собственных значений $\pm \omega_0 i$. При этом определенные равенствами (2.17) векторы $e_1, e_1^* \in C^N$ – это собственные векторы операторов A_0 и A_0^* , отвечающие собственным значениям $\omega_0 i$ и $-\omega_0 i$ соответственно. Определим действующий в C^N линейный оператор $Q_1 z = -2\omega_0 i P_1 z$, где $P_1 z = (z, e_1^*) e_1$; P_1 является оператором спектрального проектирования пространства C^N на одномерное собственное подпространство E_1 , отвечающее собственному значению $\omega_0 i$ оператора A_0 .

Уравнение (2.16) можно рассматривать в комплексном пространстве C^N . Произведем в (2.16) замену $y = e^{Q_1 t} x$ с невырожденной T -периодической матрицей $e^{Q_1 t}$. В силу леммы 2.1 (см. стр. 39) эта замена не изменяет топологический тип точки равновесия и приведет (2.16) к виду:

$$\frac{dy}{dt} = [\tilde{A} + (\mu - \mu_0) \tilde{A}_1(t) + \tilde{A}_2(t, \mu)] y + \tilde{a}(y, t, \mu), \quad y \in C^N, \quad (2.18)$$

в котором

$$\tilde{A} = A_0 + Q_1, \quad \tilde{A}_j = e^{Q_1 t} A_j e^{-Q_1 t} \quad (j = 1, 2), \quad \tilde{a}(y, t, \mu) = e^{Q_1 t} a(e^{-Q_1 t} y, t, \mu). \quad (2.19)$$

Оператор $\tilde{A}$ имеет полупростое собственное значение $-\omega_0 i$ кратности 2, а остальные его собственные значения имеют ненулевые вещественные части. Обозначим через E_0 – спектральное (двумерное) подпространство оператора $\tilde{A}$, отвечающее собственному значению $-\omega_0 i$, а через $P_0 : C^N \rightarrow E_0$ – оператор спектрального проектирования пространства C^N на подпространство E_0 . Оператор P_0 может быть определен равенством

$$P_0 z = (z, e_1^*) e_1 + (z, e_2^*) e_2. \quad (2.20)$$

Положим $P^0 = I - P_0$ и $E^0 = P^0 C^N$; подпространство E^0 является инвариантным для оператора $\tilde{A}$, при этом оператор $\tilde{A} : E^0 \rightarrow E^0$ является гиперболическим.

Для уравнения (2.18) метод М. Розо уже применим.

Рассмотрим зависящее от вспомогательного параметра ξ матричное уравнение

$$\int_0^T e^{-\tilde{A}t} S e^{\tilde{A}t} dt = \int_0^T e^{-\tilde{A}t} \tilde{A}_1(t) e^{\tilde{A}t} dt, \quad (2.21)$$

в котором $\tilde{A}$ и $\tilde{A}_1(t)$ – матрицы из (2.19), а неизвестной является квадратная матрица S .

Так как матрица $\tilde{A}$ имеет полупростое собственное значение $-\omega_0 i$ кратности 2, то, в соответствии с методом М. Розо, справедлива следующая лемма [40, гл. 14, стр. 172–175].

Лемма 2.2. *Уравнение (2.21) имеет единственное решение $S = \tilde{S}$.*

Определим матрицу

$$D_0 = \begin{bmatrix} \int_0^T (e^{-\tilde{A}t} \tilde{A}_1(t) e^{\tilde{A}t} e, e^*) dt & \int_0^T (e^{-\tilde{A}t} \tilde{A}_1(t) e^{\tilde{A}t} g, e^*) dt \\ \int_0^T (e^{-\tilde{A}t} \tilde{A}_1(t) e^{\tilde{A}t} e, g^*) dt & \int_0^T (e^{-\tilde{A}t} \tilde{A}_1(t) e^{\tilde{A}t} g, g^*) dt \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

Теорема 2.5. *Пусть матрица A_0 имеет пару простых собственных значений $\pm i\omega_0$, где $\omega_0 = \frac{\pi k_0}{T}$ при некотором натуральном k_0 . Пусть собственные значения $\lambda^{(1)}$ и $\lambda^{(2)}$ матрицы D_0 не являются чисто мнимыми.*

Тогда, при условии $Re\lambda^{(1)} \cdot Re\lambda^{(2)} < 0$, топологический тип нулевой точки равновесия системы (2.8) равен $(1+p_-, 0, 1+p_+)$ при всех малых $|\mu - \mu_0|$. Если же $Re\lambda^{(1)} < 0$ и $Re\lambda^{(2)} < 0$, то топологический тип нулевой точки равновесия системы (2.8) равен $(2+p_-, 0, p_+)$ при $\mu > \mu_0$; он равен $(p_-, 0, 2+p_+)$ при $\mu < \mu_0$. Если же $Re\lambda^{(1)} > 0$ и $Re\lambda^{(2)} > 0$, то топологический тип нулевой точки равновесия системы (2.8) равен $(2+p_-, 0, p_+)$ при $\mu < \mu_0$; он равен $(p_-, 0, 2+p_+)$ при $\mu > \mu_0$.

Из теоремы 2.5 вытекает следующее утверждение.

Теорема 2.6. Пусть матрица A_0 имеет пару простых собственных значений $\pm i\omega_0$, где $\omega_0 = \frac{\pi k_0}{T}$ при некотором натуральном k_0 , а остальные собственные значения матрицы A_0 имеют отрицательные вещественные части. Пусть собственные значения $\lambda^{(1)}$ и $\lambda^{(2)}$ матрицы D_0 не являются чисто мнимыми. Тогда, при условии $Re\lambda^{(1)} \cdot Re\lambda^{(2)} < 0$, решение $x = 0$ системы (2.16) является неустойчивым как при $\mu < \mu_0$, так и при $\mu > \mu_0$. Если же $Re\lambda^{(1)} < 0$ и $Re\lambda^{(2)} < 0$, то решение $x = 0$ системы (2.16) является асимптотически устойчивым при $\mu > \mu_0$ и неустойчивым при $\mu < \mu_0$. Если же $Re\lambda^{(1)} > 0$ и $Re\lambda^{(2)} > 0$, то решение $x = 0$ системы (2.16) является асимптотически устойчивым при $\mu < \mu_0$ и неустойчивым при $\mu > \mu_0$.

Следствие 2.3. Пусть собственные значения $\lambda^{(1)}$ и $\lambda^{(2)}$ матрицы D_0 не являются чисто мнимыми. Тогда в условиях теоремы 2.5 в случае, когда $Re\lambda^{(1)} \cdot Re\lambda^{(2)} < 0$, при некотором $\delta_0 > 0$ интервалы $(\mu_0 - \delta_0, \mu_0)$ и $(\mu_0, \mu_0 + \delta_0)$ содержатся в области гиперболичности с одинаковым топологическим типом решения $x = 0$ уравнения (2.8). В случаях, когда либо $Re\lambda^{(1)} < 0$ и $Re\lambda^{(2)} < 0$, либо $Re\lambda^{(1)} > 0$ и $Re\lambda^{(2)} > 0$, при некотором $\delta_0 > 0$ интервалы $(\mu_0 - \delta_0, \mu_0)$ и $(\mu_0, \mu_0 + \delta_0)$ содержатся в области гиперболичности с различным топологическим типом решения $x = 0$ уравнения (2.8).

2.3 Двупараметрические неавтономные системы

В этом параграфе приводится схема построения границ областей гиперболичности (устойчивости) нулевого решения системы (2.1) в случае, когда μ является двумерным параметром, т.е. система (2.1) имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = A(t, \alpha, \beta)x + a(x, t, \alpha, \beta), \quad x \in R^N, \quad (2.23)$$

где α и β скалярные параметры.

Как и в однопараметрическом случае, будем считать, что матрица $A(t, \alpha, \beta)$ при $\alpha = \alpha_0$ и $\beta = \beta_0$ не зависит от t , т.е. $A(t, \alpha_0, \beta_0) = A_0$.

Представим систему (2.23) в виде:

$$\frac{dx}{dt} = [A_0 + (\alpha - \alpha_0)B_1(t) + (\beta - \beta_0)B_2(t) + \tilde{D}(t, \alpha, \beta)]x + a(x, t, \alpha, \beta), \quad x \in R^N, \quad (2.24)$$

где матрица A_0 является постоянной, матрицы $B_1(t)$, $B_2(t)$ и $\tilde{D}(t, \alpha, \beta)$ являются T -периодическими по t , при этом $\tilde{D}(t, \alpha, \beta)$ равномерно по t удовлетворяет соотношению: $\|\tilde{D}(t, \alpha, \beta)\| = O((\alpha - \alpha_0)^2 + (\beta - \beta_0)^2)$ при $(\alpha, \beta) \rightarrow (\alpha_0, \beta_0)$.

Напомним, что точка (α_0, β_0) плоскости параметров (α, β) будет граничной точкой области устойчивости или гиперболичности решения $x = 0$ системы (2.24) тогда и только тогда, когда матрица A_0 является негиперболичной, т.е. имеет собственные значения на мнимой оси. Обсудим вопрос о построении соответствующей границы области устойчивости или гиперболичности при одном из следующих предположений:

- 1°. Матрица A_0 имеет простое собственное значение 0;
- 2°. Матрица A_0 имеет пару простых собственных значений $\pm i\omega_0$, где $\omega_0 > 0$, причем

$$\omega_0 \neq \frac{\pi k}{T} \quad \text{при натуральных } k; \quad (2.25)$$

- 3°. Матрица A_0 имеет пару простых собственных значений $\pm i\omega_0$, где $\omega_0 = \frac{\pi k_0}{T}$ при некотором натуральном k_0 .

При этом предполагается, что остальные собственные значения матрицы A_0 не лежат на мнимой оси. В первом случае топологический тип точки равновесия $x = 0$ равен $(p_-, 1, p_+)$, во втором и в третьем случаях — $(p_-, 2, p_+)$. Аналогично однопараметрическому случаю, первые два случая будем называть *первым нерезонансным случаем* и *вторым нерезонансным случаем*, соответственно; а третий — *резонансным случаем*.

2.3.1 Первый нерезонансный случай

Обозначим через e и g собственные векторы матрицы A_0 и транспонированной матрицы A_0^* , отвечающие собственному значению 0. Эти векторы можно считать нормированными равенствами (1.14) (см. стр. 22).

Положим

$$\chi_1 = \int_0^T (B_1(t)e, g)dt, \quad \chi_2 = \int_0^T (B_2(t)e, g)dt. \quad (2.26)$$

Ниже будем предполагать, что выполнено соотношение:

$$\chi_1^2 + \chi_2^2 > 0. \quad (2.27)$$

Тогда уравнение

$$\chi_1 \cos \varphi + \chi_2 \sin \varphi = 0 \quad (2.28)$$

имеет на промежутке $0 \leq \varphi < 2\pi$ в точности два решения $\varphi = \varphi_0$ и $\varphi = \varphi_0 + \pi$.

Теорема 2.7. Пусть матрица A_0 имеет простое собственное значение 0 и выполнено условие (2.27). Пусть φ_0 является решением уравнения (2.28). Тогда (α_0, β_0) является регулярной граничной точкой области гиперболичности решения $x = 0$ системы (2.24). При этом параметрически заданная прямая

$$\alpha = \alpha_0 + \delta \cos \varphi_0, \quad \beta = \beta_0 + \delta \sin \varphi_0$$

является касательной к граничной кривой γ_0 .

Зададимся произвольным $\varphi^* \in [0, 2\pi)$ таким, чтобы

$$\psi_0 = \chi_1 \cos \varphi^* + \chi_2 \sin \varphi^* \neq 0; \quad (2.29)$$

и параметрически заданной прямой

$$\alpha = \alpha_0 + \delta \cos \varphi^*, \quad \beta = \beta_0 + \delta \sin \varphi^*. \quad (2.30)$$

Теорема 2.8. Пусть матрица A_0 имеет простое собственное значение 0, при этом остальные собственные значения этой матрицы имеют отрицательные вещественные части и выполнено условие (2.27). Тогда решение $x = 0$ системы (2.24), в котором α и β определяются равенством (2.30), будет асимптотически устойчивым при всех малых $|\delta|$ таких, что $\delta\psi_0 < 0$; оно будет неустойчивым, если $\delta\psi_0 > 0$.

Таким образом, в условиях теоремы 2.8 имеем то, что параметрически заданная прямая (2.30) при малых $|\delta|$ содержится в области устойчивости (в области неустойчивости) точки равновесия $x = 0$ системы (2.24), если $\delta\psi_0 < 0$ (если $\delta\psi_0 > 0$).

2.3.2 Второй нерезонансный случай

Обозначим через $e, g, e^*, g^* \in R^N$ ненулевые векторы такие, что выполняются равенства (1.16). Эти векторы можно считать нормированными равенствами (1.17) (см. стр. 24).

Положим

$$\kappa_1 = \int_0^T [(B_1(t)e, e^*) + (B_1(t)g, g^*)] dt, \quad \kappa_2 = \int_0^T [(B_2(t)e, e^*) + (B_2(t)g, g^*)] dt. \quad (2.31)$$

Ниже будем предполагать, что выполнено соотношение:

$$\kappa_1^2 + \kappa_2^2 > 0. \quad (2.32)$$

Тогда уравнение

$$\kappa_1 \cos \varphi + \kappa_2 \sin \varphi = 0 \quad (2.33)$$

имеет на промежутке $0 \leq \varphi < 2\pi$ в точности два решения $\varphi = \varphi_0$ и $\varphi = \varphi_0 + \pi$.

Теорема 2.9. Пусть матрица A_0 имеет пару простых собственных значений $\pm i\omega_0$, где $\omega_0 > 0$. Пусть выполнены условия (2.25) и (2.32). Тогда (α_0, β_0) является регулярной граничной точкой области гиперболичности решения $x = 0$ системы (2.24). При этом параметрически заданная прямая

$$\alpha = \alpha_0 + \delta \cos \varphi_0, \quad \beta = \beta_0 + \delta \sin \varphi_0$$

является касательной к граничной кривой γ_0 .

Зададимся произвольным $\varphi^* \in [0, 2\pi)$ таким, чтобы

$$\psi_0 = \chi_1 \cos \varphi^* + \chi_2 \sin \varphi^* \neq 0; \quad (2.34)$$

и параметрически заданной прямой

$$\alpha = \alpha_0 + \delta \cos \varphi^*, \quad \beta = \beta_0 + \delta \sin \varphi^*. \quad (2.35)$$

Теорема 2.10. Пусть матрица A_0 имеет пару простых собственных значений $\pm i\omega_0$, где $\omega_0 > 0$, при этом остальные собственные значения этой матрицы имеют отрицательные вещественные части. Пусть выполнены условия (2.25) и (2.32). Тогда решение $x = 0$ системы (2.24), в котором α и β определяются равенством (2.35), будет асимптотически устойчивым при всех малых $|\delta|$ таких, что $\delta\psi_0 < 0$; оно будет неустойчивым, если $\delta\psi_0 > 0$.

Таким образом, в условиях теоремы 2.10 имеем то, что параметрически заданная прямая (2.35) при малых $|\delta|$ содержится в области устойчивости (в области неустойчивости) точки равновесия $x = 0$ системы (2.24), если $\delta\psi_0 < 0$ (если $\delta\psi_0 > 0$).

Пример 2.2. Рассмотрим плоские колебания трубы [28, гл. 10, стр. 284 – 289], состоящей из двух жестких звеньев длиной l_1 и l_2 с упругими сочленениями с коэффициентами жесткости c_1 и c_2 (см. рис. 2.1 из [28, стр. 285]). Правый конец трубы свободен. По трубе течет жидкость с плотностью m на единицу длины и пульсирующей скоростью $v(t) = V(1 + \delta \sin t)$, где δ описывает

амплитуду пульсации, а V – среднюю скорость жидкости. Плотность трубы на единицу длины обозначена M . В качестве координат выбраны углы φ и ψ , которые отсчитываются от горизонтальной оси. Положением равновесия является прямая форма трубы $\varphi = \psi = 0$.

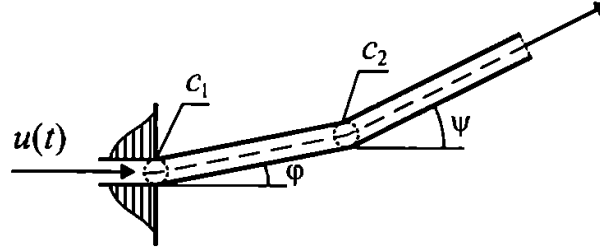


Рис. 2.1. Составная труба, проводящая пульсирующую жидкость

Выберем скалярные параметры λ , σ , μ равными 1, что соответствует равным длинам звеньев и коэффициентам жесткости сочленений, а также погонной плотности жидкости, вдвое меньшей плотности трубы. В таком случае данная колебательная система может быть описана дифференциальным уравнением:

$$x' = G(t, V, \delta)x, \quad x \in R^4, \quad (2.36)$$

где

$$x = \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \\ \varphi' \\ \psi' \end{pmatrix}, \quad G(t, V, \delta) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 + \frac{4}{7} \cdot f(t) & \frac{10}{7} - \frac{4}{7} \cdot f(t) & -\frac{4}{7} \cdot v(t) & -\frac{2}{7} \cdot v(t) \\ 4 - \frac{6}{7} \cdot f(t) & -\frac{22}{7} + \frac{6}{7} \cdot f(t) & \frac{6}{7} \cdot v(t) & -\frac{4}{7} \cdot v(t) \end{pmatrix}. \quad (2.37)$$

Здесь $f(t) = V\delta \cos t + V^2(1 + \delta \sin t)^2$ и $v(t) = V(1 + \delta \sin t)$.

При $\delta = 0$ значение $V_0 = \sqrt{6,2 - 0,4\sqrt{29}} \approx 2,0115$ является критическим, т.е. при таком значении скорости система (2.36) теряет устойчивость [28]. При этом собственные значения матрицы $G_0 = G(t, V_0, 0)$ равны $\pm 2,42i$, $-5,25$ и $-2,8$.

Исследуем устойчивость системы (2.36) в двумерном пространстве параметров (V, δ) в окрестности точки $(V_0, 0)$.

Вычисления по формулам (2.31) показывают, что $\kappa_1 = 5,874\pi$ и $\kappa_2 = 0$. Поэтому по теореме 2.9 получаем, что через точку $(V_0, 0)$ проходит единственная гладкая граничная кривая γ_0 области гиперболичности уравнения (2.36), которая является границей области устойчивости. При этом угол наклона касательной в точке $(V_0, 0)$ равен $\pi/2$.

Выполним трансверсальный переход через граничную кривую γ_0 по прямой, заданной параметрически

$$\alpha = \alpha_0 + \varepsilon \cos \varphi^*, \quad \beta = \beta_0 + \varepsilon \sin \varphi^*, \quad (2.38)$$

где в качестве φ^* выберем угол, равный $\pi/4$.

Согласно условиям теоремы 2.10, двигаясь по прямой (2.38), получим, что при $\varepsilon > 0$ попадаем в область неустойчивости, а при $\varepsilon < 0$ – в область асимптотической устойчивости. Отсюда при $V < V_0$ имеем область асимптотической устойчивости, при $V > V_0$ – область неустойчивости.

Численные расчеты показывают, что решение $x = 0$ уравнения (2.36) является асимптотически устойчивым на прямой $V = V_0$. На рис. 2.2 для иллюстрации изображена кривая γ_0 в плоскости параметров (V, δ) , ограничивающая область устойчивости и неустойчивости для трубы, проводящей пульсирующую жидкость. Область устойчивости заштрихована.

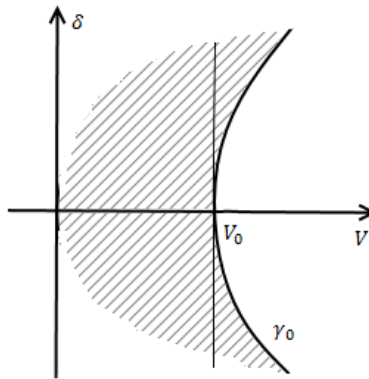


Рис. 2.2. Область устойчивости для трубы, проводящей пульсирующую жидкость

2.3.3 Резонансный случай

Рассмотрим теперь резонансный случай, т.е. случай когда матрица A_0 имеет пару простых собственных значений $\pm i\omega_0$, где $\omega_0 = \frac{\pi k_0}{T}$ при некотором натуральном k_0 (см. стр. 43).

Пусть элементы матрицы $A(t, \alpha, \beta)$ в уравнении (2.23) дважды непрерывно дифференцируемы по α и β . Тогда она представима в виде:

$$A(t, \alpha, \beta) = A_0 + (\alpha - \alpha_0)B_1(t) + (\beta - \beta_0)B_2(t) + (\alpha - \alpha_0)^2 B_{11}(t) + \quad (2.39) \\ + (\beta - \beta_0)^2 B_{22}(t) + (\alpha - \alpha_0)(\beta - \beta_0)B_{12}(t) + B_3(t, \alpha, \beta),$$

где A_0 – постоянная матрица, матрицы $B_j(t)$, $B_{ij}(t)$ и $B_3(t, \alpha, \beta)$ являются T -периодическими по t , при этом матрица $B_3(t, \alpha, \beta)$ равномерно по t удовлетворяет соотношению:

$$\|B_3(t, \alpha, \beta)\| = O((\alpha - \alpha_0)^2 + (\beta - \beta_0)^2)^{3/2} \text{ при } (\alpha, \beta) \rightarrow (\alpha_0, \beta_0).$$

Таким образом, система (2.23) примет вид:

$$\frac{dx}{dt} = (A_0 + (\alpha - \alpha_0)B_1(t) + (\beta - \beta_0)B_2(t) + (\alpha - \alpha_0)^2 B_{11}(t) + \quad (2.40) \\ + (\beta - \beta_0)^2 B_{22}(t) + (\alpha - \alpha_0)(\beta - \beta_0)B_{12}(t) + B_3(t, \alpha, \beta))x + a(x, t, \alpha, \beta), \quad x \in R^N.$$

В резонансном случае через точку (α_0, β_0) может проходить одна или несколько граничных кривых областей гиперболичности. Приведем схему, позволяющую приближенно определять границы областей гиперболичности точки равновесия $x = 0$ системы (2.40). Эти кривые $\mathcal{Y}$, определяющие границы областей гиперболичности, можно описывать некоторыми гладкими функциями вида $\beta = f(\alpha)$ или $\alpha = g(\beta)$. Ограничимся рассмотрением первого варианта, т.е. будем строить границы области гиперболичности уравнения (2.40) как кривые, описываемые гладкой функцией вида $\beta = f(\alpha)$, определенной в некотором интервале $|\alpha - \alpha_0| < \delta$ и такой, что $f(\alpha_0) = \beta_0$. А именно, функцию $\beta = f(\alpha)$ будем строить в виде:

$$f(\alpha) = \beta_0 + \beta_1(\alpha - \alpha_0) + \beta_2(\alpha - \alpha_0)^2 + \eta(\alpha - \alpha_0), \quad (2.41)$$

в котором коэффициенты β_1 и β_2 требуют определения, а нелинейность $\eta(\alpha)$ удовлетворяет соотношению $\eta(\alpha) = O(\alpha^3)$ при $\alpha \rightarrow \alpha_0$. По сути, речь идет о вычислении производных $f'(\alpha_0) = \beta_1$ и $f''(\alpha_0) = 2\beta_2$. В этой связи функцию

$$\widehat{f}(\alpha) = \beta_0 + \beta_1(\alpha - \alpha_0) + \beta_2(\alpha - \alpha_0)^2, \quad (2.42)$$

будем называть *асимптотическим приближением порядка 2* функции $\beta = f(\alpha)$ в точке $\alpha = \alpha_0$. Приводимая в работе схема может быть развита и для построения асимптотических приближений функции $\beta = f(\alpha)$ более высокого порядка.

Замечание 2.1. Конечно, вариант $\beta = f(\alpha)$ не охватывает всевозможные случаи граничных кривых. Поэтому полное исследование задачи требует рассмотрения также варианта $\alpha = g(\beta)$, исследование которого может быть проведено по той же схеме.

