



УТВЕРЖДАЮ

Проректор по научной работе  
ФГБОУ ВО «Уфимский университет  
науки и технологий»  
доктор физико-математических наук,  
доцент

И.Ф. Шарафуллин

« 03 » 09 2026 г.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

федерального государственного бюджетного  
образовательного учреждения высшего образования  
«Уфимский университет науки и технологий»  
Министерства науки и высшего образования Российской Федерации

Диссертация Мустафиной Ильмиры Жаватовны «Исследование границ областей устойчивости и гиперболичности точек равновесия динамических систем» выполнена в Уфимском подразделений регионального научно-образовательного математического центра «Научно-образовательный математический центр Приволжского федерального округа» при федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Уфимский университет науки и технологий».

В период подготовки диссертации соискатель Мустафина Ильмира Жаватовна обучалась в аспирантуре по очной форме обучения федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Башкирский государственный университет» по направлению подготовки 01.06.01 Математика и механика, научной специальности 01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление, работала и работает по настоящее время в должности младшего научного сотрудника в Уфимском подразделений регионального научно-образовательного математического центра «Научно-образовательный математический центр Приволжского федерального

округа» при федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Уфимский университет науки и технологий».

В 2007 году Мустафина И.Ж. с отличием окончила Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Стерлитамакская государственная педагогическая академия» по направлению подготовки «Математика и информатика» с присуждением квалификации учитель математики и информатики по специальности «Математика и информатика».

В 2018 году окончила аспирантуру по очной форме обучения федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Башкирский государственный университет» по направлению подготовки 01.06.01 Математика и механика, по направленности (профилю) образовательной программы 01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление с присвоением квалификации «Исследователь. Преподаватель исследователь».

Диплом об окончании аспирантуры выдан федеральным государственным бюджетным образовательным учреждением высшего образования «Башкирский государственный университет» в 2018 году.

Справка об обучении со сведениями о сданных кандидатских экзаменах выдана федеральным государственным бюджетным образовательным учреждением высшего образования «Уфимский университет науки и технологий» в 2025 году.

Научный руководитель — Юмагулов Марат Гаязович, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры высокопроизводительных вычислений и дифференциальных уравнений федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Уфимский университет науки и технологий».

По итогам обсуждения диссертации Мустафиной И.Ж. «Исследование границ областей устойчивости и гиперболичности точек равновесия динамических систем» принято следующее заключение:

Диссертационная работа Мустафиной Ильмиры Жаватовны «Исследование границ областей устойчивости и гиперболичности точек равновесия динамических систем» посвящена изучению вопросов построения и исследования свойств границ областей гиперболичности и устойчивости точек равновесия и периодических решений динамических систем, описываемых линейными и нелинейными дифференциальными уравнениями с периодическими коэффициентами, в пространстве ее параметров. Приводятся новые результаты в задаче исследования указанных вопросов в нерезонансном и основных резонансных случаях, а также в задаче о локальных бифуркациях при переходе параметров системы через границы областей устойчивости с изучением бифуркаций по типу безопасные и опасные.

Диссертация является законченной научно-квалификационной работой, соответствующей паспорту научной специальности 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика и удовлетворяет Положению о присуждении ученых степеней, утвержденного постановлением Правительства РФ от 24 сентября 2013 г. № 842 в части требований, предъявляемым к кандидатским диссертациям, включая пункты 9-11, 13, 14.

Основные результаты диссертации изложены в трех главах.

Первая глава посвящена разработке схемы построения в пространстве параметров границ областей гиперболичности и устойчивости точек равновесия и периодических решений автономных дифференциальных уравнений. В главе также приводится ряд вспомогательных сведений из теории динамических систем. Глава состоит из четырех параграфов и носит вспомогательный характер для решения основных задач диссертации, представленных во второй и третьей главах.

Вторая глава состоит из четырех параграфов. Глава посвящена исследованию и вопросам построения границ областей гиперболичности и устойчивости точек равновесия и периодических решений динамических систем, описываемых периодическими линейными и нелинейными дифференциальными уравнениями в

нерезонансном и основных резонансных случаях. В главе также приводятся постановка задачи, вспомогательные сведения и ряд примеров.

В третьей главе (состоящей из пяти параграфов) изучаются основные сценарии бифуркаций неавтономных периодических дифференциальных уравнений в окрестностях точек равновесия и периодических решений при переходе параметров системы через границы областей устойчивости и гиперболичности. Особое внимание в этой главе уделяется изучению вопроса о достаточных признаках опасности и безопасности границ областей устойчивости.

