

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ С ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫМ ЦЕНТРОМ –
ОБОСОБЛЕННОЕ СТРУКТУРНОЕ ПОДРАЗДЕЛЕНИЕ
ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
БЮДЖЕТНОГО НАУЧНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ
УФИМСКОГО ФЕДЕРАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЦЕНТРА
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи



ШАВЛУКОВ АЗАМАТ МАВЛЕТОВИЧ

**ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЙ
ОДНОМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ
ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ И
НЕЛИНЕЙНОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ**

1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук
Сулейманов Булат Ирекович

Уфа — 2025

Оглавление

Введение	3
1 Особенности решений гиперболической системы уравнений одномерной газовой динамики	22
1.1 Особенность сечения катастрофы гиперболической омбилики D_4^+	22
1.2 Типичные сингулярности решений волнового уравнения	42
1.3 Случай газов Чаплыгина и Бехерта-Станюковича	47
1.3.1 Случай Чаплыгина. Особенность сечения сборки A_3	49
1.3.2 Случай Чаплыгина. Особенность складки A_2	58
1.3.3 Случай Бехерта-Станюковича. Особенность сечения гиперболической омбилики D_4^+	59
2 Провальные особенности решений гиперболической системы уравнений одномерной газовой динамики	69
2.1 Особенность сборки A_3 при $\rho \rightarrow 0$	69
2.1.1 Уравнения мелкой воды. Эталонное решение	73
2.2 Обоснование формальных провальных асимптотик для уравнений мелкой воды	75
2.3 Замечание о случае $\alpha(\rho) \equiv 0$	81
3 Особенность сечения эллиптической омбилики D_4^- решений эллиптической системы уравнений нелинейной геометрической оптики	86
Заключение	101
Список литературы	103

Введение

Актуальность темы исследования

Изучение различного рода сингулярностей решений уравнений с частными производными – одна из актуальных задач математической физики, интерес к которой вызван и поддерживается как потребностями теории, так и физическими приложениями, в том числе в газовой динамике, гидродинамике и оптике.

В различных моделях внимание исследователей привлекали теряющие гладкость решения [1] – [4], многозначные решения [5], разрушение решений [6] – [9], нормальные формы уравнений в окрестности особых точек [10] – [12]; особенности решений параболических систем [13] – [15], особенности решений обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка [16], изучение особенностей в медленно меняющихся положениях равновесия [17] – [20], лежандровы особенности в быстро-медленных динамических системах [21], [22]; особенности распространения коротких волн на плоскости [23], эффективные формулы для выражения оператора Маслова в окрестности каустической точки [24] – [26]; специальные функции волновых катастроф [27] – [29]; особенности геодезических потоков [30]; приложения к задачам теории управления и оптимизации [31]; многочисленные вопросы классификации ростков голоморфных отображений [32] – [38]; коллапс в гидродинамике и газовой динамике [39] – [41], разрушение волн [42] – [45], спектр вопросов о распространении особенностей для гидродинамических уравнений и траекторий вихрей и связанная с ними гипотеза В. П. Маслова о «глазе» тайфуна [46], [47], волны-убийцы [48] – [50], изменения потока воды при добавлении примеси в мельницах [51], особенности на поверхностях жидких металлов [52], жидкого гелия [53], жидких диэлектриков [54], [55], формирование особенностей на поверхности раздела жидкостей [56].

Значительное количество исследований посвящено ударным волнам, (теоретически предсказанным еще в XIX веке Бернхардом Риманом [57]) вместе с возникающими в решениях уравнений особенностями [58] – [76].

В целом, вырождения различных отображений и аспекты резкой качественной смены состояния той или иной системы или явления изучались еще со Средних Веков [77, Лекция 1, пункт 2, стр. 5-9], [78, Добавление, стр. 93-97], в том числе в оптике: рассматривались образования каустических поверхностей в по-

токе световых лучей, коническая рефракция, двойное лучепреломление, перестройки волновых фронтов, фазовые переходы и другие явления.

Активно развивавшаяся в XX веке усилиями в том числе Хасслера Уитни, Рене Тома, Кристофера Зимана, Джона Мазера, Бернара Морена, Владимира Игоревича Арнольда и многих других выдающихся специалистов математическая теория катастроф [77] – [96], понимаемая далее как теория особенностей дифференцируемых отображений вместе с приложениями, дала мощный аппарат для изучения поведения решений уравнений в окрестности точки градиентной катастрофы – такой конечной точки области изменения независимых переменных, в которой как минимум одна из первых производных решений обращается в бесконечность, а сами решения при этом конечны.

Начиная с пионерских работ [97] и [98] А. Х. Рахимова (представителя школы В. И. Арнольда) с 1990-х годов начало формироваться направление исследований [5], [73] – [76], [97] – [107] типичных – в смысле математической теории катастроф – особенностей решений квазилинейных систем двух уравнений на две неизвестные функции. К этому направлению относятся и основные объекты исследования настоящей диссертации: типичные особенности решений системы уравнений идеальной одномерной изоэнтропической (т.е. без учета обмена газа теплотой с окружающей средой) газовой динамики, далее сокращенно называемой системой уравнений ГД или уравнениями газовой динамики

$$\begin{cases} u_t + uu_x + \alpha(\rho)\rho_x = 0, \\ \rho_t + (\rho u)_x = 0, \end{cases} \quad (0.1)$$

где $u(t, x)$ – скорость течения, $\rho(t, x) \geq 0$ – плотность, t – время, x – единственная пространственная координата, $\alpha(\rho) = \frac{p'(\rho)}{\rho} > 0$ – аналитическая положительная в окрестности $\rho = \rho_*$ функция с разложением в ряд Тейлора

$$\alpha(\rho) = 4 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha_j}{j!} (\Delta\rho)^j \quad (\Delta\rho = \rho - \rho_*),$$

$p(\rho)$ – давление газа, и типичные особенности решений системы уравнений одномерной нелинейной геометрической оптики (далее используется сокращение НГО)

$$\begin{cases} u_t + uu_x - \alpha(\rho)\rho_x = 0, \\ \rho_t + (\rho u)_x = 0. \end{cases} \quad (0.2)$$

При этом в пунктах **1.1** и **1.2** в ситуации «общего положения» $\alpha_1 \neq -\frac{3\alpha_*}{\rho_*} = -\frac{12}{\rho_*}$. В пунктах **1.3.1** и **1.3.2** рассматривается газ Чаплыгина, нарушающий это условие.

Посредством инвариантов Римана (где $r \neq l$, иначе $\rho = 0$)

$$\begin{aligned} r &= u + \int_{\tilde{s}}^{\rho} \frac{c(s)}{s} ds, \\ l &= u - \int_{\tilde{s}}^{\rho} \frac{c(s)}{s} ds, \\ c^2 &= p_{\rho} = \rho \alpha(\rho), \end{aligned} \tag{0.3}$$

где $c(\rho) > 0$ – скорость звука, система уравнений газовой динамики (0.1) представляется [108, Глава 2, §2, пункт 7, стр. 167-168] как диагональная:

$$\begin{cases} r_t + (\frac{r+l}{2} + c)r_x = 0, \\ l_t + (\frac{r+l}{2} - c)l_x = 0. \end{cases} \tag{0.4}$$

Вкратце опишем схему исследования и формулировку задачи на примере системы уравнений ГД (0.1) (и получаемой из нее диагональной системы (0.4)) и системы уравнений НГО (0.2) при $\rho_* \neq 0$.

В одномерной изоэнтропической газовой динамике для исследования решений уравнений широко применяется преобразование годографа, меняющее ролями зависимые (скорость и плотность) и независимые (время и единственная пространственная координата) переменные [108, Глава 1, §4, стр. 33-34], [109, Лекция 16, пункт 1, стр. 156-164]. Из формул для производных преобразования годографа

$$\begin{aligned} u_x &= Jt_{\rho}, & u_t &= -Jx_{\rho}, \\ \rho_x &= -Jt_u, & \rho_t &= Jx_u, \\ J &= u_x\rho_t - u_t\rho_x, & j &= x_ut_{\rho} - x_{\rho}t_u, & J &= j^{-1}, \end{aligned} \tag{0.5}$$

следует, что система (0.1) переходит в систему

$$\begin{cases} x_{\rho} = ut_{\rho} - \alpha(\rho)t_u, \\ x_u = ut_u - \rho t_{\rho}, \end{cases}$$

а система (0.2) – в систему

$$\begin{cases} x_{\rho} = ut_{\rho} + \alpha(\rho)t_u, \\ x_u = ut_u - \rho t_{\rho}. \end{cases}$$

Рассматриваются их гладкие (здесь и далее гладкие – бесконечно дифференцируемые) решения $t(u, \rho)$, $x(u, \rho)$, чьи первые производные не обращаются в нуль одновременно в конечной точке $(u_*, \rho_*; t_*, x_*)$. Тогда обращение в нуль якобиана преобразования годографа $j = x_u t_\rho - x_\rho t_u$ в этой конечной точке $(u_*, \rho_*; t_*, x_*)$ сопровождается обращением в бесконечность первых производных решений систем (0.1) и (0.2) – происходит градиентная катастрофа. При этом теряет гладкость и взаимную однозначность отображение из плоскости годографа на плоскость скорости и плотности течения $(t, x) \rightarrow (u, \rho)$. В диссертации анализируются именно такие сингулярности решений систем (0.1) и (0.2).

Формулы для производных преобразования годографа в терминах инвариантов Римана

$$\begin{aligned} r_x &= J t_l, & r_t &= -J x_l, \\ l_x &= -J t_r, & l_t &= J x_r, \\ J &= r_x l_t - r_t l_x, & j &= x_r t_l - x_l t_r, & J &= j^{-1}, \end{aligned}$$

позволяют свести квазилинейную систему (0.4) на функции $r(t, x)$, $l(t, x)$ к линейной системе на функции $t(r, l)$, $x(r, l)$

$$\begin{cases} x_l = t_l \left(\frac{r+l}{2} + c \right), \\ x_r = t_r \left(\frac{r+l}{2} - c \right), \end{cases} \quad (0.6)$$

решение которой задает решение изначальной системы уравнений ГД в неявном виде в терминах инвариантов Римана (0.3).

Подстановка правых частей линейной системы в якобиан j позволяет выразить его через производные только лишь функции t . Таким образом,

$$j = -2ct_r t_l.$$

Так как $J = j^{-1}$, то в применяемом преобразовании годографа обращение в нуль якобиана $j = -2ct_r t_l$ при конечности первых производных решений t_r , t_l , x_r , x_l в конечной точке $(r_*, l_*; t_*, x_*)$ сопровождается обращением в бесконечность как минимум одной из первых производных решений исходной системы r_x , r_t , l_x , l_t – происходит градиентная катастрофа. Значения же самих решений в точке $(r_*, l_*; t_*, x_*)$ конечны.

При этом теряет гладкость (здесь и далее гладкость – бесконечная дифференцируемость) и взаимную однозначность отображение из плоскости годографа на плоскость инвариантов Римана (зависящих от искомых скорости и плот-

ности течения). Следовательно, отображение локально перестает быть диффеоморфным.

Тем самым нами ставится вопрос о поведении решений исходной системы уравнений ГД (0.1) в малой окрестности точки градиентной катастрофы. Для системы уравнений нелинейной геометрической оптики задача формулируется практически аналогично, но без инвариантов Римана и, следовательно, без сведения системы уравнений НГО (0.2) к диагональной – в силу эллиптичности системы инварианты Римана (0.3) комплекснозначны.

Описанная ситуация может быть [101, Введение, стр. 18] сформулирована как задача анализа критических точек локально гладкой функции

$$F = \rho(ut - B(u, \rho) - x), \quad (0.7)$$

зависящей от двух основных переменных u, ρ и параметров t, x . Ее критические точки определяются равенствами $F_u = 0, F_\rho = 0$.

Здесь, при анализе особенностей решений системы уравнений ГД, функция $B(u, \rho)$ – локально гладкое решение гиперболического уравнения

$$\rho B_{\rho\rho} + 2B_\rho = \alpha(\rho)B_{uu}, \quad (0.8)$$

получаемого из линейной системы на t и x (0.6) невырожденными заменами [110, Глава I, §2, 2.1, формула 2.6, стр. 18] (эквивалентными условиям $F_u = 0, F_\rho = 0$)

$$\begin{aligned} t &= B_u, \\ x &= uB_u - B - \rho B_\rho \end{aligned} \quad (0.9)$$

или, что оказывается удобнее в силу перехода к инвариантам Римана, $B(r, l)$ – решение уравнения

$$8\alpha B_{rl} = \left(\alpha_\rho + 3\frac{\alpha}{\rho} \right) \sqrt{\frac{\rho}{\alpha}} (B_r - B_l) \quad (0.10)$$

или

$$4cB_{rl} = (c_r - c_l + 1)(B_r - B_l). \quad (0.11)$$

В основном тексте показано, что в случае газа Чаплыгина $c_r = -c_l = -\frac{1}{2}$ и уравнение (0.11) сводится к волновому уравнению $B_{rl} = 0$.

Для анализа особенностей решений системы уравнений НГО используется та же функция (0.7), где $B(u, \rho)$ – локально аналитическое решение эллиптического уравнения

$$\rho B_{\rho\rho} + 2B_\rho = -\alpha(\rho)B_{uu}. \quad (0.12)$$

Непустота множества локально бесконечно дифференцируемых решений уравнения (0.10) обоснована в **Лемме 1.1.** основного текста при помощи теоремы Бореля и известного результата о разрешимости задачи Коши для линейного гиперболического уравнения с бесконечно дифференцируемыми начальными данными (Р. Курант «Уравнения с частными производными». М.: Мир, 1962, Глава V, §6, п.1–3). При $\rho_* \neq 0$ существование локально аналитических решений обосновано при помощи теоремы Коши-Ковалевской. В **Главе 3** для обоснования непустоты множества решений (0.12) в силу результата Пикара необходимо рассматривать лишь класс аналитических решений, существование которых следует из теоремы Коши-Ковалевской.

Задача исследования вырожденных критических точек функции (0.7), которым соответствует точка ГК, решается с помощью результатов и методов математической теории катастроф.

Один из фундаментальных результатов теории особенностей дифференцируемых отображений заключается в том, что существует [80, Часть I, Глава 2, пункт 4], [81, Часть IV, Глава 21, пункт 5] конечный список нормальных канонических форм, к которым сводится локально гладкая (аналитическая) функция, зависящая как от основных переменных, так и от так называемых *управляющих* параметров в окрестности критической точки конечной кратности $\mu \in \mathbb{N}$ при $\mu \in [2, 5]$ (далее используется *ADE*-классификация Арнольда):

$$\begin{aligned} A_2^\pm &: \pm x^3 + k_2x + k_1, \\ A_3^\pm &: \pm x^4 + k_3x^2 + k_2x + k_1, \\ A_4^\pm &: \pm x^5 + k_4x^3 + k_3x^2 + k_2x + k_1, \\ A_5^\pm &: \pm x^6 + k_5x^5 + k_4x^4 + k_3x^2 + k_2x + k_1, \\ D_4^- &: x^2y - y^3 + k_4y^2 + k_3y + k_2x + k_1, \\ D_4^+ &: x^2y + y^3 + k_4y^2 + k_3y + k_2x + k_1, \\ D_5^\pm &: x^2 \pm y^4 + k_5y^3 + k_4y^3 + k_3y + k_2x + k_1. \end{aligned}$$

Значения этих многочленов при всех $k_i = 0$ называются генотипами соответствующих особенностей [93, §14]. Далее, если не оговорено противное, нами

опускается верхний индекс «плюс»: подразумевается, что A_k это A_k^+ . Также отметим, что линейными преобразованиями генотип особенности D_4^+ может быть сведен к виду $u^3 + v^3$, в котором эту катастрофу исследовал Рене Том. В **Главе 1** используется данный вид.

В настоящей работе исследованы следующие особенности:

- A_2 – особенность типа складки;
- A_3 – особенность типа сборки;
- D_4^+ – особенность типа гиперболической омбилики;
- D_4^- – особенность типа эллиптической омбилики.

Подчеркнем: нами рассматривается подмножество множества всех гладких (аналитических) функций $F(u, \rho; t, x)$, элементы которого задаются формулой (0.7) и гладкими (или аналитическими) решениями уравнения (0.8) (или уравнения (0.12)). На всем множестве гладких (аналитических) функций $F(u, \rho; t, x)$ функциям $u(t, x)$, $\rho(t, x)$, определяемым из анализа критических точек $F(u, \rho; t, x)$, должны быть присущи только особенности типа складки (A_2) и сборки (A_3). По той причине, что изучается именно описанное подмножество, оказывается, что решения систем (0.1) и (0.2) наряду с особенностями складки (A_2) и сборки (A_3) имеют также типичные особенности сечения гиперболической (D_4^+) и эллиптической (D_4^-) омбилики соответственно. Для этих сечений k_3 является функцией двух других управляющих параметров, т.е. $k_3 = k_3(k_1, k_2)$.

Замечание 0.1. В работе А. Х. Рахимова [98] без анализа вырождений критических точек потенциальной функции были описаны типичные особенности решений квазилинейной гиперболической системы более общего, чем (1.1) вида при соблюдении условия более сильного, чем условие сильной нелинейности (описание серии особенностей при соблюдении именно условия сильной нелинейности дано в работе [5]). А. Х. Рахимов описал особенности складки (A_2), сборки (A_3) и особенность C_2^2 , локально определяемую корнями системы уравнений

$$\begin{aligned} v_1^2 &= z_1 + z_2 v_2, \\ v_2^2 &= z_1 v_1 + z_2. \end{aligned} \tag{0.13}$$

В диссертационной работе подтвержден вывод о типичности особенностей A_2 и A_3 посредством изучения потенциальной функции, а также была описана

типичная особенность D_4^+ : было показано, что в окрестности точки ГК решения системы ГД (1.1) локально выражаются через решения системы

$$\begin{aligned} y_1^2 - x_3(x_1, x_2)y_2 - x_1 &= 0, \\ y_2^2 - x_3(x_1, x_2)y_1 - x_2 &= 0, \end{aligned} \quad (0.14)$$

определяющей критические точки кубической функции

$$H(y_1, y_2; x_1, x_2) = \frac{y_1^3 + y_2^3}{3} - x_3(x_1, x_2)y_1y_2 - x_1y_1 - x_2y_2$$

основных переменных y_1, y_2 и двух управляющих параметров x_1, x_2 . По-видимому, с помощью локальных диффеоморфизмов решения системы (0.13) возможно выразить через решения (0.14), но автору не удалось ни доказать это строго, ни обнаружить такое доказательство в литературе.