2.3.3.1 Предварительные преобразования

Задачу построения границы области гиперболичности или устойчивости будем изучать на основе метода М. Розо [40]. В этой связи отметим, что непосредственно этот метод не проходит, так как матрица A_0 имеет пару простых собственных значений $\pm i\omega_0$, где $\omega_0 = \frac{\pi k_0}{T}$ при некотором натуральном k_0 . Поэтому необходимое условие метода М. Розо, заключающееся в том, чтобы матрица A_0 не имела собственных значений λ_1 и λ_2 таких, что $\lambda_1 - \lambda_2 = \frac{2\pi ki}{T}$, где k – некоторое целое число, здесь не выполнено. В связи с этим преобразуем систему (2.23) к виду, в котором метод М. Розо применим.

Полагая $\delta = \alpha - \alpha_0$ и подставляя (2.41) в (2.40) получим уравнение

$$\frac{dx}{dt} = [A_0 + \delta A_1(t, \beta_1) + \delta^2 A_2(t, \beta_1, \beta_2) + A_3(t, \delta)]x + a(x, t, \alpha, \beta), \quad x \in R^N, \quad (2.43)$$

где обозначено:

$$A_1(t, \beta_1) = B_1(t) + \beta_1 B_2(t), \quad A_2(t, \beta_1, \beta_2) = B_{11}(t) + \beta_1 B_{12}(t) + \beta_1^2 B_{22}(t) + \beta_2 B_2(t),$$

а матрица $A_3(t, \delta)$ удовлетворяет соотношению: $\|A_3(t, \delta)\| = O(\delta^3)$ при $\delta \rightarrow 0$ равномерно по t .

Ниже будем считать, что $B_2(t)$ не равно тождественно 0. Если $B_2(t) \equiv 0$, то смотри выше замечание 2.1.

Здесь и ниже при всех преобразованиях в обозначении нелинейных слагаемых (в уравнении (2.43) – это функция $a(x, t, \alpha, \beta)$) для простоты будем сохранять обозначения параметров α и β .

Обозначим через $e, g, e^*, g^* \in R^N$ ненулевые векторы такие, что выполняются равенства (1.16) и (1.17) (см. на стр. 24), в которых $\omega_0 = \frac{\pi k_0}{T}$. Положим

$$e_1 = \frac{e + ig}{\sqrt{2}}, \quad e_2 = \frac{e - ig}{\sqrt{2}}, \quad e_1^* = \frac{e^* + ig^*}{\sqrt{2}}, \quad e_2^* = \frac{e^* - ig^*}{\sqrt{2}}. \quad (2.44)$$

По построению эти векторы нормированы в соответствии с равенствами

$$(e_1, e_1^*) = (e_2, e_2^*) = 1, \quad (e_1, e_2^*) = (e_2, e_1^*) = 0.$$

Матрица A_0 и транспонированная матрица A_0^* имеют пару простых собственных значений $\pm \omega_0 i$. При этом определенные равенствами (2.44) векторы $e_1, e_1^* \in C^N$ – это собственные векторы операторов A_0 и A_0^* , отвечающие собственным значениям $\omega_0 i$ и $-\omega_0 i$ соответственно. Определим действующий в C^N линейный оператор $Q_1 z = -2\omega_0 i P_1 z$, где $P_1 z = (z, e_1^*) e_1$; P_1 является оператором спектрального проектирования пространства C^N на одномерное собственное подпространство E_1 , отвечающее собственному значению $\omega_0 i$ оператора A_0 .

Уравнение (2.43) можно рассматривать в комплексном пространстве C^N . Произведем в (2.43) замену $y = e^{Q_1 t} x$ с невырожденной T -периодической матрицей $e^{Q_1 t}$. В силу леммы 2.1 (см. стр. 39) эта замена не изменяет топологический тип точки равновесия и приведет (2.43) к виду:

$$\frac{dy}{dt} = [\tilde{A} + \delta \tilde{A}_1(t, \beta_1) + \delta^2 \tilde{A}_2(t, \beta_1, \beta_2) + \tilde{A}_3(t, \delta)] y + \tilde{a}(y, t, \alpha, \beta), \quad y \in C^N, \quad (2.45)$$

в котором

$$\tilde{A} = A_0 + Q_1, \quad \tilde{A}_j = e^{Q_1 t} A_j e^{-Q_1 t} \quad (j = 1, 2, 3), \quad \tilde{a}(y, t, \alpha, \beta) = e^{Q_1 t} a(e^{-Q_1 t} y, t, \alpha, \beta). \quad (2.46)$$

Оператор $\tilde{A}$ имеет полупростое собственное значение $-\omega_0 i$ кратности 2, а остальные его собственные значения имеют ненулевые вещественные части. Обозначим через E_0 – спектральное (двумерное) подпространство оператора $\tilde{A}$, отвечающее собственному значению $-\omega_0 i$, а через $P_0 : C^N \rightarrow E_0$ – оператор спектрального проектирования пространства C^N на подпространство E_0 . Оператор P_0 может быть определен равенством

$$P_0 z = (z, e_1^*) e_1 + (z, e_2^*) e_2. \quad (2.47)$$

Положим $P^0 = I - P_0$ и $E^0 = P^0 C^N$; подпространство E^0 является инвариантным для оператора $\tilde{A}$, при этом оператор $\tilde{A} : E^0 \rightarrow E^0$ является гиперболическим.

Для уравнения (2.45) метод М. Розо уже применим.

2.3.3.2 Вычисление коэффициента β_1

Приведем сначала схему, позволяющую вычислить коэффициент β_1 функции (2.41). На первом этапе рассмотрим зависящее от вспомогательного параметра ξ матричное уравнение

$$\int_0^T e^{-\tilde{A}t} S e^{\tilde{A}t} dt = \int_0^T e^{-\tilde{A}t} \tilde{A}_1(t, \xi) e^{\tilde{A}t} dt, \quad (2.48)$$

в котором $\tilde{A}$ и $\tilde{A}_1(t, \xi)$ – матрицы из (2.46), а неизвестной является квадратная матрица S . Здесь для удобства параметр β_1 из (2.45) переобозначили на ξ .

Так как матрица $\tilde{A}$ имеет полупростое собственное значение $-\omega_0 i$ кратности 2, то, в соответствии с методом М. Розо, справедлива следующая лемма [40, гл. 14, стр. 172–175].

Лемма 2.3. *Уравнение (2.48) имеет единственное решение $S = S(\xi)$, при этом матрица $S(\xi)$ гладко зависит от ξ .*

Тот факт, что функция $S(\xi)$ является гладкой, следует из предположения, что в уравнении (2.40) элементы матрицы $A(\alpha, \beta, t)$ дважды непрерывно дифференцируемы по α и β .

Положим

$$S_0(\xi) = P_0 S(\xi) P_0, \quad (2.49)$$

где P_0 – матрица из (2.47). Матрица $S_0(\xi)$ определяет оператор $S_0(\xi) : E_0 \rightarrow E_0$.

Теорема 2.11. *Пусть существуют ξ^* и $\delta_0 > 0$ такие, что матрица $S_0(\xi^*)$ является негиперболической, при этом матрица $S_0(\xi)$ гиперболична при $\xi \in (\xi^* - \delta_0, \xi^*)$ и $\xi \in (\xi^*, \xi^* + \delta_0)$ с различным топологическим типом на этих интервалах. Тогда существует граница Υ области гиперболичности решения $x = 0$ уравнения (2.40), описываемая функцией (2.41), в которой $\beta_1 = \xi^*$.*

Замечание 2.2. *Так как правая часть уравнения (2.48) линейно зависит от ξ , то матрица $S(\xi)$ также линейно зависит от ξ . Поэтому собственные значения двумерной матрицы (2.49) являются решениями квадратного уравнения вида $\lambda^2 + f(\xi)\lambda + g(\xi) = 0$, где $f(\xi)$ линейно зависит от ξ , а $g(\xi)$ – квадратично. Для таких уравнений, как правило, существуют такие ξ для которых $\lambda = 0$ или $\lambda = \pm \omega i$.*

2.3.3.3 Вычисление коэффициента β_2

Прежде чем перейти к вычислению коэффициента β_2 , отметим следующий полезный факт. Пусть в пространстве C^N в качестве базиса выбраны векторы

$$e_1, e_2, e_3, \dots, e_N, \quad (2.50)$$

где e_1, e_2 – векторы из (2.44), а векторы $e_3, \dots, e_N$ образуют базис в E^0 . Тогда матрица линейного оператора $\tilde{A} : C^N \rightarrow C^N$ будет иметь вид:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -\omega_0 i I_2 & O_{12} \\ O_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad (2.51)$$

где I_2 – единичная матрица порядка 2, A_{22} – квадратная матрица порядка $N - 2$, а O_{12} и O_{21} – нулевые прямоугольные матрицы соответствующих размеров. Далее, в указанном случае решение уравнения (2.48), т.е. матрица $S(\xi)$

представима в виде

$$S(\xi) = \begin{bmatrix} S_0(\xi) & S_{12}(\xi) \\ S_{21}(\xi) & S_{22}(\xi) \end{bmatrix}, \quad (2.52)$$

где $S_0(\xi)$ – матрица (2.49), $S_{22}(\xi)$ – квадратная матрица порядка $N - 2$, а $S_{12}(\xi)$ и $S_{21}(\xi)$ – прямоугольные матрицы соответствующих размеров.

Наряду с матрицей $S(\xi)$ будем также рассматривать матрицу

$$S_1(\xi) = \begin{bmatrix} S_0(\xi) & O_{12} \\ O_{21} & S_{22}(\xi) \end{bmatrix}. \quad (2.53)$$

Ниже для удобства изложения будем считать, что в пространстве C^N в качестве базиса выбраны векторы (2.50) и, следовательно, верны равенства (2.51) и (2.52).

Пусть значение β_1 в соответствии с теоремой 2.11 найдено, т.е. $\beta_1 = \xi^*$. Перейдем к вычислению коэффициента β_2 функции (2.41). Рассмотрим систему (2.45), в которой положим $\beta_1 = \xi^*$, а неизвестное β_2 для удобства переобозначим на ν :

$$\frac{dy}{dt} = [\tilde{A} + \delta P_1(t) + \delta^2 P_2(t, \nu) + \tilde{A}_3(t, \delta)]y + \tilde{a}(y, t, \alpha, \beta), \quad y \in C^N, \quad (2.54)$$

где обозначено

$$P_1(t) = \tilde{A}_1(t, \xi^*), \quad P_2(t, \nu) = \tilde{A}_2(t, \xi^*, \nu).$$

Положим $S_1 = S_1(\xi^*)$, где $S_1(\xi)$ – матрица (2.53). Положим далее

$$H_1(t) = e^{\tilde{A}t} \left[\int_0^t e^{-\tilde{A}\tau} (P_1(\tau) - S_1) e^{\tilde{A}\tau} d\tau \right] e^{-\tilde{A}t}. \quad (2.55)$$

Определим, наконец, матрицу

$$F(t, \nu) = P_2(t, \nu) - H_1(t)P_1(t) + S_1H_1(t) \quad (2.56)$$

и рассмотрим зависящее от параметра ν матричное уравнение

$$\int_0^T e^{-\tilde{A}t} Z e^{\tilde{A}t} dt = \int_0^T e^{-\tilde{A}t} F(t, \nu) e^{\tilde{A}t} dt, \quad (2.57)$$

в котором неизвестной является квадратная матрица Z .

Здесь справедлива лемма, аналогичная лемме 2.3.

Лемма 2.4. *Уравнение (2.57) имеет единственное решение $Z = Z(\nu)$, при этом матрица $Z(\nu)$ гладко зависит от ν .*

Положим

$$Z_0(\nu) = P_0 Z(\nu) P_0 \quad (2.58)$$

и рассмотрим двумерный линейный оператор $Z_0(\nu) : E_0 \rightarrow E_0$.

В силу равенств (2.51)–(2.53) матрица $Z(\nu)$ представима в виде

$$Z(\nu) = \begin{bmatrix} Z_0(\nu) & Z_{12}(\nu) \\ Z_{21}(\nu) & Z_{22}(\nu) \end{bmatrix}.$$

Напомним, что число ξ^* выбрано из условия, что матрица $S_0 = S_0(\xi^*)$ является негиперболической. Тогда в соответствующем базисе матрица S_0 может иметь один из видов:

$$a) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad b) \begin{bmatrix} i\omega_1 & 0 \\ 0 & -i\omega_1 \end{bmatrix}, \quad c) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.59)$$

где λ_2 является ненулевым вещественным числом, а $\omega_1 \geq 0$.

Ограничимся рассмотрением случая, когда матрица $S_0(\xi^*)$ имеет вид а). Остальные случаи рассматриваются по той же схеме в соответствии с приведенным ниже методом М.Розо. В случае а) двумерную матрицу $Z_0(\nu)$ запишем в указанном базисе:

$$Z_0(\nu) = \begin{bmatrix} z_{11}(\nu) & z_{12}(\nu) \\ z_{21}(\nu) & z_{22}(\nu) \end{bmatrix}.$$

Теорема 2.12. *Пусть в условиях теоремы 2.11 матрица $S_0(\xi^*)$ имеет вид а). Пусть при некотором $\nu = \nu^*$ для функции $\tau(\nu) = \operatorname{Re} z_{11}(\nu)$ выполнены соотношения $\tau(\nu^*) = 0$ и $\tau'(\nu^*) \neq 0$. Тогда граница Υ областей гиперболичности решения $x = 0$ уравнения (2.23) описывается функцией (2.41), в которой $\beta_1 = \xi^*$ и $\beta_2 = \nu^*$.*

Теорема 2.12 доказывается аналогично теореме 2.11.

Пример 2.3. Рассмотрим уравнение Матье [15, 42]

$$u'' + (\alpha + \beta \cos 2t)u = 0, \quad (2.60)$$

где α и β – вещественные параметры. Известно, что если $|\beta|$ мало и $\alpha < 0$, то решение $u = 0$ уравнения (2.60) неустойчиво; если же $\alpha \geq 0$, то, как правило, при малых $|\beta|$ решение $u = 0$ является устойчивым, за исключением окрестностей точек $(n^2, 0)$ в пространстве (α, β) , где n – целое неотрицательное число. А именно, области неустойчивости узкими языками вклиниваются в точки $(n^2, 0)$. На рис. 2.3 [42, гл. 2, стр. 113] изображены области устойчивости (заштрихованы) и неустойчивости уравнения Матье.

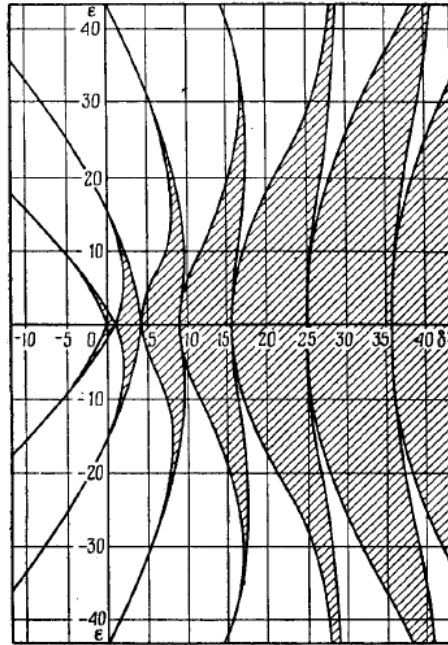


Рис. 2.3. Области устойчивости и неустойчивости уравнения Матье

Уравнение Матье является хорошо изученным многими математиками при помощи классической теории Флоке и численных методов (см., например, [28, гл. 9, стр. 253–25], [42, гл. 2, стр. 111–113]). Здесь же проведем исследование уравнения Матье по алгоритму, приведенному выше.

Приведем для иллюстрации схему построения одного из таких языков для $n = 1$. С этой целью будем рассматривать задачу исследования устойчивости

решения $u = 0$ уравнения (2.60) при значениях α и β , близких к $\alpha_0 = 1$ и $\beta_0 = 0$ соответственно.

Стандартной заменой $z_1 = u$, $z_2 = u'$, приведем уравнение (2.60) к системе вида (2.23), а именно, к линейной системе

$$x' = A(t, \alpha, \beta)x, \quad x \in R^2, \quad (2.61)$$

где

$$A(t, \alpha, \beta) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(\alpha + \beta \cos 2t) & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.62)$$

В этом примере $T = \pi$ и выполняется равенство

$$A_0 = A(t, 1, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.63)$$

Собственные значения этой матрицы равны $\pm i$, т.е. в рассматриваемом примере имеем $\omega_0 = 1$. Наконец, так как $\omega_0 = \frac{\pi k_0}{T}$ при $k_0 = 1$, то для уравнения (2.61) имеет место резонансный случай при $\alpha_0 = 1$ и $\beta_0 = 0$.

Кривую Υ_0 , ограничивающую области устойчивости и неустойчивости уравнения (2.61) и проходящую через точку $(1, 0)$ в плоскости параметров (α, β) , будем искать в виде функции (2.41):

$$\beta = \beta_1 \delta + \beta_2 \delta^2 + \eta(\delta), \quad (2.64)$$

где $\delta = \alpha - 1$, β_1 и β_2 – коэффициенты, требующие определения, а функция $\eta(\delta)$ удовлетворяют соотношению: $\eta(\delta) = o(\delta^2)$ при $\delta \rightarrow 0$.

2.3.3.4 Предварительные преобразования

Вычислим сначала коэффициент β_1 в соответствии с приведенной выше схемой. Уравнение (2.43) в нашем примере имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = [A_0 + \delta A_1(t, \beta_1) + \delta^2 A_2(t, \beta_2) + A_3(t, \delta)]x, \quad x \in R^2, \quad (2.65)$$

где A_0 – матрица (2.63),

$$A_1(t, \beta_1) = -(1 + \beta_1 \cos 2t) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2(t, \beta_2) = -\frac{1}{2} \beta_2 \cos 2t \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Прежде чем приводить уравнение (2.65) к виду (2.45), для удобства вычислений приведем матрицу A_0 к диагональному виду, взяв в качестве базиса в C^2 ее собственные векторы. Другими словами, в (2.65) произведем замену $x = Qz$, где $Q = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}$. Тогда уравнение (2.65) примет вид

$$\frac{dz}{dt} = [A_{00} + \delta A_{10}(t, \beta_1) + \delta^2 A_{20}(t, \beta_2) + A_{30}(t, \delta)]z, \quad z \in C^2, \quad (2.66)$$

где

$$A_{00} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \quad A_{10}(t, \beta_1) = -\frac{1}{2}(1 + \beta_1 \cos 2t) \begin{bmatrix} -i & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix},$$

$$A_{20}(t, \beta_2) = -\frac{1}{4}\beta_2 \cos 2t \begin{bmatrix} -i & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix}.$$

Приведем теперь полученное уравнение (2.66) к виду (2.45). Для этого надо в (2.66) произвести замену $y = e^{Q_1 t} z$, в которой оператор Q_1 определяется равенством $Q_1 x = -2\omega_0 i(x, e_1^*)e_1$. В нашем случае имеем $e_1 = e_1^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ и, следовательно, матрица оператора Q_1 определяется равенством $Q_1 = \begin{bmatrix} -2i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Тогда замена $y = e^{Q_1 t} z$ приведет уравнение (2.66) к виду (2.45):

$$\frac{dy}{dt} = [\tilde{A} + \delta \tilde{A}_1(t, \beta_1) + \delta^2 \tilde{A}_2(t, \beta_2) + \tilde{A}_3(t, \delta)]y, \quad y \in C^2,$$

в котором

$$\tilde{A} = -i \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}_1(t, \beta_1) = -\frac{1}{2}(1 + \beta_1 \cos 2t) \begin{bmatrix} -i & e^{-2it} \\ e^{2it} & i \end{bmatrix},$$

$$\tilde{A}_2(t, \beta_2) = -\frac{1}{2}\beta_2 \cos 2t \begin{bmatrix} -i & e^{-2it} \\ e^{2it} & i \end{bmatrix}.$$

2.3.3.5 Вычисление коэффициента β_1

Перейдем, наконец, к рассмотрению матричного уравнения (2.48). Так как $\tilde{A} = -iI$, где I – единичная матрица, то уравнение (2.48) здесь имеет вид

$$\int_0^\pi S dt = \int_0^\pi \tilde{A}_1(\xi, t) dt,$$

а его решение – это матрица:

$$S(\xi) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2i & -\xi \\ -\xi & -2i \end{bmatrix}. \quad (2.67)$$

Так как собственные значения матрицы $S(\xi)$ являются решениями уравнения $\lambda^2 = \frac{\xi^2 - 4}{16}$, то условия теоремы 2.11 выполнены при $\xi = \pm 2$. Следовательно, для коэффициента β_1 в представлении функции (2.64) получаем два возможных значения: $\beta_1 = 2$ и $\beta_1 = -2$. Эти значения определяют углы $\varphi = \pm \arctg 2$ наклона касательных к границам областей устойчивости и неустойчивости уравнения Матье (2.60) в точке $(1, 0)$ в пространстве параметров (α, β) .

Замечание 2.3. Условие теоремы 2.11 выполняется не только при $\xi = \pm 2$, но и при $|\xi| < 4$. Но в этом случае получаемое значение $\beta_1 = \xi$ и соответствующая кривая не является граничной для области устойчивости уравнения Матье, т.к. в этом случае собственные значения матрицы $\tilde{A} + \delta S(\xi)$ будут чисто мнимыми при любых δ и при любых ξ из интервала $|\xi| < 4$.

2.3.3.6 Вычисление коэффициента β_2

Вычислим теперь коэффициент β_2 в представлении функции (2.64). Пусть для определенности $\beta_1 = 2$. Положим

$$S_1 = S(2) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} i & -1 \\ -1 & -i \end{bmatrix}. \quad (2.68)$$

Тогда в системе (2.54) имеем

$$P_1(t) = \tilde{A}_1(t, 2) = -\frac{1}{2}(1 + 2 \cos 2t) \begin{bmatrix} -i & e^{-2it} \\ e^{2it} & i \end{bmatrix},$$

$$P_2(t, \nu) = \tilde{A}_2(t, \nu) = -\frac{1}{2}\nu \cos 2t \begin{bmatrix} -i & e^{-2it} \\ e^{2it} & i \end{bmatrix}.$$

В силу того, что $\tilde{A} = -iI$, матрица (2.55) равна:

$$\begin{aligned} H_1(t) &= \int_0^t (P_1(\tau) - S_1) d\tau = \\ &= -\frac{1}{8} \begin{bmatrix} -4i \sin 2t & 2ie^{-2it} + ie^{-4it} - 3i \\ -2ie^{2it} - ie^{4it} + 3i & 4i \sin 2t \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Тогда матрица (2.56) равна:

$$F(t, \nu) = P_2(t, \nu) - H_1(t)P_1(t) + S_1H_1(t) = \begin{bmatrix} f_{11}(t, \nu) & f_{12}(t, \nu) \\ f_{21}(t, \nu) & f_{22}(t, \nu) \end{bmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} f_{11}(t, \nu) &= \frac{1}{2}\nu i \cos 2t - \frac{1}{16}(-2i + 4i \cos 2t - 2i \cos^2 2t + 2 \sin 2t - \sin 4t), \\ f_{12}(t, \nu) &= -\frac{1}{2}\nu e^{-2it} \cos 2t - \frac{1}{16}(2 - 2e^{-4it} - 2ie^{-2it} \sin 4t), \\ f_{21}(t, \nu) &= f_{12}(\nu, -t), \\ f_{22}(t, \nu) &= -\frac{1}{2}\nu i \cos 2t - \frac{1}{16}(2i - 4i \cos 2t + 2i \cos^2 2t + 2 \sin 2t - \sin 4t). \end{aligned}$$

Наконец, решение матричного уравнения (2.57) имеет вид:

$$Z(\nu) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi F(t, \nu) dt = \begin{bmatrix} \frac{3}{16}i & -\frac{1}{4}\nu - \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{4}\nu - \frac{1}{8} & -\frac{3}{16}i \end{bmatrix}. \quad (2.70)$$

Таким образом, согласно методу М.Розо вопрос об устойчивости системы (2.61) равносильен вопросу об устойчивости системы

$$\frac{dy}{dt} = [-iI + \delta S_1 + \delta^2 Z(\nu) + \tilde{A}_3(t, \delta)]y, \quad y \in C^2. \quad (2.71)$$

Отметим, что так как определенная равенством (2.68) матрица S_1 имеет ненулевое собственное значение 0 кратности два, то имеет место указанный в (2.59) случай с).