**Актуальность темы исследования.** В теории дифференциальных уравнений, теории динамических систем и их приложениях важное значение имеет задача построения в пространстве параметров областей устойчивости и гиперболичности точек равновесия и периодических решений. Здесь также актуальной является задача исследования поведения системы в окрестностях указанных границ. Исследованию таких задач посвящены работы В.И. Арнольда, Н.Н. Баутина, Н.Н. Боголюбова, А.Д. Брюно, Б.П. Демидовича, Н.Н. Моисеева, А. Найфэ, Л.П. Шильникова, В.А. Якубовича, L.F.C. Alberto, H.D. Chiang, F. M. Amaral и многих других математиков. Основное внимание в указанных работах уделяется исследованию систем, описываемых автономными дифференциальными уравнениями. Авторами этих работ разработан ряд эффективных методов исследования указанных задач, решены многие практически и теоретически важные задачи. Исследования продолжаются в различных направлениях.

Важную роль в общей теории дифференциальных уравнений и ее приложениях играют исследования систем, описываемых неавтономными дифференциальными уравнениями, в частности уравнениями с периодическими коэффициентами. Классическими работами в области теории дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами являются работы Ляпунова, Пуанкаре, Флоке. Важное место в современной теории дифференциальных уравнений и ее приложениях занимают исследования задач об устойчивости и бифуркациях в

неавтономных периодических системах с малым параметром. Значительный вклад в развитие соответствующего направления теории внесли работы И.Г. Малкина, М. Розо, Л. Чезари, И.З. Штокало, А.А. Майлыбаева, А.П. Сейраняна, А.О. Белякова и др. Наряду с классическим методом теории Флоке в этих работах использовались методы теории возмущений, позволяющие перейти от уравнений с периодическими коэффициентами к уравнениям с постоянными коэффициентами при младших степенях малого параметра. Значительная часть этих работ направлена на исследование определенных классов дифференциальных уравнений (в частности, гамильтоновы и консервативные системы).

Многие задачи современной теории динамических систем, возникающие при изучении вопросов поведения решений дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами в окрестностях границ областей устойчивости и гиперболичности точек равновесия, остаются недостаточно изученными. К таким задачам относятся, в частности, задачи о разработке асимптотических формул, позволяющих получать приближенное представление границ областей гиперболичности и устойчивости линейных и нелинейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Важными являются задачи исследования основных сценариев бифуркаций при переходе параметров через границы областей гиперболичности и устойчивости. Особый интерес здесь представляют вопросы разработки эффективных признаков опасности и безопасности границ областей устойчивости.

**Теоретическая и практическая значимость работы.** Работа носит теоретический характер. Полученные в диссертации результаты позволяют отвечать на следующие вопросы:

1. По данной граничной точке области устойчивости (гиперболичности) точек равновесия или периодических решений дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами получить локальное представление границы

области гиперболичности или устойчивости в нерезонансном и основных резонансных случаях.

2. Определить топологические типы состояний равновесия или периодических решений в окрестностях границ области устойчивости (гиперболичности).

3. Определить сценарии бифуркаций при трансверсальном переходе параметров системы через границы области устойчивости или гиперболичности.

4. Определить качественные характеристики бифуркационных решений в окрестности границы области устойчивости (устойчивость решений и их топологические типы).

5. Построить числовые характеристики, позволяющие провести классификацию границ областей устойчивости по типу безопасности и опасности.

Результаты работы могут быть использованы в задачах об исследовании поведения неавтономной периодической динамической системы в окрестностях основных режимов при значениях параметров, близких к границам областей гиперболичности и устойчивости.

**Все основные результаты, выносимые на защиту, получены соискателем лично, либо при его непосредственном участии.** В статье [1], опубликованной в соавторстве, изучаются три случая (первый и второй нерезонансные случаи и резонансный случай) негиперболичности стационарного решения нелинейной неавтономной системы. Первые два случая изучены соискателем совместно с соавторами Юмагуловым М.Г. и Ибрагимовой Л.С., третий случай, а также схема построения областей устойчивости уравнения Матье рассмотрен соискателем самостоятельно.

В статье [2], опубликованной в соавторстве, получены формулы построения границ областей устойчивости двухпараметрических автономных и периодических динамических систем; приведены схемы определения основных сценариев бифуркаций при переходе параметров через границы областей устойчивости;

определены типы границ (безопасные или опасные). Исследование автономных уравнений проведены соавторами Юмагуловым М.Г. и Ибрагимовой Л.С., исследование неавтономных уравнений принадлежит соискателю.