По существу, описание типичных особенностей решений квазилинейных систем дифференциальных уравнений сводится к их заданию в терминах корней канонических уравнений теории катастроф, которые в главном порядке определяют вырождения критических точек локально гладких функций, зависящих дополнительно от управляющих параметров – в данном случае, двух независимых переменных решений соответствующих квазилинейных систем дифференциальных уравнений. Анализ корней канонических уравнений позволяет делать выводы о поведении решений исходных квазилинейных систем.

В рамках используемого подхода решение гиперболического уравнения (0.10) (получаемого из системы уравнений ГД (0.1)) на функцию $B(r, l)$ ищется в виде степенного ряда

$$B = \sum_{i+j \geq 0} b_{ij}(\Delta r)^i(\Delta l)^j,$$

а решение эллиптического уравнения (0.12) (получаемого из системы уравнений НГО (0.2)) на функцию $B(u, \rho)$ – в виде степенного ряда

$$B = \sum_{i+j \geq 0} b_{ij}(\Delta u)^i(\Delta \rho)^j.$$

Тогда в гиперболическом случае условие обращения якобиана преобразования годографа в нуль в конечной точке $(r_*, l_*; t_*, x_*)$ принимает вид

$$j(r_*, l_*) = -4\sqrt{\rho_*}(2b_{20} + b_{11})(b_{11} + 2b_{02}) = 0.$$

С точки зрения идеологии теории катастроф [80] в поставленной задаче в ситуации «общего положения» возможно наложить не более двух ограничений на коэффициенты разложения решения $B(r, l)$ (не следующих из факта удовлетворения функции $B(r, l)$ уравнению (0.10)), поскольку функция $B(r, l)$ зависит от двух переменных, которые, в свою очередь, при рассмотрении критических точек функции (0.7) становятся функциями ровно двух управляющих параметров t и x . Тем самым при $\rho_* \neq 0$ возможны три различные ситуации наложения ограничений на коэффициенты разложения решения:

- 1) обращается в нуль только первая скобка, т.е. на коэффициенты накладывается одно ограничение $2b_{20} + b_{11} = 0$;
- 2) либо только вторая скобка, т.е. на коэффициенты накладывается одно ограничение $b_{11} + 2b_{02} = 0$;
- 3) либо обе одновременно, т.е. на коэффициенты накладываются оба упомянутых ограничения: $b_{11} = -2b_{20} = -2b_{02}$.

Им соответствуют три различные точки градиентной катастрофы, в окрестности которых для решений системы уравнений ГД (0.1) типичны особенности складки, сборки (при одном ограничении) и сечения гиперболической омбилики (при двух ограничениях).

В эллиптическом случае условие обращения якобиана преобразования годографа в нуль в конечной точке $(u_*, \rho_*; t_*, x_*)$ принимает вид

$$j(u_*, \rho_*) = -\rho_* b_{11}^2 - 16b_{20}^2 = 0,$$

то есть при $\rho_* \neq 0$ реализуется лишь одна возможность: $b_{20} = b_{11} = 0$. В окрестности точки градиентной катастрофы для решений системы уравнений НГО (0.2) типична особенность сечения эллиптической омбилики.

Случаю $\rho_* = 0$ отвечают так называемые «провальные особенности», которым посвящена **Глава 2**.

Функция F (0.7) зависит от скорости и плотности течения (либо от инвариантов Римана (0.3), зависящих от скорости и плотности течения) как от основных переменных, а от времени и пространственной координаты как от дополнительных переменных (в терминологии теории катастроф – управляющих параметров). Критические по основным переменным точки этой функции – суть решения линейной системы на t и x (0.6), получаемой из исходной после приме-

нения преобразования годографа в силу справедливости равенств (0.9)

$$F_u \equiv t - B_u = 0,$$

$$F_\rho \equiv ut - B - x - \rho B_\rho = 0.$$

В итоге анализ критических точек локально гладкой (аналитической) функции F (0.7) позволяет решить поставленную задачу о поведении решений системы уравнений ГД (НГО) в окрестности точки градиентной катастрофы.

Описанная выше задача может быть эффективно решена с помощью результатов и методов теории особенностей дифференцируемых отображений: после конечной серии невырожденных обратимых преобразований функция F приводится к определенной нормальной форме в каждой из ситуаций обращения в нуль якобиана преобразования годографа.

Тогда решения систем уравнений с частными производными (0.1) и (0.2) в окрестности соответствующей рассматриваемой ситуации точки градиентной катастрофы выражаются через корни канонических уравнений теории катастроф, получаемых из поиска критических точек функции F .

Именно таким, в определенном смысле естественным для математической теории катастроф, образом были формально описаны типичные особенности типа сборки при стремлении плотности газа к нулю для, соответственно, эллиптического (НГО) [73] и гиперболического (ГД) [76] варианта квазилинейной системы, то есть локально решения указанных систем задаются решениями канонического кубического уравнения вида

$$S^3 + pS + q = 0,$$

где p и q зависят от t и x , а S зависит от u , ρ , t и x .

Уже не формально, а в классе бесконечно дифференцируемых функций было отмечено [103] наследование (совпадение с точностью до диффеоморфизмов канонических форм уравнений) особенностей решений газодинамической системы от особенностей решений волнового уравнения в образе годографа (к которому сводится линеаризация системы уравнений идеальной одномерной газовой динамики). Наследуются особенности, соответственно, складки, сборки и сечения гиперболической омбилики:

$$S^2 + q = 0,$$

$$S^3 + pS + q = 0,$$

$$S_1^2 = p_3(p_1, p_2)S_2 + p_2, \quad S_2^2 = p_3(p_1, p_2)S_1 + p_1,$$

где p_i зависят от t и x , а S_i зависят от u , ρ , t и x , $i = 1, 2$. Как уже было отмечено выше, список трех особенностей решений квазилинейной системы более общего, чем (0.1) вида был получен в [98] А. Х. Рахимовым. При этом третья особенность была представлена в другой форме, что более подробно комментируется в пункте **1.1.** основного текста.

Изучены [105] ранее не рассматриваемые частные случаи Чаплыгина

$$p = p_0 - \frac{m^2}{\rho}$$

и Бехерта-Станюковича

$$p = \frac{a^2}{3}\rho^3,$$

где $m > 0$ – постоянная положительная масса газа, $a > 0$ и $p_0 > 0$ – некоторые положительные постоянные. В работе [98] при изучении системы (0.4) они были исключены как нарушающие, соответственно, условие сильной нелинейности

$$\left(\frac{r+l}{2} + c\right)_r \left(\frac{r+l}{2} - c\right)_l \neq 0$$

и еще более сильное условие

$$\left(\frac{r+l}{2} + c\right)_r \left(\frac{r+l}{2} + c\right)_l \left(\frac{r+l}{2} - c\right)_r \left(\frac{r+l}{2} - c\right)_l \neq 0.$$

Кроме того, как будет показано в основном тексте, случай Чаплыгина естественным образом возникает при нарушении условия $\alpha_1 \neq -\frac{3\alpha_*}{\rho_*} = -\frac{12}{\rho_*}$, поставленного в работе [74].

Для случая Чаплыгина описаны особенности складки, сечения сборки и сечения гиперболической омбилики. Для случая Бехерта-Станюковича описана особенность сечения гиперболической омбилики.

Отметим: условие сильной нелинейности нарушает только газ Чаплыгина.

Уже в классе аналитических функций для эллиптической системы уравнений НГО описана омбилическая особенность решений

$$\begin{aligned} S_1^2 - S_2^2 &= p_1 + 2p_3(p_1, p_2)S_2, \\ 2S_1S_2 &= p_2, \end{aligned}$$

отмечено наследование особенности от решения уравнения Лапласа [106] и уточнен результат работы [100].

Полученные результаты и ранее установленная связь между зарождением ударных волн в течении газа (или опрокидыванием волн на поверхности жидкости) и катастрофой типа сборки позволяют считать газовую динамику и гидродинамику естественным полем приложения теории особенностей.

Оптика – еще одна область физики, в которой возможно применить результаты теории особенностей в изучении дифракционных катастроф, радуги, мерцания света на водной ряби, самофокусировки [112] – [122]. Сингулярности системы уравнений нелинейной геометрической оптики изучались, например, А. В. Гуревичем и А. Б. Шварцбургом [123] – [125], А. В. Талановым [117] и С. Л. Ждановым и Б. А. Трубниковым [126].

Первые значимые результаты в изучении особенностей решений системы нелинейной геометрической оптики именно с точки зрения теории катастроф при $\rho_* \neq 0$ относятся к работам Б. А. Дубровина и его соавторов Т. Гравы и К. Клейна. Так, в [100] формально и при учете лишь начальных отрезков степенных рядов описана омбилическая особенность эллиптического типа решений системы одномерных уравнений нелинейной геометрической оптики. Впоследствии этот результат автором настоящей диссертации был исправлен и уточнен [106] именно в процессе анализа критических точек локально аналитической функции, подобно тому, как это было сделано в [103]. Показано, что из-за учета лишь начальных отрезков степенных рядов получается неверный вывод по части описания управляющих параметров канонической формы: Б. А. Дубровиным, Т. Гравой и К. Клейном утверждалось, что один из управляющих параметров тождественно равен нулю. В [106] было показано отличие этого коэффициента от нуля даже при рассмотрении приводимого в [100] примера.

Ранее особенность решений системы (0.2) при $\rho_* = 0$ исследовалась В. Р. Кудашевым и Б. И. Сулеймановым в работе [73] также лишь на уровне формальных решений.

По итогу написанного можно утверждать, что методы теории особенностей дифференцируемых отображений находят весьма обширное применение в изучении решений уравнений с частными производными в окрестности конечных точек градиентных катастроф. Труды автора и его соавторов [76], [103], [104], [105], [106] направлены на то, чтобы завершить программу описания соответствующих типичных особенностей решений одномерных однородных уравнений ГД и НГО в классе бесконечно дифференцируемых или аналитических функций.

Один из актуальных фронтов будущих работ – описание особенностей решения пространственно двумерного волнового уравнения и трехмерного уравнения Лапласа. Следует проверить, что у многомерной квазилинейной системы существуют решения с типичной особенностью, генотип [93, §14, стр. 105] которой совпадает с генотипом соответствующей типичной особенности решений линеаризации.

В пространственно двумерном случае на данный момент на уровне формальных преобразований описана особенность типа складки решений системы уравнений мелкой воды [102]. В изучении двумерных моделей газовой динамики или нелинейной геометрической оптики видится более методически удобным использовать преобразование Лежандра вместо преобразования годографа. Получаемые образы уравнений уже не будут линейными, что, впрочем, по-видимому, не должно стать принципиальной помехой для исследования.

Потенциал аппарата теории катастроф не исчерпан и для других одномерных моделей типа газовой динамики. Например, квазилинейная система с правыми частями, зависящими от плотности газа, может применяться во многих моделях гемодинамики [127], некоторые из которых так же допускают зарождение ударных волн при гладкости начальных данных [69], [128].

Интерес представляют системы с учетом диссипации и дисперсии, в которые входят вторые и третьи производные скорости по пространственной координате.

Целью исследования является описание решений системы одномерных уравнений изоэнтропической газовой динамики (0.1) и решений системы одномерных уравнений нелинейной геометрической оптики (0.2) в окрестности конечной точки градиентной катастрофы через решения канонических уравнений теории особенностей дифференцируемых отображений, получаемых в процессе анализа критических точек локально гладких (при изучении системы (0.2) – аналитических) функций вида (0.7), зависящих от параметров. В настоящей диссертации исследуются именно типичные с точки зрения теории катастроф особенности решений.

Задачи исследования:

1. Описать омбилическую особенность решений системы уравнений идеальной одномерной газовой динамики.

2. Показать совпадение с точностью до растяжений генотипов всех трех особенностей решений линейного одномерного однородного волнового уравнения в образе годографа (к которому сводится линеаризация системы уравнений иде-

альной одномерной газовой динамики) и генотипов всех трех особенностей решений системы уравнений идеальной одномерной газовой динамики.

3. Описать особенность типа сечения сборки решений системы уравнений идеальной одномерной газовой динамики в случае Чаплыгина, нарушающем условие сильной нелинейности. Показать специфику данного случая.

4. Описать омбилическую особенность решений системы уравнений идеальной одномерной газовой динамики в случае Бехерта-Станюковича, нарушающем условие еще более сильное, чем условие сильной нелинейности. Показать специфику данного случая.

5. Описать особенность типа сборки решений системы уравнений идеальной одномерной газовой динамики и системы уравнений нелинейной геометрической оптики при стремлении плотности газа (падении интенсивности) к нулю.

6. Описать омбилическую особенность решений системы уравнений нелинейной геометрической оптики. Показать совпадение с точностью до растяжений генотипа особенности решения уравнения Лапласа и генотипа особенности решения системы уравнений нелинейной геометрической оптики.

Научная новизна работы

Результаты работы являются новыми и были получены в 2019–2024 годах.

В окрестности типичной точки градиентной катастрофы описаны асимптотики решений уравнений идеальной одномерной газовой динамики (гиперболическая система) и решений системы уравнений нелинейной геометрической оптики (эллиптическая система) для локально бесконечно дифференцируемых (или, в случае системы уравнений нелинейной геометрической оптики, аналитических) функций давления (интенсивности) и при различных условиях обращения якобиана в нуль.

Строго обоснованы формальные результаты предыдущих работ, дополнены два результата предшественников: впервые описана особенность типа сборки для газа Чаплыгина (оставленного за рамками анализа в работе В. Р. Кудашева и Б. И. Сулейманова 2001 г.) и уточнен вид сечения нормальной формы особенности типа эллиптической омбилики решений системы уравнений нелинейной геометрической оптики (этим уточняется известная работа [100] Б. А. Дубровина, Т. Гравы, К. Клейна 2009 г.).

Замечено совпадение с точностью до растяжений генотипов особенностей складки, сборки и сечения гиперболической омбилики решений системы уравнений одномерной газовой динамики и генотипов особенностей складки, сборки

и сечения гиперболической омбилики решений линейного волнового уравнения в образе годографа, то есть явление наследования всех типичных особенностей в гиперболическом случае.

Замечено совпадение с точностью до растяжений генотипа особенности эллиптической омбилики решения системы уравнений нелинейной геометрической оптики и генотипа особенности эллиптической омбилики решения уравнения Лапласа, то есть явление наследования особенностей в эллиптическом случае.

Теоретическая и практическая значимость

Работа носит теоретический характер и обладает теоретической значимостью. Изучены решения квазилинейных систем уравнений первого порядка в окрестности типичной конечной точки градиентной катастрофы. Представлен конструктивный метод проведения подобного исследования на основе методов теории особенностей с использованием преобразований в классе локально бесконечно дифференцируемых (для гиперболической системы уравнений ГД) или аналитических (для эллиптической системы уравнений НГО) функций.

Методология и методы исследования

В работе используются классические результаты и методы теории особенностей дифференцируемых отображений и теории уравнений с частными производными.

Основные положения, выносимые на защиту

Все задачи решены математически строго с применением конечной последовательности бесконечно дифференцируемых (при исследовании эллиптической системы уравнений НГО – аналитических) преобразований, а не посредством использования формальных степенных рядов и их усечений, как это делалось в значительной части более ранних работ предшественников (исключениями являются, например, [5], [97], [98]). Все выносимые на защиту положения получены автором лично.

1. В окрестности типичной омбилической точки градиентной катастрофы (соответствующей ситуации с наложением двух ограничений на коэффициенты разложения решения уравнения (0.10)) описаны решения системы уравнений идеальной одномерной газовой динамики в терминах решений канонических уравнений сечения гиперболической омбилики.

2. Показано, что с точностью до растяжений генотипы всех трех типичных особенностей решений линейного одномерного однородного волнового уравнения (к которому сводится линеаризация системы уравнений идеальной одно-

мерной газовой динамики) совпадают с генотипами всех трех типичных особенностей решений системы уравнений идеальной одномерной газовой динамики – тем самым показано, что происходит наследование особенностей.

3. В окрестности типичной точки градиентной катастрофы типа сборки (при одном ограничении на коэффициенты разложения решения уравнения (0.10) при $p = p_0 - \frac{m^2}{\rho}$) решение системы уравнений идеальной одномерной газовой динамики в случае Чаплыгина (нарушающего условие сильной нелинейности) описано в терминах решений канонического уравнения сечения сборки. Дополнен результат [74] Б. И. Сулейманова и В. Р. Кудашева 2001 г., в котором газ Чаплыгина не рассматривался. Показано, что в данном случае, в отличие от более общего, происходит наследование не только генотипа, но и всей канонической нормальной формы катастроф A_2 , A_3 , типичных для решений волнового уравнения.

4. В окрестности типичной омбилической точки градиентной катастрофы (при двух ограничениях на коэффициенты разложения решения уравнения (0.10) при $p = \frac{a^2}{3}\rho^3$) описаны решения системы уравнений идеальной одномерной газовой динамики в случае Бехерта-Станюковича (нарушающего условие более сильное, чем условие сильной нелинейности) в терминах решений канонических уравнений сечения гиперболической омбилики, в котором тождественно равен нулю один из управляющих параметров канонической нормальной формы. В этом заключается специфика данного случая.

5. В окрестности типичной точки градиентной катастрофы типа сборки (при одном ограничении на коэффициенты разложения решения уравнения (0.10)) решение системы уравнений идеальной одномерной газовой динамики (и, при замене $\rho \rightarrow -\rho$, решение системы НГО) описано в терминах решений канонического уравнения сборки при стремлении плотности газа к нулю (в случае НГО – падении интенсивности).

6. В окрестности типичной омбилической точки градиентной катастрофы (при двух ограничениях на коэффициенты разложения решения уравнения (0.12)) описаны решения системы уравнений нелинейной геометрической оптики в терминах решений канонических уравнений сечения эллиптической омбилики. Показано, что с точностью до растяжений генотип омбилической особенности решения уравнения Лапласа совпадает с генотипом омбилической особенности решения системы уравнений нелинейной геометрической оптики – тем самым происходит наследование особенности. Дополнительно исправлен (по части

неравенства нулю одного из управляющих параметров) и выполнен не на формальном уровне, а на уровне сходящихся рядов Тейлора аналитических функций, результат [100] Б. А. Дубровина, Т. Гравы, К. Клейна 2009 г.

