На правах рукописи

Шавлуков Азамат Мавлетович

Особенности решений одномерных уравнений газовой динамики и нелинейной геометрической оптики

1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Уфа — 2025

Работа выполнена в отделе дифференциальных уравнений Института математики с вычислительным центром – обособленного структурного подразделения Федерального государственного бюджетного научного учреждения Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук.

Научный руководитель:	**Сулейманов Булат Ирекович** доктор физико-математических наук.
Официальные оппоненты:	**Седых Вячеслав Дмитриевич**, доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры высшей математики ФГАОУ ВО «Российский государственный университет нефти и газа (национальный исследовательский университет) имени И. М. Губкина».
	Воронин Сергей Михайлович, доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры математического анализа ФГБОУ ВО «Челябинский государственный университет».
Ведущая организация:	ФГБОУ ВО «Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова», г. Москва.

Защита состоится 24 декабря 2025 г. в 12^{00} на заседании объединенного диссертационного совета 99.0.110.02, созданного на базе ФГБНУ Уфимский федеральный исследовательский центр Российской академии наук, ФГБОУ ВО «Уфимский университет науки и технологий», по адресу: 450008, г. Уфа, ул. К. Маркса, д. 12.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБОУ ВО «Уфимский университет науки и технологий» и на сайте https://uust.ru.

Автореферат разослан «____» ________________ 2025 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
доктор физико-математических наук Исаев Константин Петрович

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. Изучение сингулярностей решений квазилинейных систем уравнений с частными производными первого порядка и связанных с ними эффектов – актуальная задача математической физики, берущая начало с классической работы Бернхарда Римана 1860 г., в которой было теоретически предсказано существование ударных волн, обнаруженных экспериментально лишь впоследствии.

Математическая теория катастроф, понимаемая далее как теория особенностей дифференцируемых отображений вместе с приложениями, дала мощный аппарат для изучения поведения решений таких уравнений в окрестности точки градиентной катастрофы (ГК) – такой конечной точки, в которой локально бесконечно дифференцируемые решения принимают конечные значения, но их первые производные обращаются в бесконечность. Начиная с пионерских работ А. Х. Рахимова (представителя школы В. И. Арнольда) с 1990-х годов начало формироваться направление исследований типичных (здесь и далее – в смысле математической теории катастроф) особенностей решений квазилинейных систем. В числе таких – изучаемые в настоящей диссертации типичные особенности решений следующих систем: системы уравнений одномерной изоэнтропической газовой динамики (далее – ГД)

$$\begin{cases} u_t + uu_x + \alpha(\rho)\rho_x = 0, \\ \rho_t + (\rho u)_x = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $u(t,x)$ – скорость течения, $\rho(t,x) \geq 0$ – плотность, t – время, x – единственная пространственная координата, $\alpha(\rho) = \frac{p'(\rho)}{\rho} > 0$ – бесконечно дифференцируемая положительная функция с разложением в сходящийся ряд Тейлора

$$\alpha(\rho) = 4 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_j}{j!}\Delta\rho^j \quad (\Delta\rho = \rho - \rho_*). \tag{2}$$

$p(\rho)$ – давление газа, и системы уравнений нелинейной геометрической оптики (далее – НГО)

$$\begin{cases} u_t + uu_x - \alpha(\rho)\rho_x = 0, \\ \rho_t + (\rho u)_x = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Для исследования решений данных систем применяется преобразование годографа, меняющее ролями зависимые и независимые переменные и переводящее квазилинейные системы в линейные. Из формул для производных преобразования годографа

$$\begin{gathered} u_x = Jt_\rho, \quad u_t = -Jx_\rho, \quad \rho_x = -Jt_u, \quad \rho_t = Jx_u, \\ J = u_x\rho_t - u_t\rho_x, \quad j = x_u t_\rho - x_\rho t_u, \quad J = j^{-1} \end{gathered} \tag{4}$$

следует, что система (1) переходит в систему

$$\begin{cases} x_\rho = ut_\rho - \alpha(\rho)t_u, \\ x_u = ut_u - \rho t_\rho, \end{cases}$$

а система (3) – в систему

$$\begin{cases} x_\rho = ut_\rho + \alpha(\rho)t_u, \\ x_u = ut_u - \rho t_\rho \end{cases} \tag{5}$$

Рассматриваются их гладкие (здесь и далее гладкие – бесконечно дифференцируемые) решения $t(u,\rho)$, $x(u,\rho)$, чьи первые производные не обращаются в нуль одновременно в конечной точке $(u_*,\rho_*;t_*,x_*)$. Тогда обращение в нуль якобиана преобразования годографа $j = x_u t_\rho - x_\rho t_u$ в конечной точке $(u_*,\rho_*;t_*,x_*)$ сопровождается обращением в бесконечность как минимум одной из первых производных решений систем (1) и (3) – происходит градиентная катастрофа. При этом теряет гладкость и взаимную однозначность отображение из плоскости годографа на плоскость скорости и плотности течения $(t,x) \to (u,\rho)$. В диссертации изучены именно такие сингулярности решений систем (1) и (3).

Описанная ситуация формулируется как задача анализа критических точек локально гладкой (в случае системы (3), что комментируется отдельно – локально аналитической) функции,

$$F = \rho(ut - B - x), \tag{6}$$

зависящей от u и ρ как от основных переменных, а от x и от t как от параметров. Критические точки этой функции $F_u \equiv t - B_u = 0$, $F_\rho \equiv ut - B - x - \rho B_\rho = 0$ – суть решения линейной системы, получаемой из исходной системы (1) (либо из системы (3)) после применения преобразования (4). Здесь, в случае анализа решений системы уравнений ГД (1), $B(u,\rho)$ – локально гладкое решение гиперболического (при $\rho > 0$) уравнения

$$\rho B_{\rho\rho} + 2B_\rho = \alpha(\rho)B_{uu}, \tag{7}$$

получаемого из системы на $t(u,\rho)$ и $x(u,\rho)$ невырожденными заменами

$$t = B_u, \quad x = uB_u - B - \rho B_\rho \tag{8}$$

или, что оказывается удобнее, после перехода к инвариантам Римана (далее – $c(\rho) > 0$ – скорость звука)

$$r = u + \int_{\tilde{s}}^{\rho} \frac{c(s)}{s} \mathrm{d}s, \quad l = u - \int_{\tilde{s}}^{\rho} \frac{c(s)}{s} \mathrm{d}s, \quad c^2 = p_\rho = \rho\alpha(\rho), \tag{9}$$