В системе (2.71) произведем невырожденную периодическую замену $x = e^{it}y$; тогда получим систему

$$\frac{dx}{dt} = [\delta S_1 + \delta^2 Z(\nu) + \tilde{A}_3(t, \delta)]x, \quad x \in C^2. \quad (2.72)$$

Для удобства вычислений приведем матрицу S_1 к каноническому виду, взяв в качестве базиса в C^2 ее собственный и присоединенный векторы. Другими словами, в (2.72) произведем замену $x = Qz$, где $Q = \begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & -1 \end{bmatrix}$. Тогда придем к системе:

$$\frac{dz}{dt} = [\delta \tilde{S}_1 + \delta^2 \tilde{Z} + Q^{-1} \tilde{A}_3(t, \delta) Q]z, \quad z \in C^2, \quad (2.73)$$

где $\tilde{S}_1 = Q^{-1} S_1 Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\tilde{Z} = Q^{-1} Z Q = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4}\nu + \frac{5}{16} \\ \frac{1}{4}\nu - \frac{1}{16} & 0 \end{bmatrix}$.

По схеме, указанной в п.1.5.1 (см. стр. 72) для случая неполупростого собственного значения, положим

$$e = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad e^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad g^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$Q_1 x = (x, g^*)e, \quad Q_2 x = (x, e^*)g, \quad Q_3 x = (x, e^*)e, \quad Q_0(\varepsilon) = Q_1 + \varepsilon Q_2,$$

где ε – малый параметр. При $\varepsilon \neq 0$ оператор $Q_0(\varepsilon)$ обратим, при этом

$$(Q_0(\varepsilon))^{-1} = Q_1 + \frac{1}{\varepsilon} Q_2.$$

Так как $\beta_1 = 2$, то не ограничивая общности в (2.64) можно считать, что $\delta > 0$. Перейдем от δ к новому малому вещественному параметру ε , связанному с δ равенством $\varepsilon = \sqrt{\delta}$. При этом произведем в уравнении (2.73) при $\varepsilon > 0$ замену $z = Q_0(\varepsilon)x$. Тогда получим уравнение:

$$\frac{dx}{dt} = [\varepsilon^3 \hat{S}_1 + \varepsilon^5 \hat{Z} + (Q_0(\varepsilon))^{-1} Q^{-1} \tilde{A}_3(t, \varepsilon) Q Q_0(\varepsilon)]x, \quad x \in C^2,$$

где

$$\hat{S}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4}\nu - \frac{1}{16} & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{Z} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4}\nu + \frac{5}{16} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Матрица $\widehat{S}_1$ устойчива при $\nu < 1/4$ и неустойчива при $\nu > 1/4$. Следовательно, в соответствии с аналогом теоремы 2.12 можно положить $\nu^* = \frac{1}{4}$.

Аналогично, если в представлении функции (2.64) взять $\beta_1 = -2$, то получим $\nu^* = -\frac{1}{4}$.

Таким образом, искомые границы областей устойчивости описываются функциями (2.64) вида:

$$\beta = 2(\alpha - 1) + \frac{1}{4}(\alpha - 1)^2 + \eta_1(\alpha - 1),$$

$$\beta = -2(\alpha - 1) - \frac{1}{4}(\alpha - 1)^2 + \eta_2(\alpha - 1),$$

где функции $\eta_j(\delta)$ удовлетворяют соотношениям: $\eta_j(\delta) = o(\delta^2)$ при $\delta \rightarrow 0$. На рис. 2.4 для иллюстрации изображены соответствующие кривые, ограничивающие области устойчивости и неустойчивости уравнения Матье (области устойчивости заштрихованы).

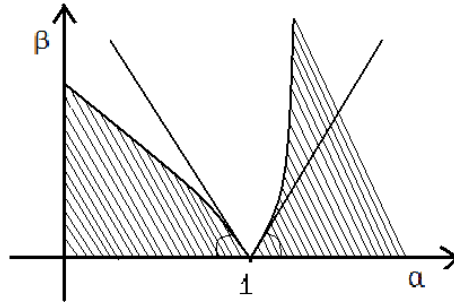


Рис. 2.4. Области устойчивости уравнения Матье

Пример 2.4. Рассмотрим уравнение Дюффинга [44, стр. 420]

$$u'' + \beta u' + (\omega_0^2 + \alpha \cos t)u = u^3, \quad (2.74)$$

где α и β – вещественные параметры, ω_0 – некоторое положительное действительное число.

Приведем схему построения областей устойчивости решения $u = 0$ уравнения (2.74) при значениях α и β , близких к $\alpha_0 = 0$ и $\beta_0 = 0$ соответственно, по алгоритму, приведенному выше.

Стандартной заменой $x_1 = u$, $x_2 = u'$, приведем уравнение (2.74) к системе вида

$$x' = A(t, \alpha, \beta)x + a(x), \quad x \in R^2, \quad (2.75)$$

где

$$A(t, \alpha, \beta) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(\omega_0^2 + \alpha \cos t) & -\beta \end{bmatrix}, \quad a(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ -x_1^3 \end{bmatrix}. \quad (2.76)$$

Матрица $A(t, \alpha, \beta)$ является периодической периода $T = 2\pi$, при этом матрица

$$A_0 = A(t, 0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.77)$$

от t не зависит и имеет собственные значения вида $\lambda_{1,2} = \pm \omega_0 i$.

В зависимости от ω_0 здесь может реализоваться либо второй нерезонансный, либо резонансный случай. В случае, когда $\omega_0 \neq \frac{k}{2}$, где k – натуральное число, реализуется второй нерезонансный случай. В случае, когда ω_0 равен одному из чисел $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \dots$ – реализуется резонансный случай.

Рассмотрим сначала случай когда $\omega_0 \neq \frac{\pi k}{T}$ при натуральных k , т.е. второй нерезонансный случай. Для определенности, пусть $\omega_0 = \sqrt{2}$. Тогда вычисления по формулам (2.31) показывают, что $\kappa_1 = 0$ и $\kappa_2 = -\pi$. Согласно условию теоремы 2.9 получаем, что через точку $(0, 0)$ плоскости параметров (α, β) проходит единственная гладкая граничная кривая области гиперболичности (устойчивости) решения $x = 0$ уравнения (2.75). Прямая $\beta = 0$ является касательной к этой граничной кривой (см. рис. 2.5 а, область устойчивости заштрихована).

Рассмотрим теперь случай когда $\omega_0 = \frac{\pi k}{T}$ при натуральных k , т.е. резонансный случай. Для определенности, пусть $\omega_0 = \frac{1}{2}$.

В этом случае кривую Υ_0 , ограничивающую области устойчивости и неустойчивости уравнения (2.75) и проходящую через точку $(0, 0)$ в плоскости параметров (α, β) , будем искать в виде функции (2.41):

$$\beta = f(\delta) = \beta_1 \delta + \beta_2 \delta^2 + \eta(\delta), \quad (2.78)$$

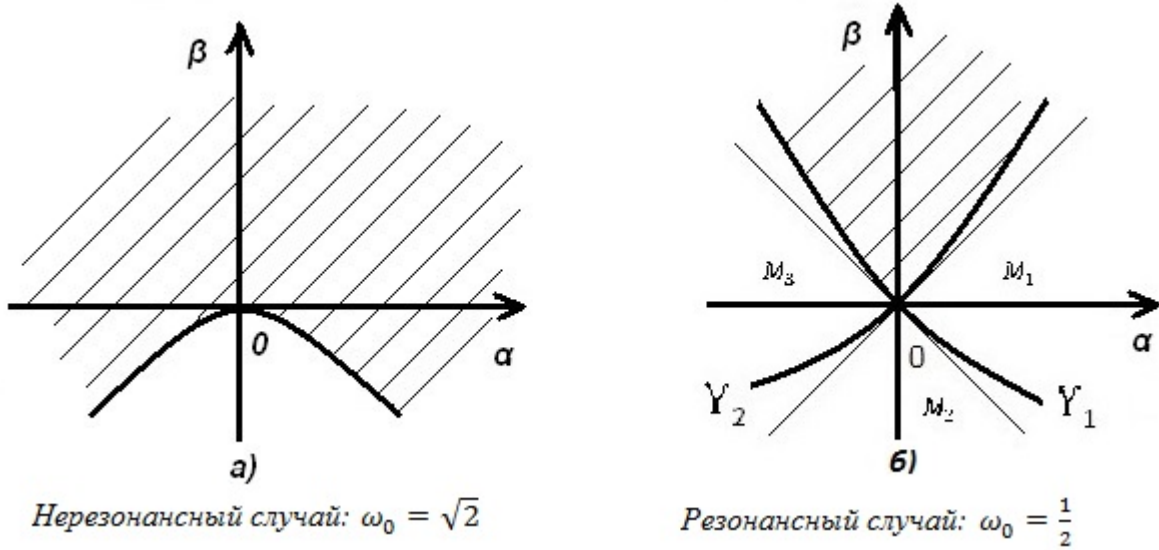


Рис. 2.5. Области устойчивости уравнения Дюффинга

где $\delta = \alpha - 0$, β_1 и β_2 – коэффициенты, требующие определения, а функция $\eta(\delta)$ удовлетворяет соотношению: $\eta(\delta) = o(\delta^2)$ при $\delta \rightarrow 0$.

2.3.3.7 Вычисление коэффициента β_1

Вычислим сначала коэффициент β_1 в соответствии с приведенной выше схемой. Уравнение (2.43) в нашем примере имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = [A_0 + \delta A_1(t, \beta_1) + \delta^2 A_2(t, \beta_2) + A_3(t, \delta)]x + a(x), \quad x \in R^2, \quad (2.79)$$

где A_0 – матрица (2.77),

$$A_1(t, \beta_1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\cos t & -\beta_1 \end{bmatrix}, \quad A_2(t, \beta_2) = -\beta_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Прежде чем приводить уравнение (2.79) к виду (2.45), для удобства вычислений приведем матрицу A_0 к диагональному виду, взяв в качестве базиса в C^2 ее собственные векторы. Другими словами, в (2.79) произведем замену $x = Qz$, где $Q = \begin{bmatrix} 2 & 2i \\ i & 1 \end{bmatrix}$. Тогда уравнение (2.79) примет вид

$$\frac{dz}{dt} = [A_{00} + \delta A_{10}(t, \beta_1) + \delta^2 A_{20}(t, \beta_2) + A_{30}(t, \delta)]z + a_0(z), \quad z \in C^2, \quad (2.80)$$

где

$$A_{00} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}i & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}i \end{bmatrix}, \quad A_{10}(t, \beta_1) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2i \cos t - \beta_1 & -2 \cos t + i\beta_1 \\ -2 \cos t - i\beta_1 & -2i \cos t - \beta_1 \end{bmatrix},$$

$$A_{20}(t, \beta_2) = -\frac{1}{2}\beta_2 \begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix}, \quad a_0(z) = \frac{1}{128}(z_1 - 2iz_2)^3 \begin{bmatrix} i \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Приведем теперь полученное уравнение (2.80) к виду (2.45). Для этого надо в (2.80) произвести замену $y = e^{Q_1 t} z$, в которой оператор Q_1 определяется равенством $Q_1 x = -2\omega_0 i(x, e_1^*)e_1$. В нашем случае имеем $e_1 = e_1^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ и, следовательно, матрица оператора Q_1 определяется равенством $Q_1 = \begin{bmatrix} -2i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Тогда замена $y = e^{Q_1 t} z$ приведет уравнение (2.80) к виду (2.45):

$$\frac{dy}{dt} = [\tilde{A} + \delta \tilde{A}_1(t, \beta_1) + \delta^2 \tilde{A}_2(t, \beta_2) + \tilde{A}_3(t, \delta)]y + \tilde{a}(y, t), \quad y \in C^2,$$

в котором

$$\tilde{A} = -\frac{1}{2}i \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}_1(t, \beta_1) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2i \cos t - \beta_1 & e^{-it}(-2 \cos t + i\beta_1) \\ e^{it}(-2 \cos t - i\beta_1) & -2i \cos t - \beta_1 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{A}_2(t, \beta_2) = -\frac{1}{2}\beta_2 \begin{bmatrix} 1 & -ie^{-it} \\ ie^{it} & 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}_3 = e^{P_1 t} A_{30} e^{-P_1 t},$$

$$\tilde{a}(y, t) = \frac{1}{128}(e^{it}y_1 - 2iy_2)^3 \begin{bmatrix} ie^{-it} \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Перейдем, наконец, к рассмотрению матричного уравнения (2.48). Так как $\tilde{A} = -\frac{1}{2}iI$, где I – единичная матрица, то

$$e^{\tilde{A}t} = e^{-\frac{1}{2}it} I. \quad (2.81)$$

Поэтому уравнение (2.48) в нашем примере имеет вид

$$\int_0^{2\pi} S dt = \int_0^{2\pi} \tilde{A}_1(t, \beta) dt,$$

а его решение – это матрица:

$$S(\beta) = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \beta & 1 \\ 1 & \beta \end{bmatrix}. \quad (2.82)$$

Так как собственные значения матрицы $S(\beta)$ являются решениями уравнения $(\frac{1}{2}\beta + \lambda)^2 = \frac{1}{4}$, то условия теоремы 2.11 выполнены при $\beta = \pm 1$. Следовательно, для коэффициента β_1 в представлении функции (2.78) получаем два возможных значения: $\beta_1 = 1$ и $\beta_1 = -1$. Эти значения определяют углы $\varphi = \pm \frac{\pi}{4}$ наклона касательных к границам областей устойчивости и неустойчивости уравнения Дюффинга (2.74) в точке $(0, 0)$ в пространстве параметров (α, β) (см. рис. 2.5 б, область устойчивости заштрихована).

2.3.3.8 Вычисление коэффициента β_2

Вычислим теперь коэффициент β_2 в представлении функции (2.78). Пусть для определенности $\beta_1 = 1$. Подставляя значение $\beta = 1$ в (2.82), получим матрицу

$$S_1 = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.83)$$

Система (2.54) в нашем случае примет вид

$$\frac{dy}{dt} = [\tilde{A} + \delta P_1(t) + \delta^2 P_2(t, \beta) + \tilde{A}_3(t, \delta)]y + \tilde{a}(y, t), \quad y \in C^2, \quad (2.84)$$

где положено

$$P_1(t) = \tilde{A}_1(t, 1) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2i \cos t - 1 & e^{-it}(-2 \cos t + i) \\ e^{it}(-2 \cos t - i) & -2i \cos t - 1 \end{bmatrix},$$

$$P_2(t, \beta) = \tilde{A}_2(t, \beta) = -\frac{1}{2}\beta \begin{bmatrix} 1 & -ie^{-it} \\ ie^{it} & 1 \end{bmatrix}.$$

В силу равенства (2.81) матрица (2.55) равна:

$$H_1(t) = \int_0^t (P_1(\tau) - S_1) d\tau = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 4i \sin t & -ie^{-2it} - 2e^{-it} + i + 2 \\ ie^{2it} - 2e^{it} - i + 2 & -4i \sin t \end{bmatrix}, \quad (2.85)$$

где S_1 – матрица (2.83).

Тогда матрица (2.56) равна:

$$F(t, \beta) = P_2(t, \beta) - H_1(t)P_1(t) + S_1H_1(t) = \begin{bmatrix} f_{11}(\beta, t) & f_{12}(\beta, t) \\ f_{21}(\beta, t) & f_{22}(\beta, t) \end{bmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} f_{11}(t, \beta) &= -\frac{1}{2}\beta - \frac{1}{8}(-2\sin 2t + 2\cos t - 4e^{it}\cos t + i - 2ie^{it} + ie^{2it} + 2); \\ f_{12}(t, \beta) &= \frac{1}{2}i\beta e^{-it} - \frac{1}{8}(-2e^{-it}\cos^2 t - 3ie^{-it}\sin 2t + 4i + 2\cos t - 4i\cos t - 4i\sin t); \\ f_{21}(t, \beta) &= -\frac{1}{2}i\beta e^{it} - \frac{1}{8}(-2e^{it}\cos^2 t + 3ie^{it}\sin 2t - 4i + 2\cos t + 4i\cos t + 4i\sin t); \\ f_{22}(t, \beta) &= -\frac{1}{2}\beta - \frac{1}{8}(-2\sin 2t + 2\cos t - 4e^{-it}\cos t - i + 2ie^{-it} - ie^{-2it} + 2). \end{aligned}$$

Наконец, решение матричного уравнения (2.57) имеет вид:

$$S(\beta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(t, \beta) dt = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\beta - \frac{1}{8}i & -\frac{1}{2}i \\ \frac{1}{2}i & -\frac{1}{2}\beta + \frac{1}{8}i \end{bmatrix}. \quad (2.86)$$

Определим матрицу

$$\begin{aligned} B(\delta, \beta) &= -\frac{1}{2}iI + \delta S_1 + \delta^2 S(\beta) = -\frac{1}{2}i \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\delta \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \\ &+ \delta^2 \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\beta - \frac{1}{8}i & -\frac{1}{2}i \\ \frac{1}{2}i & -\frac{1}{2}\beta + \frac{1}{8}i \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.87)$$

Для удобства вычислений приведем матрицу S_1 к диагональному виду, взяв в качестве базиса в C^2 ее собственные векторы. Другими словами, найдем матрицу $Q^{-1}B(\delta, \beta)Q$, где $Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Итак, матрица

$$\tilde{B} = Q^{-1}B(\delta, \beta)Q = -\frac{1}{2}i \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \delta \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \frac{\delta^2}{2} \begin{bmatrix} -\beta & -\frac{5i}{4} \\ \frac{3i}{4} & -\beta \end{bmatrix}. \quad (2.88)$$

Рассмотрим линейную систему

$$\frac{dx}{dt} = \tilde{B}x. \quad (2.89)$$

Сделав замену $y = e^{\frac{1}{2}it}x$ в системе (2.89), получим систему

$$\frac{dy}{dt} = \left(\delta \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \frac{\delta^2}{2} \begin{bmatrix} -\beta & -\frac{5i}{4} \\ \frac{3i}{4} & -\beta \end{bmatrix} \right) y. \quad (2.90)$$

Откуда, в силу теоремы 2.12, получаем, что $\beta = 0$.

Таким образом, искомая граница области устойчивости описывается функцией (2.78) вида:

$$\beta = \alpha + \eta(\alpha),$$

где функция $\eta(\alpha)$ удовлетворяет соотношению: $\eta(\alpha) = o(\alpha^2)$ при $\alpha \rightarrow 0$. На рис. 2.5 б для иллюстрации изображены соответствующие кривые, ограничивающие области устойчивости и неустойчивости уравнения Дюффинга (области устойчивости заштрихованы).

2.4 Доказательства основных утверждений

2.4.1 Вспомогательные сведения

В этом параграфе приводятся вспомогательные сведения, используемые для построения границ областей гиперболичности и устойчивости нелинейных периодических систем в предыдущих параграфах данной главы.

2.4.1.1 Метод М. Розо

В работе используется метод М.Розо, предложенный в [40] для линейных дифференциальных уравнений

$$z' = [A + \varepsilon P_1(t) + \varepsilon^2 P_2(t) + \dots + \varepsilon^k P_k(t) + \varepsilon^{k+1} Q(t, \varepsilon)]z, \quad z \in C^N, \quad (2.91)$$

с периодическими коэффициентами и постоянной матрицей A . Метод предлагает способ перехода к равносильному уравнению вида

$$y' = [A + \varepsilon S_1 + \varepsilon^2 S_2 + \dots + \varepsilon^k S_k + \varepsilon^{k+1} \tilde{Q}(t, \varepsilon)]y, \quad y \in C^N, \quad (2.92)$$

где $S_1, S_2, \dots, S_k$ – постоянные матрицы, а $\tilde{Q}(t, \varepsilon)$ – непрерывная периодическая матрица. Такой переход позволяет решить задачу исследования устойчивости указанной линейной системы путем построения собственных значений постоянной матрицы $A + \varepsilon S_1 + \varepsilon^2 S_2 + \dots + \varepsilon^k S_k$, например, методами теории возмущений [17] (ниже этот вопрос обсуждается более подробно). В этом параграфе метод М. Розо применяется для исследования некоторых нелинейных уравнений, а именно метод М. Розо используется для преобразования соответствующих линеаризованных уравнений.

Использование первого приближения

Рассмотрим сначала зависящее от малого параметра ε дифференциальное уравнение

$$\frac{dz}{dt} = [A + \varepsilon P(t) + \varepsilon^2 Q(t, \varepsilon)]z + a(z, t, \varepsilon), \quad z \in C^N, \quad (2.93)$$

где A – постоянная матрица, $P(t)$ и $Q(t, \varepsilon)$ – непрерывные матрицы, $a(z, t, \varepsilon)$ – непрерывно-дифференцируемая по z и непрерывная по t и ε вектор-функция, удовлетворяющая условию: $\|a(z, t, \varepsilon)\| = O(\|z\|^2)$ при $z \rightarrow 0$. При этом $P(t)$, $Q(t, \varepsilon)$ и $a(z, t, \varepsilon)$ являются T -периодическими по t . Элементы матриц A , $P(t)$ и $Q(t, \varepsilon)$, а также вектор-функции $a(z, t, \varepsilon)$ и параметр ε могут быть как вещественными, так и комплексными.

Пусть матрица A имеет одно или несколько собственных значений с нулевой вещественной частью, а остальные собственные значения имеют отрицательные вещественные части. В этом случае при малых $|\varepsilon|$ свойства устойчивости решения $z = 0$ уравнения (2.93) зависят от мультипликаторов T -периодической матрицы $A + \varepsilon P(t)$. Однако, явное построение этих мультипликаторов возможно лишь в самых простых случаях.

Для исследования устойчивости решения $z = 0$ нелинейного уравнения (2.93) предлагается перейти к равносильному уравнению

$$\frac{dy}{dt} = [A + \varepsilon S + \varepsilon^2 \tilde{Q}(t, \varepsilon)]y + \tilde{a}(y, t, \varepsilon), \quad y \in C^N, \quad (2.94)$$

где S – постоянная матрица. Переход можно осуществить используя замену

$$y = (I - \varepsilon H(t))z, \quad (2.95)$$

где $H(t)$ – некоторая невырожденная T -периодическая матрица. Формула для построения матрицы $H(t)$ будет приведена ниже. Здесь же отметим, что таких матриц и, следовательно, матриц S существует бесконечно много, при этом для построения матрицы S совсем не обязательно знать матрицу $H(t)$.

Приведем схему построения матрицы S . С этой целью введем следующее понятие. Будем говорить, что квадратная матрица A является T -резонансной, если она имеет хотя бы одну пару различных собственных значений λ_1 и λ_2 , удовлетворяющую соотношению: $\lambda_1 - \lambda_2 = \frac{2\pi qi}{T}$ при некотором целом q . В частности, вещественная матрица A является T -резонансной, если она имеет хотя бы одну пару собственных значений вида $\pm \frac{\pi qi}{T}$ при некотором целом q .

Рассмотрим матричное уравнение

$$\int_0^T e^{-A\tau} S e^{A\tau} d\tau = \int_0^T e^{-A\tau} P(\tau) e^{A\tau} d\tau, \quad (2.96)$$

с неизвестной матрицей S ; здесь A и $P(t)$ – матрицы из уравнения (2.93). Имеют место следующие утверждения [40].