Тем самым работа почти завершает исследования типичных (с точки зрения математической теории катастроф) особенностей решений одномерных однородных систем уравнений газовой динамики и нелинейной геометрической оптики в случае конечной точки градиентной катастрофы (т.е. при ограниченных значениях компонент). Например, во-первых, остается обоснование непустоты множества гладких решений при описании провальной особенности сборки для случая произвольного аналитического в окрестности нуля давления (интенсивности). Эта задача на момент написания диссертации находится в процессе решения. Во-вторых, не решена проблема описания точки типичной градиентной катастрофы, происходящей при трансформации слабых разрывов решений гиперболического варианта системы в их сильные разрывы. Эта задача в работе [75] была решена на формальном уровне строгости.

Степень достоверности и апробация результатов

Достоверность результатов обеспечена строгим доказательством теорем в соответствии с фундаментальными результатами теории особенностей дифференцируемых отображений и теории уравнений с частными производными.

Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на заседаниях общегородского семинара им. А.М. Ильина по дифференциальным уравнениям математической физики Института математики с вычислительным центром УФИЦ РАН (руководители: д.ф.-м.н., профессор Л.А. Калякин и д.ф.-м.н., профессор В.Ю. Новокшенов; г. Уфа, 2021, 2022, 2025).

Результаты были так же представлены в ходе выступлений на следующих конференциях: Всероссийская конференция школа с международным участием «Электронные, спиновые и квантовые процессы в молекулярных и кристаллических системах» (г. Уфа, 2019); Международная научная конференция «Уфимская осенняя математическая школа» (г. Уфа, 2019, 2020, 2021, 2022, 2023); Студенческая школа-конференция «Математическая весна» (г. Нижний Новгород, 2020, 2021); Всероссийская научная конференция МФТИ (г. Москва, 2021); Международная конференция «Теория функций, теория операторов и квантовая теория информации» (г. Уфа, 2020); Международная молодежная школа-конференция «Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании» (г. Уфа, 2020); Международная конференция студентов, аспиран-

тов и молодых ученых «Ломоносов» (г. Москва, 2020, 2021, 2022, 2023); Конференция международных математических центров мирового уровня (г. Сочи, 2021); Школа для молодых механиков и математиков SYMM (г. Москва, 2021, 2022, 2024); Международный дистанционный воркшоп «Online workshop on PDEs in many body systems» (г. Прага, Чехия, 2021); Международная конференция «Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения» (оз. Банное, 2021, 2022); Международная конференция «Nonlinear Dynamics and Integrability» (г. Ярославль, 2022); Международная конференция «О.А. Ladyzhenskaya centennial conference on PDEs» (г. Санкт-Петербург, 2022).

Публикации

По результатам проведенных исследований опубликованы 5 работ в изданиях из перечня ВАК РФ, индексируемых в Web of Science и Scopus и входящих в РИНЦ и 20 тезисов в сборниках по материалам докладов на конференциях.

Личный вклад автора

Выносимые на защиту положения получены автором самостоятельно. Задача 5 поставлена научным руководителем Б. И. Сулеймановым. Задачи 1, 2, 6 были поставлены в ходе обсуждения с научным руководителем. Задачи 3 и 4 поставлены автором перед собой самостоятельно. Анализ полученных результатов и написание общих статей осуществлялись совместно с научным руководителем.

Работа [105] выполнена полностью самостоятельно. В совместных работах [76], [103], [104], [106] автором проведены ключевые для описания особенностей выкладки и рассуждения.

Вклад соавторов в совместные работы следующий.

В работе [76] научным руководителем Б. И. Сулеймановым отмечен «эталонный» характер одного из найденных автором частных решений. Этому решению посвящен пункт диссертации **2.1.1.**, служащий наглядным примером полученного результата.

В работе [103] научным руководителем доказана лемма о гладкости решений линейного уравнения (**Лемма 1.1. Главы 1**), получаемого из исходной системы после применения преобразования годографа и невырожденных замен. Лемма приведена для обоснования гладкости применяемых далее преобразований.

В работе [104] научным руководителем замечено, что полученный результат применим как для гиперболического, так и для эллиптического варианта уравнений. Соавтором С. Н. Мелиховым в **Теореме 2.1** доказана необходимость.

В работе [106] научным руководителем со ссылкой на [111] обоснована необ-

ходимость аналитичности решений линейного уравнения, получаемого из образа годографа исходной системы после невырожденных преобразований.

Объем и структура диссертации

Диссертационная работа объемом 118 страниц состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы из 141 наименования. Работа содержит 4 рисунка. Принята двойная нумерация формул, замечаний, лемм и теорем: первое число соответствует номеру главы, второе – номеру формулы, замечания, леммы и теоремы в главе.

Во введении показана актуальность темы работы, сформулированы цель и задачи исследования, приведены результаты работы с обоснованием их достоверности, указанием их научной новизны и практической значимости.

В первой главе описаны типичные с точки зрения теории катастроф особенности решений квазилинейной системы уравнений идеальной одномерной газовой динамики. В первом подпункте описана типичная особенность сечения гиперболической омбилики для всех случаев бесконечно дифференцируемого давления газа, кроме течений газа Чаплыгина и Бехерта-Станюковича, особенностям решений которых посвящен третий подпункт. Второй подпункт демонстрирует наследование типичных особенностей решений газодинамической системы от типичных особенностей решений линейного однородного одномерного волнового уравнения с постоянными коэффициентами, к которому сводится линеаризация системы уравнений идеальной одномерной газовой динамики.

Во второй главе описана типичная особенность сборки решений системы уравнений газовой динамики при стремлении плотности (или, в частном случае уравнений мелкой воды, толщины слоя жидкости) к нулю. Во втором подпункте обоснованы формальные провальные асимптотики для гиперболического и эллиптического варианта системы при аналитичности начальных данных образа годографа данных уравнений в окрестности точки провального самообострения.

В третьей главе описана единственная типичная особенность решений омбилического типа для эллиптической квазилинейной системы нелинейной геометрической оптики. Особенность описана посредством применения конечной последовательности преобразований в классе аналитических функций.

В заключении сформулированы основные результаты, полученные в ходе исследований.

1 Особенности решений гиперболической системы уравнений одномерной газовой динамики

1.1 Особенность сечения катастрофы гиперболической омбилики D_4^+

На предмет типичных (с точки зрения теории катастроф) особенностей решений исследуется квазилинейная система уравнений с частными производными первого порядка

$$\begin{cases} u_t + uu_x + \alpha(\rho)\rho_x = 0, \\ \rho_t + (\rho u)_x = 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

моделирующая одномерное течение газа и жидкости. Здесь t – время, $x \in \mathbb{R}$ – пространственная координата, $u(t, x)$ – скорость потока, $\rho(t, x) > 0$ – плотность газа (или толщина слоя жидкости),

$$\alpha(\rho) = \frac{p'(\rho)}{\rho} > 0$$

есть локально аналитическая (в окрестности точки ρ_* , смысл которой проясняется далее) функция, где $p(\rho)$ – давление. В этом и следующем подпунктах без ограничения общности (в силу возможности применить растяжение) считается, что $\alpha(\rho_*) = \alpha_* = 4$ и что функция $\alpha(\rho)$ раскладывается в ряд Тейлора

$$\alpha(\rho) = 4 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha_j}{j!} (\Delta\rho)^j \quad (\Delta\rho = \rho - \rho_*). \quad (1.2)$$

Здесь $\rho_* > 0$ – значение плотности в конечной точке t_* , x_* градиентной катастрофы, в которой первые производные решений (1.1) обращаются в бесконечность, а сами решения – конечны. В этом пункте рассматривается ситуация «общего положения», в которой

$$\alpha_1 \neq -\frac{3\alpha_*}{\rho_*} = -\frac{12}{\rho_*}. \quad (1.3)$$

В пункте **1.3** это условие нарушается для газа Чаплыгина, который исследуется отдельно. В случае Чаплыгина особенность решения обладает своей спецификой.

За счет возможных растяжений постоянную $\alpha(\rho_*)$ можно без ограничения общности считать любым положительным числом. Нами значение $\alpha(\rho_*) = 4$ выбрано по той причине, что случай постоянной функции $\alpha(\rho) \equiv 4$ соответствует квазиклассическому приближению к решениям интегрируемого методом обратной задачи рассеяния НУШ, которое чаще всего записывают в виде $-i\varepsilon\Psi_t = \varepsilon^2\Psi_{xx} - 2|\Psi|^2\Psi$. Оно получается после перехода к (1.1) от нелинейного уравнения Шрёдингера

$$-i\varepsilon\Psi_t = \varepsilon^2\Psi_{xx} + K(|\Psi|^2)\Psi \quad (\alpha(\rho) = -2K'(\rho), \quad 0 < \varepsilon \ll 1)$$

при помощи анзаца

$$\Psi = \sqrt{\rho} \exp(i\frac{\varphi}{\varepsilon}),$$

дальнейшего разбиения вещественной и мнимой частей

$$\begin{cases} \rho_t + 2(\rho\varphi_x)_x = 0, \\ \varphi_t + (\varphi_x)^2 - K(\rho) = \varepsilon^2 \frac{(\sqrt{\rho})_{xx}}{\sqrt{\rho}}, \end{cases}$$

дифференцирования второго уравнения по x , замены

$$u = 2\varphi_x,$$

устремления $\varepsilon \rightarrow 0$ в получаемой системе

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho u)_x = 0, \\ u_t + uu_x - 2K'(\rho)\rho_x = 2\varepsilon^2 \left(\frac{\sqrt{\rho}_{xx}}{\sqrt{\rho}} \right)_x \end{cases}$$

и обозначении $-2K'(\rho) = \alpha(\rho)$.

Посредством инвариантов Римана (где $r \neq l$, иначе $\rho = 0$)

$$\begin{aligned} r &= u + \int_{\tilde{s}}^{\rho} \frac{c(s)}{s} ds, \\ l &= u - \int_{\tilde{s}}^{\rho} \frac{c(s)}{s} ds, \\ c^2 &= p_\rho = \rho\alpha(\rho), \end{aligned} \tag{1.4}$$

где $c(\rho) > 0$ – скорость звука, система (1.1) представляется [108, Глава 2, §2, пункт 7, стр. 167-168] как диагональная

$$\begin{cases} r_t + \left(\frac{r+l}{2} + c\right)r_x = 0, \\ l_t + \left(\frac{r+l}{2} - c\right)l_x = 0. \end{cases} \quad (1.5)$$

Политропным течениям соответствует (например, [108, Глава 2, §1, пункт 4, стр. 144]) давление вида

$$p = \frac{a^2}{n} \rho^n, \quad n \neq 0,$$

где n – показатель адиабаты.

Случаи $n = -1$ (случай Чаплыгина) и $n = 3$ (случай Бехерта-Станюковича) рассматриваются в отдельном пункте **1.3** как исключительные в смысле нарушения условия

$$\left(\frac{r+l}{2} + c\right)_r \left(\frac{r+l}{2} + c\right)_l \left(\frac{r+l}{2} - c\right)_r \left(\frac{r+l}{2} - c\right)_l \neq 0, \quad (1.6)$$

еще более сильного, чем условие сильной нелинейности

$$\left(\frac{r+l}{2} + c\right)_r \left(\frac{r+l}{2} - c\right)_l \neq 0, \quad (1.7)$$

нарушаемое при $n = -1$.

В настоящем же пункте считается, что условия (1.6) и (1.7) не нарушаются. В основополагающей работе А. Х. Рахимова [98, §1, стр. 46] и работе [5], посвященным изучению особенностей квазилинейных систем вида более общего, чем (1.5), ставились условия (1.6) и (1.7) соответственно.

В одномерной изоэнтропической газовой динамике для исследования решений уравнений широко применяется преобразование годографа (например, [109, Лекция 16, пункт 1, стр. 156-164] или [108, Глава 1, §4, пункт 2, стр. 33-34]), меняющее ролями зависимые и независимые переменные. Из формул для производных преобразования годографа

$$\begin{aligned} r_x &= Jt_l, & r_t &= -Jx_l, \\ l_x &= -Jt_r, & l_t &= Jx_r, \\ J &= r_x l_t - r_t l_x, & j &= x_r t_l - x_l t_r, & J &= j^{-1}, \end{aligned} \quad (1.8)$$

следует, что квазилинейная система (1.5) на функции $r(t, x)$ и $l(t, x)$ переводится в линейную систему

$$\begin{cases} x_l = t_l(\frac{r+l}{2} + c), \\ x_r = t_r(\frac{r+l}{2} - c) \end{cases} \quad (1.9)$$

на функции $t(r, l)$ и $x(r, l)$, невырожденные замены [110, Глава I, §2, 2.1, формула 2.6, стр. 18],

$$\begin{aligned} t &= B_u, \\ x &= uB_u - B - \rho B_\rho \end{aligned} \quad (1.10)$$

сводят систему (1.5) к одному линейному гиперболическому уравнению

$$8\alpha B_{rl} = \left(\alpha_\rho + 3\frac{\alpha}{\rho} \right) \sqrt{\frac{\rho}{\alpha}} (B_r - B_l), \quad (1.11)$$

а систему (1.1) к одному линейному гиперболическому (при $\rho > 0$) уравнению [110, Глава I, §2, 2.1, формула 2.7, стр. 18]

$$\rho B_{\rho\rho} + 2B_\rho = \alpha(\rho) B_{uu}. \quad (1.12)$$

Для рассматриваемых конечных значений u_* , ρ_* и $r_* = r(u_*, \rho_*)$, $l_* = l(u_*, \rho_*)$ из (1.4) следует справедливость соотношения ($\Delta r = r - r_*$, $\Delta l = l - l_*$)

$$u = u_* + \Delta u = \frac{r_* + l_*}{2} + \frac{\Delta r + \Delta l}{2},$$

и задание для малых $\Delta\rho$ разности $\Delta r - \Delta l$ сходящимся разложением Тейлора

$$\begin{aligned} \Delta r - \Delta l &= \frac{4}{\sqrt{\rho_*}} \Delta\rho + \frac{\rho_*\alpha_1 - 4}{4(\rho_*)^{3/2}} (\Delta\rho)^2 + \\ &+ \frac{48 - \rho_*^2\alpha_1^2 + 8\rho_*(\rho_*\alpha_2 - \alpha_1)}{96(\rho_*)^{5/2}} (\Delta\rho)^3 + \sum_{i>3} I_i (\Delta\rho)^i, \end{aligned}$$

где коэффициенты I_i однозначно выписываются через постоянные α_i и ρ_* . Поэтому при достаточно малых значениях $\Delta r - \Delta l$ плотность ρ представляется также сходящимся рядом

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_* + \Delta\rho = \rho_* + \frac{\sqrt{\rho_*}}{4} (\Delta r - \Delta l) + \\ &+ h_2 (\Delta r - \Delta l)^2 + h_3 (\Delta r - \Delta l)^3 + \sum_{i>3} h_i (\Delta r - \Delta l)^i, \end{aligned}$$

где

$$h_2 = \frac{(4 - \rho_* \alpha_1)}{256}, \quad h_3 = \frac{(\rho_*^{3/2}(\alpha_1^2 - 2\alpha_2) - 4\sqrt{\rho_*}\alpha_1)}{6144},$$

а остальные h_i – константы, однозначно определяемые через ρ_* , α_i .

Обоснуем то, что всякий формальный степенной ряд решения

$$B = \sum_{i+j \geq 0} b_{ij}(\Delta r)^i(\Delta l)^j. \quad (1.13)$$

представляет собой ряд Тейлора в окрестности $r = r_*$, $l = l_*$ некоторого истинного локально бесконечно дифференцируемого решения уравнения (1.11).

Для обоснования непустоты множества локально гладких решений уравнения (1.11) и, как следствие, фигурирующих в дальнейшем функций (1.10) и (0.7), необходима следующая лемма, доказанная научным руководителем диссертанта Б. И. Сулеймановым в совместной публикации [103].

Лемма 1.1. Пусть точка $r = r_*$, $l = l_*$, такова, что $\rho_* > 0$ и сходящееся в малой окрестности этой точки разложение Тейлора функции $\alpha(\rho)$ имеет вид (1.2). Тогда любое формальное решение (1.13) уравнения (1.11) в достаточно малой окрестности точки $r = r_*$, $l = l_*$ совпадает с разложением в ряд Тейлора некоторого истинного бесконечно дифференцируемого решения этого линейного уравнения.

Доказательство. Между формальными решениями (1.13) уравнения (1.11) и формальными решениями уравнения (1.12) в виде рядов

$$B = \sum_{i+j \geq 0} \tilde{b}_{ij}(\Delta \rho)^i(\Delta u)^j. \quad (1.14)$$

с постоянными коэффициентами \tilde{b}_{ij} существует взаимно однозначное соответствие, осуществляемое разложениями Тейлора локального диффеоморфизма (1.4). Непосредственная подстановка (1.14) в (1.12) показывает, что это формальное решение однозначно определяется двумя произвольными наборами коэффициентов \tilde{b}_{0j} и \tilde{b}_{1j} с $j \geq 0$.

В свою очередь, в силу известной теоремы Бореля [79, раздел 4.9], [84, Глава 5, пункт 5.3, стр. 56] при $u = u_*$ ряд (1.14) и его формальная производная по u совпадают с рядами Тейлора в точке $\rho = \rho_*$ некоторых бесконечно дифференцируемых функций в этой точке функций $P(\rho)$ и, соответственно, $Q(\rho)$.

Тогда обоснованность утверждения данной леммы следует из локальной C^∞ -гладкости решения задачи Коши для гиперболического уравнения (1.12) с начальными условиями $B(\rho, u_*) = P(\rho)$, $B_u(\rho, u_*) = Q(\rho)$ – см. [129, Глава V, §6, п.1 – 3].

Замечание 1.1. При $\rho = \rho_* \neq 0$ применение теоремы Коши-Ковалевской к уравнению (1.12) позволяет обосновать непустоту множества его аналитических решений.

Вне прямой $\rho = 0$ уравнение (1.12) представимо в виде уравнения с аналитическими коэффициентами

$$B_{\rho\rho} = \frac{\alpha(\rho)}{\rho} B_{uu} - \frac{2}{\rho} B_\rho$$

и в правой части уравнения старшая производная того же (второго) порядка, что и старшая производная в левой части.

Пусть при $\rho_* \neq 0$ заданы начальные условия

$$B(u, \rho_*) = B_0(u), \quad B_\rho(u, \rho_*) = B_1(u),$$

где $B_0(u)$ и $B_1(u)$ – аналитические в некоторой окрестности точки $u = u_*$ функции.

Следовательно, правая часть уравнения – аналитическая функция. Тогда применима теорема Коши-Ковалевской: если правая часть локально аналитическая и начальные данные аналитические, то у задачи Коши локально существует единственное в классе аналитических функций решение.

Этим доказана непустота множества аналитических решений уравнения (1.12) вне прямой $\rho = 0$.