$B(r,l)$ – решение уравнения

$$8\alpha B_{rl} = \left(\alpha_\rho + 3\frac{\alpha}{\rho}\right)\sqrt{\frac{\rho}{\alpha}}(B_r - B_l). \tag{10}$$

Для анализа особенностей решений системы уравнений НГО (3) используется та же функция (6), где $B(u,\rho)$ – локально аналитическое решение эллиптического уравнения

$$\rho B_{\rho\rho} + 2B_\rho = -\alpha(\rho)B_{uu}. \tag{11}$$

Непустота множества локально бесконечно дифференцируемых решений уравнения (10) обоснована в **Лемме 1.1.** основного текста при помощи теоремы Бореля и известного результата о разрешимости задачи Коши для линейного гиперболического уравнения с бесконечно дифференцируемыми начальными данными (Р. Курант «Уравнения с частными производными». М.: Мир, 1962, Глава V, §6, п.1–3). В **Главе 3** для обоснования непустоты множества решений (11) в силу результата Пикара необходимо рассматривать лишь класс аналитических решений, существование которых следует из теоремы Коши-Ковалевской.

Существует (например, Р. Гилмор «Прикладная теория катастроф», М: Мир, 1984 г., Книга 1, Часть I, Глава 2, пункт 4; Книга 2, Часть IV, Глава 21, пункт 5) конечный список нормальных канонических форм, к которым сводится локально гладкая (аналитическая) функция, зависящая как от основных переменных, так и от *управляющих* параметров в окрестности критической точки конечной кратности $\mu \in \mathbb{N}$ при $\mu \in [2,5]$ (далее используется ADE-классификация В. И. Арнольда):

$$A_\mu^\pm : \pm x^{\mu+1} + k_\mu x^{\mu-1} + \ldots + k_1,$$
$$D_4^\pm : x^2 y \pm y^3 + k_4 y^2 + k_3 y + k_2 x + k_1,$$
$$D_5^\pm : x^2 \pm y^4 + k_5 y^3 + k_4 y^3 + k_3 y + k_2 x + k_1.$$

Значения этих многочленов при всех $k_i = 0$ называются генотипами соответствующих особенностей (В. Д. Седых «Математические методы теории катастроф», М.: МЦНМО, 2021 г., §14). Отметим, что линейными преобразованиями генотип особенности D_4^+ может быть сведен к используемому далее виду u^3+v^3.

Нами рассматривается подмножество множества всех гладких (аналитических) функций $F(u, \rho; t, x)$, элементы которого задаются формулой (6) и гладкими (или аналитическими) решениями уравнения (7) (или уравнения (11)). На всем множестве гладких (аналитических) функций $F(u, \rho; t, x)$ функциям $u(t, x)$, $\rho(t, x)$, определяемым из анализа критических точек $F(u, \rho; t, x)$ должны быть присущи только особенности типа складки (A_2) и сборки (A_3). Поскольку изучается именно описанное подмножество, оказывается, что решения систем (1) и (3) наряду с особенностями складки (A_2) и сборки (A_3) имеют также типичные особенности сечения гиперболической (D_4^+) и эллиптической (D_4^-) омбилики соответственно. Для этих сечений k_3 является функцией двух других управляющих параметров, т.е. $k_3 = k_3(k_1, k_2)$.

Замечание. В работе А. Х. Рахимова 1993 г. «Особенности римановых инвариантов» («Функциональный анализ и его приложения», том 27, №1) без анализа вырождений критических точек потенциальной функции были описаны типичные особенности решений квазилинейной гиперболической системы более общего, чем (1) вида при соблюдении условия более сильного, чем условие сильной нелинейности (представленного далее): особенности складки (A_2), сборки (A_3) и особенность C_2^2, локально определяемая корнями системы уравнений

$$v_1^2 = z_1 + z_2 v_2, \quad v_2^2 = z_1 v_1 + z_2. \tag{12}$$

В диссертационной работе подтвержден вывод о типичности особенностей A_2 и A_3 посредством изучения потенциальной функции, а также была описана типичная особенность D_4^+, то есть, было показано, что в окрестности точки ГК решения системы ГД (1) локально выражаются через решения системы

$$\begin{aligned} y_1^2 - x_3(x_1, x_2) y_2 - x_1 = 0, \\ y_2^2 - x_3(x_1, x_2) y_1 - x_2 = 0, \end{aligned} \tag{13}$$

определяющей критические точки кубической функции

$$H(y_1, y_2; x_1, x_2) = \frac{y_1^3 + y_2^3}{3} - x_3(x_1, x_2) y_1 y_2 - x_1 y_1 - x_2 y_2$$

основных переменных y_1, y_2 и двух управляющих параметров x_1, x_2. По-видимому, с помощью локальных диффеоморфизмов решения системы (12) возможно выразить через решения (13), но автору не удалось ни доказать это строго, ни обнаружить такое доказательство в литературе.

Целью исследования является описание решений уравнений газовой динамики и нелинейной геометрической оптики в окрестности точки типичной градиентной катастрофы в терминах решений канонических уравнений теории особенностей дифференцируемых отображений.

Задачи исследования:

1. Описать типичную омбилическую особенность решений системы уравнений идеальной одномерной газовой динамики.

2. Показать совпадение с точностью до растяжений генотипов всех трех типичных особенностей решений линейного одномерного однородного волнового уравнения в образе годографа (к которому сводится линеаризация системы уравнений ГД) и генотипов всех трех типичных особенностей решений системы уравнений ГД.

3. Описать типичную особенность сечения сборки решений системы уравнений ГД в случае Чаплыгина $p = p_0 - \frac{m^2}{\rho}$, нарушающем условие сильной нелинейности. Показать специфику данного случая.

4. Описать типичную омбилическую особенность решений системы уравнений ГД в случае Бехерта-Станюковича $p = \frac{a^2}{3}\rho^3$, нарушающем условие еще более сильное, чем условие сильной нелинейности. Показать специфику этого случая.

5. Описать типичную особенность сборки решений системы уравнений ГД и системы уравнений нелинейной геометрической оптики при стремлении плотности газа (падении интенсивности) к нулю.

6. Описать типичную омбилическую особенность решений системы уравнений НГО. Показать совпадение с точностью до растяжений генотипа особенности решения уравнения Лапласа и генотипа особенности решения системы уравнений НГО.

Научная новизна.

В окрестности типичной точки градиентной катастрофы описаны асимптотики решений уравнений идеальной одномерной газовой динамики (гиперболическая система) и решений системы уравнений нелинейной геометрической оптики (эллиптическая система) для локально бесконечно дифференцируемых (или, в случае системы уравнений нелинейной геометрической оптики, аналитических) функций давления (интенсивности) и при различных условиях обращения якобиана в нуль.