Лемма 2.5. *Уравнение (2.96) имеет единственное решение $S = S_0$ тогда и только тогда, когда матрица A не является T -резонансной.*

Теорема 2.13. *Пусть матрица A не является T -резонансной. Тогда замена (2.95), где*

$$H(t) = e^{At} \left[\int_0^t e^{-A\tau} (P(\tau) - S_0) e^{A\tau} d\tau \right] e^{-At}, \quad (2.97)$$

а S_0 – единственное решение уравнения (2.96), приводит уравнение (2.93) к виду (2.94), в котором следует положить $S = S_0$.

Таким образом, если матрица A не является T -резонансной, то замена (2.95) приводит уравнение (2.93) к виду (2.94).

Пусть теперь матрица A является T -резонансной. В этом случае необходимо провести предварительное преобразование $x = U(t)z$ с T -периодической невырожденной матрицей $U(t)$, с помощью которого исходная система (2.93)

сводится к равносильному виду

$$\frac{dx}{dt} = [\tilde{A} + \varepsilon \tilde{P}(t) + \varepsilon^2 \tilde{Q}(t, \varepsilon)]x + \tilde{a}(x, t, \varepsilon), \quad x \in C^N, \quad (2.98)$$

в котором матрица $\tilde{A}$ уже не является T -резонансной. Пусть, например, для некоторых двух различных полупростых собственных значений λ_1 и λ_2 матрицы A выполнено равенство $\lambda_1 - \lambda_2 = \frac{2\pi}{T}qi$ при некотором целом q . Обозначим через E_1 спектральное подпространство оператора A , отвечающее собственному значению λ_1 , а через $P_1 : C^N \rightarrow E_1$ – оператор спектрального проектирования. Полагая $\tilde{P}_1 = -\frac{2\pi}{T}qiP_1$, произведем в (2.93) замену $x = e^{\tilde{P}_1 t}z$ с T -периодической матрицей $e^{\tilde{P}_1 t}$. Тогда получим систему (2.98) требуемого вида, в которой $\tilde{A} = A + \tilde{P}_1$.

Таким образом, для произвольной матрицы A существует бесконечно много различных замен вида (2.95), приводящих (2.93) к виду (2.94).

Использование последующих приближений

Рассмотрим теперь более общую постановку задачи, а именно, рассмотрим уравнение (2.93) вида:

$$\frac{dz}{dt} = [A + \varepsilon P_1(t) + \varepsilon^2 P_2(t) + \varepsilon^3 Q(t, \varepsilon)]z + a(z, t, \varepsilon), \quad z \in C^N, \quad (2.99)$$

где A , $Q(t, \varepsilon)$ и $a(z, t, \varepsilon)$ имеют тот же смысл, что и в уравнении (2.93), $P_1(t)$ и $P_2(t)$ непрерывные T -периодические матрицы.

Приведем схему перехода от (2.99) к равносильному уравнению

$$\frac{dy}{dt} = [A + \varepsilon S_1 + \varepsilon^2 S_2 + \varepsilon^3 \tilde{Q}(t, \varepsilon)]y + \tilde{a}(y, t, \varepsilon), \quad y \in C^N, \quad (2.100)$$

где S_1 и S_2 – постоянные матрицы. Переход можно осуществить используя замену

$$y = (I - \varepsilon H_1(t) - \varepsilon^2 H_2(t))z, \quad (2.101)$$

где $H_1(t)$ и $H_2(t)$ – некоторые невырожденные T -периодические матрицы.

Будем считать, что матрица A не является T -резонансной; если это не так, то следует предварительно преобразовать матрицу так, как говорилось

выше. Пусть, далее, матрицы S_1 и $H_1(t)$ уже определены по приведенной выше схеме. А именно, пусть для определенности S_1 – это единственное решение аналога матричного уравнения (2.96):

$$\int_0^T e^{-A\tau} S e^{A\tau} d\tau = \int_0^T e^{-A\tau} P_1(\tau) e^{A\tau} d\tau; \quad (2.102)$$

пусть $H_1(t)$ определяется в соответствии с равенством (2.97):

$$H_1(t) = e^{At} \left[\int_0^t e^{-A\tau} (P_1(\tau) - S_1) e^{A\tau} d\tau \right] e^{-At}. \quad (2.103)$$

Далее положим

$$\tilde{P}_2(t) = P_2(t) - H_1(t)P_1(t) + S_1 H_1(t)$$

и рассмотрим матричное уравнение

$$\int_0^T e^{-A\tau} S e^{A\tau} d\tau = \int_0^T e^{-A\tau} \tilde{P}_2(\tau) e^{A\tau} d\tau, \quad (2.104)$$

с неизвестной матрицей S . Так как матрица A не является T -резонансной, то уравнение (2.104) имеет единственное решение, которое и можно использовать в качестве матрицы S_2 . А именно, верна (см. [40])

Теорема 2.14. *Пусть матрица A не является T -резонансной. Пусть S_1 и S_2 – единственные решения уравнений (2.102) и (2.104) соответственно. Тогда замена (2.101), где $H_1(t)$ – матрица (2.103),*

$$H_2(t) = e^{At} \left[\int_0^t e^{-A\tau} (\tilde{P}_2(\tau) - S_2) e^{A\tau} d\tau \right] e^{-At}, \quad (2.105)$$

приводит уравнение (2.99) к виду (2.100).

Отметим, что по аналогичной схеме можно изучать и последующие приближения.

Случай неполупростого собственного значения

Таким образом, метод М.Розо позволяет свести вопрос об устойчивости нулевого решения уравнения (2.91) к аналогичному вопросу для уравнения (2.92), который, в свою очередь, может быть исследован путем построения

собственных значений постоянной матрицы $A + \varepsilon S_1 + \varepsilon^2 S_2 + \dots + \varepsilon^k S_k$, зависящей от малого параметра ε . Указанная задача может быть решена методами теории возмущений линейных операторов [17, 22] (см. также следующий пункт). Отметим в этой связи, что методы теории возмущений особо эффективны в ситуации, когда чисто мнимые собственные значения матрицы A являются полупростыми. Если же матрица A имеет неполупростое чисто мнимое собственное значение, то ситуация существенно усложняется.

В этом подпункте приводится способ, позволяющий в методе М.Розо перейти от задачи с неполупростыми чисто мнимыми собственными значениями к равносильной задаче с полупростыми собственными значениями.

Ограничимся рассмотрением зависящего от малого параметра μ линейного уравнения

$$\frac{dx}{dt} = [A + \mu B(t)]x, \quad x \in C^N, \quad (2.106)$$

где A и $B(t)$ – квадратные матрицы, причем $B(t + T) \equiv B(t)$. В уравнении (2.106) матрицы A и $B(t)$ и параметр μ могут быть как вещественными, так и комплексными.

Пусть матрица A имеет неполупростое собственное значение λ_0 кратности 2. Пусть e и g – собственный и присоединенный векторы так, что выполнены равенства:

$$Ae = \lambda_0 e, \quad Ag = \lambda_0 g + e.$$

Сопряженная матрица A^* имеет неполупростое собственное значение $\overline{\lambda_0}$ кратности 2. Пусть e^* и g^* – собственный и присоединенный векторы матрицы A^* . Векторы e, g, e^*, g^* можно нормировать равенствами:

$$(e, e^*) = (g, g^*) = 0, \quad (e, g^*) = (g, e^*) = 1.$$

Обозначим через E_0 спектральное (двумерное) подпространство оператора A , отвечающее собственному значению λ_0 , а через $P_0 : C^N \rightarrow E_0$ – оператор спектрального проектирования. Этот оператор может быть определен равенством

$$P_0 x = (x, g^*)e + (x, e^*)g.$$

Положим $P^0 = I - P_0$ и $E^0 = P^0 C^N$. Тогда E^0 является инвариантным подпространством для оператора A так, что $C^N = E_0 \oplus E^0$, а P^0 – оператором спектрального проектирования на E^0 .

Положим далее

$$Q_1 x = (x, g^*)e, \quad Q_2 x = (x, e^*)g, \quad Q_3 x = (x, e^*)e,$$

$$Q_0(\varepsilon) = Q_1 + \varepsilon Q_2, \quad Q(\varepsilon) = P^0 + Q_0(\varepsilon),$$

где ε – параметр (вещественный или комплексный). Несложно доказываается

Лемма 2.6. *Оператор $Q(\varepsilon) : C^N \rightarrow C^N$ при $\varepsilon \neq 0$ обратим, при этом*

$$(Q(\varepsilon))^{-1} = P^0 + Q_1 + \frac{1}{\varepsilon} Q_2.$$

Пусть параметры μ и ε связаны равенством $\mu = \varepsilon^2$ так, что $\varepsilon = \varepsilon(\mu)$ – одна из ветвей двужначной функции $\varepsilon = \mu^{1/2}$. Тогда уравнение (2.106) примет вид

$$\frac{dx}{dt} = [A + \varepsilon^2 B(t)]x, \quad x \in C^N. \quad (2.107)$$

Произведем в уравнении (2.107) при $\varepsilon \neq 0$ замену:

$$x = Q(\varepsilon)y \quad \text{или} \quad y = (Q(\varepsilon))^{-1}x. \quad (2.108)$$

Несложно убедиться в том, что замена (2.108) приводит уравнение (2.107) к виду:

$$\frac{dy}{dt} = [A_0 + \varepsilon B_1(t) + \varepsilon^2 B_2(t) + \varepsilon^3 B_3(t)]y, \quad y \in C^N, \quad (2.109)$$

где

$$A_0 = AP^0 + \lambda_0 P_0,$$

$$B_1(t) = Q_3 + Q_2 B(t)(P^0 + Q_1),$$

$$B_2(t) = (P^0 + Q_1)B(t)(P^0 + Q_1) + Q_2 B(t)Q_2,$$

$$B_3(t) = (P^0 + Q_1)B(t)Q_2.$$

По построению операторы $A : E^0 \rightarrow E^0$ и $A_0 : E^0 \rightarrow E^0$ совпадают. Операторы $A : E_0 \rightarrow E_0$ и $A_0 : E_0 \rightarrow E_0$ отличаются тем, что для первого

из них число λ_0 является неполупростым собственным значением кратности 2, а для второго – полупростым собственным значением кратности 2.

Таким образом, при $\varepsilon \neq 0$ уравнения (2.107) и (2.109) эквивалентны в том смысле, что их решения связаны равенством (2.108). В частности, при $\varepsilon \neq 0$ свойства устойчивости этих уравнений одинаковы. При этом в уравнении (2.109) собственное значение λ_0 матрицы A_0 уже является полупростым.

Пусть теперь $Re\lambda_0 = 0$. Для уравнения (2.109) можно использовать схему М.Розо, в частности, перейти к уравнению вида

$$\frac{dz}{dt} = [A_0 + \varepsilon S + \varepsilon^2 B(t, \varepsilon)]y, \quad y \in C^N, \quad (2.110)$$

где S – постоянная матрица. Изучив вопрос об устойчивости полученного уравнения по постоянной матрице $A_0 + \varepsilon S$, получим и решение задачи об устойчивости уравнения (2.107) при $\varepsilon \neq 0$, а следовательно, и исходного уравнения (2.106) при $\mu \neq 0$.

2.4.1.2 Формулы теории возмущений

Пусть матрица $A(\mu)$ гладко зависит от параметра μ (скалярного или векторного), при этом матрица $A(\mu_0)$ имеет простое собственное значение λ_0 . Тогда при каждом близком к μ_0 значении μ матрица $A(\mu)$ имеет единственное простое собственное значение $\lambda(\mu)$, близкое к λ_0 . Требуется найти (аналитически или приближенно) это собственное значение. Такие задачи обычно решаются методами теории возмущений линейных операторов [17]. В этом пункте предлагаются формулы теории возмущений, полученные в [3, 19, 22, 52] на основе метода функционализации параметра. Эти формулы используются при доказательстве некоторых утверждений настоящей работы. Будем предполагать, что матрица $A(\mu)$ является вещественной и гладко зависит от вещественного параметра μ . В приводимых ниже утверждениях используется обозначение $A' = A'(\mu_0)$.

Пусть сначала матрица $A(\mu)$ при $\mu = \mu_0$ имеет простое вещественное собственное значение λ_0 . Пусть e и g – это собственные векторы матрицы

$A_0 = A(\mu_0)$ и транспонированной матрицы A_0^* , отвечающие собственному значению λ_0 . Векторы e и g будем считать нормированными в соответствии с равенствами (1.14) (см. стр. 22).

Теорема 2.15. *При μ близких к μ_0 матрица $A(\mu)$ имеет единственное близкое к λ_0 простое вещественное собственное значение $\lambda(\mu)$, представимое в виде*

$$\lambda(\mu) = \lambda_0 + \lambda_1(\mu - \mu_0) + O((\mu - \mu_0)^2), \quad (2.111)$$

где $\lambda_1 = (A'e, g)$.

В частности, из формулы (2.111) следует равенство $\lambda'(\mu_0) = (A'e, g)$.

Пусть теперь матрица $A_0 = A(\mu_0)$ имеет пару простых собственных значений $\pm\omega_0 i$, где $\omega_0 > 0$. Тогда при малых $|\mu - \mu_0|$ матрица $A(\mu)$ имеет пару простых собственных значений $\lambda(\mu) = \alpha(\mu) \pm i\omega(\mu)$, где $\alpha(\mu_0) = 0$ и $\omega(\mu_0) = \omega_0$. Далее, существуют ненулевые векторы e, g, e^*, g^* такие, что выполняются равенства (1.16) и (1.17) (см. стр. 23).

Теорема 2.16. *При μ близких к μ_0 вещественная и мнимая части собственного значения $\lambda(\mu) = \alpha(\mu) \pm i\omega(\mu)$ матрицы $A(\mu)$ представимы в виде*

$$\alpha(\mu) = \frac{\gamma_1}{2}(\mu - \mu_0) + O((\mu - \mu_0)^2), \quad (2.112)$$

$$\omega(\mu) = \omega_0 - \frac{\gamma_2}{2}(\mu - \mu_0) + O((\mu - \mu_0)^2), \quad (2.113)$$

где

$$\gamma_1 = (A'e, e^*) + (A'g, g^*), \quad \gamma_2 = (A'e, g^*) - (A'g, e^*).$$

Пусть теперь матрица $A_0 = A(\mu_0)$ имеет полупростое вещественное собственное значение λ_0 кратности 2. Случай, когда λ_0 является комплексным, рассматривается аналогично. Пусть $e, g \in R^N$ и $e^*, g^* \in R^N$ — это собственные векторы матрицы $A_0 = A(\mu_0)$ и транспонированной матрицы A_0^* , соответственно, такие, что выполняются равенства:

$$A_0 e = \lambda_0 e, \quad A_0 g = \lambda_0 g, \quad A_0^* e^* = \lambda_0 e^*, \quad A_0^* g^* = \lambda_0 g^*, \quad (2.114)$$

$$(e, e^*) = (g, g^*) = 1, \quad (e, g^*) = (g, e^*) = 0. \quad (2.115)$$

Теорема 2.17. При μ близких к μ_0 матрица $A(\mu)$ имеет два собственных значения $\lambda^{(1)}(\mu)$ и $\lambda^{(2)}(\mu)$ (возможно совпадающих), представимые в виде

$$\begin{aligned}\lambda^{(1)}(\mu) &= \lambda_0 + (\mu - \mu_0)\lambda^{(1)} + O((\mu - \mu_0)^{3/2}), \\ \lambda^{(2)}(\mu) &= \lambda_0 + (\mu - \mu_0)\lambda^{(2)} + O((\mu - \mu_0)^{3/2}),\end{aligned}\quad (2.116)$$

где коэффициенты $\lambda^{(1)}$ и $\lambda^{(2)}$ – это собственные значения матрицы

$$D_0 = \begin{bmatrix} (A' e, e^*) & (A' g, e^*) \\ (A' e, g^*) & (A' g, g^*) \end{bmatrix}. \quad (2.117)$$

2.4.2 Доказательства основных утверждений

Доказательство теоремы 2.1. Так как матрица A_0 является вещественной и ее топологический тип равен $(p_-, 1, p_+)$, то матрица A_0 не является T -резонансной. Поэтому можно применить схему М. Розо (см. [40, с. 162–202] или вспомогательные сведения на стр. 68 данной работы), а именно, для уравнения (2.8) применима теорема 2.13 (см. стр. 70 данной работы). Другими словами, существует замена $y = (I - (\mu - \mu_0)H(t))x$ с невырожденной и T -периодической матрицей $H(t)$, приводящая (2.8) к виду (2.94):

$$\frac{dy}{dt} = [A_0 + (\mu - \mu_0)S_0 + (\mu - \mu_0)^2\tilde{O}(\mu, t)]y + \tilde{a}(y, t, \mu), \quad y \in C^N, \quad (2.118)$$

где матрица $S = S_0$ – это единственное решение уравнения

$$\int_0^T e^{-A_0\tau} S e^{A_0\tau} d\tau = \int_0^T e^{-A_0\tau} A'_\mu(t, \mu_0) e^{A_0\tau} d\tau. \quad (2.119)$$

Согласно теореме 2.15 (см. стр. 76) матрица $\tilde{A}(\mu) = A_0 + (\mu - \mu_0)S_0$ при малых $|\mu - \mu_0|$ имеет единственное собственное значение, близкое к 0, при этом оно представимо в виде:

$$\lambda(\mu) = (S_0 e, g)(\mu - \mu_0) + O((\mu - \mu_0)^2); \quad (2.120)$$

здесь e и g – это собственные векторы матрицы A_0 и транспонированной матрицы A_0^* , отвечающие собственному значению 0.

Полагая в (2.119) $S = S_0$ и умножая обе части полученного равенства сначала на вектор e , а затем скалярно на вектор g , получим равенство:

$$(Se, g) = \frac{1}{T} \int_0^T (A'_\mu(t, \mu_0)e, g) d\tau = \frac{1}{T} \lambda_1, \quad (2.121)$$

где λ_1 – число (2.9).

В силу леммы 2.1 (см. на стр. 39) при малых $|\mu - \mu_0|$ топологические типы нулевых точек равновесия систем (2.8) и (2.118) одинаковы. При малых $|\mu - \mu_0|$ топологический тип нулевой точки равновесия системы (2.118) определяется свойствами матрицы $\tilde{A}(\mu) = A_0 + (\mu - \mu_0)S_0$. Но по условиям теоремы топологический тип матрицы A_0 равен $(p_-, 1, p_+)$. Поэтому из равенств (2.120) и (2.121) следует, что при малых $|\mu - \mu_0|$ топологический тип нулевой точки равновесия системы (2.118) равен $(1 + p_-, 0, p_+)$, если $\mu\lambda_1 < 0$; он равен $(p_-, 0, 1 + p_+)$, если $\mu\lambda_1 > 0$.

Доказательство теоремы 2.3. Теорема 2.3 доказывается аналогично теореме 2.1. При этом используются асимптотические формулы (2.112) и (2.113) из теоремы 2.16, приведенные в параграфе 2.4.1 в качестве вспомогательных сведений (см. стр. 76).

Доказательство теоремы 2.5.

Так как матрица A_0 является T -резонансной, то для применения метода М. Розо [40] нужны предварительные преобразования уравнения (2.16). В пункте 2.2.4 в результате тождественных преобразований уравнение (2.16) представлено в виде (2.18), к которому уже можем применить метод М.Розо (см. [40, с. 162–202] или вспомогательные сведения на стр. 68 данной работы), а именно, для уравнения (2.18) применима теорема 2.13 (см. стр. 70 данной работы). Другими словами, существует замена $y = (I - (\mu - \mu_0)H(t))x$ с невырожденной и T -периодической матрицей $H(t)$, приводящая (2.18) к виду (2.94):

$$\frac{dy}{dt} = [\tilde{A} + (\mu - \mu_0)S + (\mu - \mu_0)^2 \tilde{O}(\mu, t)]y + \tilde{a}(y, t, \mu), \quad y \in C^N, \quad (2.122)$$

где матрица S – это единственное решение уравнения (2.21):

$$\int_0^T e^{-\tilde{A}t} S e^{\tilde{A}t} dt = \int_0^T e^{-\tilde{A}t} \tilde{A}_1(t) e^{\tilde{A}t} dt. \quad (2.123)$$

Согласно теореме 2.17 (см. стр. 77) матрица $\tilde{A}(\mu) = \tilde{A} + (\mu - \mu_0)S$ при малых $|\mu - \mu_0|$ имеет два собственных значения $\lambda^{(1)}(\mu)$ и $\lambda^{(2)}(\mu)$ (возможно совпадающих), представимые в виде

$$\lambda^{(1)}(\mu) = -\omega_0 i + (\mu - \mu_0)\lambda^{(1)} + O((\mu - \mu_0)^{3/2}), \quad (2.124)$$

$$\lambda^{(2)}(\mu) = -\omega_0 i + (\mu - \mu_0)\lambda^{(2)} + O((\mu - \mu_0)^{3/2}),$$

где коэффициенты $\lambda^{(1)}$ и $\lambda^{(2)}$ – это, согласно теореме 2.17 (см. стр. 77), собственные значения матрицы

$$D_0 = \begin{bmatrix} (S e, e^*) & (S g, e^*) \\ (S e, g^*) & (S g, g^*) \end{bmatrix}. \quad (2.125)$$

Если умножить обе части равенства (2.123) сначала на вектор e , а затем скалярно на вектор e^* , то получим равенство:

$$(S e, e^*) = \frac{2}{T} \int_0^T (e^{-\tilde{A}t} \tilde{A}_1(t) e^{\tilde{A}t} e, e^*) dt, \quad (2.126)$$

т.е. первый элемент матрицы (2.22). Поступая аналогично, можно получить, что

$$(S g, e^*) = \frac{2}{T} \int_0^T (e^{-\tilde{A}t} \tilde{A}_1(t) e^{\tilde{A}t} g, e^*) dt, \quad (2.127)$$

$$(S e, g^*) = \frac{2}{T} \int_0^T (e^{-\tilde{A}t} \tilde{A}_1(t) e^{\tilde{A}t} e, g^*) dt, \quad (2.128)$$

$$(S g, g^*) = \frac{2}{T} \int_0^T (e^{-\tilde{A}t} \tilde{A}_1(t) e^{\tilde{A}t} g, g^*) dt. \quad (2.129)$$

Таким образом получаем, что матрица (2.125) и есть матрица (2.22). Отсюда, согласно условиям теоремы 2.17 (см. стр. 77), вещественные части собственных значений матрицы (2.22) определяют топологический тип решения $x = 0$ уравнения (2.22).

Доказательство теоремы 2.7. Для доказательства данной теоремы рассмотрим линейную систему

$$\frac{dx}{dt} = [A_0 + (\alpha - \alpha_0)B_1(t) + (\beta - \beta_0)B_2(t) + \tilde{D}(t, \alpha, \beta)]x, \quad x \in R^N. \quad (2.130)$$

Так как матрица A_0 имеет простое собственное значение 0, то линейная периодическая система (2.130) при малых $|\alpha - \alpha_0|$ и $|\beta - \beta_0|$ имеет простой показатель Флоке $\lambda(\alpha, \beta)$ такой, что функция $\lambda(\alpha, \beta)$ непрерывна и $\lambda(\alpha_0, \beta_0) = 0$. Пусть для определенности $\chi_1 \neq 0$; здесь χ_1 – первое из чисел (2.26). Ограничимся доказательством того факта, что тогда уравнение $\lambda(\alpha, \beta) = 0$ задает единственную кривую $\alpha = f(\beta)$, определенную и гладкую в некоторой окрестности числа β_0 и такую, что $\alpha_0 = f(\beta_0)$. То, что эта кривая является искомой граничной кривой γ_0 области устойчивости решения $x = 0$ уравнения (2.24), может быть установлено такими же рассуждениями, что и при доказательстве теоремы 1.12 (см. стр. 81).