Якобиан преобразования (1.8) принимает вид

$$j = -2ct_r t_l. \tag{1.15}$$

Методы и результаты теории особенностей дифференцируемых отображений позволяют локально описать поведение решения (1.1) в окрестности точки градиентной катастрофы – конечной точки $(t_*, x_*; u_*(r_*, l_*), \rho_*(r_*, l_*))$, в которой первые производные решения обращаются в бесконечность (при этом значения решений в этой точке конечны). В этой же точке обращается в нуль якобиан преобразования годографа (1.15).

Следовательно, отображение $(u(r, l), \rho(r, l)) \rightarrow (t, x)$ перестает быть взаимно однозначным и гладким (гладкость здесь и далее понимается как бесконечная дифференцируемость). В окрестности указанной точки после использования обратимых невырожденных гладких замен решения (1.1) локально описываются в терминах канонических уравнений теории катастроф.

В терминах коэффициентов b_{ij} обращение якобиана (1.15) в нуль в точке (r_*, l_*) записывается как

$$\begin{aligned} j(r_*, l_*) &= (B_{rr}(r_*, l_*) + B_{lr}(r_*, l_*))(B_{rl}(r_*, l_*) + B_{ll}(r_*, l_*)) = \\ &= -4\sqrt{\rho_*}(2b_{20} + b_{11})(b_{11} + 2b_{02}) = 0. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Согласно идеологии теории катастроф [80] в поставленной задаче при рассмотрении ситуации «общего положения» возможно наложение не более двух ограничений на коэффициенты разложения решения $B(r, l)$ (кроме тех, что следуют из уравнения (1.11)), поскольку функция $B(r, l)$ зависит от двух переменных.

Существуют три возможности обращения якобиана в нуль: $b_{11} = -2b_{20}$, $b_{11} = -2b_{02}$ и одновременно $b_{11} = -2b_{20} = -2b_{02}$. Выбор одного подходящего значения r_* или l_* реализует первую или вторую возможности (исследуемые одинаково), выбор сразу двух подходящих значений r_* и l_* отвечает третьей возможности. Любые дополнительные, ниоткуда не следующие, ограничения в виде равенств на коэффициенты b_{ij} мы не будем относить к ситуации «общего положения».

В настоящем подпункте выбором r_* и l_* мы требуем выполнения двойного равенства

$$b_{11} = -2b_{20} = -2b_{02}. \quad (1.17)$$

Тогда представление всех слагаемых уравнения (1.11) в виде степенных рядов и приравнивание коэффициентов при линейно независимых членах определяют рекуррентную последовательность соотношений на коэффициенты b_{ij} :

$$\begin{aligned} b_{20} &= -\frac{(b_{10} - b_{01})(\alpha_1 \rho_* + 12)}{128\sqrt{\rho_*}}, \\ b_{21} = -b_{12} &= \frac{(b_{10} - b_{01})(2\rho_*^2 \alpha_2 - 8\rho_* \alpha_1 - \rho_*^2 \alpha_1^2 - 48)}{1024\rho_*}, \dots \end{aligned} \quad (1.18)$$

Подчеркнем, что ранее были исчерпаны возможности наложения ограничений на коэффициенты b_{ij} и считается, что $b_{20} \neq 0$, ибо $\alpha_1 \rho_* \neq -12$. Это условие нарушается для газа Чаплыгина $\alpha(\rho) = m^2 \rho^{-3}$.

Коэффициенты b_{30} и b_{03} по коэффициентам b_{ij} , $i + j < 3$ не определяются. Рассматриваем разложение (1.13) с пока произвольными постоянными b_{30} и b_{03} .

Кроме того, из соотношений (1.10) в точке $\rho = \rho_*$, $u = u_* = (r_* + l_*)/2$ (на t, x -плоскости ей соответствует точка (t_*, x_*)) следует, что

$$\begin{aligned} t_* &= b_{10} + b_{01}, \\ x_* &= \frac{r_* + l_*}{2}(b_{10} + b_{01}) - b_{00} - 2\sqrt{\rho_*}(b_{10} - b_{01}). \end{aligned} \quad (1.19)$$

Следуя [101, Введение, стр. 18], рассмотрим теперь локально гладкую «единую» потенциальную функцию

$$F(\rho, u; t, x) = \rho(ut - B(\rho, u) - x) \quad (1.20)$$

основных переменных ρ , u и двух дополнительных параметров t , x , которая определяется локально гладкими решениями дифференциального уравнения (1.12). Как было отмечено в **Замечании 1.1** по теореме Коши-Ковалевской при аналитических начальных данных для уравнения (1.12) все его решения аналитичны и в таком случае «единая» функция (1.20) уже является локально аналитической функцией. Результаты и методы теории катастроф применимы и в классе аналитических функций.

При $\rho \neq 0$ соотношения (1.10) равносильны равенству нулю производных $F_\rho(\rho, u; t, x)$ и $F_u(\rho, u; t, x)$ функции (1.20):

$$\begin{aligned} F_u &\equiv t - B_u = 0, \\ F_\rho &\equiv ut - B - x - \rho B_\rho = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, критические точки (1.20) суть решения образа годографа системы (1.1).

Обращение в нуль якобиана отображений $(u, \rho) \rightarrow (t, x)$, которые формулами (1.10) определяются через локально гладкие решения дифференциального уравнения (1.12), равносильно вырожденности критических точек функции (1.20). Подобные же особенности гладких функций $F(u, \rho; t, x)$, которые помимо двух основных переменных ρ и u зависят еще от двух параметров t , x , как раз и могут быть описаны с помощью идеологии и методики теории катастроф. Иными словами, изучая критические точки (1.20), мы изучаем поведение решений (1.1) в окрестности точки градиентной катастрофы.

На множестве *всех* таких гладких функций $F(\rho, u; t, x)$ (не только вида (1.20)) согласно выводам теории особенностей дифференцируемых отображений [80, Главы 2-4] вырожденные критических точек в ситуации «общего положения» соответствуют лишь двум каноническим сингулярностям складки и сборки. Резонно предполагать, что среди сингулярностей решений уравнений (1.1) должны встречаться и отвечающие данным двум особенностям.

Автор основополагающих работ по теории катастроф Рене Том даже использовал [82, Глава 5, 5.3, стр. 57-58] в качестве синонима сборки термин «катастрофа Римана – Гюгонио», подразумевая то, что возникновение ударных волн при течении газа (теоретически предсказанных Риманом в классической статье [57] как раз в результате анализа поведения решений (1.1) еще до экспериментального их обнаружения) должно соответствовать этой типичной особенности гладких отображений.

При этом до 1990-х годов связь между процессом возникновения ударных волн из решений уравнений газовой динамики и типичной особенностью сборки гладких отображений, судя по всему, точно нигде не была описана. Именно для решений (1.1) такое описание этой связи было дано в [74] – по сути оно в данной публикации свелось к повторению рассуждений и выкладок, изложенных в [80, Главы 2 – 4], и проверке того факта, что ограничения, накладываемые конкретным видом функции (1.20), не искажают стандартного вывода теории катастроф об универсальности канонической особенности сборки.

Но еще в 1993 г. А. Х. Рахимовым в [98] типичность особенности сборки была установлена для решений более общей 2×2 квазилинейной гиперболической системы

$$U_t + A(U, t, x)U_x = \Phi(U, t, x), \quad (1.21)$$

в которой $U = (u_1, u_2)$, $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2)$ – вектор-функции, а $A(U, t, x)$ есть 2×2 матрица с двумя различными вещественными собственными значениями λ , μ , удовлетворяющими неравенству

$$\lambda_r \lambda_l \mu_r \mu_l \neq 0,$$

которое является условием еще более сильным, чем условие сильной нелинейности $\lambda_r \mu_l \neq 0$. Эти условия не будут выполняться для газов Чаплыгина и Бехерта-Станюковича, изучаемых в следующем подпункте.

Типичность особенности складки для решений общей системы (1.21) А. Х. Рахимовым в [98] также была установлена. Но наиболее ценным результатом

статьи [98] является классификация сингулярностей решений (1.21), которые типичны в смысле математической теории катастроф. Согласно [98] список этих типичных сингулярностей описывается в терминах решений трех систем уравнений:

системы, отвечающей особенности A_2 (особенности складки)

$$\begin{aligned}x_1 &= y_1^2, \\x_2 &= y_2;\end{aligned}\tag{1.22}$$

системы, отвечающей особенности A_3 (особенности сборки)

$$\begin{aligned}x_1 y_1 + y_1^3 + y_1 y_2 &= 0, \\x_2 &= y_2;\end{aligned}\tag{1.23}$$

системы, отвечающей так называемой [107, особенность ${}^2C_{2,2}^{1,1}$ таблицы 8] особенности $C_{2,2}$

$$\begin{aligned}v_1^2 &= z_1 + z_2 v_2, \\v_2^2 &= z_1 v_1 + z_2.\end{aligned}\tag{1.24}$$

Если не принимать во внимание то обстоятельство, что система (1.1) есть лишь частный случай квазилинейной системы (1.21), то, согласно этой классификации А. Х. Рахимова, естественно ожидать, что наряду с вырождениями складки и сборки, на подмножестве функций (1.20), определяемых гладкими решениями уравнений (1.12), типичным должно быть еще ровно одно вырождение критических точек, которое описывается решениями системы (1.24).

Мы показываем, что типичная с точки зрения теории катастроф особенность этого подмножества локально гладких функций, отличная от особенностей складки и сборки локально описывается уравнениями

$$\begin{aligned}H_{y_1} &\equiv y_1^2 - x_3(x_1, x_2)y_2 - x_1 = 0, \\H_{y_2} &\equiv y_2^2 - x_3(x_1, x_2)y_1 - x_2 = 0,\end{aligned}\tag{1.25}$$

определяющими критические точки кубической функции

$$H(y_1, y_2; x_1, x_2) = \frac{y_1^3 + y_2^3}{3} - x_3(x_1, x_2)y_1 y_2 - x_1 y_1 - x_2 y_2$$

основных переменных y_1, y_2 и двух управляющих параметров x_1, x_2 . Здесь коэффициент $x_3(x_1, x_2)$ для достаточно малых значений x_1 и x_2 является гладкой

функцией этих аргументов и при $x_1^2 + x_2^2 \rightarrow 0$ имеет разложение Тейлора

$$x_3(x_1, x_2) = \sum_{i+j=1}^{\infty} k_{ij} x_1^i x_2^j. \quad (1.26)$$

В терминологии теории катастроф тогда уместно говорить о сечении канонических уравнений особенности гиперболической омбилики D_{4+} , локально описываемой системой уравнений $H_{y_1} = 0$, $H_{y_2} = 0$ на критические точки функции

$$H(y_1, y_2; x_1, x_2, x_3) = \frac{y_1^3 + y_2^3}{3} - x_3 y_1 y_2 - x_1 y_1 - x_2 y_2$$

двух основных переменных y_1, y_2 и трех *независимых* управляющих параметров x_1, x_2, x_3 . Поэтому соответствующую особенность решений уравнений газовой динамики называем омбилической.

По-видимому, с помощью локальных диффеоморфизмов решения системы (1.25) через решения системы (1.24) выразить можно. Однако, как уже было сказано во **Введении**, автору не удалось найти публикацию, на которую можно было бы сослаться как на содержащую строгое доказательство этой возможности. Не удалось это доказать и самостоятельно. К тому же, на взгляд автора, форма (1.25) удобнее формы системы (1.24) при описании асимптотик решений системы (1.25) при $(x_1)^2 + (x_2)^2 \rightarrow 0$, что будет пояснено далее.

Основной результат главы заключается в том, что для всех трех типичных вырождений критических точек функций (1.20) генотипы особенностей [91, §9], [93, §14] этих функций совпадают с тремя генотипами особенностей аналогичных функций, соответствующих решениям линеаризации системы (1.1)

$$\begin{cases} U_x + \alpha(\rho_*)V_x = 0, \\ V_t + \rho_*U_x + u_*V_x = 0 \end{cases} \quad (1.27)$$

на ее постоянном решении $u = u_*$, $\rho = \rho_*$. Эта система очевидным образом сводится к линейному однородному волновому уравнению с постоянными коэффициентами, описание трех типичных (в смысле теории катастроф) сингулярностей решений которого дается в пункте **1.2**.

Учитывая соотношения (1.17) – (1.19) на коэффициенты ряда Тейлора b_{ij} гладкого в окрестности точки r_*, l_* решения $B(r, l)$ линейного гиперболического уравнения (1.11), получаем, что функция (1.20), определяемая данным решени-

ем $B(r, l)$, в окрестности этой точки имеет разложение в ряд Тейлора

$$\begin{aligned}
F = & 2\rho_*^{3/2}(b_{10} - b_{01}) + \rho_* z + \frac{\rho_* \Delta t}{2}(\Delta r + \Delta l) + \frac{\sqrt{\rho_*}}{4}z(\Delta r - \Delta l) + \\
& + \frac{\sqrt{\rho_*}}{8}\Delta t(\Delta r^2 - \Delta l^2) + z(\Delta r - \Delta l)^2 + \\
& + \frac{4 - \alpha_1 \rho_*}{512}\Delta t(\Delta r - \Delta l)^2 \frac{\Delta r + \Delta l}{2} + h_3 z(\Delta r - \Delta l)^3 + \\
& + A_+(\Delta r)^3 + A_-(\Delta l)^3 + \\
& + \sum_{i+j \geq 4} (f_{ij}^0 + f_{ij}^1 \Delta t + f_{ij}^2 z)(\Delta r)^i (\Delta l)^j,
\end{aligned} \tag{1.28}$$

коэффициенты которого линейны по параметрам

$$\begin{aligned}
\Delta t &= t - t_*, \\
z &= (r_* + l_*)\Delta t/2 - x + x_*,
\end{aligned}$$

постоянные коэффициенты

$$\begin{aligned}
A_+ &= \frac{(b_{10} - b_{01})[8\rho_*\alpha_1 + 48 - 2\rho_*^2\alpha_2 + \rho_*^2\alpha_1^2]}{3072} - \rho_* b_{30}, \\
A_- &= -\frac{(b_{10} - b_{01})[8\rho_*\alpha_1 + 48 - 2\rho_*^2\alpha_2 + \rho_*^2\alpha_1^2]}{3072} - \rho_* b_{03},
\end{aligned} \tag{1.29}$$

а постоянные $f_{ij}^0, f_{ij}^1, f_{ij}^2$ однозначно определяются коэффициентами ряда (1.13)..

Заметим, что

$$F(r, l; t_*, x_*) = 2\rho_*^{3/2}(b_{10} - b_{01}) + A_+(\Delta r)^3 + A_-(\Delta l)^3 + \sum_{i+j \geq 4} f_{ij}^0(\Delta r)^i (\Delta l)^j.$$

Вид разложения Тейлора (1.28) позволяет сделать вывод о том, что росток функции $F(r, l; t, x)$ является так называемой 2-деформацией ростка функции $F(r, l; t_*, x_*)$ [77, Лекция 7, Определение 2], [93, §13]. Поэтому [77, Лекция 7, раздел 4, пример], [93, §13] данная 2-деформация может быть получена из так называемой R -версальной деформации (являющейся также и универсальной или, иначе, миниверсальной), описываемой трехпараметрическим семейством функций

$$G_{k_1, k_2, k_3}(y_1, y_2) = \frac{y_1^3 + y_2^3}{3} - k_3 y_1 y_2 - k_2 y_1 - k_1 y_2. \tag{1.30}$$

Это означает, что в достаточно малой окрестности точки $r = r_*$, $l = l_*$, $t = t_*$, $x = x_*$ функция $F(r, l; t, x)$, которая является в этой точке гладкой и обладает в ней разложением Тейлора (1.28), представима в виде

$$F(r, l; t, x) = \frac{y_1^3 + y_2^3}{3} - k_3 y_1 y_2 - k_2 y_1 - k_1 y_2 + \gamma, \quad (1.31)$$

где $k_j = k_j(t, x)$ ($j = 1, 2, 3$) и $\gamma = \gamma(t, x)$ – гладкие в окрестности точки $t = t_*$, $x = x_*$ функции; $y_1 = y_1(r, l, t, x)$, $y_2 = y_2(r, l, t, x)$ – зависящая от параметров t и x гладкая локальная замена координат в \mathbb{R}^2 : $(r, l, t, x) \rightarrow (y_1(r, l, t, x), y_2(r, l, t, x))$, которая при фиксированных t и x является локальным диффеоморфизмом.

Подставляя в левую часть (1.31) разложение (1.28), видно, что $k_j(t_*, x_*) = 0$ ($j = 1, 2, 3$), и что при достаточно малых Δr и Δl

$$y_1(r, l, t_*, x_*) = (3A_+)^{1/3} \Delta r + O((\Delta r)^2 + (\Delta l)^2),$$

$$y_2(r, l, t_*, x_*) = (3A_-)^{1/3} \Delta l + O((\Delta r)^2 + (\Delta l)^2).$$

Поэтому при $\Delta r^2 + \Delta l^2 + \Delta t^2 + (x - x_*)^2 \rightarrow 0$ справедливы разложения Тейлора

$$k_j(t, x) = k_{j,10} \Delta t + k_{j,01} z + \sum_{n+m>1} k_{j,nm} (\Delta t)^n z^m \quad (j = 1, 2, 3), \quad (1.32)$$

$$\begin{aligned} y_1(t, x) = & \sum_{n+m>0} a_{nm,00} (\Delta t)^n z^m + \Delta r [(3A_+)^{1/3} + \sum_{n+m>0} a_{nm,10} (\Delta t)^n z^m] + \\ & + \Delta l \sum_{n+m>0} a_{nm,01} (\Delta t)^n z^m + \sum_{i+j>1} \sum_{n+m=0}^{\infty} a_{nm,ij} (\Delta r)^i (\Delta l)^j (\Delta t)^n z^m, \end{aligned} \quad (1.33)$$

$$\begin{aligned} y_2(t, x) = & \sum_{n+m>0} b_{nm,00} (\Delta t)^n z^m + \Delta l [(3A_-)^{1/3} + \sum_{n+m>0} b_{nm,01} (\Delta t)^n z^m] + \\ & + \Delta r \sum_{n+m>0} b_{nm,10} (\Delta t)^n z^m + \sum_{i+j>1} \sum_{n+m=0}^{\infty} b_{nm,ij} (\Delta r)^i (\Delta l)^j (\Delta t)^n z^m. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Непосредственная подстановка рядов (1.32) – (1.34) в правую часть равенства (1.31) и приравнивание результата подстановки разложению Тейлора

(1.28) левой части этого равенства, позволяет прийти к заключению о том, что $\gamma = 2\rho_*^{3/2}(b_{10} - b_{01}) + \rho_* z$ и справедливы равенства

$$\begin{aligned} a_{00,20} &= \frac{f_{40}^0}{(3A_+)^{2/3}}, & a_{00,11} &= \frac{f_{31}^0}{(3A_+)^{2/3}}, & b_{00,11} &= \frac{f_{13}^0}{(3A_-)^{2/3}}, & b_{00,02} &= \frac{f_{04}^0}{(3A_-)^{2/3}}, \\ k_{2,10} &= -\frac{\rho_*}{2(3A_+)^{2/3}}, & k_{2,01} &= -\frac{\sqrt{\rho_*}}{4(3A_+)^{2/3}}, \\ k_{1,10} &= -\frac{\rho_*}{2(3A_-)^{2/3}}, & k_{2,01} &= \frac{\sqrt{\rho_*}}{4(3A_-)^{2/3}}, \\ k_{3,10} &= -\frac{k_{2,10}a_{00,11} + k_{1,10}b_{00,11}}{(9A_+A_-)^{1/3}}, & k_{3,10} &= -\frac{k_{2,01}a_{00,11} + k_{1,01}b_{00,11} - 2}{(9A_+A_-)^{1/3}}, & \dots \end{aligned}$$

Из них следует, что в окрестности точки (t_*, x_*) отображение, описываемое функциями $x_1 = k_2(t, x)$ и $x_2 = k_1(t, x)$ является диффеоморфизмом, и что при $x_1^2 + x_2^2 \rightarrow 0$ гладкая функция $x_3(x_1, x_2) = k_3(t, x)$ имеет разложение Тейлора (1.26), в котором

$$k_{10} = -\frac{1}{(3A_-)^{1/3}} \left[\frac{4}{\rho_*} + \frac{f_{31}^0}{3A_+} \right], \quad k_{01} = \frac{1}{(3A_+)^{1/3}} \left[\frac{4}{\rho_*} - \frac{f_{13}^0}{3A_-} \right]. \quad (1.35)$$

(На t, x -плоскости в точке $t = t_*, x = x_*$ кривые $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$ касаются характеристик системы (1.5), вдоль которых $l \equiv l_*$ и, соответственно, $r \equiv r_*$.)