Строго обоснованы формальные результаты предыдущих работ, дополнены два результата предшественников: впервые описана типичная особенность сечения сборки для газа Чаплыгина (оставленного за рамками анализа в работе В. Р. Кудашева и Б. И. Сулейманова 2001 г.) и уточнен вид нормальной формы типичной особенности сечения эллиптической омбилики решений системы уравнений нелинейной геометрической оптики (этим уточняется результат известной работы Б. А. Дубровина, Т. Гравы, К. Клейна 2009 г.).

Замечено совпадение с точностью до растяжений генотипов типичных особенностей складки, сборки и сечения гиперболической омбилики решений системы уравнений одномерной газовой динамики и генотипов особенностей складки, сборки и сечения гиперболической омбилики решений линейного волнового уравнения в образе годографа. Установлено явление наследования всех типичных особенностей в гиперболическом случае.

Замечено совпадение с точностью до растяжений генотипа типичной особенности эллиптической омбилики решения системы уравнений нелинейной геометрической оптики и генотипа типичной особенности эллиптической омбилики решения уравнения Лапласа.

Теоретическая и практическая значимость исследования. Работа носит теоретический характер и обладает теоретической значимостью. Изучены решения квазилинейных систем уравнений первого порядка в окрестности типичной конечной точки градиентной катастрофы. Представлен конструктивный метод проведения подобного исследования на основе методов теории особенностей с использованием преобразований в классе локально бесконечно дифференцируемых (для гиперболической системы уравнений ГД) или аналитических (для эллиптической системы уравнений НГО) функций.

Методология и методы исследования. В работе используются классические результаты и методы теории особенностей дифференцируемых отображений и теории уравнений с частными производными.

Основные положения, выносимые на защиту:

Все задачи решены математически строго с применением конечной последовательности бесконечно дифференцируемых (при исследовании эллиптической системы уравнений НГО – аналитических) преобразований, а не посредством использования формальных степенных рядов и их усечений, как это делалось в значительной части более ранних работ предшественников.

1. В окрестности типичной омбилической точки градиентной катастрофы (соответствующей ситуации с наложением двух ограничений на коэффициенты разложения решения уравнения (10)) описаны решения системы уравнений идеальной одномерной газовой динамики в терминах решений канонических уравнений сечения гиперболической омбилики.

2. Показано, что с точностью до растяжений генотипы всех трех типичных особенностей решений линейного одномерного однородного волнового уравнения (к которому сводится линеаризация системы уравнений ГД) совпадают с генотипами всех трех типичных особенностей решений системы уравнений идеальной одномерной газовой динамики – тем самым показано, что происходит наследование особенностей.

3. В окрестности типичной точки градиентной катастрофы типа сборки (при одном ограничении на коэффициенты разложения решения уравнения) решение системы уравнений ГД в случае Чаплыгина (нарушающего условие сильной нелинейности) описано в терминах решений канонического уравнения сечения сборки. Дополнен результат Б. И. Сулейманова и В. Р. Кудашева 2001 г., в котором газ Чаплыгина не рассматривался. Показано, что в отличие от более общего случая, происходит наследование не только генотипа, но и всей канонической нормальной формы катастрофы.

4. В окрестности типичной омбилической точки градиентной катастрофы (при двух ограничениях на коэффициенты разложения решения уравнения) описаны решения системы уравнений ГД в случае Бехерта-Станюковича (нарушающего условие более сильное, чем условие сильной нелинейности) в терминах решений канонических уравнений сечения гиперболической омбилики. Показано, что в этом случае тождественно равен нулю один из управляющих параметров канонической нормальной формы катастрофы. В этом заключается специфика данного случая.

5. В окрестности типичной точки градиентной катастрофы типа сборки (при одном ограничении на коэффициенты разложения решения уравнения) решение системы уравнений идеальной одномерной газовой динамики (и, при замене $\rho \to -\rho$, решение системы НГО) описано в терминах решений канонического уравнения сборки при стремлении плотности газа к нулю (в случае НГО – падении интенсивности).

6. В окрестности типичной омбилической точки градиентной катастрофы (при двух ограничениях на коэффициенты разложения решения уравнения (11)) описаны решения системы уравнений нелинейной геометрической оптики в терминах решений канонических уравнений сечения эллиптической омбилики. Показано, что с точностью до растяжений генотип омбилической особенности решения уравнения Лапласа совпадает с генотипом омбилической особенности решения системы уравнений НГО – тем самым происходит наследование особенности. Дополнительно исправлен (по части неравенства нулю одного из управляющих параметров) и выполнен не на формальном уровне, а на уровне сходящихся рядов Тейлора аналитических функций, результат Б. А. Дубровина, Т. Гравы, К. Клейна 2009 г.

Работа почти завершает исследования типичных (с точки зрения математической теории катастроф) особенностей решений одномерных однородных систем уравнений газовой динамики и нелинейной геометрической оптики в случае конечной точки градиентной катастрофы (при ограниченных значениях компонент). Из нерешенных вопросов остаются, например, следующие: обоснование непустоты множества гладких решений при описании провальной особенности сборки для случая произвольного аналитического в окрестности нуля давления (интенсивности), не решена проблема описания точки типичной градиентной катастрофы, происходящей при трансформации слабых разрывов решений гиперболического варианта системы в их сильные разрывы.

Степень достоверности и апробация результатов. Достоверность результатов обеспечена строгим доказательством теорем в соответствии с фундаментальными результатами теории особенностей дифференцируемых отображений и теории уравнений с частными производными.

Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на заседаниях общегородского семинара им. А.М. Ильина по дифференциальным уравнениям математической физики Института математики с вычислительным центром УФИЦ РАН (руководители: д.ф.-м.н., профессор Л.А. Калякин и д.ф.-м.н., профессор В.Ю. Новокшенов; г. Уфа, 2021, 2022, 2025).

Результаты были так же представлены в ходе выступлений на следующих конференциях: Всероссийская конференция-школа с международным участием «Электронные, спиновые и квантовые процессы в молекулярных и кристаллических системах» (г. Уфа, 2019); Международная научная конференция «Уфимская осенняя математическая школа» (г. Уфа, 2019, 2020, 2021, 2022, 2023); Студенческая школа-конференция «Математическая весна» (г. Нижний Новгород, 2020, 2021); Всероссийская научная конференция МФТИ (г. Москва, 2021); Международная конференция «Теория функций, теория операторов и квантовая теория информации» (г. Уфа, 2020); Международная молодежная школа-конференция «Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании» (г. Уфа, 2020); Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов» (г. Москва, 2020, 2021, 2022, 2023); Конференция международных математических центров мирового уровня (г. Сочи, 2021); Школа для молодых механиков и математиков SYMM (г. Москва, 2021, 2022, 2024); Международный дистанционный воркшоп «Online workshop on PDEs in many body systems» (г. Прага, Чехия, 2021); Международная конференция «Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения» (оз. Банное, 2021, 2022); Международная конференция «Nonlinear Dynamics and Integrability» (г. Ярославль, 2022); Международная конференция «O.A. Ladyzhenskaya centennial conference on PDEs» (г. Санкт-Петербург, 2022).