Для доказательства указанного факта достаточно показать, что $\lambda'_\alpha(\alpha_0, \beta_0) \neq 0$. С этой целью, полагая в (2.130) $\beta = \beta_0$, перейдем от (2.130) к однопараметрическому уравнению

$$\frac{dx}{dt} = [A_0 + (\alpha - \alpha_0)B_1(t) + \tilde{D}(t, \alpha, \beta_0)]x, \quad x \in R^N. \quad (2.131)$$

Воспользуемся методом М.Розо [40, 63] исследования устойчивости линейных периодических систем дифференциальных уравнений, зависящих от малого параметра. В соответствии с этим методом, система (2.131) посредством некоторой невырожденной и T -периодической замены приводится к виду

$$\frac{dy}{dt} = [A_0 + (\alpha - \alpha_0)S + \hat{A}_2(t, \alpha, \beta_0)]y, \quad y \in R^N, \quad (2.132)$$

где S – постоянная матрица, а T -периодическая матрица $\hat{A}_2(t, \alpha, \beta_0)$ удовлетворяет соотношению: $\|\hat{A}_2(t, \alpha, \beta_0)\| = O((\alpha - \alpha_0)^2)$ при $\alpha \rightarrow \alpha_0$.

При этом матрица S является решением уравнения

$$\int_0^T e^{-A_0 t} S e^{A_0 t} dt = \int_0^T e^{-A_0 t} B_1(t) e^{A_0 t} dt. \quad (2.133)$$

При малых $|\alpha - \alpha_0|$ матрица $A_0 + (\alpha - \alpha_0)S$ имеет простое собственное значение $\mu(\alpha)$ такое, что функция $\mu(\alpha)$ непрерывна и $\mu(\alpha_0) = 0$. Мультипликатор $\rho(\alpha)$ системы (2.131) и собственные значения $\mu(\alpha)$ матрицы $A_0 + (\alpha - \alpha_0)S$ связаны равенством $\rho(\alpha) = e^{\mu(\alpha)T} + O((\alpha - \alpha_0)^2)$. При этом по построению имеем: $\lambda'_\alpha(\alpha_0, \beta_0) = \mu'(\alpha_0)$.

В силу формул теории возмущений линейных операторов [22] имеем: $\mu'(\alpha_0) = (Se, g)$. Для вычисления числа (Se, g) обе части уравнения (2.133) умножим сначала на вектор e , затем скалярно на вектор g . Тогда получим нужное соотношение:

$$(Se, g) = T \int_0^T (B_1(t)e, g) dt = T\chi_1 \neq 0,$$

т.е. $\lambda'_\alpha(\alpha_0, \beta_0) = \mu'(\alpha_0) = (Se, g) \neq 0$. Тогда по теореме о неявной функции уравнение $\lambda(\alpha, \beta) = 0$ задает единственную кривую $\alpha = f(\beta)$, определенную и гладкую в некоторой окрестности числа β_0 и такую, что $\alpha_0 = f(\beta_0)$. То, что эта кривая является искомой граничной кривой области гиперболичности уравнения (2.23), устанавливается ниже при доказательстве теоремы 2.8.

При доказательстве первого утверждения теоремы 2.7 получены равенства: $\lambda'_\alpha(\alpha_0, \beta_0) = T\chi_1$ и $\lambda'_\beta(\alpha_0, \beta_0) = T\chi_2$. Перейдем к доказательству второго утверждения теоремы 2.7. Вектор с координатами (χ_1, χ_2) ортогонален направляющему вектору касательной к кривой γ_0 в плоскости параметров (α, β) . Рассмотрим прямую, проходящую через точку (α_0, β_0) и заданную параметрически уравнениями: $\alpha = \alpha_0 + \varepsilon \cos \varphi$ и $\beta = \beta_0 + \varepsilon \sin \varphi$, где φ – некоторый угол. Справедливость второго утверждения теоремы 2.7 следует из того, что вектор $(\cos \varphi, \sin \varphi)$ будет направляющим вектором касательной к кривой γ_0 , если $\chi_1 \cos \varphi + \chi_2 \sin \varphi = 0$.

Доказательство теоремы 2.8. Рассмотрим параметрически заданную прямую (2.30):

$$\alpha = \alpha_0 + \delta \cos \varphi^*, \quad \beta = \beta_0 + \delta \sin \varphi^*, \quad (2.134)$$

где $\varphi^* \neq \varphi_0$, $\varphi^* \neq \varphi_0 + \pi$ (здесь φ_0 – число из теоремы 2.7). Эта прямая трансверсально пересекает кривую γ_0 в точке (α_0, β_0) . Матрица $A(\alpha(\delta), \beta(\delta))$

при малых $|\delta|$ имеет собственное значение $\lambda(\delta)$, представимое в виде $\lambda(\delta) = \psi_0\delta + O(\delta^2)$ (см. [22]), где ψ_0 – число (2.29). Следовательно, при трансверсальном переходе параметров (α, β) через кривую γ_0 (вблизи точки (α_0, β_0)) изменяется топологический тип точки равновесия $x = 0$ уравнения (2.24). Отсюда получим, во-первых, тот факт, что кривая γ_0 является граничной кривой области устойчивости уравнения (2.24), и во-вторых, справедливость утверждения теоремы 2.8.

Доказательство теоремы 2.9. Теорема 2.9 доказывается аналогично теореме 2.7. Рассмотрим линейную систему (2.130). Так как матрица A_0 имеет пару простых собственных значений $\pm i\omega_0$, где $\omega_0 > 0$, то линейная периодическая система (2.130) имеет пару простых показателей Флоке $\rho(\alpha, \beta) \pm i\omega(\alpha, \beta)$ таких, что $\rho(\alpha_0, \beta_0) = 0$, а $\omega(\alpha_0, \beta_0) = \omega_0$.

Пусть для определенности $\kappa_1 \neq 0$. Ограничимся доказательством того факта, что уравнение $\rho(\alpha, \beta) = 0$ задает единственную кривую $\alpha = f(\beta)$, определенную и гладкую в некоторой окрестности числа α_0 и такую, что $\alpha_0 = f(\beta_0)$.

Для доказательства указанного факта достаточно показать, что $\rho'_\alpha(\alpha_0, \beta_0) \neq 0$. С этой целью, полагая в (2.130) $\beta = \beta_0$, перейдем от (2.130) к однопараметрическому уравнению

$$\frac{dx}{dt} = [A_0 + (\alpha - \alpha_0)B_1(t) + \tilde{D}(t, \alpha, \beta_0)]x, \quad x \in R^N. \quad (2.135)$$

Воспользуемся методом М. Розо исследования устойчивости линейных периодических систем дифференциальных уравнений, зависящих от малого параметра. В соответствии с этим методом, система (2.135) посредством некоторой невырожденной и T -периодической замены приводится к виду

$$\frac{dy}{dt} = [A_0 + (\alpha - \alpha_0)S + \hat{A}_2(t, \alpha, \beta_0)]y, \quad y \in R^N, \quad (2.136)$$

где S – постоянная матрица, а T -периодическая матрица $\hat{A}_2(t, \alpha, \beta_0)$ удовлетворяет соотношению: $\|\hat{A}_2(t, \alpha, \beta_0)\| = O((\alpha - \alpha_0)^2)$ при $\alpha \rightarrow \alpha_0$.

При этом матрица S является решением уравнения

$$\int_0^T e^{-A_0 t} S e^{A_0 t} dt = \int_0^T e^{-A_0 t} B_1(t) e^{A_0 t} dt. \quad (2.137)$$

При малых $|\alpha - \alpha_0|$ матрица $A_0 + (\alpha - \alpha_0)S$ имеет пару простых собственных значений $\mu(\alpha) \pm i\varepsilon(\alpha)$ таких, что функции $\mu(\alpha)$ и $\varepsilon(\alpha)$ непрерывны и $\mu(\alpha_0) = 0$ и $\varepsilon(\alpha_0) = \omega_0$. При этом по построению имеем: $\rho'_\alpha(\alpha_0, \beta_0) = \mu'(\alpha_0)$. Мультипликаторы $\tau(\alpha)$ системы (2.135) и собственные значения системы (2.136) связаны равенством $\tau(\alpha) = e^{(\mu(\alpha) \pm i\varepsilon(\alpha))T}$.

В силу формул теории возмущений линейных операторов [22] имеем: $\mu'(\alpha) = (Se, e^*) + (Sg, g^*)$. Для вычисления числа $\mu'(\alpha)$ обе части уравнения (2.137) умножим сначала на вектор e , затем скалярно на вектор e^* , затем прибавим то же самое умноженное сначала на вектор g , затем скалярно на вектор g^* , тогда получим нужное соотношение:

$$(Se, e^*) + (Sg, g^*) = T \int_0^T ((B_1(t)e, e^*) + (B_1(t)g, g^*)) dt \neq 0.$$

т.е. $\rho'_\alpha(\alpha_0, \beta_0) = \mu'(\alpha_0) = (Se, e^*) + (Sg, g^*) \neq 0$. Тогда по теореме о неявной функции уравнение $\rho(\alpha, \beta) = 0$ задает единственную кривую $\alpha = f(\beta)$, определенную и гладкую в некоторой окрестности числа β_0 и такую, что $\alpha_0 = f(\beta_0)$. То, что эта кривая является искомой граничной кривой области гиперболичности уравнения (2.23), устанавливается ниже при доказательстве теоремы 2.10.

Доказательство второй части теоремы 2.9 проводится аналогично доказательству второй части теоремы 2.7.

Доказательство теорем 2.10. Проводится аналогично доказательству теоремы 2.8.

Доказательство теорем 2.11. Ограничимся рассмотрением случая, когда матрица $S(\xi)$ имеет простое собственное значение $\lambda = 0$, а остальные ее собственные значения не являются чисто мнимыми. Общее утверждение доказывается по той же схеме, но более громоздко, так как требует рассмотрения различных случаев. Пусть также для простоты уравнение (2.23) является двумерным, т.е. $N = 2$.

Рассмотрим соответствующую (2.23) двумерную линейную систему

$$\frac{dx}{dt} = A(t, \alpha, \beta)x, \quad x \in R^2, \quad (2.138)$$

свойства показателей Флоке которой определяют области гиперболичности нулевого решения уравнения (2.23) и их границы. Напомним о предположении, что матрица $A_0 = A(t, \alpha_0, \beta_0)$ не зависит от t , причем матрица A_0 имеет пару простых собственных значений $\pm i\omega_0$, где $\omega_0 = \frac{\pi k_0}{T}$ при некотором натуральном k_0 .

В силу теории возмущений линейных операторов (см., например, [17]) при значениях (α, β) близких к (α_0, β_0) система (2.138) имеет два показателя Флоке $\lambda_1(\alpha, \beta)$ и $\lambda_2(\alpha, \beta)$, при этом их вещественные части определяются однозначно. Положим $u_j(\alpha, \beta) = \operatorname{Re} \lambda_j(\alpha, \beta)$ ($j = 1, 2$); тогда можно считать, что $u_1(\alpha_0, \beta_0) = 0$ и $u_2(\alpha_0, \beta_0) \neq 0$.

Рассмотрим уравнение

$$u_1(\alpha, \beta) = 0. \quad (2.139)$$

В силу теоремы о неявной функции уравнение (2.139) определяет единственную функцию $\beta = f(\alpha)$, определенную в некотором интервале $(\alpha_0 - \delta_0, \alpha_0 + \delta_0)$ и такую, что $f(\alpha_0) = \beta_0$. При этом функция $\beta = f(\alpha)$ является непрерывно дифференцируемой. Прямой подсчет можно убедиться в том, что $f'(\alpha_0) = \xi^*$. Кривая $\mathcal{Y}$, описываемая функцией $\beta = f(\alpha)$, и является искомой границей области гиперболичности нулевого решения уравнения (2.23).

Глава 3

Поведение решений неавтономных периодических систем в окрестностях границ областей устойчивости

При переходе параметров системы через граничные точки области устойчивости возможны различные бифуркации, при этом сами границы могут быть «опасными» или «безопасными». В настоящей главе изучаются основные сценарии бифуркаций, а также определяются признаки «опасности» и «безопасности» границ областей устойчивости решений неавтономных периодических дифференциальных уравнений.

3.1 Вспомогательные сведения

В этом параграфе приводятся необходимые сведения о бифуркациях в дискретных динамических системах и динамических системах, описываемых неавтономными периодическими дифференциальными уравнениями (см., например, [11, 16, 20, 27, 28, 34, 40, 41, 44, 46, 51, 57, 61]).

3.1.1 Бифуркаций в дискретных динамических системах

Приведем сначала некоторые вспомогательные сведения из теории бифуркации дискретных динамических систем. Для этого рассмотрим дискрет-

ную динамическую систему вида:

$$x_{n+1} = f(x_n, \mu), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad x_n \in R^N, \quad (3.1)$$

где μ – некоторый параметр, $f(x, \mu)$ – непрерывно дифференцируемая по совокупности переменных функция. Для простоты изложения будем предполагать, что параметр μ является скалярным и при этом функция $f(x, \mu)$ определена при всех $\mu \in R^1$ и всех $x \in R^N$.

Также будем предполагать, что система (3.1) при любых значениях параметра μ имеет точку равновесия $x = 0$, т.е. $0 = f(0, \mu)$. Пусть при некотором $\mu = \mu_0$ матрица Якоби $A_0 = f'_x(0, \mu_0)$ имеет одно или несколько собственных значений, модуль которых равен единице. В этом случае значение μ_0 является *точкой бифуркации* системы (3.1).

Будем рассматривать следующие случаи:

P1°. матрица A_0 имеет простое собственное значение 1 ;

P2°. матрица A_0 имеет пару простых собственных значений $e^{\pm i2\pi\theta_0}$, где θ_0 – иррациональное число или $\theta_0 = p/q$, где p/q – рациональная несократимая дробь, причем $q \geq 5$.

В обоих этих случаях предполагается, что остальные собственные значения матрицы A_0 не равны 1 по модулю.

В случае P1° реализуется один из трех основных сценариев бифуркаций: транскритическая бифуркация, бифуркация типа вилки и седло–узловая бифуркация, называемые также бифуркациями кратного равновесия. Эти сценарии бифуркации связаны с возникновением у системы (3.1) при μ близких к μ_0 в окрестности точки $x = 0$ новых ненулевых точек равновесия.

Значение μ_0 называют *точкой бифуркации кратного равновесия* системы (3.1), если существует последовательность $\mu_k \rightarrow \mu_0$ такая, что при каждом $\mu = \mu_k$ система (3.1) имеет ненулевую точку равновесия $x = x_k^*$, при этом $x_k^* \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Решения x_k^* системы (3.1) и соответствующие значения параметра μ_k называют *бифурцирующими* решениями системы (3.1).

Случай $P2^\circ$ возможен только при $N \geq 2$. Отметим, что случай, когда матрица A_0 имеет пару простых собственных значений вида $e^{\pm i2\pi\theta_0}$, где $\theta_0 = p/q$ - несократимая дробь и $1 \leq q \leq 4$, обычно называют сильным резонансом [14, 44]. В этом случае основным сценарием бифуркаций является возникновение вблизи неподвижной точки $x = 0$ циклов периода q . В частности, при $\theta_0 = 1/2$ получим сценарий бифуркации удвоения периода. Случай сильного резонанса в данной работе не рассматривается. Отметим также, что случай $P2^\circ$, когда $\theta_0 = p/q$ и $q \geq 5$, называют слабым резонансом.

Пусть θ_0 является иррациональным или θ_0 является рациональным числом, при этом в случае рациональности θ_0 имеет место слабый резонанс. Пусть для простоты $N = 2$, т.е. система (3.1) является двумерной. В этом случае при некоторых близких к μ_0 значениях μ фазовый портрет системы (3.1) содержит замкнутые инвариантные кривые γ , ограничивающие область притяжения или область отталкивания неподвижной точки $x = 0$. Динамика системы (3.1) на кривой γ может оказаться весьма сложной, содержащей семейство периодических и квазипериодических орбит. Такую бифуркацию (по аналогии с непрерывными динамическими системами) называют *бифуркацией Андронова-Хопфа*.

3.1.2 Бифуркаций в неавтономных динамических системах

Рассмотрим теперь неавтономное нелинейное дифференциальное уравнение

$$x' = A(t, \mu)x + a(x, t, \mu), \quad x \in R^N, \quad \mu \in R^k, \quad (3.2)$$

где $A(t, \mu)$ является $N \times N$ матрицей, а функция $a(x, t, \mu)$ удовлетворяет соотношению: $\|a(x, t, \mu)\| = O(\|x\|^2)$ при $\|x\| \rightarrow 0$ равномерно по μ . При этом матрица $A(t, \mu)$ и функция $a(x, t, \mu)$ являются T -периодическими по переменной t и непрерывно дифференцируемыми по совокупности переменных.

Наряду с уравнением (3.2) будем рассматривать линейное уравнение

$$x' = A(t, \mu)x, \quad x \in R^N, \quad \mu \in R^k. \quad (3.3)$$

Если уравнение (3.3) при некотором $\mu = \mu_0$ имеет один или несколько мультипликаторов, равных единице по модулю, то μ_0 является *точкой бифуркации* системы (3.2) [14, 44].

Здесь будем рассматривать следующие основные случаи:

D1°. система (3.3) имеет простой мультипликатор 1;

D2°. система (3.3) имеет пару простых мультипликаторов вида $e^{\pm i2\pi\theta_0}$, где θ_0 – иррациональное число или $\theta_0 = p/q$, где p/q – рациональная несократимая дробь, причем $q \geq 5$.

Отметим, что система (3.3) не может иметь простой мультипликатор -1 .

Так как слагаемые $A(t, \mu)$ и $a(x, t, \mu)$ являются T -периодическими по переменной t , то задача о локальных бифуркациях системы (3.2) в естественном смысле равносильна задаче о локальных бифуркациях дискретной динамической системы

$$x_{n+1} = U(x_n, \mu), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.4)$$

где $x_n \in R^N$, $U(*, \mu) : R^N \rightarrow R^N$ – оператор сдвига [20, стр. 12] по траекториям системы (3.2) за время от 0 до T .

Известно [10, стр. 18], что оператор $U(x, \mu)$ и матрица монодромии $V(\mu)$ линейной системы (3.3) связаны равенством

$$U(x, \mu) = V(\mu)x + v(x, \mu), \quad (3.5)$$

в котором оператор $v(x, \mu)$ удовлетворяет соотношению $\sup_{\mu} \|v(x)\| = O(\|x\|^2)$ при $\|x\| \rightarrow 0$.

Отметим, что точки равновесия уравнения (3.4) определяют начальные значения T -периодических решений системы (3.2), а каждая точка q -цикла уравнения (3.4) определяет начальные значения qT -периодических решений этой системы.

Так как собственные значения матрицы $V(\mu)$ – это мультипликаторы линейной системы (3.3), то рассматриваемые здесь случаи D1° и D2° для

дифференциального уравнения (3.2) соответствуют случаям $P1^\circ$ и $P2^\circ$ для дискретной системы (3.4) (случаи $P1^\circ$ и $P2^\circ$ см. на стр. 86). Поэтому основные сценарии бифуркации, реализуемые в системе (3.2) при переходе параметра μ через μ_0 , могут быть изучены сведением системы (3.2) к дискретному уравнению (3.4).

Вначале рассмотрим случай D1. Этот случай соответствует случаю P1 для дискретной системы (3.4). В этом случае качественная перестройка поведения системы (3.4) при переходе параметра μ через μ_0 состоит в возникновении у нее в окрестности точки $x = 0$ ненулевых точек равновесия. Но точки равновесия уравнения (3.4) определяют начальные значения T -периодических решений системы (3.2). Поэтому в случае D1 основным сценарием перестройки поведения системы (3.2) является возникновение в окрестности точки $x = 0$ ненулевых T -периодических решений малой амплитуды. Такой сценарий обычно называют *бифуркацией вынужденных колебаний* системы (3.2). В свою очередь, эта бифуркация для уравнения (3.2) может реализовываться либо как транскритическая бифуркация, либо как бифуркация типа вилки.

Приведем соответствующие определения. Значение μ_0 параметра μ назовем *точкой транскритической бифуркации вынужденных колебаний* системы (3.2), если существуют $\delta_0 > 0$ и $\delta_1 > 0$ такие, что при каждом $\mu \in (\mu_0 - \delta_0, \mu_0 + \delta_0)$ в δ_1 окрестности точки $x = 0$ система (3.2) наряду с решением $x = 0$ имеет единственное ненулевое T -периодическое решение $x(t, \mu)$ малой амплитуды, причем $\max_t \|x(t, \mu)\| \rightarrow 0$ при $\mu \rightarrow \mu_0$. На рис. 3.1 приводится бифуркационная диаграмма транскритической бифуркации вынужденных колебаний. При $\mu < \mu_0$ нулевое решение является неустойчивым (нарисовано пунктирной линией), при этом в ее окрестности система имеет ненулевое устойчивое решение (нарисовано сплошной линией). При $\mu > \mu_0$ нулевое решение является устойчивым, при этом в ее окрестности система имеет ненулевое неустойчивое решение (нарисовано пунктирной линией).

Значение μ_0 параметра μ назовем *точкой бифуркации вынужденных*

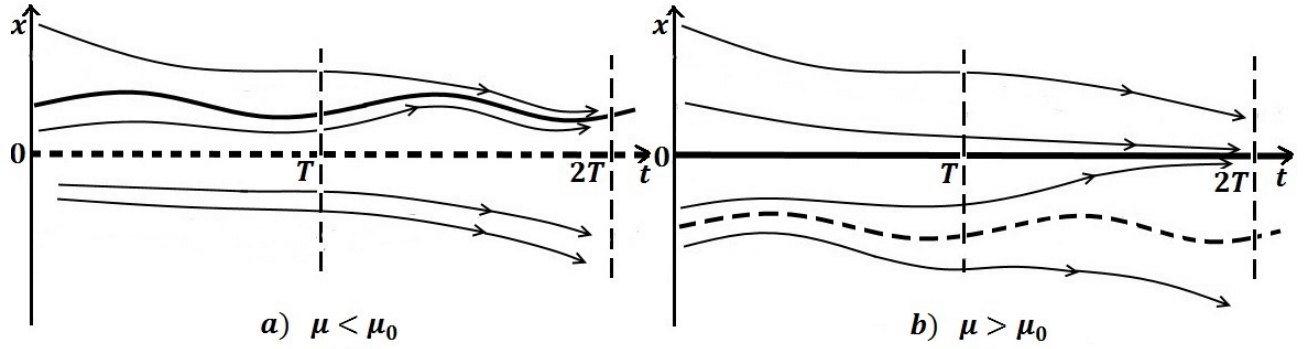


Рис. 3.1. Транскритическая бифуркация вынужденных колебаний

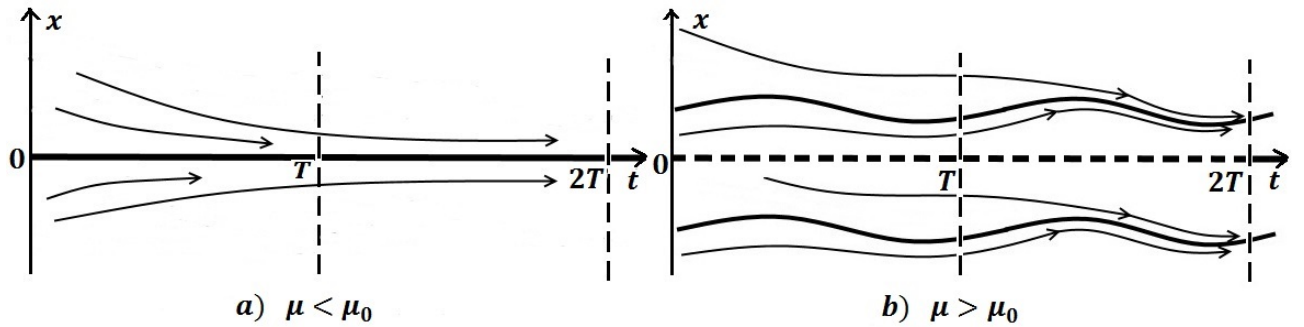


Рис. 3.2. Бифуркация вынужденных колебаний типа вилки

колебаний типа вилки системы (3.2), если существуют $\delta_0 > 0$ и $\delta_1 > 0$ такие, что при каждом $\mu \in (\mu_0, \mu_0 + \delta_0)$ ($\mu \in (\mu_0 - \delta_0, \mu_0)$) система (3.2) имеет единственное решение $x = 0$, а при каждом $\mu \in (\mu_0 - \delta_0, \mu_0)$ ($\mu \in (\mu_0, \mu_0 + \delta_0)$) наряду с решением $x = 0$ система (3.2) имеет ненулевые T -периодические решения $x_1(t, \mu)$ и $x_2(t, \mu)$ малой амплитуды, причем $\max_t \|x_1(t, \mu)\| \rightarrow 0$ и $\max_t \|x_2(t, \mu)\| \rightarrow 0$ при $\mu \rightarrow \mu_0$. На рис. 3.2 приводится бифуркационная диаграмма бифуркации вынужденных колебаний типа вилки. При $\mu < \mu_0$ нулевое решение является устойчивым (нарисовано сплошной линией). При $\mu > \mu_0$ нулевое решение является неустойчивым (нарисовано пунктирной линией), при этом в ее окрестности система имеет ненулевые устойчивые решения (нарисованы сплошной линией).