Как уже отмечалось выше, никаких ограничений в виде равенств на коэффициенты рядов Тейлора (1.13) гладких решений $B(r, l)$ уравнения (1.11) (а значит, и коэффициенты f_{ij}^0), кроме равенств (1.17) и тех, что следуют из вида этого уравнения, при рассмотрении ситуации «общего положения» с точки зрения математической теории катастроф накладывать недопустимо. По этой причине при рассмотрении ситуации «общего положения» можно считать, что обе постоянные k_{10} и k_{01} в равенстве (1.35) отличны от нуля.

Сформулируем строго доказанный выше результат.

Теорема 1.1. Пусть аналитическая в точке $\rho = \rho_* > 0$ функция $\alpha(\rho)$ раскладывается в сходящийся ряд Тейлора (1.2), коэффициенты которого удовлетворяют неравенству $\alpha_1 \rho_* \neq 3\alpha_* = -12$.

Возьмем гладкую в окрестности точки (r_*, l_*) функцию $B(r, l)$, являющуюся таким решением уравнения (1.11), что коэффициенты b_{20} , b_{11} и b_{02} ее ряда Тейлора (1.13) не равны нулю и имеет место двойное равенство (1.17). Допустим также, что коэффициенты этого ряда таковы, что отличны от нуля постоян-

ные A_{\pm} , задаваемые равенствами (1.29), и постоянные k_{10} , k_{01} , определяемые по формулам (1.35).

Рассмотрим решения системы (1.1), которые в некоторой малой окрестности точек t_* , x_* , $u_* = u(t_*, x_*)$, $\rho_* = \rho(t_*, x_*)$ через инварианты Римана (1.4) и эту функцию $B(r, l)$ определяются соотношениями (1.18), (1.19) и равенствами $r_* = r(u_*, \rho_*)$, $l = l(u_*, \rho_*)$. Тогда в достаточно малой окрестности точки (r_*, l_*, t_*, x_*) существуют три такие гладкие функции $k_j(t, x)$ ($j = 1, 2, 3$) и две такие гладкие функции $y_1(r, l; t, x)$, $y_2(r, l; t, x)$, что:

1) они имеют разложения Тейлора (1.32) – (1.34);

2) функции $x_1 = k_2(t, x)$ и $x_2 = k_1(t, x)$ описывают локальный диффеоморфизм $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ и гладкая при малых значениях x_1 и x_2 функция $x_3(x_1, x_2) = k_3(t, x)$ при $x_1^2 + x_2^2 \rightarrow 0$ раскладывается в ряд Тейлора (1.26) с отличными от нуля коэффициентами (1.35);

3) соотношения (1.25) и замены (1.4) задают эти решения системы (1.1).

Замечание 1.2. Вне некоторых фиксированных окрестностей точек $\varphi = \pi k/2$ ($k = 0, 1, 2, 3$) коэффициенты асимптотического решения

$$y_1 = r^{1/2} \sum_{j=0}^{\infty} Y_{j1}(\varphi) r^{j/2},$$

$$y_2 = r^{1/2} \sum_{j=0}^{\infty} Y_{j2}(\varphi) r^{j/2}$$

по степеням радиальной переменной r представления в полярных координатах

$$x_1 = r \cos \varphi, \quad x_2 = r \sin \varphi,$$

управляющих параметров x_1 и x_2 особенностей не имеют. В силу отличия от нуля постоянных k_{10} и k_{01} в асимптотике (1.26) размеры этих окрестностей можно считать такими, что в них отделены от нуля функция

$$a_0(\varphi) = k_{10} \cos(\varphi) + k_{01} \sin(\varphi),$$

а также – при достаточно малых $r \neq 0$ – функция $x_3(x_1, x_2)r^{-1}$ и якобиан отображения $(r, \varphi) \rightarrow (\tilde{r}, \varphi)$, где $\tilde{r} = r^{-1}x_3(x_1, x_2)^2$.

Поэтому вопрос об асимптотике при $r \rightarrow 0$ решений системы (1.25) в таких малых окрестностях точек $\varphi = \pi k/2$ ($k = 0, 1, 2, 3$) после замен $y_j = x_3(x_1, x_2)Y_j$

($j = 1, 2$) сводится к вопросу о поведении при $X_1^2 + X_2^2 \rightarrow \infty$ решений $Y_j(X_1, X_2)$ системы

$$\begin{cases} (Y_1)^2 - X_1 = Y_2, \\ (Y_2)^2 - X_2 = Y_1, \end{cases}$$

где

$$X_1 = \frac{\cos \varphi}{\tilde{r}}, \quad X_2 = \frac{\sin \varphi}{\tilde{r}}.$$

Эта система даже компактнее, чем система (1.24). Именно это имелось ввиду ранее, когда велась речь о некоторой предпочтительности системы (1.25) по отношению к системе (1.24).

Из нее следует, что Y_2 есть решение уравнения четвертой степени

$$(Y_2)^4 - 2X_2Y_2 - Y_2 + (X_2)^2 - X_1 = 0. \quad (1.36)$$

Согласно известной подстановке Декарта – Эйлера корни этого уравнения равны одному из следующих выражений $\pm\sqrt{Z_1} \pm \sqrt{Z_2} \pm \sqrt{Z_3}$, в которых знаки перед квадратными корнями таковы, что выполнено равенство

$$(\pm\sqrt{Z_1})(\pm\sqrt{Z_2})(\pm\sqrt{Z_3}) = 1/8,$$

а Z_j – три решения кубического уравнения

$$Z^3 - X_2Z^2 + \frac{X_1Z}{4} = \frac{1}{64} \quad (1.37)$$

Посредством сдвига $Z = \frac{X_2}{3} + V$ это уравнение переходит в нормальную форму уравнения катастрофы сборки

$$V^3 - \tau V + \nu = 0, \quad (1.38)$$

управляющие параметры которой

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{(X_2)^2}{3} - \frac{X_1}{4}, \\ \nu &= \frac{X_1X_2}{12} - \frac{2(X_2)^3}{27} - \frac{1}{64} \end{aligned}$$

таковы, что условия $(X_1)^2 + (X_2)^2 \rightarrow \infty$ и $\tau^2 + \nu^2 \rightarrow \infty$ эквивалентны.

Четыре решения уравнения (1.36) явно выражаются через решения уравнения (1.37) следующим образом:

$$\begin{aligned} Y_{2,1} &= \sqrt{Z_1} + \sqrt{Z_2} + \sqrt{Z_3}, \\ Y_{2,2} &= \sqrt{Z_1} - \sqrt{Z_2} - \sqrt{Z_3}, \\ Y_{2,3} &= -\sqrt{Z_1} + \sqrt{Z_2} - \sqrt{Z_3}, \\ Y_{2,4} &= -\sqrt{Z_1} - \sqrt{Z_2} + \sqrt{Z_3} \end{aligned}$$

Здесь при $\tau \leq 0$ и при $\tau > 0$ в области $|\nu| > \left(\frac{4\tau^3}{27}\right)^{1/2}$ V_1 есть единственный вещественный корень уравнения (1.38), а V_2 и V_3 – его комплексно сопряженные корни

$$-\frac{V_1 \pm i\sqrt{3(V_1)^2 - 4\tau}}{2}.$$

Замечание 1.3. С помощью использованного в настоящей главе метода можно описать так же типичные особенности складки (A_2) и сборки (A_3) решений системы уравнений газовой динамики (1.1) и тем самым подтвердить вывод статьи А. Х. Рахимова [98].

В самом деле, пусть теперь соотношение (1.16) выполняется за счет единственного ограничения на коэффициенты тейлоровского разложения b_{ij} решения уравнения (1.11). Пусть якобиан преобразования годографа обращается в нуль при единственном условии, например,

$$2b_{20} + b_{11} = 0, \tag{1.39}$$

при этом

$$b_{11} + 2b_{02} \neq 0,$$

следовательно, $b_{20} \neq b_{02}$. Альтернативная ситуация $2b_{20} + b_{11} \neq 0$, $b_{11} + 2b_{02} = 0$ рассматривается аналогично.

Тогда из уравнения (1.11) получаем следующие соотношения на коэффициенты b_{ij} , причем, очевидно, первое из них совпадает с первым из соотношений (1.18):

$$b_{20} = -\frac{(b_{10} - b_{01})(\alpha_1 \rho_* + 12)}{128\sqrt{\rho_*}},$$

$$b_{21} = (b_{10} - b_{01}) \frac{8\alpha_2\rho_*^2 + \rho_*^2\alpha_1^2 - 8\alpha_1\rho_* - 48}{1024\rho_*},$$

$$b_{12} = (b_{10} - b_{01}) \left(\frac{-64\alpha_2\rho_*^2 - 9\alpha_1^2\rho_*^2 + 43\alpha_1\rho_* + 240}{8192\rho_*} \right) - \left(\frac{\rho_*\alpha_1 + 12}{64\sqrt{\rho_*}} \right) b_{02}, \dots$$

Тогда в терминах отклонений инвариантов Римана разложения функций $t(u, \rho)$, $x(u, \rho)$ (получаемых из анализа критических точек «единой» функции (1.20) и определяющих в неявном виде решение системы (1.1)) в ряды Тейлора в окрестности $(r_*, l_*; t_*, x_*)$ принимают вид

$$t_* + \Delta t = b_{10} + b_{01} + \left(2b_{02} + \frac{(b_{10} - b_{01})(\alpha_1\rho_* + 12)}{64\sqrt{\rho_*}} \right) \Delta l + \sum_{i+j \geq 2} t_{ij}(\Delta r)^i(\Delta l)^j,$$

$$x_* + \Delta x = \frac{r_* + l_*}{2}(b_{10} + b_{01}) - 2\sqrt{\rho_*} - b_{00} +$$

$$+ (r_* + l_* + 4\sqrt{\rho_*}) \left[b_{02} + \frac{(\rho_*\alpha_1 + 12)}{128\sqrt{\rho_*}}(b_{10} - b_{01}) \right] \Delta l + \sum_{i+j \geq 2} x_{ij}(\Delta r)^i(\Delta l)^j,$$

где постоянные коэффициенты t_{ij} , x_{ij} однозначно определяются через ρ_* , r_* , l_* , α_i , b_{ij} и, вообще говоря, не равны нулю в ситуации «общего положения».

Заметим, что $\Delta t_{\Delta l}(r_*, l_*) \neq 0$. Следовательно, по теореме о неявной функции и в силу бесконечной дифференцируемости функции Δt , представленной в виде степенного ряда, функция Δl представима как гладкая функция аргументов Δt и Δr с разложением в ряд Тейлора

$$\Delta l = \frac{1}{t_{01}} \Delta t - \frac{t_{02}}{t_{01}^3} (\Delta t)^2 - \frac{t_{11}}{t_{01}^2} \Delta t \Delta r - \frac{t_{20}}{t_{01}} (\Delta r)^2 + \sum_{i+j \geq 3} l_{ij}(\Delta t)^i(\Delta r)^j.$$

Введем новую координату

$$y = \Delta x - \frac{x_{01}}{t_{01}} \Delta t,$$

представление которой в виде степенного ряда гладкой функции которой не содержит линейных членов:

$$y(\Delta r; \Delta l) = y_{20}(\Delta r)^2 + y_{11}\Delta r\Delta l + y_{02}(\Delta l)^2 +$$

$$+ y_{30}(\Delta r)^3 + y_{21}(\Delta r)^2\Delta l + y_{12}\Delta r(\Delta l)^2 + y_{03}(\Delta l)^3 + \sum_{i+j \geq 4} y_{ij}(\Delta r)^i(\Delta l)^j.$$

Заменяя теперь Δl , получим

$$\begin{aligned} y(\Delta r; \Delta t) = & \left[\frac{1}{t_{01}} \Delta t + \sum_{j \geq 2} Y_{1j}(\Delta t)^j \right] \Delta r + [y_{20} + \sum_{j \geq 1} Y_{2j}(\Delta t)^j] (\Delta r)^2 + \\ & + [y_{30} + \sum_{j \geq 1} Y_{3j}(\Delta t)^j] (\Delta r)^3 + \sum_{i+j \geq 4} [y_{i0} + Y_i(\Delta t)] (\Delta r)^i, \end{aligned}$$

где $Y_i(\Delta t) = \sum_{j \geq 1} Y_{ij}(\Delta t)^j$.

Рассмотрим два случая, отвечающих ситуации «общего положения»:

- 1) без наложения какого-либо второго (вдобавок к равенству (1.39)) ограничения в виде равенства на коэффициенты b_{ij} , то есть $y_{20} \neq 0$ и $y_{30} \neq 0$;
- 2) со вторым ограничением в виде равенства на коэффициенты b_{ij} , таким, что $y_{20} = 0$, но $y_{30} \neq 0$.

Рассмотрим сначала первый случай. Применение леммы Адамара и введение новой переменной с разложением

$$\Delta r = Q + q_2 Q^2 + q_3 Q^3 + \sum_{i \geq 4} q_i Q^i,$$

где коэффициенты q_i определяются однозначно

$$q_2 = -\frac{y_{30}}{2y_{20}}, \quad q_3 = -\frac{(y_{20}q_2^2 + 3y_{30}q_2 + y_{40})}{2y_{20}}, \quad \dots$$

позволяет исключить постоянные члены y_{i0} при $i \geq 3$:

$$\begin{aligned} y(Q; \Delta t) = & \left[\frac{1}{t_{01}} \Delta t + \sum_{j \geq 2} Y_{1j}(\Delta t)^j \right] Q + [y_{20} + \sum_{j \geq 1} \tilde{Y}_{2j}(\Delta t)^j] Q^2 + \\ & + \sum_{j \geq 1} \tilde{Y}_{3j}(\Delta t)^j Q^3 + \sum_{i \geq 4} \tilde{Y}_i(\Delta t) Q^i, \end{aligned} \tag{1.40}$$

где $\tilde{Y}_i(\Delta t) = \sum_{j \geq 1} \tilde{Y}_{ij}(\Delta t)^j$.

Для удобства выполним растяжение $W = \frac{y}{y_{20}}$. Из того, что $W(Q; 0) = Q^2$ заключаем [93, §13], что росток функции $W(Q; \Delta t)$ есть деформация с параметром Δt ростка монома Q^2 , обладающего R -универсальной (значит, и версальной) деформацией, являющейся ростком в нуле квадратичного двучлена

$$Q^2 + e_1,$$

и существуют два локальных диффеоморфизма

$$S(\Delta t, Q) = \sum_{j \geq 1} S_{0j}(\Delta t)^j + Q[1 + \sum_{j \geq 1} S_{1j}(\Delta t)^j] + \sum_{k \geq 2, j \geq 1} S_{kj} Q^k (\Delta t)^j : S(0, Q) = Q,$$

$$e_1(\Delta Y) = \sum_{j \geq 1} e_{1j}(\Delta t)^j : e_1(0) = 0.$$

таких, что

$$W(Q; \Delta t) = S(Q; \Delta t)^2 + e_1(\Delta t). \quad (1.41)$$

Подстановка в (1.41) и приравнивание коэффициентов при линейно независимых слагаемых однозначно определяет все коэффициенты

$$e_{11} = 0, \quad e_{12} = -S_{01}^2, \quad S_{01} = \frac{1}{2y_{20}t_{01}}, \quad S_{11} = \frac{1}{2y_{20}}\tilde{Y}_{21}, \quad \dots$$

так, что получается каноническое уравнение складки (A_2)

$$S(Q; \Delta t)^2 + P(\Delta t, \Delta x) = 0, \quad (1.42)$$

решения которого локально задают решения (1.1) в окрестности точки ГК.

Второй случай рассматривается аналогично. Если $y_{20} = 0$, то разложение $y(\Delta r; \Delta t)$ принимает вид

$$y(\Delta r; \Delta t) = [\frac{1}{t_{01}}\Delta t + \sum_{j \geq 2} Y_{1j}(\Delta t)^j]\Delta r + \sum_{j \geq 1} Y_{2j}(\Delta t)^j(\Delta r)^2 +$$

$$+ [y_{30} + \sum_{j \geq 1} Y_{3j}(\Delta t)^j](\Delta r)^3 + \sum_{i+j \geq 4} [y_{i0} + Y_i(\Delta t)](\Delta r)^i$$

и выполнение по лемме Адамара замены

$$\Delta r = y_{30}^{-1/3}Q + q_2Q^2 + q_3Q^3 + \sum_{i \geq 4} Q^i,$$

где

$$q_2 = -\frac{y_{40}}{3y_{30}^{5/3}}, \quad q_3 = -\frac{(3y_{30}^{2/3}q_2^2 + y_{40}\frac{4q_2}{y_{30}} + y_{50}y_{30}^{-5/3})}{3y_{30}^{1/3}}, \quad \dots$$

позволяет исключить только постоянные члены y_{i0} при $i \geq 4$:

$$y(Q; \Delta t) = y_{30}^{-1/3}[\frac{1}{t_{01}}\Delta t + \sum_{j \geq 2} Y_{1j}(\Delta t)^j]Q + \hat{Y}_2(\Delta t)Q^2 +$$

$$+ [1 + \hat{Y}_3(\Delta t)]Q^3 + \sum_{i \geq 4} \hat{Y}_i(\Delta t)Q^i,$$

где $\hat{Y}_i(\Delta t) = \sum_{j \geq 1} \hat{Y}_{ij}(\Delta t)^j$.