Публикации. По результатам проведенных исследований опубликовано 5 работ в изданиях из перечня ВАК РФ, индексируемых в Web of Science и Scopus и входящих в РИНЦ и 20 тезисов в сборниках по материалам докладов на конференциях.

Личный вклад. Результаты, выносимые на защиту, получены автором самостоятельно. Задача 5 поставлена научным руководителем Б. И. Сулеймановым. Задачи 1, 2, 6 были поставлены в ходе обсуждения с научным руководителем. Задачи 3 и 4 поставлены автором перед собой самостоятельно. Анализ полученных результатов и написание общих статей осуществлялись совместно с научным руководителем. Все выносимые на защиту положения получены автором лично.

Работа [4] выполнена полностью самостоятельно. В совместных работах [1], [2], [3], [5] автором проведены ключевые для описания особенностей выкладки и рассуждения.

Вклад соавторов в совместные работы следующий. В работе [1] научным руководителем Б. И. Сулеймановым отмечен «эталонный» характер одного из найденных автором частных решений. Этому решению посвящен пункт диссертации 2.1.1., служащий наглядным примером полученного результата. В работе [2] научным руководителем доказана лемма о гладкости решений линейного уравнения (Лемма 1.1. **Главы 1**), получаемого из исходной системы после применения преобразования годографа и невырожденных замен. Лемма приведена для обоснования гладкости применяемых далее преобразований. В работе [3] научным руководителем замечено, что полученный результат применим как для гиперболического, так и для эллиптического варианта уравнений. Соавтором С. Н. Мелиховым в **Теореме 2.1** доказана необходимость. В работе [5] научным руководителем со ссылкой на результат Эмиля Пикара обоснована необходимость аналитичности решений линейного уравнения, получаемого из образа годографа исходной системы после невырожденных преобразований.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и библиографии. Работа содержит 4 рисунка. Принята двойная нумерация формул, замечаний, лемм и теорем: первое число соответствует номеру главы, второе – номеру формулы, замечания, леммы и теоремы в главе. Полный объем диссертации составляет 118 страниц. Список литературы содержит 141 наименование.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во **введении** обоснована актуальность темы работы, сформулированы цель и задачи исследования, приведены результаты работы с обоснованием их достоверности, указанием их научной новизны и практической значимости.

В **первой главе**, подпункте **1.1** описаны типичные (с точки зрения теории катастроф) особенности решений квазилинейной системы уравнений идеальной одномерной газовой динамики (1). В подпунктах **1.1**, **1.2** и **третьей главе** без ограничения общности (в силу возможности применить растяжение) считается, что $\alpha(\rho_*) = \alpha_* = 4$ и что функция $\alpha(\rho)$ раскладывается в сходящийся ряд Тейлора (2). $\rho_* > 0$ – значение плотности в конечной точке t_*, x_* градиентной катастрофы, в которой первые производные решений (1) обращаются в бесконечность, а сами решения – конечны. Так же в подпунктах **1.1**, **1.2** в ситуации «общего положения» $\alpha_1 \neq -\frac{3\alpha_*}{\rho_*} = -\frac{12}{\rho_*}$. Это условие нарушается для газа Чаплыгина, который исследуется отдельно в подпункте **1.3**.

Посредством инвариантов Римана (где $r \neq l$, иначе $\rho = 0$) (9) система (1) представляется как диагональная

$$\begin{cases} r_t + (\frac{r+l}{2} + c)r_x = 0, \\ l_t + (\frac{r+l}{2} - c)l_x = 0, \end{cases} \tag{14}$$

которую преобразование годографа переводит в линейную систему на функции

$t(r,l)$, $x(r,l)$. Невырожденные замены (8) сводят систему (14) к одному линейному гиперболическому уравнению (10), а систему (1) к линейному гиперболическому (при $\rho > 0$) уравнению (7).

Для обоснования непустоты множества локально гладких решений уравнения (10) и, как следствие, фигурирующих в дальнейшем функций (6) и (8), необходима **лемма 1.1.**, доказанная научным руководителем диссертанта Б. И. Сулеймановым в совместной публикации [2].

Якобиан преобразования годографа принимает вид $j = -2ct_r t_l$. В точке ГК обращения якобиана в нуль отображение $(u(r,l), \rho(r,l)) \to (t,x)$ перестает быть взаимно однозначным и гладким. В окрестности точки ГК после использования обратимых невырожденных гладких замен решения (1) локально описываются в терминах канонических уравнений теории катастроф.

Пусть гладкое решение уравнения (10) представляется в окрестности точки (r_*, l_*) рядом Тейлора ($\Delta r = r - r_*$, $\Delta l = l - l_*$)

$$B = \sum_{i+j \geq 0} b_{ij} \Delta r^i \Delta l^j, \tag{15}$$

В терминах коэффициентов b_{ij} обращение якобиана j в нуль в точке (r_*, l_*) записывается как $j(r_*, l_*) = -4\sqrt{\rho_*}(2b_{20} + b_{11})(b_{11} + 2b_{02}) = 0$.

Существуют три возможности обращения якобиана в нуль: $b_{11} = -2b_{20}$, $b_{11} = -2b_{02}$ и одновременно $b_{11} = -2b_{20} = -2b_{02}$. Согласно идеологии теории катастроф, возможно наложить не более двух ограничений в виде равенств на коэффициенты b_{ij} разложения в ряд Тейлора решения уравнения (10) (кроме тех, что следуют из уравнения), так как функция $B(r,l)$ зависит от двух переменных. Выбор одного подходящего значения r_* или l_* реализует первую или вторую возможности, выбор сразу двух подходящих значений r_* и l_* отвечает третьей возможности. Любые дополнительные ниоткуда не следующие ограничения в виде равенств на коэффициенты b_{ij} не относятся к ситуации «общего положения». В подпункте **1.1** за счет возможности вариации r_* и l_* требуем выполнения двойного равенства $b_{11} = -2b_{20} = -2b_{02}$.