Пусть теперь имеет место случай D2 и пусть для простоты $N = 2$. Этот случай соответствует случаю P2 для дискретной системы (3.4). В этом случае

качественная перестройка поведения системы (3.4) при переходе параметра μ через μ_0 состоит в возникновении у нее в окрестности точки $x = 0$ инвариантной кривой $\gamma(\mu)$. Это соответствует тому, что в пространстве $R^2 \times R^1$ (где $x \in R^2$ и $t \in R^1$) возникает двумерная гладкая поверхность $\Gamma(\mu)$ охватывающая ось t и являющаяся инвариантной для дифференциального уравнения (3.2). Динамика системы (3.2) на поверхности $\Gamma(\mu)$ может оказаться весьма сложной, содержащей семейство периодических и квазипериодических решений.

3.2 Бифуркации в однопараметрических системах

В этом параграфе изучаются вопросы о бифуркациях, возникающих при переходе параметрами системы через границы области устойчивости неавтономных однопараметрических динамических систем.

Замечание 3.1. Отметим, что в рассматриваемом однопараметрическом случае граница области устойчивости является точкой $\mu = \mu_0$ на прямой μ . Поэтому задача о бифуркации при переходе через границу области устойчивости равносильна обычной задаче о бифуркации в системе (3.2) со скалярным параметром μ . Эта задача хорошо изучена в общей теории бифуркаций. Приведем необходимые сведения (см., например, [10, 20]) .

Представим уравнение (3.2) в виде:

$$x' = A(t, \mu)x + a_2(x, t, \mu) + a_3(x, t, \mu) + \tilde{a}_4(x, t, \mu), \quad x \in R^N, \quad (3.6)$$

где μ – скалярный параметр, а функция $a(x, t, \mu)$ из уравнения (3.2) представлена в виде суммы трех слагаемых:

$$a(x, t, \mu) = a_2(x, t, \mu) + a_3(x, t, \mu) + \tilde{a}_4(x, t, \mu), \quad x \in R^N, \quad (3.7)$$

где $a_2(x, t, \mu)$ и $a_3(x, t, \mu)$ содержат соответственно квадратичные и кубические по x слагаемые, а $\tilde{a}_4(x, t, \mu)$ является гладкой и удовлетворяет соотношению: $\|\tilde{a}_4(x, t, \mu)\| = O(\|x\|^4)$ при $x \rightarrow 0$ равномерно по μ .

Наряду с уравнением (3.6) будем также рассматривать соответствующее линейное уравнение

$$x' = A(t, \mu)x, \quad x \in R^N. \quad (3.8)$$

Обозначим через $X(t, \mu)$ фундаментальную матрицу решений (ФМР), а через $V(\mu)$ матрицу монодромии линейной системы (3.8).

Предположим, что $x = 0$ является негиперболическим состоянием равновесия системы (3.8) при $\mu = \mu_0$; а именно, пусть матрица $V_0 = V(\mu_0)$ имеет одно или несколько собственных значений по модулю равных 1 и не имеет собственных значений, модуль которых больше 1. В этом случае, как правило, значение μ_0 является граничной точкой области устойчивости некоторого непрерывно зависящего от параметра μ периодического режима $x = x^*(t, \mu)$ нелинейной системы (3.6) такого, что $x^*(t, \mu_0) \equiv 0$. Более детально этот вопрос обсуждается ниже.

В рассматриваемой постановке в системе (3.6) при переходе параметра μ через μ_0 возможны различные сценарии бифуркации в окрестности точки $x = 0$, т.е. μ_0 является *точкой локальной бифуркации* системы (3.6): при переходе параметра μ через μ_0 поведение системы (3.6) в окрестности точки $x = 0$, как правило, качественно меняется.

Ниже будем рассматривать следующие основные случаи негиперболичности матрицы V_0 .

Q1°. Матрица V_0 имеет простое собственное значение 1.

Q2°. Матрица V_0 имеет пару простых собственных значений $e^{\pm 2\pi\theta_0 i}$, где $0 < \theta_0 < \frac{1}{2}$, причем $\theta_0 \neq \frac{1}{4}$ и $\theta_0 \neq \frac{1}{3}$.

В обоих этих случаях предполагается, что остальные собственные значения матрицы V_0 меньше 1 по модулю.

В этом параграфе изучается поведение решений системы (3.6) в окрестности точки $x = 0$ при переходе параметра μ через точку μ_0 .

3.2.1 Случай Q1°

Обозначим через e и g собственные векторы матрицы V_0 и транспонированной матрицы V_0^* , соответственно, отвечающие собственному значению 1. Эти векторы можно считать нормированными равенствами (1.14).

Обозначим через P_0 и P^0 действующие в R^N линейные операторы, определенные равенствами:

$$P_0 x = (x, g)e, \quad P^0 = I - P_0, \quad (3.9)$$

(если $N = 1$, то $P_0 x = x$ и $P^0 x = 0$). Положим $B_0 = I - V_0 + P_0$. По построению оператор $B_0 : R^N \rightarrow R^N$ обратим.

Положим

$$\gamma_2 = \int_0^T (A'_\mu(t, \mu_0)e, g)dt, \quad (3.10)$$

$$l_2 = \int_0^T (X^{-1}(\tau, \mu_0)a_2(\varphi_0(\tau), \tau, \mu_0), g)d\tau, \quad (3.11)$$

$$l_3 = \int_0^T (a'_{2x}(\varphi_0(\tau), \tau, \mu_0)B_0^{-1}P^0 a_2(\varphi_0(\tau), \tau, \mu_0), g)d\tau + \int_0^T (X^{-1}(\tau, \mu_0)a_3(\varphi_0(\tau), \tau, \mu_0), g)d\tau, \quad (3.12)$$

здесь a'_{2x} – матрица Якоби квадратичной нелинейности $a_2(x, t, \mu)$, $\varphi_0(t) = X(t, \mu_0)e$, т.е. $\varphi_0(t)$ – это T -периодическое решение линейной системы (3.8) при $\mu = \mu_0$, стартующее при $t = 0$ из точки $x = e \in R^N$ (такое решение системы (3.8) существует в силу условия Q1°).

В частном случае, когда матрица $A(t, \mu_0)$ является постоянной, формулы (3.11) и (3.12) упрощаются:

$$l_2 = \int_0^T (a_2(e, \tau, \mu_0), g)d\tau, \quad (3.13)$$

$$l_3 = \int_0^T (a'_{2x}(e, \tau, \mu_0)B_0^{-1}P^0 a_2(e, \tau, \mu_0), g)d\tau + \int_0^T (a_3(e, \tau, \mu_0), g)d\tau. \quad (3.14)$$

Верны следующие утверждения [10, с. 11–19], [14, с. 42–43], [44, с. 61–75].

Теорема 3.1. Пусть матрица V_0 имеет простое собственное значение 1, при этом остальные собственные значения этой матрицы меньше 1 по модулю и выполнено соотношение $l_2\gamma_2 \neq 0$. Тогда при переходе параметра μ через точку μ_0 в системе (3.6) реализуется сценарий транскритической бифуркации вынужденных колебаний.

Доказательства этой и других основных утверждений приводятся в конце этой главы.

Теорема 3.2. Пусть матрица V_0 имеет простое собственное значение 1, при этом остальные собственные значения этой матрицы меньше 1 по модулю и выполнены соотношения $l_2 = 0$, и $l_3\gamma_2 \neq 0$. Тогда при переходе параметра μ через точку μ_0 в системе (3.6) реализуется сценарий бифуркации вынужденных колебаний типа вилки.

Пример 3.1. Рассмотрим модель Лоренца со слабоосциллирующим параметром, описываемую системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x_1' = -10(x_1 - x_2), \\ x_2' = -x_1x_3 + [1 + \mu\varphi(t)]x_1 - x_2, \\ x_3' = x_1x_2 - (8/3)x_3, \end{cases} \quad (3.15)$$

где μ – скалярный параметр. Система (3.15) имеет решение $x = 0$ при всех значениях параметра μ .

В примере 2.1 было показано, что точка $\mu = 0$ на прямой μ является границей области устойчивости. Изучим вопрос о сценарии бифуркаций при переходе параметров через граничную точку $\mu = 0$ области устойчивости в случае, когда $\varphi(t) = 1 + \cos t$.

Вычисления по формулам (3.10), (3.13) и (3.14) показывают, что $\gamma_2 = \frac{20}{11}\pi$, $l_2 = 0$, и $l_3 = -\frac{10\pi}{11}$. Согласно условиям теоремы 3.2 получаем, что при переходе параметра μ через граничную точку $\mu_0 = 0$ в системе (3.15) реализуется сценарий бифуркации вынужденных колебаний типа вилки.

3.2.2 Случай Q2°

В этом случае, как правило, при переходе параметра μ через точку μ_0 в системе (3.6) реализуется сценарий бифуркации Андронова–Хопфа. Более детально этот сценарий описан, например, в [32, 44].

Обозначим через $e, g, e^*, g^* \in R^N$ ненулевые векторы такие, что выполняются равенства:

$$V_0(e + ig) = e^{2\pi\theta_0 i}(e + ig), \quad V_0^*(e^* + ig^*) = e^{-2\pi\theta_0 i}(e^* + ig^*). \quad (3.16)$$

Далее в этом подразделе для простоты будем считать, что система (3.6) двумерна, т.е. $N = 2$.

Положим

$$\gamma_3 = \int_0^T [(A'_\mu(t, \mu_0)e, e^*) + (A'_\mu(t, \mu_0)g, g^*)] dt. \quad (3.17)$$

Теорема 3.3. Пусть матрица V_0 имеет пару простых собственных значений $e^{\pm 2\pi\theta_0 i}$, где $0 < \theta_0 < \frac{1}{2}$, причем $\theta_0 \neq \frac{1}{4}$ и $\theta_0 \neq \frac{1}{3}$, при этом остальные собственные значения этой матрицы меньше 1 по модулю. Пусть выполнено соотношение $\gamma_3 \neq 0$. Тогда при переходе параметра μ через точку μ_0 вблизи точки μ_0 в системе (3.6) реализуется сценарий бифуркации Андронова–Хопфа.

3.3 Бифуркации в двухпараметрических системах

Рассмотрим теперь зависящую от скалярных параметров α и β динамическую систему, описываемую неавтономным дифференциальным уравнением с T -периодической правой частью:

$$\frac{dx}{dt} = A(t, \alpha, \beta)x + a_2(x, t, \alpha, \beta) + a_3(x, t, \alpha, \beta) + \tilde{a}_4(x, t, \alpha, \beta), \quad x \in R^N, \quad (3.18)$$

где $a_2(x, t, \alpha, \beta)$ и $a_3(x, t, \alpha, \beta)$ содержат соответственно квадратичные и кубические по x слагаемые, а $\tilde{a}_4(x, t, \alpha, \beta)$ является гладкой и удовлетворяющей соотношению: $\|\tilde{a}_4(x, t, \alpha, \beta)\| = O(\|x\|^4)$ при $x \rightarrow 0$ равномерно по t, α и β .

Здесь матрицу $A(t, \alpha, \beta)$ удобно представить в виде:

$$A(t, \alpha, \beta) = A_0 + (\alpha - \alpha_0)B_1(t) + (\beta - \beta_0)B_2(t) + \tilde{D}(t, \alpha, \beta), \quad x \in R^N, \quad (3.19)$$

где матрица A_0 является постоянной, матрицы $B_1(t)$, $B_2(t)$ и $\tilde{D}(t, \alpha, \beta)$ являются T -периодическими по t , при этом $\tilde{D}(t, \alpha, \beta)$ равномерно по t удовлетворяет соотношению: $\|\tilde{D}(t, \alpha, \beta)\| = O((\alpha - \alpha_0)^2 + (\beta - \beta_0)^2)$ при $(\alpha, \beta) \rightarrow (\alpha_0, \beta_0)$.

Тогда система (3.18) представится в виде:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = & (A_0 + (\alpha - \alpha_0)B_1(t) + (\beta - \beta_0)B_2(t) + \tilde{D}(t, \alpha, \beta))x + \\ & + a_2(x, t, \alpha, \beta) + a_3(x, t, \alpha, \beta) + \tilde{a}_4(x, t, \alpha, \beta), \quad x \in R^N. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Ниже *трансверсальным переходом* [18, стр. 456] параметров (α, β) через граничную кривую γ_0 вблизи точки (α_0, β_0) будем называть переход этих параметров через кривую γ_0 вдоль гладкой кривой γ_1 , которая трансверсально пересекает кривую γ_0 в точке (α', β') , находящейся в δ -окрестности точки (α_0, β_0) при некотором $\delta > 0$ (см. рис. 3.3).

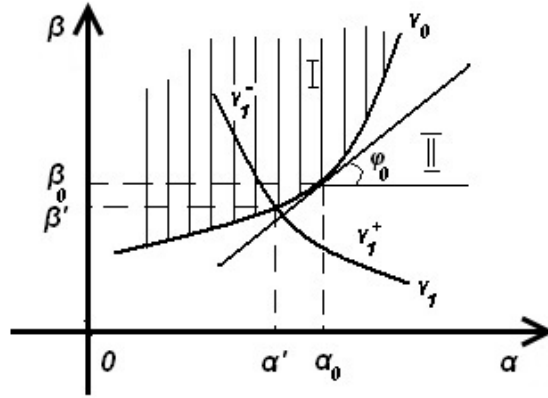


Рис. 3.3. Трансверсальный переход параметров через граничную кривую γ_0

Линеаризованная система, соответствующая системе (3.20), при $\alpha = \alpha_0$ и $\beta = \beta_0$ имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = A_0 x, \quad x \in R^N. \quad (3.21)$$

Предполагается, что выполнено одно из условий:

S1°. матрица A_0 имеет простое собственное значение 0;

S2°. матрица A_0 имеет пару простых собственных значений $\pm i\omega_0$, где $\omega_0 > 0$, причем

$$\omega_0 \neq \frac{\pi k}{T} \text{ для натуральных } k, \quad (3.22)$$

$$\omega_0 \neq \frac{\pi k}{2T}, \frac{2\pi k}{3T} \text{ для натуральных } k. \quad (3.23)$$

Соотношения (3.22) и (3.23), с точки зрения общей теории локальных бифуркаций [47], означают, что для рассматриваемой задачи имеет место слабый резонанс.

При этом в обоих случаях предполагается, что остальные собственные значения матрицы A_0 имеют отрицательные вещественные части.

Всюду ниже будем предполагать, что (α_0, β_0) является регулярной граничной точкой (см. гл. 2, стр. 43). В этом случае в плоскости (α, β) через точку (α_0, β_0) проходит единственная гладкая граничная кривая γ_0 .

С целью исследования возможных сценариев бифуркаций в системе (3.20) при трансверсальном переходе параметров (α, β) через кривую γ_0 рассмотрим соответствующую линеаризованную систему

$$\frac{dx}{dt} = [A_0 + (\alpha - \alpha_0)B_1(t) + (\beta - \beta_0)B_2(t) + \tilde{D}(t, \alpha, \beta)]x, \quad x \in R^N. \quad (3.24)$$

3.3.1 Случай S1°

Обозначим через e и g собственные векторы матрицы A_0 и транспонированной матрицы A_0^* соответственно, отвечающие собственному значению 0. Эти векторы можно считать нормированными равенствами (1.14):

$$\|e\| = 1, \quad (e, g) = 1.$$

Так как кривая γ_0 является граничной для области устойчивости точки равновесия $x = 0$ системы (3.20), а матрица A_0 имеет простое собственное значение 0, то в каждой близкой к (α_0, β_0) точке (α, β) граничной кривой γ_0 система (3.24) имеет простой мультипликатор, равный 1. Поэтому основным

сценарием локальных бифуркаций в окрестности точки равновесия $x = 0$ системы (3.20) при трансверсальном переходе параметров (α, β) через кривую γ_0 является бифуркация вынужденных колебаний (см. стр. 87—90 данной работы), означающая возникновение в окрестности точки $x = 0$ нестационарных T -периодических решений малой амплитуды.

Положим

$$\chi_1 = \int_0^T (B_1(t)e, g) dt, \quad \chi_2 = \int_0^T (B_2(t)e, g) dt. \quad (3.25)$$

Ниже будем предполагать, что выполнено соотношение:

$$\chi_1^2 + \chi_2^2 > 0. \quad (3.26)$$

Положим

$$\tau_1 = \int_0^T (a_2(e, t, \alpha_0, \beta_0), g) dt, \quad \tau_2 = \int_0^T (a_3(e, t, \alpha_0, \beta_0), g) dt. \quad (3.27)$$

Имеют место следующие утверждения.

Теорема 3.4. Пусть матрица A_0 имеет простое собственное значение 0, при этом остальные собственные значения матрицы A_0 имеют отрицательные вещественные части. Пусть выполнены соотношения (3.26) и $\tau_1 \neq 0$. Тогда при трансверсальном переходе параметров (α, β) через граничную кривую γ_0 вблизи точки (α_0, β_0) в системе (3.18) реализуется сценарий транскритической бифуркации вынужденных колебаний.

Теорема 3.5. Пусть матрица A_0 имеет простое собственное значение 0, при этом остальные собственные значения матрицы A_0 имеют отрицательные вещественные части. Пусть выполнены соотношения (3.26), $a_2(x, t, \alpha, \beta) \equiv 0$ и $\tau_2 \neq 0$. Тогда при трансверсальном переходе параметров (α, β) через граничную кривую γ_0 вблизи точки (α_0, β_0) в системе (3.18) реализуется сценарий бифуркации вынужденных колебаний типа вилки.

3.3.2 Случай S2°

Обозначим через $e, g, e^*, g^* \in R^N$ ненулевые векторы такие, что выполняются равенства (1.16) и (1.17):

$$\begin{aligned} A_0(e + ig) &= i\omega_0(e + ig), \quad A_0^*(e^* + ig^*) = -i\omega_0(e^* + ig^*), \\ (e, e^*) &= 1, \quad (e, g^*) = 0. \end{aligned}$$

Положим

$$\kappa_1 = \int_0^T [(B_1(t)e, e^*) + (B_1(t)g, g^*)]dt, \quad \kappa_2 = \int_0^T [(B_2(t)e, e^*) + (B_2(t)g, g^*)]dt. \quad (3.28)$$

Ниже будем предполагать, что выполнено соотношение:

$$\kappa_1^2 + \kappa_2^2 > 0. \quad (3.29)$$

Так как кривая γ_0 является граничной для области устойчивости точки равновесия $x = 0$ системы (3.20), а матрица A_0 имеет собственные значения $\pm i\omega_0$, то в каждой близкой к (α_0, β_0) точке (α, β) граничной кривой γ_0 система (3.24) имеет пару простых мультипликаторов $e^{\pm i\omega(\alpha, \beta)T}$, где $\omega(\alpha, \beta)$ – непрерывная функция и $\omega(\alpha_0, \beta_0) = \omega_0$.

С целью описания возможных сценариев бифуркации в окрестности точки равновесия $x = 0$ системы (3.20) при переходе параметров (α, β) через кривую γ_0 удобно перейти к дискретному аналогу задачи. А именно, системе (3.20) в рассматриваемой постановке можно ассоциировать с дискретной динамической системой

$$x_{n+1} = U(x_n, \alpha, \beta), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.30)$$

где $U(\cdot, \alpha, \beta) : R^N \rightarrow R^N$ – оператор сдвига по траекториям системы (3.18) за время от 0 до T . Система (3.30) имеет точку равновесия $x = 0$ при всех α и β . Эта система может быть представлена в виде:

$$x_{n+1} = V(\alpha, \beta)x_n + v(x_n, \alpha, \beta), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.31)$$

где $V(\alpha, \beta) : R^N \rightarrow R^N$ – линейный оператор, а нелинейность $v(x_n, \alpha, \beta)$ удовлетворяет соотношению: $\|v(x_n, \alpha, \beta)\| = O(\|x\|^2)$ при $\|x\| \rightarrow 0$. Здесь $V(\alpha, \beta)$ – это матрица монодромии линейной системы (3.24). В частности, $V(\alpha_0, \beta_0) = e^{A_0 T}$.

Пусть для простоты $N = 2$. Тогда в рассматриваемом случае основным сценарием локальных бифуркаций в окрестности точки равновесия $x = 0$ системы (3.31) (и, соответственно, системы (3.20)) при переходе параметров (α, β) через кривую γ_0 является возникновение в окрестности точки $x = 0$ инвариантной кривой $\gamma(\alpha, \beta)$, ограничивающей бассейн притяжения или отталкивания этой точки. Такой сценарий часто (по аналогии с автономным случаем) называют бифуркацией Андронова–Хопфа.

Теорема 3.6. Пусть матрица A_0 имеет пару простых собственных значений $\pm i\omega_0$, где $\omega_0 > 0$, при этом остальные собственные значения матрицы A_0 имеют отрицательные вещественные части. Пусть выполнены условия (3.22), (3.29), (3.23). Тогда при трансверсальном переходе параметров (α, β) через граничную кривую γ_0 вблизи точки (α_0, β_0) в системе (3.20) реализуется сценарий бифуркации Андронова–Хопфа.

Пример 3.2. Рассмотрим уравнение Ван-дер-Поля [13, 42]:

$$u'' + (\beta + u^2)u' + [\omega_0^2 + (1 + \cos t)\alpha]u = 0, \quad (3.32)$$

где $\omega_0 > 0$, α и β – малые вещественные параметры.

При помощи замены $x_1 = -u$, $x_2 = u'/\omega_0$ уравнение (3.32) может быть сведено к уравнению вида (3.2) при $x \in R^2$, где

$$A(t, \alpha, \beta) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_0 \\ \frac{1}{\omega_0}(\omega_0^2 + (1 + \cos t)\alpha) & -\beta \end{bmatrix}, \quad a(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ -x_2 x_1^2 \end{bmatrix}.$$

Матрица $A(t, \alpha, \beta)$ при $\alpha_0 = 0$ и $\beta_0 = 0$ имеет пару простых собственных значений $\pm i\omega_0$.

Выясним основные сценарии бифуркации, реализуемые при переходе параметров (α, β) через точку $(0, 0)$.

Рассмотрим случай, когда $\omega_0 \neq k/2, k/3, k/4$ при натуральных k .

Вычисления по формуле (3.28) показывают, что $\kappa_1 = 0$ и $\kappa_2 = -2\pi$.

В силу теоремы 3.6 при трансверсальном переходе параметров (α, β) через граничную кривую γ_0 вблизи точки $(0, 0)$ в уравнении (3.32) реализуется сценарий бифуркации Андронова–Хопфа.

3.4 Классификация безопасных и опасных границ областей устойчивости

3.4.1 Понятия «безопасные» и «опасные» границы области устойчивости

В теории бифуркации и ее приложениях важными являются вопросы, связанные с такими понятиями, как жесткая и мягкая бифуркация, опасные и безопасные границы области устойчивости и т. п. (см., например, [5, 44]).

Следуя Баутину Н.Н. [5, гл. 2], [44, стр. 406], *безопасными* будем называть такие границы области устойчивости, пересечение которых параметрами системы приводит лишь к малым обратимым изменениям состояния системы; соответственно, *опасными* будем называть такие границы, пересечение которых параметрами системы приводит к значительным и необратимым изменениям в поведении системы.