Из того, что $y(Q; 0) = Q^3$ делаем вывод [93, §13] о том, что росток функции $y(Q; \Delta t)$ есть деформация с параметром Δt ростка монома Q^3 , обладающего R -универсальной (значит, и версальной) деформацией, являющейся ростком в нуле кубического многочлена

$$Q^3 + e_1 Q + e_2$$

и существуют три локальных диффеоморфизма

$$\begin{aligned} S(\Delta t, Q) : S(0, Q) &= Q, \\ e_1(\Delta t) : e_1(0) &= 0, \\ e_2(\Delta t) : e_2(0) &= 0, \end{aligned}$$

таких, что

$$y(\Delta t, Q) = S(\Delta t, Q)^3 + e_1(\Delta t)S(\Delta t, Q) + e_2(\Delta t). \quad (1.43)$$

Подстановка

$$\begin{aligned} e_i(\Delta t) &= \sum_{j \geq 1} e_{ij}(\Delta t)^j, \quad i = 1, 2, \\ S(\Delta t, Q) &= \sum_{j \geq 1} S_{0j}(\Delta t)^j + Q[1 + \sum_{j \geq 1} S_{1j}(\Delta t)^j] + \sum_{k \geq 2, j \geq 1} S_{kj}Q^k(\Delta t)^j \end{aligned} \quad (1.44)$$

в (1.43) и приравнивание коэффициентов при линейно независимых слагаемых однозначно определяет все коэффициенты

$$\begin{aligned} e_{11} &= y_{30}^{-1/3} \frac{1}{t_{01}}, \quad S_{01} = \frac{\hat{Y}_{21}}{3}, \quad S_{11} = \frac{y_{30}^{-1/3} Y_{12} - 3S_{01}^2}{e_{11}}, \\ e_{21} &= e_{22} = 0, \quad e_{23} = -S_{01}^3 \end{aligned}$$

так, что получается каноническое уравнение сборки (A_3)

$$S(\Delta t, Q)^3 + P_1(\Delta t)S(\Delta t, Q) + P_2(\Delta t, \Delta x) = 0, \quad (1.45)$$

решения которого локально задают решения (1.1) в окрестности точки ГК.

1.2 Типичные сингулярности решений волнового уравнения

Метод анализа типичных с точки зрения теории катастроф сингулярностей, описанный ранее на примере системы уравнений газовой динамики (1.1), в этом

разделе мы применим к решениям линейного волнового уравнения

$$u_{tt} = u_{xx}. \quad (1.46)$$

Перепишем (1.46) в виде системы двух уравнений первого порядка

$$\begin{cases} u_t = v_x, \\ v_t = u_x, \end{cases} \quad (1.47)$$

которая из линеаризованной системы (1.27) возникает после применения преобразования Галилея $x \rightarrow x' = x - u_* t$ с последующим растяжением новой независимой пространственной переменной $x' = \sqrt{\alpha(\rho_*)\rho_*}x$ и переобозначения $U = u$, $V = -\sqrt{\rho_*/\alpha(\rho_*)}v$.

Преобразование годографа уравнения (1.47) переводит в систему

$$\begin{cases} t_v = x_u, \\ t_u = x_v, \end{cases} \quad (1.48)$$

из вида которой следует, что якобиан j преобразования годографа имеет вид

$$j = (t_v)^2 - (t_u)^2. \quad (1.49)$$

Аналогичные (1.10) подстановки

$$\begin{aligned} t &= B_u, \\ x &= B_v \end{aligned} \quad (1.50)$$

позволяют выразить решения системы (1.48) через общее решение

$$B = f(u + v) + g(u - v) \quad (1.51)$$

волнового уравнения

$$B_{uu} = B_{vv}. \quad (1.52)$$

В рамках применяемого метода рассматриваются лишь бесконечно дифференцируемые в окрестностях точек $(u = u_*, v = v_*)$ функции f и g , которые представляются в них разложениями Тейлора

$$\begin{aligned} f &= f_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{f_j}{j!} (\Delta u + \Delta v)^j, \\ g &= g_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{g_j}{j!} (\Delta u - \Delta v)^j. \end{aligned} \quad (1.53)$$

Здесь $\Delta u = u - u_*$, $\Delta v = v - v_*$, а f_j и g_j – постоянные.

Рассмотрим аналог функции (1.20) – функцию

$$\Psi(u, v; t, x) = ut + vx - B(u, v) \quad (1.54)$$

основных переменных u, v и управляющих параметров t, x , определяемую такими гладкими решениями (1.51) волнового уравнения (1.52). Соотношения (1.50) в точности равносильны системе двух уравнений $\Psi_u = 0$, $\Psi_v = 0$ на критические точки данной функции. В силу формул (1.49) – (1.51) обращение в нуль якобиана преобразования годографа, соответствующее вырожденности данных критических точек, в точке (u_*, v_*) , равносильно равенству

$$f_2 g_2 = 0. \quad (1.55)$$

Согласно соотношениям (1.50) и виду разложений (1.53) на t, x – плоскости точке (u_*, v_*) соответствует точка $t_* = f_1 + g_1$, $x_* = f_1 - g_1$. Тогда разложение Тейлора функции (1.54) в точке $(u_*, v_*; t_*, x_*)$ имеет вид

$$\begin{aligned} \Psi = & (f_1 + g_1)u_* + (f_1 - g_1)v_* - (f_0 + g_0) + u_*\Delta t + v_*\Delta x + \\ & \frac{(\Delta t + \Delta x)}{2}\tilde{u} + \frac{(\Delta t - \Delta x)}{2}\tilde{v} - \sum_{i=2}^{\infty} \frac{f_i}{i!}(\tilde{u})^i - \sum_{j=2}^{\infty} \frac{g_j}{j!}(\tilde{v})^j, \end{aligned}$$

где $\tilde{u} = (\Delta u + \Delta v)$, $\tilde{v} = (\Delta u - \Delta v)$. Критические точки данной функции находятся из уравнений

$$\begin{aligned} \Psi_{\tilde{u}} &\equiv \frac{(\Delta t + \Delta x)}{2} + h_1(u) = 0, \\ \Psi_{\tilde{v}} &\equiv \frac{(\Delta t - \Delta x)}{2} + h_2(v) = 0, \end{aligned} \quad (1.56)$$

определяемых гладкими при малых значениях переменных \tilde{u} и \tilde{v} функциями $h_1(\tilde{u})$ и, соответственно, $h_2(\tilde{v})$, которые представляются разложениями в ряды Тейлора

$$\begin{aligned} h_1(\tilde{u}) &= -f_2\tilde{u} - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{f_{i+1}}{i!}(\tilde{u})^i \quad (\tilde{u} \rightarrow 0), \\ h_2(\tilde{v}) &= -g_2\tilde{v} - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{g_{i+1}}{i!}(\tilde{v})^i \quad (\tilde{v} \rightarrow 0). \end{aligned}$$

Допустим сначала, что вырождение при $\tilde{u} = 0$, $\tilde{v} = 0$ критических точек функции Ψ , соответствующее равенству (1.55), происходит в случае $f_2 = 0$, $g_2 \neq 0$ (симметричная ситуация $g_2 = 0$, $f_2 \neq 0$ рассматривается совершенно аналогично). При этом, если коэффициент f_3 отличен от нуля, то для достаточно малых \tilde{u} и \tilde{v} существует [92, Глава 4, §3, Теорема 4.4] диффеоморфная замена координат

$$\begin{aligned} y_1 &= y_1(\tilde{u}), \\ y_2 &= y_2(\tilde{v}), \end{aligned} \tag{1.57}$$

которая функции $h_1(\tilde{u})$ и $h_2(\tilde{v})$ приводят к виду

$$\begin{cases} h_1(\tilde{u}) = -\frac{f_3(y_1)^2}{2}, \\ h_2(\tilde{v}) = -g_2 y_2. \end{cases} \tag{1.58}$$

Тогда из (1.56), (1.58) и замены $y_1 = -6^{1/3} f_3^{-1/3} u_1$ следует локальное представление функции (1.54) в виде канонической нормальной формы особенности складки A_2

$$\Psi = u_1^3 - k_2 u_1 - k_1, \tag{1.59}$$

где $k_2 = 6^{1/3} f_3^{-1/3} \frac{(\Delta t + \Delta x)}{2}$, $k_1 = -[-\frac{1}{2} g_2 y_2^2 + y_2 \frac{(\Delta t - \Delta x)}{2} + \psi_0]$, ψ_0 – произвольная постоянная интегрирования.

Поскольку у функции (1.54) имеются два управляющих параметра, то ситуации «общего положения» помимо равенства $f_2 = 0$ отвечает также рассмотрение подслучая, когда в разложении Тейлора $f_3 = 0$, $f_4 \neq 0$. В этом подслучае согласно [92, Глава 4, §3, Теорема 4.4] в малой окрестности точки $(\tilde{u} = 0, \tilde{v} = 0)$ существует такая локально диффеоморфная замена (1.57), что

$$\begin{cases} h_1(\tilde{u}) = -\frac{f_4(y_1)^3}{6}, \\ h_2(\tilde{v}) = -g_2 y_2. \end{cases} \tag{1.60}$$

Тогда из (1.56), (1.58) и замены $y_1 = 24^{1/4} u_1$ следует локальное представление функции (1.54) в виде канонической нормальной формы особенности *сечения* сборки A_3

$$\Psi = -f_4 u_1^4 + k_2 u_1 + k_1, \tag{1.61}$$

где $k_2 = \frac{24^{1/4}(\Delta t + \Delta x)}{2}$, $k_1 = \frac{(\Delta t - \Delta x)}{2} y_2 - \frac{1}{2} g_2 y_2^2 + \psi_0$, ψ_0 – произвольная постоянная интегрирования. Отметим отсутствие в (1.61) квадратичного слагаемого. По этой причине выше было сказано именно о *сечении* особенности A_3 .

Опять же из-за наличия двух управляющих параметров ситуации «общего положения» отвечает и двойное равенство $f_2 = g_2 = 0$ вкуже с неравенствами $f_3 \neq 0$, $g_3 \neq 0$. В такой ситуации в силу все той же Теоремы 4.4 из [92, Глава 4, §3] имеется такая локально диффеоморфная замена (1.57), что в переменных y_1 и y_2

$$\begin{cases} h_1(\tilde{u}) = -\frac{f_3(y_1)^2}{2}, \\ h_2(\tilde{v}) = -\frac{g_3(y_2)^2}{2}. \end{cases} \quad (1.62)$$

Тогда из (1.56), (1.58) и замен $y_1 = 2^{1/3}f_3^{-1/3}u_1$, $y_2 = 2^{1/3}g_3^{-1/3}u_2$ следует локальное представление функции (1.54) в виде канонической нормальной формы особенности *сечения* гиперболической омбилики D_4^+

$$\Psi = \frac{u_1^3 + u_2^3}{3} - k_2 u_1 - k_1 u_2 + k_0, \quad (1.63)$$

где $k_2 = -\frac{(\Delta t + \Delta x)}{2} 2^{1/3} f_3^{-1/3}$, $k_1 = -\frac{(\Delta t - \Delta x)}{2} 2^{1/3} g_3^{-1/3}$, k_0 – постоянная интегрирования. В силу отсутствия в (1.63) говорится именно о *сечении* омбилической особенности.

Таким образом, у системы (1.47) имеется ровно три сингулярности, типичных в том же смысле, что и ровно три сингулярности решений системы уравнений течения одномерного изоэнтропического газа (1.1). После локально диффеоморфных переходов от функций $h_1(\tilde{u})$ и $h_2(\tilde{u})$ к правым частям равенств (1.58) – (1.62) система (1.56) принимает одну из трех форм, лишь первая из которых эквивалентна одной из трех систем (1.22) – (1.24) ((1.25)) – системе (1.22). Две оставшиеся из этих форм эквивалентны лишь укороченным версиям систем (1.23) и (1.24) ((1.25)). Тем не менее, изложенные в данном разделе результаты анализа типичных особенностей решений волнового уравнения, дают основания говорить о том, что именно они наследуются тремя типичными особенностями решений нелинейной системы (1.1) – генотипы [93, §14, стр. 105] катастроф функций (1.54) имеют, соответственно, следующий вид:

при $g_2 \neq 0$, $f_2 = 0$, $f_3 \neq 0$

$$-f_3 \frac{(\tilde{u})^3}{6};$$

при $g_2 \neq 0$, $f_2 = f_3 = 0$, $f_4 \neq 0$

$$-f_4 \frac{(\tilde{u})^4}{4!};$$

при $f_2 = g_2 = 0$, $f_3 \neq 0$, $g_3 \neq 0$

$$-f_3 \frac{(\tilde{u})^3}{6} - g_3 \frac{(\tilde{v})^3}{6}.$$

Простыми растяжениями эти генотипы сводятся к генотипам катастроф функций (1.20), которым соответствуют все три универсальные особенности решений системы (1.1). Тем самым происходит *наследование* генотипов особенностей. Как будет показано в следующем пункте настоящей главы, в случае газа Чаплыгина совпадает не только генотип, но и вся нормальная форма особенности A_3 , а в случае газа Бехерта-Станюковича полностью наследуется нормальная форма особенности D_4^+ .

Замечание 1.4. Несколько особняком среди исследований типичных в смысле математической теории катастроф сингулярностей решений квазилинейных уравнений стоят результаты статей [73] и [76] касательно провальной ($\rho_* = 0$) особенности сборки, характерной для решений эллиптического и, соответственно, гиперболического вариантов системы (1.1). Данные особенности, соответствующие малым значениям ρ , из решений линейных систем уравнений не наследуются. Довольно естественно предположить, что подобные и более сложные провальные сингулярности должны быть типичны для решений уравнений движения изоэнтропического газа (а также их эллиптических аналогов) и в пространственно неоднмерных случаях.

1.3 Случаи газов Чаплыгина и Бехерта-Станюковича

Рассмотрим два частных случая давления: случай Чаплыгина

$$p = p_0 - \frac{m^2}{\rho} \tag{1.64}$$

и случай Бехерта-Станюковича

$$p = \frac{a^2}{3} \rho^3, \tag{1.65}$$

где $m > 0$ – постоянная положительная масса газа, $a > 0$ и $p_0 > 0$ – некоторые положительные постоянные. Оба случая служат для аппроксимаций течения изоэнтропического газа, описываемого системой (1.1).

Покажем, что лишь эти два газа нарушают условие (1.6), еще более сильное, чем условие сильной нелинейности (1.7):

$$\left(\frac{r+l}{2} + c\right)_r \left(\frac{r+l}{2} + c\right)_l \left(\frac{r+l}{2} - c\right)_r \left(\frac{r+l}{2} - c\right)_l = \left(\frac{1}{4} - c_r^2\right) \left(\frac{1}{4} - c_l^2\right) = 0.$$

Из вида инвариантов Римана (1.4) следует, что

$$\frac{\partial}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial l},$$

а так, как скорость звука $c(\rho)$ не зависит от скорости течения u , то $c_u \equiv 0$, то есть для всякого газа справедливо тождество

$$c_r \equiv -c_l. \quad (1.66)$$

Из тождества $(c_r)^2 \equiv (c_l)^2$ и того, что $c_r = \pm \frac{1}{2}$, следует, что $c = \pm \frac{r}{2} + k(l)$, где $k(l)$ – подлежащая определению бесконечно дифференцируемая в окрестности l_* функция. Так как $c_l = -c_r$, то $k = \mp \frac{l}{2} + c_0$, то есть

$$c = \frac{\pm r \mp l}{2} + c_0.$$

С точностью до аддитивной постоянной c_0 (которую можно принять нулевой, поскольку в терминах плотности функция скорости звука $c(\rho)$ не зависит от аддитивных постоянных) последовательный выбор знаков «плюс» и «минус» дает скорость звука для газа Бехерта-Станюковича, а последовательный выбор знаков «минус» и «плюс» дает скорость звука для газа Чаплыгина. В самом деле, из (1.4) следует, что

$$\frac{\partial}{\partial \rho} = \frac{c(\rho)}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial l} \right) = \sqrt{\frac{\alpha(\rho)}{\rho}} \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial l} \right),$$

откуда, в силу того, что $c(\rho) = \sqrt{\rho \alpha(\rho)}$ и ранее полученного тождества (1.66),

$$\frac{\rho \alpha'(\rho)}{\rho} + 1 = \pm 2.$$

Решая полученное обыкновенное дифференциальное уравнение со знаком «плюс», получаем $\alpha = c_1 \rho$, то есть в силу равенства $\alpha(\rho) = \rho^{-1} p'(\rho)$, получаем

давление газа Бехерта-Станюковича $p = \frac{c_1 \rho^3}{3} + c_0$, если принять $c_1 = a^2$. Выбор знака «минус» дает $\alpha = c_1 \rho$, то есть давление газа Чаплыгина $p = p_0 - \frac{c_1}{\rho}$, если принять $c_1 = m^2$.

В газовой динамике особо рассматривается давление политропного газа вида $p = \frac{a^2}{n} \rho^n$. Ему соответствует скорость звука

$$c = \sqrt{p_\rho} = a \rho^{\frac{n-1}{2}}$$

и соотношение на инварианты Римана (1.4)

$$\frac{r-l}{2} = \int_0^\rho \frac{c(h)}{h} dh = \frac{2a}{n-1} \rho^{\frac{n-1}{2}},$$

откуда следует представление скорости звука в виде

$$c = \frac{(n-1)(r-l)}{4}.$$

Тогда из (1.6) следует, что $n = 3$ (случай Бехерта-Станюковича) при соблюдении условий $c_r = 1/2$, $c_l = -1/2$ и $n = -1$ (случай Чаплыгина) при соблюдении условий $c_r = -1/2$ и $c_l = 1/2$. Случай Чаплыгина (и только он) также возникает из нарушения условия сильной нелинейности (1.7).