С учетом этого представление всех слагаемых уравнения (10) в виде степенных рядов и приравнивание коэффициентов при линейно независимых членах дает рекуррентную последовательность соотношений на коэффициенты b_{ij}. Из соотношений (8) в точке $\rho = \rho_*$, $u = u_* = (r_* + l_*)/2$ (на t,x-плоскости ей соответствует точка (t_*, x_*)) следует, что $t_* = b_{10} + b_{01}$, $x_* = \frac{r_*+l_*}{2}(b_{10} + b_{01}) - b_{00} - 2\sqrt{\rho_*}(b_{10} - b_{01})$.

Введем в рассмотрение локально гладкую потенциальную функцию (6)

$$F(\rho, u; t, x) = \rho(ut - B(\rho, u) - x)$$

основных переменных ρ, u и двух дополнительных параметров t, x (называемых в терминологии теории катастроф управляющими), которая определяется локально гладкими решениями уравнения (7). При $\rho \neq 0$ соотношения (8) равносильны равенству нулю производных $F_\rho(\rho, u; t, x)$ и $F_u(\rho, u; t, x)$ функции (6). Следовательно, критические точки (6) суть решения образа годографа системы (1). Обращение в нуль якобиана отображений $(\rho, u) \to (t, x)$ равносильно вырожденности критических точек функции (6). Изучая критические точки функции (6), мы изучаем поведение решений (1) в окрестности точки ГК.

В окрестности точки ГК функция (6) раскладывается в ряд Тейлора

$$\begin{gathered}F = 2\rho_*^{3/2}(b_{10} - b_{01}) + \rho_* z + \frac{\rho_*\Delta t}{2}(\Delta r + \Delta l) + \frac{\sqrt{\rho_*}}{4}z(\Delta r - \Delta l) + \\ + \frac{\sqrt{\rho_*}}{8}\Delta t((\Delta r)^2 - (\Delta l)^2) + z(\Delta r - \Delta l)^2 + \\ + \frac{4 - \alpha_1\rho_*}{512}\Delta t(\Delta r - \Delta l)^2\frac{\Delta r + \Delta l}{2} + h_3 z(\Delta r - \Delta l)^3 + \\ + A_+(\Delta r)^3 + A_-(\Delta l)^3 + \sum_{i+j\geq 4}(f_{ij}^0 + f_{ij}^1\Delta t + f_{ij}^2 z)(\Delta r)^i(\Delta l)^j,\end{gathered} \tag{16}$$

где в ситуации «общего положения» не равны нулю постоянные A_+ и A_-.

Заметим, что

$$F(r, l; t_*, x_*) = 2\rho_*^{3/2}(b_{10} - b_{01}) + A_+(\Delta r)^3 + A_-(\Delta l)^3 + \sum_{i+j\geq 4} f_{ij}^0(\Delta r)^i(\Delta l)^j.$$

Вид разложения Тейлора (16) позволяет сделать вывод о том, что росток (В. Д. Седых «Математические методы теории катастроф», М.: МЦНМО, 2021 г., §5, стр. 37)) функции $F(r, l; t, x)$ является 2 – деформацией ростка функции $F(r, l; t_*, x_*)$. Данная 2 – деформация может быть получена из $R-$версальной деформации (являющейся также и универсальной), описываемой трехпараметрическим семейством функций

$$G_{k_1,k_2,k_3}(y_1, y_2) = \frac{y_1^3 + y_2^3}{3} - k_3 y_1 y_2 - k_2 y_1 - k_1 y_2. \tag{17}$$

Это означает (В. Д. Седых «Математические методы теории катастроф», М.: МЦНМО, 2021 г., §13), что в достаточно малой окрестности точки $r = r_*$, $l = l_*$, $t = t_*$, $x = x_*$ функция $F(r, l; t, x)$, которая является в этой точке гладкой и обладает в ней разложением Тейлора (16), представима в виде

$$F(r, l; t, x) = \frac{y_1^3 + y_2^3}{3} - k_3 y_1 y_2 - k_2 y_1 - k_1 y_2 + \gamma, \tag{18}$$

где $k_j = k_j(t, x)$ $(j = 1, 2, 3)$ и $\gamma = \gamma(t, x)$ – гладкие в окрестности точки $t = t_*$, $x = x_*$ функции; $y_1 = y_1(r, l, t, x)$, $y_2 = y_2(r, l, t, x)$ – зависящая от параметров t и x гладкая локальная замена координат в $\mathbb{R}^2$: $(r, l, t, x) \to (y_1(r, l, t, x), y_2(r, l, t, x))$, которая при фиксированных t и x является локальным диффеоморфизмом. Все коэффициенты тейлоровских разложений функций k_j, y_1, y_2 в окрестности точки ГК определяются однозначно. В окрестности точки (t_*, x_*) отображение, описываемое функциями $x_1 = k_2(t, x)$ и $x_2 = k_1(t, x)$ является диффеоморфизмом, и что при $x_1^2 + x_2^2 \to 0$ гладкая функция $x_3(x_1, x_2) = k_3(t, x)$ имеет разложение Тейлора $x_3(x_1, x_2) = \sum_{i+j=1}^{\infty} k_{ij} x_1^i x_2^j$, в котором коэффициенты отличны от нуля.

В результате приведенных рассуждений и построений формулируется

Теорема 1.1. Существует гладкое преобразование, позволяющее локально представить функцию $F(r, l; t, x)$ в форме (18), критические точки которой, определяемые из корней системы

$$F_{y_1} \equiv y_1^2 - k_3(x_1, x_2) y_2 - k_1 = 0, \quad F_{y_2} \equiv y_2^2 - k_3(x_1, x_2) y_1 - k_2 = 0, \tag{19}$$

задают решения исходной системы (1) в окрестности точки ГК.

В **Замечании 1.3** с помощью представленного метода описаны особенности складки и сборки решений системы (1).

В подпункте **1.2** представленный метод применяется к описанию особенностей решений системы, эквивалентной волновому уравнению $u_{tt} = u_{xx}$

$$u_t = v_x, \quad v_t = u_x \tag{20}$$

которая из линеаризованной системы газовой динамики получается после применения линейных замен и переобозначений. Преобразование годографа систему (20) переводит в линейную систему на функции $t(u, v)$ и $x(u, v)$. Якобиан преобразования годографа имеет вид $j = (t_v)^2 - (t_u)^2$.

Аналогичные (8) подстановки $t = B_u, x = B_v$ позволяют выразить решения линейной системы через общее решение $B = f(u+v)+g(u-v)$, которое считаем гладким и полагаем, что функции f и g раскладываются в ряды Тейлора $f = f_0 + \sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{f_j}{j!}(\Delta u + \Delta v)^j$, $g = g_0 + \sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{g_j}{j!}(\Delta u - \Delta v)^j$.