В работах [36, 37] говорится о том, что в случае безопасных границ потеря устойчивости затягивается, т.е. при переходе параметрами системы безопасных границ, решения, находящиеся вблизи точки равновесия или цикла, продолжительное время остаются в малой окрестности точки равновесия или цикла, соответственно. В этом случае происходит мягкая потеря устойчивости. В случае опасных границ происходит быстрый срыв решений, находящихся вблизи точки равновесия или цикла, т.е. при переходе параметрами системы опасных границ, решения, находящиеся вблизи точки равновесия или цикла, быстро покидают окрестности точки равновесия или цикла, соответственно. В этом случае происходит жесткая потеря устойчивости.

Обсудим указанные понятия более детально.

Рассмотрим сначала автономную динамическую систему

$$\frac{dx}{dt} = A(\mu)x + a(x, \mu), \quad x \in R^N, \quad \mu \in R^k, \quad (3.33)$$

в которой $A(\mu)$ является $N \times N$ матрицей, а нелинейность $a(x, \mu)$ равномерно по μ удовлетворяет соотношению $\|a(x, \mu)\| = O(\|x\|^2)$ при $x \rightarrow 0$.

Система (3.33) при любых значениях параметра μ имеет точку равновесия $x = 0$. Пусть точка μ_0 является граничной точкой области устойчивости решения $x = 0$ уравнения (3.33).

Следуя Шильникову Л.П. [44, гл. 14, стр. 406] будем говорить, что точка μ_0 является *безопасной*, если решение $x = 0$ системы (3.33) при $\mu = \mu_0$ асимптотически устойчиво; точка μ_0 является *опасной*, если решение $x = 0$ системы (3.33) при $\mu = \mu_0$ неустойчиво. В данной работе точку μ_0 будем также называть соответственно *безопасной и опасной точкой бифуркации*.

Рассмотрим теперь неавтономную нелинейную систему

$$x' = A(t, \mu)x + a(x, t, \mu), \quad x \in R^N, \quad \mu \in R^k, \quad (3.34)$$

где $A(t, \mu)$ является $N \times N$ матрицей, а функция $a(x, t, \mu)$ удовлетворяет соотношению: $\|a(x, t, \mu)\| = O(\|x\|^2)$ при $\|x\| \rightarrow 0$ равномерно по μ . При этом матрица $A(t, \mu)$ и функция $a(x, t, \mu)$ являются T -периодическими по переменной t и непрерывными по совокупности переменных.

Система (3.34) при любых значениях параметра μ имеет точку равновесия $x = 0$. Пусть точка μ_0 является граничной точкой области устойчивости решения $x = 0$ уравнения (3.34).

Точку μ_0 будем называть *безопасной точкой бифуркации*, если решение $x = 0$ системы (3.34) при $\mu = \mu_0$ асимптотически устойчиво; граничную точку μ_0 будем называть *опасной точкой бифуркации*, если решение $x = 0$ системы (3.34) при $\mu = \mu_0$ неустойчиво.

Задача об опасных и безопасных границах областей устойчивости автономных дифференциальных уравнений хорошо изучена [5, 31, 44]. В этих работах проведена полная классификация по типу опасной и безопасной, изучены основные сценарии бифуркаций, рассмотрены различные приложения.

Для неавтономных периодических систем указанная задача изучена существенно меньше. Известные здесь результаты относятся, как правило, к изучению конкретных уравнений и примеров [31, гл. 6, §74].

3.4.2 Однопараметрические неавтономные системы

Рассмотрим неавтономную нелинейную систему (3.34) в случае, когда параметр μ является скалярным:

$$x' = A(t, \mu)x + a_2(x, t, \mu) + a_3(x, t, \mu) + \tilde{a}_4(x, t, \mu), \quad x \in R^N \quad \mu \in R^1, \quad (3.35)$$

где $a_2(x, t, \mu)$ и $a_3(x, t, \mu)$ содержат соответственно квадратичные и кубические по x слагаемые, а $\tilde{a}_4(x, t, \mu)$ является гладкой и удовлетворяет соотношению: $\|\tilde{a}_4(x, t, \mu)\| = O(\|x\|^4)$ при $x \rightarrow 0$ равномерно по μ .

Наряду с уравнением (3.35) будем также рассматривать соответствующую линейную систему

$$x' = A(t, \mu)x, \quad x \in R^N \quad \mu \in R^1. \quad (3.36)$$

Обозначим через $X(t, \mu)$ фундаментальную матрицу решений (ФМР), а через $V(\mu)$ матрицу монодромии линейной системы (3.36). Пусть $V_0 = V(\mu_0)$.

В этом параграфе предлагаются новые достаточные признаки безопасности и опасности точки бифуркации μ_0 для основных сценариев бифуркаций в системе (3.35), определяемые случаями Q1° и Q2° (см. стр. 91). Изучается также поведение решений этих систем в окрестности точки $x = 0$ при переходе параметра μ через точку μ_0 .

3.4.2.1 Случай Q1°

Рассмотрим сначала случай Q1°. Здесь имеют место следующие утверждения.

Теорема 3.7. *Пусть выполнены условия теоремы 3.1. Тогда граничная точка области устойчивости μ_0 решения $x = 0$ системы (3.35) является опасной точкой бифуркации.*

Теорема 3.8. Пусть выполнены условия теоремы 3.2. Тогда граничная точка области устойчивости μ_0 решения $x = 0$ системы (3.35) является безопасной (опасной) точкой бифуркации, если $l_3 < 0$ ($l_3 > 0$).

Таким образом, если $l_2 \neq 0$, то значение μ_0 параметра μ является опасной точкой бифуркации системы (3.35). Если же $l_2 = 0$, то значение μ_0 может быть как безопасной, так и опасной точкой бифуркации системы (3.35).

Пример 3.3. Рассмотрим модель Лоренца, описываемую системой

$$\begin{cases} x_1' = -10(x_1 - x_2), \\ x_2' = -x_1x_3 + [1 + \mu\varphi(t)]x_1 - x_2, \\ x_3' = x_1x_2 - (8/3)x_3, \end{cases} \quad (3.37)$$

где μ – скалярный параметр. Система (3.37) имеет решение $x = 0$ при всех значениях параметра μ .

В примере 2.1 показано, что $\mu = 0$ является граничной точкой области устойчивости прямой параметров решения $x = 0$ системы (3.37) (см. стр. 36). В примере 3.1 показано, что согласно условиям теоремы 3.2 при переходе параметра μ через точку $\mu = 0$ в системе (3.37) реализуется сценарий бифуркации вынужденных колебаний типа вилки (см. стр. 94).

Исследуем точку бифуркации $\mu = 0$ на безопасность и опасность в случае, когда $\varphi(t) = 1 + \cos t$.

Вычисления по формулам (3.10), (3.13) и (3.14) показывают, что $\gamma_2 = \frac{20}{11}\pi$, $l_2 = 0$, и $l_3 = -\frac{10\pi}{11}$. Согласно условиям теоремы 3.8 получаем, что точка $\mu = 0$ является безопасной точкой бифуркации системы (3.37).

3.4.2.2 Случай Q2°

Рассмотрим теперь случай S2°, когда матрица V_0 имеет пару простых собственных значений $e^{\pm 2\pi\theta_0 i}$, где $0 < \theta_0 < \frac{1}{2}$, причем $\theta_0 \neq \frac{1}{4}$ и $\theta_0 \neq \frac{1}{3}$, а остальные собственные значения этой матрицы меньше 1 по модулю.

Приведем признаки безопасности (опасности) точки бифуркации μ_0 . С этой целью обозначим через $e, g, e^*, g^* \in R^N$ ненулевые векторы такие, что

выполняются равенства:

$$V_0(e + ig) = e^{2\pi\theta_0 i}(e + ig), \quad V_0^*(e^* + ig^*) = e^{-2\pi\theta_0 i}(e^* + ig^*). \quad (3.38)$$

Далее в этом подразделе для простоты будем считать, что система (3.35) двумерна, т.е. $N = 2$, а матрица V_0 имеет вид $V_0 = \begin{bmatrix} \cos 2\pi\theta_0 & \sin 2\pi\theta_0 \\ -\sin 2\pi\theta_0 & \cos 2\pi\theta_0 \end{bmatrix}$. Пусть также для простоты нелинейность $a_2(x, t, \mu)$ в системе (3.35) является нулевой: $a_2(x, t, \mu) \equiv 0$. Общий случай может быть рассмотрен по той же схеме, но приводит к более громоздким формулам.

Положим

$$\gamma_3 = \int_0^T [(A'_\mu(t, \mu_0)e, e^*) + (A'_\mu(t, \mu_0)g, g^*)] dt, \quad (3.39)$$

$$\kappa_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^T (a_3(h(t, \varphi), t, \mu_0), h(t, \varphi)) dt d\varphi, \quad (3.40)$$

где

$$h(t, \varphi) = \begin{bmatrix} \cos(2\pi\theta_0 t + \varphi) \\ \sin(2\pi\theta_0 t + \varphi) \end{bmatrix}.$$

Теорема 3.9. Пусть матрица V_0 имеет пару простых собственных значений $e^{\pm 2\pi\theta_0 i}$, где $0 < \theta_0 < \frac{1}{2}$, причем $\theta_0 \neq \frac{1}{4}$ и $\theta_0 \neq \frac{1}{3}$, при этом остальные собственные значения этой матрицы меньше 1 по модулю. Пусть выполнено соотношение $\gamma_3 \kappa_0 \neq 0$. Тогда точка μ_0 является безопасной (опасной) точкой бифуркации (3.35), если $\kappa_0 < 0$ ($\kappa_0 > 0$).

3.4.3 Двупараметрические неавтономные системы

Рассмотрим неавтономную систему с T -периодической правой частью:

$$\frac{dx}{dt} = A(t, \alpha, \beta)x + a_2(x, t, \alpha, \beta) + a_3(x, t, \alpha, \beta) + \tilde{a}_4(x, t, \alpha, \beta), \quad x \in R^N, \quad (3.41)$$

где α и β – скалярные параметры, $a_2(x, t, \alpha, \beta)$ и $a_3(x, t, \alpha, \beta)$ содержат соответственно квадратичные и кубические по x слагаемые, а $\tilde{a}_4(x, t, \alpha, \beta)$ является гладкой и удовлетворяющей соотношению: $\|\tilde{a}_4(x, t, \alpha, \beta)\| = O(\|x\|^4)$ при $x \rightarrow 0$ равномерно по t, α и β .

Здесь матрицу $A(t, \alpha, \beta)$ удобно представить в виде:

$$A(t, \alpha, \beta) = A_0 + (\alpha - \alpha_0)B_1(t) + (\beta - \beta_0)B_2(t) + \tilde{D}(t, \alpha, \beta), \quad x \in R^N, \quad (3.42)$$

где матрица A_0 является постоянной, матрицы $B_1(t)$, $B_2(t)$ и $\tilde{D}(t, \alpha, \beta)$ являются T -периодическими по t , при этом $\tilde{D}(t, \alpha, \beta)$ равномерно по t удовлетворяет соотношению: $\|\tilde{D}(t, \alpha, \beta)\| = O((\alpha - \alpha_0)^2 + (\beta - \beta_0)^2)$ при $(\alpha, \beta) \rightarrow (\alpha_0, \beta_0)$.

Наряду с системой 3.41 будем также рассматривать линейную систему

$$\frac{dx}{dt} = [A_0 + (\alpha - \alpha_0)B_1(t) + (\beta - \beta_0)B_2(t) + \tilde{D}(t, \alpha, \beta)]x, \quad x \in R^N. \quad (3.43)$$

В параграфе 3.3 изучались основные сценарии бифуркаций при переходе параметров (α, β) через границу области устойчивости решения $x = 0$ уравнения (3.41) в двух основных случаях негиперболичности матрицы A_0 :

S1°. матрица A_0 имеет простое собственное значение 0;

S2°. матрица A_0 имеет пару простых собственных значений $\pm i\omega_0$, где $\omega_0 > 0$, причем

$$\omega_0 \neq \frac{\pi k}{T} \text{ для натуральных } k. \quad (3.44)$$

При этом в обоих случаях предполагается, что остальные собственные значения матрицы A_0 имеют отрицательные вещественные части.

Изучим тип (безопасная или опасная) граничной кривой γ_0 области устойчивости, проходящей через точку бифуркации (α_0, β_0) .

3.4.3.1 Случай S1°

Рассмотрим сначала случай S1°(см. стр. 97). Здесь имеют место следующие утверждения.

Теорема 3.10. Пусть выполнены условия теоремы 3.4. Тогда граничная кривая γ_0 является опасной границей области устойчивости решения $x = 0$ системы (3.41).

Теорема 3.11. Пусть выполнены условия теоремы 3.5. Тогда граничная кривая γ_0 является безопасной (опасной) границей области устойчивости решения $x = 0$ системы (3.41), если $\tau_2 < 0$ ($\tau_2 > 0$).

3.4.3.2 Случай S2°

Рассмотрим теперь случай S2° (см. стр. 99).

Для изучения вопроса о типе (безопасная или опасная) граничной кривой γ_0 ограничимся рассмотрением двумерного случая, т.е. пусть в системе (3.41) $N = 2$. Общий случай ($N \geq 2$) может быть рассмотрен по той же схеме, но приводит к более громоздким формулам и поэтому здесь не рассматривается.

Наряду с (3.28) определим числа:

$$\nu_1 = \int_0^T [(B_1(t)e, g^*) - (B_1(t)g, e^*)] dt, \quad \nu_2 = \int_0^T [(B_2(t)e, g^*) - (B_2(t)g, e^*)] dt. \quad (3.45)$$

Далее в этом пункте для простоты будем считать, что система (3.41) двумерна, т.е. $N = 2$, а матрица A_0 имеет вид: $A_0 = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_0 \\ \omega_0 & 0 \end{bmatrix}$. Пусть также для простоты нелинейность $a_2(x, t, \alpha, \beta)$ является нулевой: $a_2(x, t, \alpha, \beta) \equiv 0$.

Положим:

$$\varkappa_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (v(\varphi), e(\varphi)) d\varphi \quad \text{или} \quad \varkappa_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (v(\varphi), e(\varphi - 2\pi/q)) d\varphi \quad (3.46)$$

в зависимости от того, является ли число θ_0 иррациональным или рациональным вида p/q ; здесь:

$$v(\varphi) = e^{A_0 T} \int_0^T e^{-A_0 \tau} a_3(h(\tau, \varphi), \tau, \alpha_0, \beta_0) d\tau, \quad e(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix},$$

$$h(t, \varphi) = \begin{bmatrix} \cos(\omega_0 t + \varphi) \\ \sin(\omega_0 t + \varphi) \end{bmatrix}.$$

Теорема 3.12. Пусть в условиях теоремы 3.6 выполнены соотношения:

$$\kappa_0 \neq 0, \quad \det \begin{bmatrix} \kappa_1 & \kappa_2 \\ \nu_1 & \nu_2 \end{bmatrix} \neq 0. \quad (3.47)$$

Тогда граничная кривая γ_0 является опасной (безопасной) границей области устойчивости решения $x = 0$ двумерной системы (3.41), если $\kappa_0 > 0$ ($\kappa_0 < 0$).

Пример 3.4. Рассмотрим уравнение Ван-дер-Поля [13, 42]:

$$u'' + (\beta + u^2)u' + [\omega_0^2 + (1 + \cos t)\alpha]u = 0, \quad (3.48)$$

где $\omega_0 > 0$, α и β – малые вещественные параметры.

В примере 3.2 показано, что согласно условиям теоремы 3.6 при трансверсальном переходе параметров (α, β) через граничную кривую γ_0 вблизи точки $(0, 0)$ в уравнении (3.48) реализуется сценарий бифуркации Андронова–Хопфа (см. стр. 100).

В соответствии с формулами (3.45) и (3.46) имеем $\nu_1 = -2\pi/\omega_0$, $\nu_2 = 0$ и $\kappa_0 = -0,25\pi$. В силу теоремы 3.12 граница области устойчивости уравнения (3.48) в окрестности точки $(0, 0)$ является безопасной.

3.5 Доказательства основных утверждений

Доказательство теорем 3.1 и 3.2.

В силу периодичности правой части, уравнение (3.6) может быть сведено к дискретной динамической системе (3.4) (см. пункт 3.1.2 на стр. 88):

$$x_{n+1} = U(x_n, \mu), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.49)$$

где $x_n \in R^N$, $U(*, \mu) : R^N \rightarrow R^N$ – оператор сдвига по траекториям системы (3.6) за время от 0 до T .

Известно [10, 14, 20], что оператор $U(x, \mu)$ и матрица монодромии $V(\mu)$ линейной системы (3.3) связаны равенством

$$U(x, \mu) = V(\mu)x + v(x, \mu), \quad (3.50)$$

в котором оператор $v(x, \mu)$ удовлетворяет соотношению $\sup_{\mu} \|v(x)\| = O(\|x\|^2)$ при $\|x\| \rightarrow 0$.

Так как в условиях теорем 3.1 и 3.2 матрица $V(\mu)$ при $\mu = \mu_0$ имеет простое собственное значение 1, то $\mu = \mu_0$ является точкой бифуркации неподвижных точек системы (3.49). Это соответствует тому, что в системе (3.6) реализуется сценарий бифуркации вынужденных колебаний [10].

Стационарное решение $x = 0$ уравнения (3.6) соответствует нулевому решению операторного уравнения $x = U(x, \mu)$ или, с учетом равенства (3.50), решению $x = 0$ операторного уравнения:

$$x = V(\mu)x + v(x, \mu). \quad (3.51)$$

Тот факт, что в условиях теоремы 3.1 реализуется сценарий транскриптической бифуркации, а в условиях теоремы 3.2 реализуется сценарий бифуркации типа вилки, следует из [10, с. 11–19] и [14, с. 42–43].

Доказательство теоремы 3.3.

Рассмотрим уравнение (2.8):

$$\frac{dx}{dt} = [A_0 + A_1(t)(\mu - \mu_0) + \tilde{A}(t, \mu)]x + a(x, t, \mu), \quad x \in R^N, \quad \mu \in R^1, \quad (3.52)$$

где A_0 является постоянной матрицей, матрицы $A_1(t)$ и $\tilde{A}(t, \mu)$ являются T -периодическими по t , при этом матрица $\tilde{A}(t, \mu)$ равномерно по t удовлетворяет соотношению:

$$\|\tilde{A}(t, \mu)\| = O(\|(\mu - \mu_0)\|^2) \quad \text{при } \mu \rightarrow \mu_0. \quad (3.53)$$

Теорема 3.3 будет доказана, если показать, что значение $\mu = \mu_0$ является точкой бифуркации Андронова–Хопфа для системы (3.52). Это, в свою

очередь, будет доказано, если показать, что мультипликаторы линейной системы

$$\frac{dx}{dt} = [A_0 + A_1(t)(\mu - \mu_0) + \tilde{A}(t, \mu)]x, \quad x \in R^N, \quad \mu \in R^1 \quad (3.54)$$

переходят через единичную окружность в точке $\theta_0 = e^{\frac{2\pi}{T}\omega_0 i}$, где $\omega_0 i$ – собственное значение матрицы A_0 .

В соответствии с методом Розо, существует невырожденная замена, приводящая (3.54) к виду

$$\frac{dy}{dt} = [A_0 + \mu S + \hat{A}_2(t, \mu)]y, \quad y \in R^N, \quad (3.55)$$

где S – постоянная матрица, а T -периодическая матрица $\hat{A}_2(t, \mu)$ удовлетворяет соотношению: $\|\hat{A}_2(t, \mu)\| = O(\mu^2)$ при $\mu \rightarrow 0$.

Для того, чтобы показать, что мультипликаторы системы (3.54) переходят через единичную окружность в точке $\theta_0 = e^{\frac{2\pi}{T}\omega_0 i}$, достаточно показать, что собственные значения матрицы $A_0 + \mu S$ переходят через мнимую ось в точке $\omega_0 i$.

Матрица S является решением уравнения

$$\int_0^T e^{-A_0 t} S e^{A_0 t} dt = \int_0^T e^{-A_0 t} A_1(t) e^{A_0 t} dt, \quad (3.56)$$

где $A_1(t) = A'_\mu(t, \mu_0)$.

При μ близких к μ_0 матрица $A_0 + \mu S$ имеет пару простых собственных значений $\alpha(\mu) \pm i\tau(\mu)$ таких, что функции $\alpha(\mu)$ и $\tau(\mu)$ непрерывно дифференцируемы и $\alpha(\mu_0) = 0$ и $\tau(\mu_0) = \omega_0$.

Теорема будет доказана, если докажем, что $\alpha'(\mu_0) \neq 0$.

В силу формул теории возмущений линейных операторов (см., например, [22] или параграф 2.4.1.2 на стр. 75 данной работы) имеем: $\alpha'(\mu_0) = (Se, e^*) + (Sg, g^*)$. Для вычисления числа $\alpha'(\mu_0)$ обе части уравнения (3.56) умножим сначала на вектор e , затем скалярно на вектор e^* , затем прибавим то же самое, умноженное сначала на вектор g , затем скалярно на вектор g^* .

Тогда получим соотношение:

$$(Se, e^*) + (Sg, g^*) = T \int_0^T [(A'_\mu(t, \mu_0)e, e^*) + (A'_\mu(t, \mu_0)g, g^*)] dt. \quad (3.57)$$

Согласно равенству (3.17), имеем:

$$(Se, e^*) + (Sg, g^*) = T\gamma_3. \quad (3.58)$$

Отсюда $(Se, e^*) + (Sg, g^*) \neq 0$.

Доказательство теорем 3.4 и 3.5.

Достаточно исследовать бифуркации, возникающие при трансверсальном переходе параметров (α, β) через кривую γ_0 по прямой, заданной параметрическими уравнениями:

$$\alpha(\varepsilon) = \alpha_0 + \varepsilon \cos \varphi^*, \quad \beta(\varepsilon) = \beta_0 + \varepsilon \sin \varphi^*, \quad (3.59)$$

где φ^* отличен от угла наклона касательной к граничной кривой γ_0 в точке (α_0, β_0) . Другими словами, достаточно рассмотреть однопараметрическое уравнение

$$\frac{dx}{dt} = A(\alpha(\varepsilon), \beta(\varepsilon))x + a(x, \alpha(\varepsilon), \beta(\varepsilon)).$$

Далее доказательство теорем 3.4 и 3.5 проводится по той же схеме, что и доказательства теорем 3.1 и 3.2.

Доказательство теоремы 3.6.

В теореме 2.9 (см. стр. 46) было доказано, что точка (α_0, β_0) является регулярной граничной точкой области гиперболичности решения $x = 0$ уравнения (2.24). Пусть φ_0 – это угол наклона касательной к граничной кривой в точке (α_0, β_0) . Тогда верно равенство

$$\kappa_1 \cos \varphi_0 + \kappa_2 \sin \varphi_0 = 0. \quad (3.60)$$

Осуществим трансверсальный переход через граничную кривую вблизи граничной точки (α_0, β_0) по некоторой прямой, заданной параметрически:

$$\alpha(\varepsilon) = \alpha_0 + \varepsilon \cos \varphi^*, \quad \beta(\varepsilon) = \beta_0 + \varepsilon \sin \varphi^*, \quad (3.61)$$

где $\varphi^* \neq \varphi_0 + \pi k$, $k \in Z$. Тогда будет верно неравенство

$$\kappa_1 \cos \varphi^* + \kappa_2 \sin \varphi^* \neq 0. \quad (3.62)$$

В этом случае система (3.20) на прямой (3.61) примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = & (A_0 + \varepsilon(\cos \varphi^* B_1(t) + \sin \varphi^* B_2(t)) + \tilde{D}(t, \varepsilon))x + \\ & + a_2(x, t, \varepsilon) + a_3(x, t, \varepsilon) + \tilde{a}_4(x, t, \varepsilon), \quad x \in R^N. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Теорема 3.6 будет доказана, если показать, что значение $\varepsilon = 0$ является точкой бифуркации Андронова–Хопфа для системы (3.63). Это, в свою очередь, будет доказано, если показать, что мультипликаторы линейной системы

$$\frac{dx}{dt} = [A_0 + \varepsilon(\cos \varphi^* B_1(t) + \sin \varphi^* B_2(t)) + \tilde{D}(t, \varepsilon)]x, \quad x \in R^N \quad (3.64)$$

переходят через единичную окружность в точке $\theta_0 = e^{\frac{2\pi}{T}\omega_0 i}$, где $\omega_0 i$ – собственное значение матрицы A_0 .