Кроме того, газ Чаплыгина возникает [74] как газ, не являющийся газом «общего положения» в силу нарушения наложенного в **Пункте 1.1** условия

$$\alpha'(\rho_*) + \frac{3\alpha(\rho_*)}{\rho_*} \neq 0$$

Поскольку ρ_* зависит от t_* , x_* разумно рассматривать ρ_* как переменную и искать решение ОДУ $\rho \alpha'(\rho) = -3\alpha(\rho)$. В силу равенства $\alpha(\rho) = p_\rho \rho^{-1}$ его решение $\alpha(\rho) = c_1 \rho^{-3}$ дает давление $p = p_0 - c_1 \rho^{-1}$, отвечающее случаю газа Чаплыгина при выборе $c_1 = m^2 > 0$.

1.3.1 Случай Чаплыгина. Особенность сечения сборки A_3

С. А. Чаплыгин ввел давление вида $p = p_0 - \frac{m^2}{\rho}$ как аппроксимирующее давление реальных газов. Хотя оно не соответствует реальным газам, отвечающая такому давлению система (1.1) интегрируется с помощью преобразования годографа. Случай Бехерта-Станюковича $p = \frac{a^2}{3} \rho^3$ тоже может использоваться для

аппроксимации и, согласно комментарию К. П. Станюковича, в определенном физическом и математическом смысле лучше [130, Глава IV, §13, стр. 129-130], чем приближение, описываемое газом Чаплыгина.

В работе [74] ограничение $\alpha'(\rho_*) + \frac{3\alpha(\rho_*)}{\rho_*} \neq 0$ возникло как условие неравенства нулю в точке $(u_*, \rho_*; t_*, x_*)$ второй производной по u решения $B(r, l)$ уравнения (1.11). Нарушение этого условия является дополнительным ограничением в виде равенства на коэффициенты b_{ij} , помимо тех, что следуют из обращения в нуль якобиана $j(u_*, \rho_*; t_*, x_*)$ в ситуации «общего положения». В самом деле, в ситуации «общего положения» из уравнения (1.11) следует, что

$$b_{20} = -\frac{(b_{10} - b_{01})(\alpha_1\rho_* + 3\alpha_*)}{16\rho_*\alpha_*\sqrt{\frac{\alpha_*}{\rho_*}}} \neq 0$$

и считается, что $b_{10} \neq b_{01}$. Тогда в случае Чаплыгина $b_{20} = 0$. Это не газ «общего положения».

Сумма $\alpha_1\rho_* + 3\alpha_*$ входит как множитель в управляющий параметр особенности типа сборки (A_3) решений (1.1) и исследованной в работе [74]:

$$\delta(Y, Z) + \sigma(Z)R_0 + kR_0^3 = 0, \quad \delta(Y, Z) = Y + \sum_{j \geq 2} \delta_{0j}Z^j + \sum_{j \geq 1} \delta_{1j}YZ^j,$$

$$\sigma(Z) = -\frac{\sqrt{\rho_*}}{64}\left(\frac{\alpha_1\rho_* + 3\alpha_*}{\rho_*}\right)Z + \sum_{j \geq 2} \sigma_j Z^j.$$

Отсюда можно – ошибочно – сделать вывод, что тогда в случае Чаплыгина линейный член разложения $\sigma(Z)$ обращается в нуль, и тогда по лемме Адамара, уравнение сборки сводится к более простому уравнению

$$\tilde{\delta}(Y, \tilde{Z}) + \frac{\sigma_2}{k}\tilde{Z}^2R_0 + R_0^3 = 0,$$

решения которого зависят от знака $\frac{\sigma_2}{k}$ и отвечают «точечной сборке» (или «полу-сборке»). Ниже мы покажем, что этот вывод неверен, и на самом деле в случае Чаплыгина в уравнении типичной особенности сборки управляющий параметр $\sigma(Z) \equiv 0$. По этой причине в дальнейшем будем говорить об уравнении особенности типа *сечения* сборки или просто об уравнении особенности типа A_3 .

Неточность в интерпретации результатов работы [74] возникает из-за того, что для анализа особенностей решений следует использовать полное разложение

$\Delta\rho$ по натуральным степеням инвариантов Римана, а не ограничиваться только линейными членами, как было сделано в [74].

Давление $p = p_0 - \frac{m^2}{\rho}$ соответствует системе

$$\begin{cases} u_t + uu_x + \frac{m^2}{\rho^3}\rho_x = 0, \\ \rho_t + (\rho u)_x = 0. \end{cases} \quad (1.67)$$

Перейдя к инвариантам Римана

$$\begin{aligned} r &= u - \frac{m}{\rho}, \\ l &= u + \frac{m}{\rho}, \end{aligned} \quad (1.68)$$

перепишем (1.67) в виде

$$\begin{cases} r_t + lr_x = 0, \\ l_t + rl_x = 0. \end{cases} \quad (1.69)$$

Производные преобразования годографа

$$\begin{aligned} u_x &= Jt_\rho, & u_t &= -Jx_\rho, \\ \rho_x &= -Jt_u, & \rho_t &= Jx_u, \\ J &= u_x\rho_t - u_t\rho_x, & j &= x_ut_\rho - x_\rho t_u, & J &= j^{-1}. \end{aligned} \quad (1.70)$$

с якобианом

$$j = \frac{m^2}{\rho^3}t_u^2 - \rho t_\rho^2$$

сводят (1.69) к линейной системе

$$\begin{cases} x_\rho = ut_\rho - \frac{m^2}{\rho^3}t_u, \\ x_u = ut_u - \rho t_\rho, \end{cases}$$

а замены (1.10) дают единственное линейное гиперболическое (при $\rho > 0$) уравнение второго порядка

$$\frac{m^2}{\rho^3}B_{uu} = \rho B_{\rho\rho} + 2B_\rho$$

с общим решением

$$B = F_1\left(\frac{m}{\rho} + u\right) + F_2\left(\frac{m}{\rho} - u\right), \quad (1.71)$$

инвариантным относительно отражений $u \rightarrow -u$, $\rho \rightarrow -\rho$.

Из формул (1.8) на производные преобразования годографа с якобианом

$$j = t_l t_r (r - l) \quad (1.72)$$

следует, что (1.69) сводится к линейной системе

$$\begin{cases} lt_l = x_l, \\ rt_r = x_r, \end{cases}$$

а замены (1.10) дают линейное волновое уравнение с постоянными коэффициентами в его второй канонической форме

$$B_{rl} = 0, \quad (1.73)$$

с общим решением

$$B = f(r) + g(l), \quad (1.74)$$

совпадающим с (1.71). Считаем произвольные функции $f(r)$ и $g(l)$ бесконечно дифференцируемыми в окрестности точек $r = r_*$ и $l = l_*$ и разложение решения (1.74) имеет вид

$$B = \sum_{i \geq 0} \frac{f_i}{i!} (\Delta r)^i + \sum_{j \geq 0} \frac{g_j}{j!} (\Delta l)^j, \quad (1.75)$$

где $f_i = \frac{d^i f}{dr^i} |_{r=r_*}$, $g_j = \frac{d^j g}{dl^j} |_{l=l_*}$.

Теперь соотношения (1.10) записываются в виде

$$\begin{aligned} t &= f_r + g_l, \\ x &= r f_r + l g_l - f - g, \end{aligned} \quad (1.76)$$

откуда следуют равенства

$$\begin{aligned} t_* &= f_1 + g_1, \\ x_* &= r_* f_1 + l_* g_1 - f_0 - g_0. \end{aligned} \quad (1.77)$$

Обнуление якобиана (1.72) в точке ГК $(t_*, x_*; r_*, l_*)$ означает, что

$$j(r_*, l_*) = f_2 g_2 (r_* - l_*) = 0$$

и, поскольку $r_* \neq l_*$, можно без ограничения общности считать, что $g_2 = 0$, а $f_2 \neq 0$ (альтернатива рассматривается аналогично). Считаем, что $r_* \neq 0$.

Случай $r_* = 0$ будет прокомментирован в **Замечании 1.6** в конце данного пункта.

Учитывая соотношения (1.77), получаемые из (1.76) запишем теперь разложения функций $t(r, l)$ и $x(r, l)$:

$$\begin{aligned}\Delta t &= f_2 \Delta r + g_2 \Delta l + \sum_{i \geq 2} \frac{f_{i+1}}{i!} (\Delta r)^i + \sum_{j \geq 2} \frac{g_{j+1}}{j!} (\Delta l)^j, \\ \Delta x &= r_* f_2 \Delta r + l_* g_2 \Delta l + \\ &+ \sum_{i \geq 2} \left(\frac{r_* f_{i+1} + (i-1) f_i}{i!} \right) (\Delta r)^i + \sum_{j \geq 2} \left(\frac{l_* g_{j+1} + (j-1) g_j}{j!} \right) (\Delta l)^j.\end{aligned}\tag{1.78}$$

Удобно перейти к новым переменным

$$\begin{aligned}\Delta Y &= \Delta x + r_* \Delta t \\ \Delta Z &= \Delta x - r_* \Delta t\end{aligned}\tag{1.79}$$

подобно тому, как это было сделано в работе [74]. Заметим, что если левые части равны, то новые переменные определяют перпендикулярные прямые на плоскости (t, x) , и вторая из них – характеристическая.

Согласно идеологии теории катастроф (например, [80]), можем теперь наложить еще только одно ограничение в виде равенства на коэффициенты рядов Тейлора $f(r)$ и $g(l)$, ибо изначально было лишь две независимые переменные t и x функций $u(t, x)$ и $\rho(t, x)$. Воспользуемся этой возможностью впоследствии, выбрав, что $g_3 = 0$. В последующих нумерованных формулах (1.80) и (1.81) пока принято $g_3 \neq 0$.

Запишем теперь разложения Y и Z :

$$\begin{aligned}\Delta Y &= 2r_* f_2 \Delta r + \\ &+ (r_* f_3 + \frac{f_2}{2}) (\Delta r)^2 + \frac{(r_* + l_*) g_3}{2} (\Delta l)^2 + \\ &+ \sum_{i \geq 3} y_{ri} (\Delta r)^i + \sum_{j \geq 3} y_{lj} (\Delta l)^j, \\ \Delta Z &= \frac{f_2}{2} (\Delta r)^2 + \frac{(l_* - r_*) g_3}{2} (\Delta l)^2 + \sum_{i \geq 3} z_{ri} (\Delta r)^i + \sum_{j \geq 3} z_{lj} (\Delta l)^j.\end{aligned}\tag{1.80}$$

Так как $(\Delta Y)_{\Delta r}(r_*, l_*) = 2r_* f_2 \neq 0$, по теореме о неявной функции выразим теперь Δr как бесконечно дифференцируемую функцию переменных ΔY и Δl

из первого уравнения (1.80) с рядом Тейлора:

$$\begin{aligned}\Delta r = & \frac{1}{2r_*f_2}\Delta Y - \frac{(r_*f_3 + \frac{f_2}{2})}{8r_*^3f_2^3}(\Delta Y)^2 - \frac{(r_* + l_*)g_3}{4r_*f_2}(\Delta l)^2 + \\ & + \frac{3(r_*f_3 + \frac{f_2}{2})^2 - r_*f_2(r_*f_4 + f_3)}{48r_*^5f_2^5}(\Delta Y)^3 - \\ & - \frac{(r_* + l_*)g_4}{12r_*f_2}(\Delta l)^3 + \sum_{i \geq 4} r_{yi}(\Delta Y)^i + \sum_{j \geq 4} r_{lj}(\Delta l)^j.\end{aligned}\quad (1.81)$$

Отметим отсутствие в (1.81) смешанных слагаемых, что естественно, ведь их не было и не могло быть в (1.80), поскольку их нет в самом решении волнового уравнения (1.73).

Примем теперь в (1.80) и (1.81) $g_3 = 0$, исчерпав этим обе возможности наложения ограничений в виде равенств на коэффициенты тейлоровского разложения решения (1.74) волнового уравнения (1.73). Подставляя (1.81) во второе уравнение (1.80), получаем разложение в ряд Тейлора

$$\begin{aligned}\Delta Z = & (\Delta l)^3 \left[\frac{(l_* - r_*)g_4}{6} - \frac{(r_* + l_*)g_4}{24r_*^2f_2}\Delta Y + l_{32}(\Delta Y)^2 + \sum_{m \geq 3} l_{3m}(\Delta Y)^m \right] + \\ & + (\Delta l)^4 \left[\frac{(l_* - r_*)g_5}{24} + \frac{g_4}{8} + l_{41}\Delta Y + \sum_{m \geq 2} l_{4m}(\Delta Y)^m \right] + \\ & + \sum_{j \geq 5} (\Delta l)^j \sum_{m \geq 0} l_{jm}(\Delta Y)^m\end{aligned}\quad (1.82)$$

без линейного слагаемого, так как его изначально не было во втором уравнении (1.80), ибо условие $g_2 = 0$ исключает член с Δl , а знак минус в $\Delta Z = x - r_*t$ исключает член с Δr .

Представим теперь (1.82) в виде

$$\Delta Z = (\Delta l)^3 Z_1(\Delta l; \Delta Y),$$

где гладкая в окрестности $\Delta Y = 0$, $l = l_*$ функция $Z_1(\Delta l; \Delta Y)$ представляется

рядом Тейлора

$$\begin{aligned}
Z_1 = & \frac{(l_* - r_*)g_4}{6} - \frac{(r_* + l_*)g_4}{24r_*^2 f_2} \Delta Y + \sum_{m \geq 2} l_{3m} (\Delta Y)^m + \\
& + \Delta l \left[\frac{(l_* - r_*)g_5}{24} + \frac{g_4}{8} + l_{41} \Delta Y + \sum_{m \geq 2} l_{4m} (\Delta Y)^m \right] + \\
& + \sum_{j \geq 5} (\Delta l)^{j-3} \sum_{m \geq 0} l_{jm} (\Delta Y)^m.
\end{aligned}$$

Выполним замену

$$S = \Delta l Z_1^{1/3}, \quad (1.83)$$

обратимую и дифференцируемую в окрестности $\Delta Y = 0$, $l = l_*$ в силу выполнения условия теоремы о неявной функции $S_{\Delta l}(0, 0) \neq 0$. Тогда (1.82) локально представляется в виде *сечения* канонического уравнения сборки (A_3)

$$\Delta Z = S^3, \quad (1.84)$$

решения которого локально задают решения (1.69) в окрестности точки градиентной катастрофы. Таким образом, в случае Чаплыгина, в отличие от рассматриваемых в первом подпункте настоящей работы, происходит полное наследование нормальной формы особенности A_3 , а не только ее генотип.

Замечание 1.5. Применение леммы Адамара позволяет построить гладкую обратимую в окрестности $\Delta Y = 0$, $l = l_*$ замену с разложением в ряд Тейлора $\Delta l = (l_{30})^{-1/3} Q + \sum_{i \geq 2} q_i Q^i$, коэффициенты которого однозначно определяются через r_* , l_* , g_i , l_{jm} так, чтобы исключить в (1.82) лишь постоянные слагаемые в коэффициентах при $(\Delta l)^j$, $j \geq 4$. Тогда $\Delta Z(0, Q) = Q^3$. Откуда следует вывод [93, §13] о том, что росток функции $\Delta Z(\Delta Y, Q)$ есть деформация с параметром ΔY ростка монома Q^3 , обладающего R -универсальной (значит, и версальной) деформацией, являющейся ростком в нуле кубического многочлена

$$Q^3 + e_1 Q + e_2$$

и существуют три локальных диффеоморфизма

$$\begin{aligned}
S(\Delta Y, Q) : S(0, Q) &= Q, \\
e_1(\Delta Y) : e_1(0) &= 0, \\
e_2(\Delta Y) : e_2(0) &= 0,
\end{aligned}$$

таких, что

$$\Delta Z(\Delta Y, Q) = S(\Delta Y, Q)^3 + e_1(\Delta Y)S(\Delta Y, Q) + e_2(\Delta Y). \quad (1.85)$$

Подстановка рядов Тейлора

$$\begin{aligned} e_i(\Delta Y) &= \sum_{j \geq 1} e_{ij}(\Delta Y)^j, \quad i = 1, 2, \\ S(\Delta Y, Q) &= \sum_{j \geq 1} S_{0j}(\Delta Y)^j + Q[1 + \sum_{j \geq 1} S_{1j}(\Delta Y)^j] + \sum_{k \geq 2, j \geq 1} S_{kj}Q^k(\Delta Y)^j \end{aligned} \quad (1.86)$$

в (1.85) и приравнивание коэффициентов при линейно независимых слагаемых однозначно определяет все коэффициенты этих рядов:

$$e_{1j} = 0, \quad e_{2j} = 0, \quad S_{01} = 0, \quad S_{11} = -\frac{(r_* + l_*)g_4}{72r_*^2 f_2}, \quad \dots$$

Вообще говоря, обращение в нуль всех коэффициентов e_{ij} не означает тождественного равенства нулю функций e_i . Однако в данном случае это действительно так в силу приведенного перед данным замечанием рассуждения.

Результат согласуется с уже известными. Как было доказано в [108, Глава 1, §10, пункт 2] решения (и их первые производные) слабо-нелинейных систем (к которым относится и система уравнений газовой динамики в случае Чаплыгина) остаются ограниченными, если в начальный момент были ограничены функции, задающие начальные условия и их первые производные.

Замечание 1.6. Выше считалось, что $r_* \neq 0$. Пусть теперь $r_* = 0$ или, что равносильно в силу инвариантов Римана, $u_* = \frac{m}{\rho_*}$. В ситуации «общего положения» это первое из дополнительных допустимых двух ограничений в виде равенств, не следующих из того, что образ преобразования годографа сводится к волновому уравнению (1.73).

В таком случае условие обращения в нуль якобиана (1.72) преобразования годографа в точке градиентной катастрофы $(t_*, x_*; r_*, l_*)$ принимает вид

$$j(r_*, l_*) = -l_* f_2 g_2 = 0.$$

Это равенство выполняется в одном (и только в одном – ведь уже наложено одно из двух допустимых ограничений) из двух случаев.

Случай 1. $l_* = 0$ и $f_2 \neq 0, g_2 \neq 0$;

Случай 2. $f_2 = 0$ (либо $g_2 = 0$ – случаи рассматриваются одинаково) и $l_* \neq 0$.
Наложив одно ограничение $r_* = 0$, нельзя не наложить второе.

Случай 1. Если $r_* = l_* = 0$, то $u_* = \frac{m}{\rho_*} = -\frac{m}{\rho_*}$, то есть $m = -m$. Значит, $m = 0$. Это противоречит изначальной постановке задачи, поскольку $m > 0$, следовательно, данный случай, дающий систему

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0, \\ \rho_t + (\rho u)_x = 0, \end{cases}$$

не реализуется. Тем не менее, мы исследуем получаемую систему на предмет особенностей решений в пункте **2.3** как из этих, так и из других соображений.