Рассмотрим аналог функции (6) – функцию

$$\Psi(u, v; t, x) = ut + vx - B(u, v). \tag{21}$$

Соотношения $t = B_u, x = B_v$ равносильны системе двух уравнений $\Psi_u = 0$, $\Psi_v = 0$ на критические точки данной функции. Обращение в нуль якобиана преобразования годографа, соответствующее вырожденности данных критических точек в точке (u_*, v_*) равносильно равенству $f_2 g_2 = 0$. Тогда нормальные канонические формы особенностей решений волнового уравнения имеют вид:

при $g_2 \neq 0$, $f_2 = 0$, $f_3 \neq 0$ – особенности складки A_2

$$\Psi = u_1^3 - k_2 u_1 - k_1, \tag{22}$$

при $g_2 \neq 0$, $f_2 = f_3 = 0$, $f_4 \neq 0$ – особенности *сечения* сборки A_3

$$\Psi = -f_4 u_1^4 + k_2 u_1 + k_1, \tag{23}$$

при $f_2 = g_2 = 0$, $f_3 \neq 0$, $g_3 \neq 0$ – особенности *сечения* гиперболической омбилики D_4^+

$$\Psi = \frac{u_1^3 + u_2^3}{3} - k_2 u_1 - k_1 u_2 + k_0. \tag{24}$$

Растяжениями их генотипы сводятся к генотипам катастроф функций (6), которым соответствуют все универсальные особенности решений системы (1).

Применение описанных методов и результатов позволяет сделать следующие выводы в подпункте **1.3** о частных случаях Чаплыгина ($p = p_0 - \frac{m^2}{\rho}$, $p_0 > 0$, $m > 0$ – константы)

$$\begin{cases} u_t + uu_x + \frac{m^2}{\rho^3}\rho_x = 0, \\ \rho_t + (\rho u)_x = 0. \end{cases} \tag{25}$$

и Бехерта-Станюковича ($p = \frac{a^2}{3}\rho^3$, $a > 0$ – константа)

$$\begin{cases} u_t + uu_x + a^2 \rho \rho_x = 0, \\ \rho_t + (\rho u)_x = 0, \end{cases} \tag{26}$$

используемых для аппроксимации течений.

Случай Чаплыгина нарушает условие сильной нелинейности $\left(\frac{r+l}{2}+c\right)_r \left(\frac{r+l}{2}-c\right)_l \neq 0$. Оба этих случая нарушают еще более сильное условие $\left(\frac{r+l}{2}+c\right)_r \left(\frac{r+l}{2}+c\right)_l \left(\frac{r+l}{2}-c\right)_r \left(\frac{r+l}{2}-c\right)_l \neq 0$. Эти условия были поставлены и не нарушены в упомянутой работе А. Х. Рахимова 1993 г.

В случае Чаплыгина уравнение (10) сводится к волновому $B_{rl}=0$ с общим решением $B=f(r)+g(l)$, которое полагаем гладким и раскладывающимся в ряд Тейлора $B=\sum_{i\geq 0}\frac{f_i}{i!}(\Delta r)^i+\sum_{j\geq 0}\frac{g_j}{j!}(\Delta l)^j$.

Обнуление якобиана j в точке градиентной катастрофы $(t_*, x_*; r_*, l_*)$ означает, что $f_2 g_2 (r_*-l_*)=0$ и, поскольку $r_* \neq l_*$, можно без ограничения общности считать, что $g_2=0$, а $f_2\neq 0$ (альтернатива рассматривается аналогично). Из (8) следует, что $t_*=f_1+g_1$, $x_*=r_* f_1+l_* g_1-f_0-g_0$. Считаем, что $r_*\neq 0$. Случай $r_*=0$ прокомментирован в **замечании 1.6**: в одном подслучае он дает результат, аналогичный описанному ниже, в другом – следует, что тогда в давлении газа Чаплыгина масса газа $m=0$, что противоречит постановке задачи. Пусть также выполнен переход к новым переменным $\Delta Y=\Delta x+r_*\Delta t$, $\Delta Z=\Delta x-r_*\Delta t$. В этих условиях справедлива

Теорема 1.2. Существует такая конечная последовательность гладких преобразований, что в окрестности точки ГК при $g_2=g_3=0$ выводится уравнение особенности *сечения* сборки

$$\Delta Z=S^3, \tag{27}$$

корни которого локально выражают решения (25), а при $g_2=0$, $g_3\neq 0$ для удобства делается растяжение $W=\Delta Z(\frac{(l_*-r_*)g_3}{2})^{-1}$ и выводится уравнение особенности складки

$$W=S^2,$$

корни которого локально выражают решения (25).

В данном случае, в отличие от более общего, происходит наследование не только генотипа, но и всей нормальной формы особенностей A_2 и A_3, типичных для решений волнового уравнения.

В случае Бехерта-Станюковича уравнение (10) сводится к уравнению типа Эйлера-Пуассона-Дарбу $B_{rl}=\frac{B_r-B_l}{r-l}$ с общим решением $B=\frac{f(r)-g(l)}{r-l}$, которое в окрестности точки (r_*, l_*) будет удобно представить в виде ряда (15). Снова задействуем обе возможности обнуления якобиана j, считая, что $b_{11}=-2b_{02}=-2b_{20}$. В этом случае справедлива

Теорема 1.3. Существует такая конечная последовательность гладких преобразований, что в окрестности точки ГК аналог функции (6)

$$F = \frac{g-f}{2} - \frac{t}{4}(r^2 - l^2) - x(\frac{r-l}{2})$$

приводится к нормальной форме сечения особенности D_4^+

$$W = \frac{y_1^3 + y_2^3}{3} - k_2 y_1 - k_1 y_2, \tag{28}$$

чьи критические по y_1, y_2 точки представляются в виде системы

$$y_1^2 = k_2, \quad y_2^2 = k_1,$$

корни которой локально задают решения системы (26).