В соответствии с методом Розо, существует невырожденная замена, приводящая (3.64) к виду

$$\frac{dy}{dt} = [A_0 + \varepsilon S + \hat{A}_2(t, \varepsilon)]y, \quad y \in R^N, \quad (3.65)$$

где S – постоянная матрица, а T -периодическая матрица $\hat{A}_2(t, \varepsilon)$ удовлетворяет соотношению: $\|\hat{A}_2(t, \varepsilon)\| = O(\varepsilon^2)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Для того, чтобы показать, что мультипликаторы системы (3.64) переходят через единичную окружность в точке $\theta_0 = e^{\frac{2\pi}{T}\omega_0 i}$, достаточно показать, что собственные значения матрицы $A_0 + \varepsilon S$ переходят через мнимую ось в точке $\omega_0 i$.

Матрица S является решением уравнения

$$\int_0^T e^{-A_0 t} S e^{A_0 t} dt = \int_0^T e^{-A_0 t} (\cos \varphi^* B_1(t) + \sin \varphi^* B_2(t)) e^{A_0 t} dt. \quad (3.66)$$

При малых $|\varepsilon|$ матрица $A_0 + \varepsilon S$ имеет пару простых собственных значений $\mu(\varepsilon) \pm i\tau(\varepsilon)$ таких, что функции $\mu(\varepsilon)$ и $\tau(\varepsilon)$ непрерывно-дифференцируемы и $\mu(0) = 0$ и $\tau(0) = \omega_0$.

Теорема будет доказана, если докажем, что $\mu'(0) \neq 0$.

В силу формул теории возмущений линейных операторов (см., например, [22] или параграф 2.4.1.2 на стр. 75 данной работы) имеем: $\mu'(0) = (Se, e^*) + (Sg, g^*)$. Для вычисления числа $\mu'(0)$ обе части уравнения (3.66) умножим сначала на вектор e , затем скалярно на вектор e^* , затем прибавим то же самое, умноженное сначала на вектор g , затем скалярно на вектор g^* . Тогда получим соотношение:

$$\begin{aligned} (Se, e^*) + (Sg, g^*) = T \int_0^T (\cos \varphi^*((B_1(t)e, e^*) + (B_1(t)g, g^*))) + \\ + \sin \varphi^*((B_1(t)e, e^*) + (B_1(t)g, g^*))) dt. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Согласно равенствам (3.28), имеем:

$$(Se, e^*) + (Sg, g^*) = T \int_0^T (\cos \varphi^* \kappa_1 + \sin \varphi^* \kappa_2) dt. \quad (3.68)$$

В силу неравенства (3.62) имеем, $(Se, e^*) + (Sg, g^*) \neq 0$.

Доказательства теорем 3.7 и 3.8.

Согласно [20, стр. 33–34], решение $x(t, \mu)$ системы (3.35), удовлетворяющее начальному условию $x(0, \mu) = x_0(\mu)$, является решением интегрального уравнения

$$x(t, \mu) = X(t, \mu)x_0(\mu) + X(t, \mu) \int_0^t X^{-1}(s, \mu)[a(x(s, \mu), s, \mu)]ds, \quad x \in R^N, \quad \mu \in R^1, \quad (3.69)$$

где $X(t, \mu)$ является ФМР системы (3.36).

Формула (3.69) позволяет выписать оператор сдвига $U(T, \mu)$ по траекториям системы (3.35) за время $0 \leq t \leq T$:

$$U(T, \mu) = V(\mu)x_0(\mu) + V(\mu) \int_0^T X^{-1}(s, \mu)[a(x(s, \mu), s, \mu)]ds, \quad x \in R^N, \quad \mu \in R^1, \quad (3.70)$$

где $V(\mu)$ – матрица монодромии системы (3.36).

Систему (3.35) можно ассоциировать с дискретной динамической системой:

$$x_{n+1} = V(\mu)x_n + V(\mu) \int_0^T X^{-1}(s, \mu)[a(x_n(s, \mu), s, \mu)]ds, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad x \in R^N, \quad (3.71)$$

где $x_n(s, \mu)$ является решением дифференциального уравнения (3.35) с начальным условием $x(0) = x_n$. Отметим, что неподвижные точки системы (3.71) определяют T -периодические решения исходной системы (3.35), а циклы периода q определяют qT -периодические решения системы (3.35).

Система (3.71) при $\mu = \mu_0$ имеет точку равновесия $x = 0$. Как и для системы (3.35), значение $\mu = \mu_0$ является точкой бифуркации системы (3.71).

Для доказательства теоремы 3.7 достаточно показать, что решение $x = 0$ уравнения (3.35) при $\mu = \mu_0$ является неустойчивым. В свою очередь, для этого достаточно показать, что решение $x = 0$ при $\mu = \mu_0$ дискретной системы (3.71) является неустойчивым.

Согласно теореме о центральном многообразии [50, стр. 186] и методе нормальных форм [50, стр. 198] задача о локальных бифуркациях для N -мерной системы (3.71) может быть сведена [10, 44] к исследованию равносильной (в естественной постановке) задаче для одномерного уравнения

$$u_{n+1} = u_n + l_2 u_n^2 + l_3 u_n^3 + o(u_n^3), \quad (3.72)$$

где числа l_2 и l_3 определяются равенствами (3.11) и (3.12).

В условиях теоремы 3.7 когда $l_2 \neq 0$ не сложно увидеть, что решение $u = 0$ уравнения (3.72) является неустойчивым.

В условиях же теоремы 3.8 $l_2 = 0$. Поэтому в случае, когда $l_3 < 0$ решение $u = 0$ уравнения (3.72) является устойчивым, а в случае, когда $l_3 > 0$ – неустойчивым.

Доказательство теоремы 3.9.

Доказательство теоремы 3.9 будем проводить по той же схеме, что и доказательства теорем 3.7 и 3.8.

В доказательствах теорем 3.7 и 3.8 было сказано, что систему (3.35) можно ассоциировать с дискретной динамической системой (3.71). Для доказательства теоремы 3.9 достаточно показать, что решение $x = 0$ уравнения (3.35) при $\mu = \mu_0$ является асимптотически устойчивым при $\kappa_0 < 0$ и неустойчивым при $\kappa_0 > 0$. В свою очередь, для этого достаточно показать, что решение $x = 0$ при $\mu = \mu_0$ дискретной системы (3.71) является асимптотически устойчивым при $\kappa_0 < 0$ и неустойчивым при $\kappa_0 > 0$.

Согласно теореме о центральном многообразии [50, стр. 186] и методе нормальных форм [50, стр. 198] задача о локальных бифуркациях для N -мерной системы (3.71) может быть сведена [10, 44] к исследованию равносильной (в естественной постановке) задаче для одномерного уравнения

$$u_{n+1} = u_n + l_2 u_n^2 + l_3 u_n^3 + o(u_n^3), \quad (3.73)$$

где $l_2 \equiv 0$ так, как в условиях теоремы 3.9 в системе (3.35) отсутствует слагаемое $a_2(x, t, \mu)$. Здесь $l_3 = \kappa_0$, где κ_0 определяется равенством (3.40).

В случае, когда $\kappa_0 < 0$ решение $u = 0$ уравнения (3.73) является устойчивым, а в случае, когда $\kappa_0 > 0$ – неустойчивым.

Доказательства теорем 3.10 и 3.11.

Достаточно исследовать граничную кривую γ_0 на признаки безопасности и опасности при трансверсальном переходе параметров (α, β) через кривую γ_0 по прямой, заданной параметрически уравнениями:

$$\alpha(\varepsilon) = \alpha_0 + \varepsilon \cos \varphi^*, \quad \beta(\varepsilon) = \beta_0 + \varepsilon \sin \varphi^*, \quad (3.74)$$

где φ^* отличен от угла наклона касательной к граничной кривой γ_0 в точке (α_0, β_0) . Другими словами, достаточно рассмотреть однопараметрическое уравнение

$$\frac{dx}{dt} = A(\alpha(\varepsilon), \beta(\varepsilon))x + a(x, \alpha(\varepsilon), \beta(\varepsilon)).$$

Далее доказательства теорем 3.10 и 3.11 проводится по той же схеме, что и доказательства теорем 3.7 и 3.8.

Доказательство теоремы 3.12.

Достаточно исследовать граничную кривую γ_0 на признаки безопасности и опасности при трансверсальном переходе параметров (α, β) через кривую γ_0 по прямой, заданной параметрически уравнениями:

$$\alpha(\varepsilon) = \alpha_0 + \varepsilon \cos \varphi^*, \quad \beta(\varepsilon) = \beta_0 + \varepsilon \sin \varphi^*, \quad (3.75)$$

где φ^* отличен от угла наклона касательной к граничной кривой γ_0 в точке (α_0, β_0) . Другими словами, достаточно рассмотреть однопараметрическое уравнение

$$\frac{dx}{dt} = A(\alpha(\varepsilon), \beta(\varepsilon))x + a(x, \alpha(\varepsilon), \beta(\varepsilon)).$$

Далее доказательство теоремы 3.12 проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 3.9.

Заключение

1. Предложены новые асимптотические формулы для приближенного построения границ областей гиперболичности и устойчивости точек равновесия и периодических решений автономных и неавтономных периодических дифференциальных уравнений.
2. Получены необходимые и достаточные признаки для основных сценариев бифуркаций в окрестностях точек равновесия и периодических решений неавтономных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, при переходе параметров через границы областей устойчивости и гиперболичности.
3. Получены числовые характеристики, позволяющие классифицировать и исследовать границы областей устойчивости динамических систем, описываемых неавтономными дифференциальными уравнениями с периодическими коэффициентами, по типу безопасности и опасности.

Литература

- [1] *Арнольд В. И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: МЦНМО, — 2012. — 344 с.
- [2] *Арнольд В. И.* Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2000. — 400 с.
- [3] *Белова А.С., Ибрагимова Л.С., Юмагулов М.Г.* Методы исследования устойчивости линейных периодических систем, зависящих от малого параметра // Итоги науки и техники. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз. — 2019. — Т. 163. — С. 113–126.
- [4] *Belyakov A. O., Seyranian A. P.* Stability Boundary Approximation of Periodic Dynamics // Nonlinear Dynamics of Structures, Systems and Devices, Springer International Publishing Cham. — 2020. — С. 13–23.
- [5] *Баутин Н.Н.* Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости // Сер. "Современные проблемы механики". — 1949. — 166 с.
- [6] *Баутин Н.Н., Леонтович Е.А.* Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. — М: Наука, 1990. — 490 с.
- [7] *Брюно А.Д.* Множества устойчивости многопараметрических задач // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. — 2010. — № 3, — 14 с.
- [8] *Батхин А.Б., Брюно А.Д., Варин В.П.* Множества устойчивости многопараметрических гамильтоновых систем // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. — 2011. — № 42, — 32 с.

- [9] *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — 2-е изд. — М.: Наука, 1974. — 408 с.
- [10] *Вышинский А.А., Ибрагимова Л.С., Муртазина С.А., Юмагулов М.Г.* Операторный метод приближенного исследования правильной бифуркации в многопараметрических динамических системах // Уфимск. матем. журн. — 2010. — Т. 2. № 4. — С. 3–26.
- [11] *Вышинский А.А., Муртазина С.А., Нуров И.Д., Юмагулов М.Г.* Операторный метод исследования локальных бифуркаций многопараметрических динамических систем // Вестник Санкт-Петерб. Унив. — 2009. — Сер. 10. Вып. 2. — С. 146–155.
- [12] *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. — М.: ФИЗМАТЛИТ, — 2004. — 560 с.
- [13] *Гукенхеймер Дж., Холмс Ф.* Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. — Москва-Ижевск: Ин-т компьютер. исслед. — 2002. — 560 с.
- [14] *Гусарова Н.И., Муртазина С.А., Фазлытдинов М.Ф., Юмагулов М.Г.* Операторные методы вычисления ляпуновских величин в задачах о локальных бифуркациях динамических систем // Уфимск. математ. журн. — 2018. — Т. 10. № 1. — С. 25–49.
- [15] *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967. — 472 с.
- [16] *Имангулова Э.С., Ибрагимова Л.С., Юмагулов М.Г.* Главные асимптотики в задаче о бифуркации Андронова-Хопфа и их приложения // Обыкновен. дифф. ур. — 2017. — Т. 53. № 12. — С. 1627–1642.
- [17] *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1975. — 740 с.
- [18] *Каток А. Б., Хасселблат Б.* Введение в теорию динамических систем. — М.: МЦНМО. 2005. — 464 с.

- [19] *Kozyakin V.S., Krasnosel'skii M.A.* The method of parameter functionalization in the Hopf bifurcation problem // Nonl. Analysis. TMA. – 1987. – 11. 2. – P. 149–161.
- [20] *Красносельский М. А.* Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1966. — 332 с.
- [21] *Красносельский М. А., Кузнецов Н. А., Юмагулов М. Г.* Операторный метод анализа устойчивости циклов при бифуркации Хопфа // Автоматика и телемеханика. — 1996. — № 12. — С. 15-24.
- [22] *Красносельский М. А., Юмагулов М. Г.* Метод функционализации параметра в проблеме собственных значений // ДАН России. — 1999. — Том 365. № 2. — С. 162–164.
- [23] *Ланкастер П.* Теория матриц. — М.: Наука, 1978. — 280 с.
- [24] *Левантовский Л. В.* О границе множества устойчивых матриц // Успехи математических наук. 1980. — Том 35. № 2. — С. 213–214.
- [25] *Левантовский Л. В.* Особенности границы области устойчивости // Функциональный анализ и его приложения. —1982. — Том 16. № 1. — С. 44–48.
- [26] *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. Л.–М.: ОНТИ. Гл. ред. общетехн. лит-ры. — 1935. —386 с.
- [27] *Майлыбаев А. А.* Многопараметрические задачи теории устойчивости // Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. Санкт-Петербург. — 2008. — 32 с.
- [28] *Майлыбаев А. А., Сейранян А. П.* Многопараметрические задачи устойчивости. Теория и приложения в механике. М.: ФИЗМАТЛИТ. — 2009. — 400 с.

- [29] *Малкин И. Г.* Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний. М.: Едиториал УРСС. – 2004. – 248 с.
- [30] *Малкин И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. Москва, – 1956. – 492 с.
- [31] *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М.: Едиториал УРСС, – 2017. – 431 с.
- [32] *Марсден Дж., Мак-Кракен М.* Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М.: Мир. – 1980. – 366 с.
- [33] *Моисеев Н.Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука. – 1969. – 377 с.
- [34] *Муртазина С.А., Юмагулов М.Г.* Исследование локальных бифуркации вынужденных колебаний динамических систем // Автоматика и телемеханика. – 2012. – № 4. – С. 83-98.
- [35] *Найфэ А.* Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. – 535 с.
- [36] *Нейштадт А. И.* О затягивании потери устойчивости при динамических бифуркациях // Дифференц. уравнения. – 1987. – Т. 23, № 12. – С. 2060—2067.
- [37] *Нейштадт А. И.* О затягивании потери устойчивости при динамических бифуркациях // Дифференц. уравнения, – 1988. – Т. 24, № 2. – С. 226—233.
- [38] *Перов А. И.* Об одном критерии устойчивости линейных систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами // Автомат. телемех. – 2013. – № 2. С. 22–37.
- [39] *Пуанкаре А.* Лекции по небесной механике. Москва.: Наука, 1965. – 572 с.
- [40] *Розо М.* Нелинейные колебания и теория устойчивости. М.: Наука, 1971. – 288 с.

- [41] *Фазлытдинов М.Ф., Юмагулов М.Г.* Обмен устойчивостью в задаче о локальных бифуркациях дискретных динамических систем // Уфимск. математ. журн. 2018. – Т. 10. № 1. – С. 25–49.
- [42] *Чезари Л.* Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1964. – 477 с.
- [43] *Шильников Л. П., Шильников А. Л., Тураев Д. В., Чуа Л.* Методы качественной теории в нелинейной динамике. Часть 1. — Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, – 2003. – 428 с.
- [44] *Шильников Л. П., Шильников А. Л., Тураев Д. В., Чуа Л.* Методы качественной теории в нелинейной динамике. Часть 2. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований. – 2009. – 548 с.
- [45] *Штокало И.З.* Линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами. (Асимптотические методы и критерий устойчивости и неустойчивости решения). Киев: Изд. АН УССР, – 1960. – 75 с.
- [46] *Юмагулов М.Г.* Операторный метод исследования правильной бифуркации в многопараметрических системах // Доклады АН. – 2009. – Т. 424, № 2. – С. 177-180.
- [47] *Юмагулов М.Г.* Локализация языков Арнольда дискретных динамических систем // Уфимск. математ. журн. – 2013. – Т. 5. № 2. – С. 109–131.
- [48] *Юмагулов М.Г.* Обыкновенные дифференциальные уравнения: теория и приложения. М.-Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика" – 2008. – 184 с.
- [49] *Юмагулов М.Г.* Введение в теорию динамических систем : учебное пособие / М. Г. Юмагулов. — Санкт-Петербург : Лань, – 2015. — 272 с.
- [50] *Юмагулов, М. Г.* Введение в нелинейную динамику: теория, приложения, модели / М. Г. Юмагулов. — Санкт-Петербург : Лань, – 2022. – 368 с.

- [51] Юмагулов М.Г. Исследование основных сценариев бифуркации в окрестностях границ областей устойчивости точек либрации задачи трех тел // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. – 2017. – Т. 139. – С. 114–127.
- [52] Юмагулов М.Г., Ибрагимова Л.С. Белова А.С. Методы спектральной теории в приложениях к дифференциальным уравнениям. – 2020. – Уфа: РИЦ БашГУ, – С. 120.
- [53] Якубович В. А., Старжинский В. М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука. – 1972. – 720 с.
- [54] Chiang H. D., Alberto L. F. C. Stability regions of nonlinear dynamical systems : theory, estimation, and applications. Cambridge University Press. – 2015. – 484 p.
- [55] Chiang H. D., Hirsch M. W., Wu F. F. Stability region of nonlinear autonomous dynamical systems // Institute of Electrical and Electronics Engineers Trans. on Automatic Control. – 1988. – V. 33, № 1. – P. 16–27.
- [56] Amaral F. M., Alberto L. F. C. Stability Boundary Characterization of Nonlinear Autonomous Dynamical Systems in the Presence of a Saddle-Node Equilibrium Point // Tend. Mat. Apl. Comput. - 2012.- V. 13. № 2. - P. 143–154.
- [57] Kuznetsov Yu. A. Elements of Applied Bifurcation Theory. N.Y.: Springer. – 2004. – 614 p.
- [58] Loccufier M., Noldus E. A New Trajectory Reversing Method for Estimating Stability Regions of Autonomous Nonlinear Systems // Nonlinear Dynamics. – 2000.– V. 21.– P. 265–288.

- [59] *Jianjun Paul Tiana, Jin Wang* Some results in Floquet theory, with application to periodic epidemic models // Appl. Anal. – 2015. – V. 94, № 6. – P. 1128–1152.
- [60] *Robinson C.* Dynamic Systems. Stability, Symbolic Dynamics and Chaos. 2nd edn., CRC Press. - 1998. – 478 p.
- [61] *Seyranian A. P., Mailybaev A. A.* Multiparameter Stability Theory with Mechanical Applications. — New Jersey: World Scientific. – 2003. – 397 p.
- [62] *Wiggins S.* Global Bifurcations and Chaos: Analytical Methods, Applied Mathematical Sciences. Springer-Verlag, New York, – 1988. –v.73. – 385 p.
- [63] *Ибрагимова Л.С., Мустафина И.Ж., Юмагулов М.Г.* Асимптотические формулы в задаче построения областей гиперболичности и устойчивости динамических систем // Уфимский математический журнал. – 2016. – Т. 8, № 3. –С. 59–81.
- [64] *Ибрагимова Л.С., Мустафина И.Ж., Юмагулов М.Г.* Исследование границ областей устойчивости двухпараметрических динамических систем // Автоматика и телемеханика. – 2017. – № 10. – С. 74–89.
- [65] *Yumagulov M.G., Ibragimova L.S., Mustafina I.Zh.* Boundaries of stability domains for equilibrium points of differential equations with parameters // Journal of Mathematical Sciences. – 2018. – V. 230, № 5. – Pp. 818–821.
- [66] *Belova A.S., Ibragimova L.S., Mustafina I.G.* Boundaries of the region of stability of autonomous Hamiltonian systems // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2023. – Vol. 44, no. 5. – P. 1823–1828.
- [67] *Мустафина И.Ж.* О безопасных и опасных точках бифуркации в периодических динамических системах // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2024. – Вып. 3(66). – С. 47–54.

- [68] *Мустафина И.Ж.* Исследование границ областей устойчивости двупараметрических дифференциальных уравнений второго порядка // Вестник Башкирского университета. – 2017. – Т. 22, № 3. – С. 597–602.
- [69] *Ибрагимова Л.С., Фанина (Мустафина) И.Ж., Юмагулов М.Г.* О построений областей устойчивости решений дифференциальных уравнений, зависящих от параметров // Вестник Пермского Университета. Математика. Механика. Информатика. – 2016. – Вып. 2. – С. 61–66.
- [70] *Фанина (Мустафина) И.Ж.* Признаки устойчивости линейных уравнений с периодическими коэффициентами // Устойчивость и процессы управления: материалы III международной научной конференции. – Санкт-Петербург, 2015. – С. 51–52.
- [71] *Юмагулов М.Г., Фанина (Мустафина) И.Ж., Ибрагимова Л.С.* О построений областей устойчивости решений дифференциальных уравнений, зависящих от параметров // Математика и глобальные вызовы XXI века: материалы симпозиума, посвященного столетию Пермского государственного национального исследовательского университета. – Пермь, 2016. – С. 145–147.
- [72] *Фанина (Мустафина) И.Ж.* Приближенное построение мультипликаторов линейной системы с периодическими коэффициентами // Воронежская зимняя математическая школа: материалы международной конференции. – Воронеж, 2016. – С. 399–402.
- [73] *Мустафина И.Ж.* Признаки опасных и безопасных точек бифуркации неавтономных динамических систем // Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения: материалы международной научной конференции (оз. Банное). – Уфа, 2018. – С. 56.
- [74] *Юмагулов М.Г., Ибрагимова Л.С., Мустафина И.Ж.* Приближенное построение границ областей устойчивости неавтономных дифференциальных уравнений // Фундаментальная математика и ее приложения в есте-

ствознании: материалы международной школы-конференции студентов, аспирантов и молодых ученых. – Уфа, 2018. – С. 155–156.

- [75] *Мустафина И.Ж.* О приближенном построении границы области устойчивости неавтономных периодических систем // Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения: материалы международной научной конференции (оз. Банное). – Уфа, 2020. – С. 47.
- [76] *Мустафина И.Ж.* О приближенном построений границы области устойчивости нелинейных периодических систем // Уфимская осенняя математическая школа: материалы международной научной конференции. – Уфа, 2020. – С. 74–76.
- [77] *Мустафина И.Ж.* Числовые характеристики свойств гиперболичности точек равновесия нелинейных автономных систем // Уфимская осенняя математическая школа: материалы международной научной конференции. – Уфа, 2022. – С. 59–60.
- [78] *Мустафина И.Ж.* Исследование границ областей устойчивости и гиперболичности точек равновесия динамических систем // VI Конференция Математических центров России. Тезисы докладов. – Казань: Изд-во КФУ, 2026. – С. 208–209.