В статье [3], опубликованной в соавторстве, изучаются вопросы построения границ областей устойчивости точек равновесия автономных и периодических дифференциальных уравнений, зависящих от двух скалярных параметров в плоскости параметров. Указываются условия, при которых через данную точку проходит единственная гладкая граничная кривая и предлагается схема приближенного построения этой кривой. Случай автономных уравнений рассматривается соавторами Юмагуловым М.Г. и Ибрагимовой Л.С., а случай периодических дифференциальных уравнений соискателем рассматривается самостоятельно.

При выполнении работы [4], опубликованной в соавторстве, соискателем вместе с соавтором Л.С. Ибрагимовой было проведено исследование построения границ областей устойчивости в случае нулевого собственного значения. Соавтором А.С. Беловой было исследовано построение границ областей устойчивости гамильтоновых систем в случае чисто мнимого собственного значения линеаризованной задачи.

**Степень достоверности результатов** проведенных исследований обеспечивается их публикацией в рецензируемых журналах из Перечня ВАК и международных реферативных баз данных Web of Science и Scopus. Все основные результаты, изложенные в диссертации Мустафиной И.Ж. достоверны и строго обоснованы.

**Научная новизна.** В диссертации получены следующие научные результаты:

1). Разработаны новые асимптотические формулы для приближенного построения границ областей гиперболичности и устойчивости динамических систем, описываемых неавтономными дифференциальными уравнениями с периодическими коэффициентами.

2). Получены новые достаточные признаки для основных сценариев бифуркаций в окрестностях точек равновесия и периодических решений динамических систем, описываемых неавтономными дифференциальными уравнениями с периодическими коэффициентами, при переходе параметров через границы областей гиперболичности и устойчивости.

3). Определены числовые характеристики, позволяющие классифицировать и исследовать границы областей устойчивости динамических систем, описываемых неавтономными дифференциальными уравнениями с периодическими коэффициентами по типу безопасности и опасности.

**Полнота изложения материалов диссертации в работах, опубликованных соискателем.** Все основные результаты, изложенные в диссертационной работе, опубликованы в виде статей в рецензируемых изданиях, рекомендованных ВАК для публикации результатов диссертаций. По теме диссертации опубликованы 16 научных работ, из них 4 статьи изданы в журналах, входящих в международные реферативные базы данных Web of Science и Scopus, приравненных к изданиям из Перечня ВАК, 2 статьи опубликованы в журналах из Перечня ВАК.

**Основные публикации по теме диссертации в изданиях, рекомендованных ВАК и в рецензируемых научных журналах, входящих в международные реферативные базы данных (Web of Science, Scopus):**

1. Ибрагимова Л.С., Мустафина И.Ж., Юмагулов М.Г. Асимптотические формулы в задаче построения областей гиперболичности и устойчивости динамических систем // Уфимский математический журнал. – 2016. – Т. 8, № 3. – С. 59 – 81.

2. Ибрагимова Л.С., Мустафина И.Ж., Юмагулов М.Г. Исследование границ областей устойчивости двухпараметрических динамических систем // Автоматика и телемеханика. – 2017. – № 10. – С. 74 – 89.

3. Yumagulov M. G., Ibragimova L. S., Mustafina I. Zh. Boundaries of stability domains for equilibrium points of differential equations with parameters // Journal of Mathematical Sciences. – 2018. – V. 230, № 5. – Pp. 818–821.

4. Belova, A.S., Ibragimova L.S., Mustafina I.G. Boundaries of the region of stability of autonomous Hamiltonian systems // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2023. – Vol. 44, no. 5. – P. 1823–1828.

5. Мустафина И.Ж. О безопасных и опасных точках бифуркации в периодических динамических системах // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2024. – Вып. 3(66). – С. 47–54.

6. Мустафина И.Ж. Исследование границ областей устойчивости двухпараметрических дифференциальных уравнений второго порядка // Вестник Башкирского университета. – 2017. – Т. 22, № 3. – С. 597 – 602.

#### **Статьи и тезисы, опубликованные в других изданиях:**

7. Ибрагимова Л.С., Фанина (Мустафина) И.Ж., Юмагулов М.Г. О построений областей устойчивости решений дифференциальных уравнений, зависящих от параметров // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2016. – Вып. 2. – С. 61 – 66.

8. Фанина (Мустафина) И.Ж. Признаки устойчивости линейных уравнений с периодическими коэффициентами // Устойчивость и процессы управления: материалы III международной научной конференции.–Санкт-Петербург. – 2015. – С. 51– 52.

9. Юмагулов М.Г., Фанина (Мустафина) И.Ж., Ибрагимова Л.С. О построений областей устойчивости решений дифференциальных уравнений, зависящих от параметров // Математика и глобальные вызовы XXI века: материалы симпозиума, посвященного столетию Пермского государственного национального исследовательского университета.–Пермь. – 2016. – С. 145–147.