Во **второй главе** решения системы уравнений (1) и – при замене $\rho \to -\rho$ – решения системы НГО (3) при стремлении $\rho \to 0$ в окрестности типичной точки ГК типа сборки (при одном ограничении на коэффициенты) заданы в терминах решений канонического уравнения сборки

$$\delta(t,x) + \sigma(t)S(u,\rho) + \frac{5}{12}b_{11}S(u,\rho;t,x)^3 = 0$$

Научным руководителем диссертанта Б. И. Сулеймановым в совместной публикации [5] на основе результатов Э. Пикара было доказано утверждение, обосновывающее необходимость аналитичности решений уравнения (11) и, как следствие, фигурирующих в **третьей главе** функций (8) и (6). В этой главе о типичных особенностях решений системы уравнений НГО (3) доказана

Теорема 3.1. Существует конечная последовательность аналитических преобразований, локально сводящая (6) к нормальной канонической форме катастрофы типа сечения эллиптической омбилики

$$G = y_1^2 y_2 - \frac{y_2^3}{3} - k_3 y_2^2 - k_2 y_1 - k_1 y_2 + \gamma, \tag{29}$$

критические по y_1, y_2 точки которой образуют систему квадратных уравнений,

$$y_1^2 - y_2^2 = k_1 + 2k_3(k_1, k_2)y_2, \quad 2y_1 y_2 = k_2, \tag{30}$$

корни которых локально выражают решения системы уравнений НГО в окрестности точки ГК. При этом управляющий параметр k_3 представляется сходящимся рядом по натуральным степеням управляющих параметров k_1, k_2.

Подобно гиперболическому случаю имеет место наследование особенностей: с точностью до растяжений совпадают генотип только что описанной особенности и генотип особенности решения уравнения Лапласа.

Теорема 3.2. В условиях предыдущей теоремы, функция $k_3(k_1, k_2)$, вообще говоря, не равна тождественно нулю. Представленное в тексте диссертации доказательство опирается на контрпример – применение описанной техники к точному решению уравнения (11) $B = \frac{u}{4\rho} - \frac{u}{8\rho}\sqrt{\frac{u^2}{4} + 4\rho} + \ln(\frac{\sqrt{\frac{u^2}{4}+4\rho} - \frac{u}{2}}{2\sqrt{\rho}})$.

В **заключении** приведены основные результаты работы:

1. Решения системы уравнений идеальной одномерной изоэнтропической газовой динамики (1) в окрестности типичной омбилической точки градиентной катастрофы (соответствующей ситуации с наложением двух ограничений на коэффициенты разложения решения решения уравнения (10)) заданы в терминах решений канонических уравнений сечения гиперболической омбилики (19).

2. Показано, что с точностью до растяжений генотипы трех типичных особенностей A_2, A_3, D_4^+ решений линейного одномерного однородного волнового уравнения (к которому сводится линеаризация системы уравнений идеальной одномерной газовой динамики (1)) совпадают с генотипами трех типичных особенностей решений системы уравнений (1).

3. В окрестности типичной точки градиентной катастрофы типа сборки (при одном ограничении на коэффициенты разложения решения уравнения (10) при $p = p_0 - \frac{m^2}{\rho}$) решение системы уравнений идеальной одномерной газовой динамики в случае Чаплыгина (25) (нарушающего условие сильной нелинейности) описано в терминах решений канонического уравнения сечения сборки (27). Дополнен результат статьи Б. И. Сулейманова и В. Р. Кудашева 2001 г. Отмечено, что в данном случае, в отличие от более общего, происходит наследование не только генотипа, но и всей канонической нормальной формы катастроф A_2, A_3, типичных для решений волнового уравнения.

4. В окрестности типичной омбилической точки градиентной катастрофы (при двух ограничениях на коэффициенты разложения решения уравнения (10) при $p = p_0 - \frac{m^2}{\rho}$) описаны решения системы уравнений идеальной одномерной газовой динамики в случае Бехерта-Станюковича (26) (нарушающего условие более сильное, чем условие сильной нелинейности) в терминах решений канонических уравнений сечения гиперболической омбилики (28). Отмечено, что в дан-

ном случае один из управляющих параметров канонической нормальной формы тождественно равен нулю.

5. В окрестности типичной точки градиентной катастрофы типа сборки (при одном ограничении на коэффициенты разложения решения уравнения (10)) решение системы уравнений идеальной одномерной газовой динамики (1) (и решение системы НГО (3) при замене $\rho \to -\rho$) описано в терминах решений канонического уравнения сборки (29) при стремлении $\rho \to 0$.

6. В окрестности типичной омбилической точки градиентной катастрофы (при двух ограничениях на коэффициенты разложения решения уравнения (11)) описаны решения системы уравнений нелинейной геометрической оптики (3) в терминах решений канонических уравнений сечения эллиптической омбилики (30). Показано, что с точностью до растяжений генотип типичной омбилической особенности решения системы уравнений нелинейной геометрической оптики совпадает с генотипом типичной омбилической особенности решения уравнения Лапласа. Уточнен (по части неравенства нулю одного из управляющих параметров) и выполнен не на формальном уровне, а на уровне сходящихся рядов Тейлора аналитических функций, результат работы Б. А. Дубровина, Т. Гравы, К. Клейна 2009 г.

Все результаты являются математически строгими: они получены с применением конечной последовательности бесконечно дифференцируемых (при исследовании эллиптической системы уравнений НГО – аналитических) преобразований, а не посредством использования формальных степенных рядов и их усечений, как в значительной части более ранних работ предшественников.

Список публикаций автора по теме диссертации
Статьи в изданиях, рекомендованных ВАК РФ для публикации основных результатов исследования

[1] Сулейманов, Б. И. Типичная провальная особенность сборки решений уравнений движения одномерного изоэнтропического газа / Б. И. Сулейманов, А. М. Шавлуков // Известия РАН. Серия физическая. – 2020. – Т. 84, № 5 – С. 664–666.

[2] Сулейманов, Б. И. О наследовании решениями уравнений движения изоэнтропического газа типичных особенностей решений линейного волнового уравнения / Б. И. Сулейманов, А. М. Шавлуков // Матем. заметки. – 2022. – Т. 112, № 4 – С. 625–640.

[3] Мелихов, С. Н. Типичные провальные асимптотики квазиклассических приближений к решениям нелинейного уравнения Шрёдингера / С. Н. Мелихов, Б. И. Сулейманов, А. М. Шавлуков // Дифференциальные уравнения. – 2024. – Т. 60, № 5 – С. 618–631.

[4] Shavlukov, A. M. On Generic Singularities of Solutions to the 1D Gas Flow Equations: Chaplygin and Bechert–Stanyukovich Cases / A. M. Shavlukov // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2024. – V. 45, № 6 – P. 2793–2805.

[5] Сулейманов, Б. И. Омбилическая особенность квазиклассических приближений к решениям фокусирующего нелинейного уравнения Шрёдингера / Б. И. Сулейманов, А. М. Шавлуков // Матем. заметки. – 2024. – Т. 116, № 6 – С. 982–997.

Материалы конференций

[6] Сулейманов, Б. И. Типичная провальная особенность сборки решений уравнений движения одномерного изоэнтропического газа / Б. И. Сулейманов, А. М. Шавлуков // Тезисы докладов Всероссийской конференции-школы с международным участием «Электронные, спиновые и квантовые процессы в молекулярных и кристаллических системах», Уфа, 22-25 мая 2019 года. – Уфа: Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы. – 2019. – С. 122.

[7] Шавлуков, А. М. Провальная сингулярность типа сборки асимптотического решения системы уравнения движения одномерного изоэнтропического газа при нулевой плотности / А. М. Шавлуков // Сборник тезисов международной научной конференции «Уфимская осенняя математическая школа», Уфа, 16-19 октября 2019 года. – Уфа: БашГУ – 2019. – С. 261.

[8] Shavlukov, A. M. Some typical singularities of the solutions of gas dynamics equations / A. M. Shavlukov // Сборник тезисов студенческой школы-

конференции «Математическая весна»», Нижний Новгород, 17-21 февраля 2020 года. – Нижний Новгород: НИУ ВШЭ – 2020. – С. 21.

[9] Шавлуков, А. М. Особенность омбилического типа решения одной системы уравнений газовой динамики / А. М. Шавлуков // Сборник тезисов Международной конференции «Теория функций, теория операторов и квантовая теория информации», Уфа, 28 сентября - 1 октября 2020 года. – Уфа: НИЦ «Аэтерна» – 2020. – С. 63.

[10] Шавлуков, А. М. Особенность типа гиперболической омбилики формального решения одной системы уравнений газовой динамики / А. М. Шавлуков // Тезисы докладов Международной школы-конференции «Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании», Уфа, 11-14 ноября 2020 года. – Уфа: НИЦ «Аэтерна» – 2020. – С. 12.

[11] Шавлуков, А. М. Особенность омбилического типа решений уравнений одномерной газовой динамики / А. М. Шавлуков // Сборник тезисов международной научной конференции «Уфимская осенняя математическая школа». Часть 2, Уфа, 11-14 ноября 2020 года. – Уфа: НИЦ «Аэтерна» – 2020. – С. 137-138.

[12] Шавлуков, А. М. Катастрофа типа гиперболической омбилики формального решения одной системы уравнений газовой динамики / А. М. Шавлуков // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2020» [Электронный ресурс], Москва, 10-27 ноября 2020 года. – М: МАКС Пресс – 2020.

[13] Шавлуков, А. М. Катастрофа гиперболической омбилики формального асимптотического решения одной системы уравнений течения одномерного изоэнтропического газа / А. М. Шавлуков // Труды 63-й Всероссийской научной конференции МФТИ. Аэрокосмические технологии, Москва, 23–29 ноября 2020 года. – М: МФТИ – 2020. – С. 128.

[14] Шавлуков, А. М. Омбилическая особенность решения системы уравнений газовой динамики / А. М. Шавлуков // Сборник тезисов Международной научной конференции «Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения», оз. Банное, 15-19 марта 2021 года. – Уфа: НИЦ «Аэтерна» – 2021. – С. 79.

[15] Шавлуков, А. М. Umbilical singularity of the solution of polytropic gas dynamics equations / А. М. Шавлуков // Сборник тезисов студенческой школы-конференции «Математическая весна», Нижний Новгород, 30 марта – 1 апреля 2020 года. – Нижний Новгород: НИУ ВШЭ – 2021. – С. 35.

[16] Шавлуков, А. М. Омбилическая особенность решения системы уравнений газовой динамики / А. М. Шавлуков // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2021» [Электронный ресурс], Москва, 12–23 апреля 2021 года. – М: МАКС Пресс – 2021.

[17] Шавлуков, А. М. Типичная особенность типа гиперболической омбилики решения квазилинейной гидродинамической системы / А. М. Шавлуков // Конференция международных математических центров мирового уровня. Материалы конференции, Сочи, 9-13 августа 2021 года. – ФТ "Сириус": Математический центр Научно-технологического университета "Сириус"– 2021. – С. 317-318.

[18] Шавлуков, А. М. Особенность типа гиперболической омбилики формального решения системы уравнений газовой динамики / А. М. Шавлуков // Уфимская осенняя математическая школа – 2021. Материалы конференции. Том 2, Уфа, 6-9 октября 2021 года. – Уфа: НИЦ «Аэтерна» – 2021. – С. 116-117.

[19] Шавлуков, А. М. Омбилическая особенность решений системы квазилинейных уравнений газовой динамики / А. М. Шавлуков // Сборник тезисов Международной научной конференции «Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения», оз. Банное, 14-18 марта 2022 года. – Уфа: НИЦ «Аэтерна» – 2022. – С. 76-77.

[20] Шавлуков, А. М. Особенность омбилического типа решений системы квазилинейных уравнений газовой динамики / А. М. Шавлуков // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2022» [Электронный ресурс], Москва, 12-22 апреля 2022 года. – М: МАКС Пресс – 2022.

[21] Шавлуков, А. М. Catastrophes of solutions to the equations of an isentropic gas flow and catastrophes of solutions to the linear wave equation / А. М.

Шавлуков // Satellite International Conference on Nonlinear Dynamics and Integrability and Scientific School "Nonlinear days". Abstracts, Ярославль, 27 июня - 1 июля 2022 года. – Ярославль: ЯрГУ – 2022. – С. 92.

[22] Шавлуков, А. М. Singularities of solutions to the equations of an isentropic gas flow and singularities of solutions to the linear wave equation / А. М. Шавлуков // O.A. Ladyzhenskaya centennial conference on PDEs. Book of abstracts, Санкт-Петербург, 16-22 июля 2022 года. – Санкт-Петербург: Санкт-Петербургское отделение. Математического института им. В.А.Стеклова РАН – 2022. – С. 92.

[23] Шавлуков, А. М. Катастрофы решений уравнений одномерной газовой динамики и наследование ростков катастроф решений волнового уравнения / А. М. Шавлуков // Материалы международной научной конференции «Уфимская осенняя математическая школа». Том 2, Уфа, 28 сентября - 1 октября 2022 года. – Уфа: РИЦ БашГУ – 2022. – С. 97-98.

[24] Шавлуков, А. М. Об омбилических катастрофах решений систем квазилинейных уравнений газовой динамики / А. М. Шавлуков // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2023» [Электронный ресурс], Москва, 10-21 апреля 2023 года. – М: МАКС Пресс – 2023.

[25] Шавлуков, А. М. О катастрофах решений уравнений одномерной газовой динамики в случаях Чаплыгина и Бехерта-Станюковича / А. М. Шавлуков // Материалы международной научной конференции «Уфимская осенняя математическая школа». Том 1, Уфа, 4-8 октября 2023 года. – Уфа: НИЦ «Аэтерна» – 2023. – С. 247-248.