10. Фанина (Мустафина) И.Ж. Приближенное построение мультипликаторов линейной системы с периодическими коэффициентами // Воронежская зимняя

математическая школа: материалы международной конференции.–Воронеж. – 2016. – С. 399 – 402.

11. Мустафина И.Ж. Признаки опасных и безопасных точек бифуркации неавтономных динамических систем. // Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения: материалы международной научной конференции.–Уфа. – 2018. – С. 56.

12. Юмагулов М.Г., Ибрагимова Л.С., Мустафина И.Ж. Приближенное построение границ областей устойчивости неавтономных дифференциальных уравнений // Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании: материалы международной школы-конференции студентов, аспирантов и молодых ученых.–Уфа. – 2018. – С. 155–156.

13. Мустафина И.Ж. О приближенном построении границы области устойчивости неавтономных периодических систем // Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения: материалы международной научной конференции.–Уфа. – 2020. – С. 47.

14. Мустафина И.Ж. О приближенном построении границы области устойчивости нелинейных периодических систем // Уфимская осенняя математическая школа: материалы международной научной конференции. –Уфа. – 2020. – С. 74 – 76.

15. Мустафина И.Ж. Числовые характеристики свойств гиперболичности точек равновесия нелинейных автономных систем // Уфимская осенняя математическая школа: материалы международной научной конференции. –Уфа. – 2022. – С. 59 – 60.

16. Мустафина И.Ж. Исследование границ областей устойчивости и гиперболичности точек равновесия динамических систем // VI Конференция Математических центров России. –Казань: Изд-во КФУ. – 2026. – С. 208 – 209.

Основные результаты диссертации докладывались автором на научном семинаре по дифференциальным уравнениям и математической физике Института

математики с вычислительным центром Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук, научных семинарах кафедры функционального анализа и программирования и кафедры высокопроизводительных вычислений и дифференциальных уравнений Института информатики, математики и робототехники ФГБОУ ВО «Уфимский университет науки и технологий» (руководители: д.ф.-м.н., профессор Фазуллин З.Ю., д.ф.-м.н., профессор Юмагулов М.Г., д.ф.-м.н., профессор Ишкин Х.К., 2023-2025 г.), научном семинаре кафедры математического анализа Челябинского государственного университета (город Челябинск, руководители: д.ф.-м.н., профессор Федоров В.Е., д.ф.-м.н., профессор Воронин С.М., 2025 г.). Результаты диссертации были представлены в ходе выступлений на следующих конференциях: Международная научная конференция «Спектральные задачи, нелинейный и комплексный анализ» (г. Уфа, 2015 г.); Всероссийская научно-практическая конференция «Математическое моделирование процессов и систем» (г. Стерлитамак, 2016 г.); Уфимская международная математическая конференция (г. Уфа, 2016 г.); Международная конференция «Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения» (Банное, 2018 г.); Международная научная конференция «Дифференциальные уравнения и смежные проблемы» (г. Стерлитамак, 2018 г.); Международная школа-конференция для студентов, аспирантов и молодых ученых «Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании» (г. Уфа, 2018 г.); Международная научная конференция «Уфимская осенняя математическая школа» (г. Уфа, 2019-2020, 2022 г.); VI Конференция Математических центров России (г. Казань, 2026 г.).

Текст диссертации представляет собой самостоятельную научно-квалификационную работу, не содержит заимствованного материала без ссылок на автора или источник.

Диссертация Мустафиной Ильмиры Жаватовны «Исследование границ областей устойчивости и гиперболичности точек равновесия динамических систем» удовлетворяет п. 9–11, 13, 14 постановления Правительства Российской Федерации

от 24 сентября 2013 г. № 842 «О порядке присуждения ученых степеней» и рекомендуется к защите на соискание ученой степени кандидата физико – математических наук по научной специальности 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика.

Заключение принято на объединенном заседании кафедры высокопроизводительных вычислений и дифференциальных уравнений Института информатики, математики и робототехники ФГБОУ ВО «Уфимский университет науки и технологий» и Уфимского подразделения научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа при ФГБОУ ВО «Уфимский университет науки и технологий».

На заседании присутствовало 27 человек (в том числе 7 докторов наук), с правом голоса 27 человек.

Результаты голосования: «за» – 27, «против» – 0, «воздержалось» – 0  
(протокол № 1 от 3 сентября 2026 г.).

И.о. заведующего кафедрой высокопроизводительных вычислений и дифференциальных уравнений Института информатики, математики и робототехники ФГБОУ ВО «Уфимский университет науки и технологий»  
кандидат физ.-мат. наук

Кужаев Арсен Фанилевич