Случай 2. В таком случае справедливы разложения в ряды Тейлора

$$\Delta t = g_2 \Delta l + \sum_{i \geq 2} \frac{f_{i+1}}{i!} (\Delta r)^i + \sum_{j \geq 2} \frac{g_{j+1}}{j!} (\Delta l)^j,$$

$$\begin{aligned} \Delta x &= l_* g_2 \Delta l + \frac{l_* g_3 + g_2}{2} (\Delta l)^2 + \\ &+ \sum_{i \geq 3} \frac{(i-1)f_i}{i!} (\Delta r)^i + \sum_{j \geq 3} \left(\frac{l_* g_{j+1} + (j-1)g_j}{j!} \right) (\Delta l)^j \end{aligned}$$

и вместо переменных (1.79) следует перейти к переменным

$$\Delta Y = \Delta x + l_* \Delta t,$$

$$\Delta Z = \Delta x - l_* \Delta t$$

Тогда в разложении ΔZ исключается линейное слагаемое, а в разложении ΔY , напротив, присутствует:

$$\begin{aligned} \Delta Y &= 2l_* g_2 \Delta l + \\ &+ l_* \frac{f_3}{2} (\Delta r)^2 + \frac{2l_* g_3 + g_2}{2} (\Delta l)^2 + \\ &+ \left[\frac{f_3}{3} + l_* \frac{f_4}{6} \right] (\Delta r)^3 + \left(\frac{2l_* g_4}{6} + \frac{g_3}{3} \right) (\Delta l)^3 + \\ &+ \sum_{i \geq 4} \frac{(i-1)f_i + l_* f_{i+1}}{i!} (\Delta r)^i + \sum_{j \geq 4} \frac{2l_* g_{j+1} + (j-1)g_j}{j!} (\Delta l)^j, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta Z = & -l_* \frac{f_3}{2} (\Delta r)^2 + \frac{g_2}{2} (\Delta l)^2 + \\ & + \left(\frac{f_3}{3} - l_* \frac{f_4}{6} \right) (\Delta r)^3 + \frac{g_3}{3} (\Delta l)^3 + \\ & + \sum_{i \geq 4} \left(\frac{(i-1)f_i - l_* f_{i+1}}{i!} \right) (\Delta r)^i + \sum_{j \geq 4} \left(\frac{(j-1)g_j}{j!} \right) (\Delta l)^j.\end{aligned}$$

Эта ситуация принципиально не отличается от изученной в этом пункте ранее. Дальнейшие выкладки по существу аналогичны уже проделанным и позволяют снова описать особенность типа A_3 .

1.3.2 Случай Чаплыгина. Особенность складки A_2

В этом подпункте ограничимся единственным ограничением в виде равенств на коэффициенты тейлоровского разложения решения (1.74) волнового уравнения (1.73): пусть по-прежнему $g_2 = 0$, но теперь $g_3 \neq 0$.

В таком случае подстановка (1.81) во второе уравнение (1.80) дает

$$\begin{aligned}\Delta Z = & (\Delta l)^2 \left[\frac{(l_* - r_*)g_3}{2} - \frac{(r_* + l_*)g_3}{8r_*^2 f_2} \Delta Y + \sum_{m \geq 2} l_{2m} (\Delta Y)^m \right] + \\ & + (\Delta l)^3 \left[\frac{(l_* - r_*)g_4}{6} + \frac{g_3}{3} - \frac{(r_* + l_*)g_4}{24r_*^2 f_2} \Delta Y + \sum_{m \geq 2} l_{3m} (\Delta Y)^m \right] + \\ & + (\Delta l)^4 \left[\frac{(l_* - r_*)g_5}{24} + \frac{g_4}{8} + \frac{(r_* + l_*)^2 g_3^2}{32r_*^2 f_2} + \sum_{m \geq 1} l_{4m} (\Delta Y)^m \right] + \\ & + \sum_{j \geq 5} (\Delta l)^j \sum_{m \geq 0} l_{jm} (\Delta Y)^m.\end{aligned}\tag{1.87}$$

Для удобства выполним растяжение $W = \Delta Z \left(\frac{(l_* - r_*)g_3}{2} \right)^{-1}$ и представим тейлоровское разложение функции $W(\Delta Y; \Delta l)$ в виде

$$W = \Delta l^2 W_1(\Delta Y; \Delta l),\tag{1.88}$$

где гладкая в окрестности $\Delta Y = 0$, $l = l_*$ функция $W_1(\Delta Y; \Delta l)$ имеет разложение в ряд Тейлора

$$W_1 = 1 + \sum_{m \geq 1} w_{2m} (\Delta Y)^m + \Delta l \sum_{m \geq 1} w_{3m} (\Delta Y)^m + \sum_{j \geq 4} (\Delta l)^{j-2} \sum_{m \geq 0} l_{jm} (\Delta Y)^m.$$

Выполним замену

$$S = \Delta l \sqrt{W_1}, \quad (1.89)$$

обратимую и дифференцируемую в окрестности $\Delta Y = 0$, $l = l_*$ в силу выполнения условия теоремы о неявной функции $S_{\Delta l}(0, 0) = 1 \neq 0$. Тогда (1.88) локально представляется в виде канонического уравнения складки (A_2)

$$W = S^2. \quad (1.90)$$

Теорема 1.2. Рассмотрим такое бесконечно дифференцируемое в окрестности точки (r_*, l_*) решение $B(r, l)$ волнового уравнения (1.73), что коэффициенты его тейлоровского разложения (1.75) в окрестности точки (r_*, l_*) удовлетворяют равенствам (1.77). Рассмотрим решения системы (1.67), которые в некоторой малой окрестности точек t_* , x_* , $u_* = u(t_*, x_*)$, $\rho_* = \rho(t_*, x_*)$ определяются через инварианты Римана (1.68), равенства $r_* = r(u_*, \rho_*)$, $l = l_*(u_*, \rho_*)$ и функцию $B(r, l)$. Пусть выполнен переход к новым переменным (1.79). Тогда:

1) при $g_2 = g_3 = 0$ гладкая обратимая в окрестности $\Delta Y = 0$, $l = l_*$ замена (1.83) позволяет локально задать решения (1.67) в терминах корней уравнения особенности сечения сборки (1.84);

2) при $g_2 = 0$, $g_3 \neq 0$ гладкая обратимая в окрестности $\Delta Y = 0$, $l = l_*$ замена (1.89) позволяет локально задать решения (1.67) в терминах корней уравнения особенности складки (1.90).

1.3.3 Случай Бехерта-Станюковича. Особенность сечения гиперболической омбилики D_4^+

При рассмотрении давления газа Бехерта-Станюковича

$$p = \frac{a^2}{3} \rho^3$$

без ограничения общности – в силу возможности применить преобразование растяжения ρ – примем $a = 1$. Тогда система (1.1) принимает вид

$$\begin{cases} u_t + u u_x + \rho \rho_x = 0, \\ \rho_t + (\rho u)_x = 0, \end{cases} \quad (1.91)$$

а система (1.5) в терминах инвариантов Римана (1.4)

$$\begin{aligned} r &= u + \rho, \\ l &= u - \rho \end{aligned} \quad (1.92)$$

становится системой уравнений Хопфа

$$\begin{cases} r_t + rr_x = 0, \\ l_t + ll_x = 0, \end{cases} \quad (1.93)$$

с известным общим решением

$$\begin{cases} x - r(t - t_0) = f(r), \\ x - l(t - t_0) = g(l), \end{cases} \quad (1.94)$$

где функции $f(r)$ и $g(l)$ локально бесконечно дифференцируемые и в момент $t = t_0$ для всякого x из области определения выполнено условие $f^{-1}(x) > g^{-1}(x)$, т.е. разница обратных функций строго положительна. В силу теоремы об обратной функции эти ограничения обеспечивают гладкость начальных условий и положительную плотность газа в постановке задачи Коши.

Уравнение (1.11) становится частным случаем интегрируемого уравнения типа Эйлера-Пуассона-Дарбу

$$B_{rl} = \frac{B_r - B_l}{r - l} \quad (1.95)$$

с общим решением

$$B = \frac{f(r) - g(l)}{r - l}. \quad (1.96)$$

В рамках используемого нами подхода мы считаем функции $f(r)$ и $g(l)$ бесконечно дифференцируемыми в окрестностях точек, соответственно, r_* и l_* и обладающими разложениями в ряды Тейлора

$$B = \sum_{i \geq 0} \frac{f_i}{i!} (\Delta r)^i + \sum_{j \geq 0} \frac{g_j}{j!} (\Delta l)^j, \quad (1.97)$$

где $f_i = \frac{d^i f}{dr^i} |_{r=r_*}$, $g_j = \frac{d^j g}{dl^j} |_{l=l_*}$.

Решение (1.96) в окрестности точки (r_*, l_*) удобно представить в виде ряда

$$B = b_{00} + b_{10} \Delta r + b_{01} \Delta l + b_{20} (\Delta r)^2 + b_{11} \Delta r \Delta l + b_{02} (\Delta l)^2 + \sum_{i+j \geq 3} (\Delta r)^i (\Delta l)^j, \quad (1.98)$$

постоянные коэффициенты b_{ij} которого однозначно выражаются через r_* , l_* , f_i ,

g_j . В частности,

$$\begin{aligned}
b_{20} &= \frac{2(g_0 - f_0) + 2(r_* - l_*)f_1 - (l_* - r_*)^2 f_2}{2(l_* - r_*)^3}, \\
b_{11} &= \frac{2(f_0 - g_0) + (l_* - r_*)(f_1 + g_1)}{(l_* - r_*)^3}, \\
b_{02} &= \frac{2(g_0 - f_0) + 2(r_* - l_*)g_1 + (l_* - r_*)^2 g_2}{2(l_* - r_*)^3}, \\
b_{30} &= \frac{6(g_0 - f_0) + 6(r_* - l_*)f_1 - 3(l_* - r_*)^2 f_2 - (l_* - r_*)^3 f_3}{6(l_* - r_*)^4}, \\
b_{03} &= \frac{6(f_0 - g_0) + 6(l_* - r_*)g_1 - 3(l_* - r_*)^2 g_2 + (l_* - r_*)^3 g_3}{6(l_* - r_*)^4}.
\end{aligned}$$

С учетом того, что $u = \frac{r+l}{2}$ (что справедливо для всех одномерных течений в модели вида (1.1)), $\rho = \frac{r-l}{2}$ и $c = \frac{r-l}{2}$ условие обращения якобиана (1.15) в нуль принимает вид

$$\begin{aligned}
j(r_*, l_*) &= (l_* - r_*)(B_{rr}(r_*, l_*) + B_{lr}(r_*, l_*))(B_{rl}(r_*, l_*) + B_{lr}(r_*, l_*)) \\
&= (l_* - r_*)(2b_{20} + b_{11})(b_{11} + 2b_{02}) = 0,
\end{aligned}$$

и мы снова задействуем обе возможности обнуления якобиана, считая, что

$$b_{11} = -2b_{02} = -2b_{20} \quad (1.99)$$

или

$$\frac{g_1 - f_1}{l_* - r_*} = f_2 = g_2.$$

В случае газа Бехерта-Станюковича «единая функция» (1.20) принимает вид

$$F = \frac{g - f}{2} - \frac{t}{4}(r^2 - l^2) - x\left(\frac{r - l}{2}\right), \quad (1.100)$$

откуда очевидно, что в разложении в окрестности точки $(t_*, x_*; r_*, l_*)$

$$\begin{aligned}
G = 2F &= -b_{20}(r_* - l_*)^3 + \frac{\Delta t(r_*^2 - l_*^2)}{2} - (r_* - l_*)\Delta x + \\
&+ \Delta r(r_*\Delta t - \Delta x) + \Delta l(-l_*\Delta t + \Delta x) + \\
&+ \frac{\Delta t}{2}((\Delta r)^2 - (\Delta l)^2) \\
&+ (\Delta r)^3(-b_{20} - (r_* - l_*)b_{30}) + (\Delta l)^3(b_{20} - (r_* - l_*)b_{03}) + \\
&+ \sum_{i,j>3} (f_{i0}(\Delta r)^i + f_{0j}(\Delta l)^j).
\end{aligned} \quad (1.101)$$

отсутствуют смешанные слагаемые, а коэффициенты f_i и f_j не зависят от Δt и Δx . В силу этого представим (1.101) в виде

$$H = G + b_{20}(r_* - l_*)^3 = G_1(\Delta t, \Delta x; \Delta r) + G_2(\Delta t, \Delta x; \Delta l),$$

где

$$\begin{aligned} G_1(\Delta t, \Delta x; \Delta r) &= \frac{r_*^2 \Delta t}{2} - r_* \Delta x + \Delta r(r_* \Delta t - \Delta x) + \\ &+ \frac{\Delta t}{2}(\Delta r)^2 + (\Delta r)^3(-b_{20} - (r_* - l_*)b_{30}) + \sum_{i>3} (f_{i0}(\Delta r))^i, \\ G_2(\Delta t, \Delta x; \Delta l) &= \frac{-l_*^2 \Delta t}{2} + l_* \Delta x + \Delta l(-l_* \Delta t + \Delta x) - \\ &- \frac{\Delta t}{2}(\Delta l)^2 + (\Delta l)^3(b_{20} - (r_* - l_*)b_{03}) + \sum_{j>3} f_{0j}(\Delta l)^j. \end{aligned} \tag{1.102}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} G_1(t_*, x_*; \Delta r) &= (\Delta r)^3(-b_{20} - (r_* - l_*)b_{30}) + \sum_{i>3} (f_{i0}(\Delta r))^i, \\ G_2(t_*, x_*; \Delta l) &= (\Delta l)^3(b_{20} - (r_* - l_*)b_{03}) + \sum_{j>3} f_{0j}(\Delta l)^j, \end{aligned}$$

следовательно, функция $G_1(\Delta t, \Delta x; \Delta r)$ является [93, §13] 2-деформацией функции $G_1(t_*, x_*; \Delta r)$ и может быть получена из R -версальной деформации, описываемой двухпараметрическим семейством функций

$$H_1(e_{11}, e_{12}; R) = R^3 + e_{11}R + e_{12}.$$

Так же функция $G_2(\Delta t, \Delta x; \Delta l)$ является 2-деформацией функции $G_2(t_*, x_*; \Delta l)$ и может быть получена из R -версальной деформации, описываемой двухпараметрическим семейством функций

$$H_2(e_{21}, e_{22}; L) = L^3 + e_{21}L + e_{22},$$

что по существу позволяет нам локально представить функции $G_1(\Delta t, \Delta x; \Delta r)$ и $G_2(\Delta t, \Delta x; \Delta l)$ в виде канонических уравнений типа сборки посредством глад-

ких в окрестности $t = t_*$, $x = x_*$, $r = r_*$, $l = l_*$ замен в виде рядов Тейлора

$$\begin{aligned}
R(\Delta t, \Delta x; \Delta r) &= \sum_{n+m>0} a_{nm,00}(\Delta t)^n(\Delta x)^m + \\
&+ \Delta r [(-b_{20} - (r_* - l_*)b_{30})^{1/3} + \sum_{n+m>0} a_{nm,10}(\Delta t)^n(\Delta x)^m] + \\
&+ \sum_{i \geq 2} \sum_{n+m=0}^{\infty} a_{nm,i}(\Delta r)^i(\Delta t)^n(\Delta x)^m, \\
L(\Delta t, \Delta x; \Delta r) &= \sum_{n+m>0} b_{nm,00}(\Delta t)^n(\Delta x)^m + \\
&+ \Delta l [(b_{20} - (r_* - l_*)b_{03})^{1/3} + \sum_{n+m>0}^{\infty} b_{nm,01}(\Delta t)^n(\Delta x)^m] + \\
&+ \sum_{j \geq 2} \sum_{n+m=0}^{\infty} b_{nm,j}(\Delta l)^j(\Delta t)^n(\Delta x)^m,
\end{aligned} \tag{1.103}$$

$$\begin{aligned}
e_{11}(\Delta t, \Delta x) &= e_{11,10}\Delta t + e_{11,01}\Delta x + \sum_{i+j \geq 2} e_{11,ij}\Delta t^i\Delta x^j, \\
e_{12}(\Delta t, \Delta x) &= e_{12,10}\Delta t + e_{12,01}\Delta x + \sum_{i+j \geq 2} e_{12,ij}\Delta t^i\Delta x^j, \\
e_{21}(\Delta t, \Delta x) &= e_{21,10}\Delta t + e_{21,01}\Delta x + \sum_{i+j \geq 2} e_{21,ij}\Delta t^i\Delta x^j, \\
e_{22}(\Delta t, \Delta x) &= e_{22,10}\Delta t + e_{22,01}\Delta x + \sum_{i+j \geq 2} e_{22,ij}\Delta t^i\Delta x^j
\end{aligned} \tag{1.104}$$

коэффициенты которых определяются однозначно:

$$\begin{aligned}
e_{11,10} &= r_*(-b_{20} - (r_* - l_*)b_{30})^{-1/3}, \quad e_{11,01} = -(-b_{20} - (r_* - l_*)b_{30})^{-1/3}, \quad \dots \\
e_{21,10} &= -l_*(b_{20} - (r_* - l_*)b_{03})^{-1/3}, \quad e_{21,01} = (b_{20} - (r_* - l_*)b_{03})^{-1/3}, \quad \dots \\
e_{12,10} &= \frac{r_*^2}{2}, \quad e_{12,01} = -r_*, \quad e_{22,10} = -\frac{l_*^2}{2}, \quad e_{22,01} = l_*, \quad \dots
\end{aligned} \tag{1.105}$$

$$\begin{aligned}
a_{00,2} &= \frac{f_{40}}{3(-b_{20} - (r_* - l_*)b_{30})^{2/3}}, \quad b_{00,2} = \frac{f_{04}}{3(b_{20} - (r_* - l_*)b_{03})^{2/3}}, \quad \dots \\
a_{10,00} &= \frac{\frac{1}{2} - a_{00,2}e_{11,10}}{3(-b_{20} - (r_* - l_*)b_{30})^{2/3}}, \quad a_{01,00} = \frac{-a_{00,2}e_{11,01}}{3(-b_{20} - (r_* - l_*)b_{30})^{2/3}}, \quad \dots, \\
b_{10,00} &= \frac{-\frac{1}{2} - b_{00,2}e_{21,10}}{3(b_{20} - (r_* - l_*)b_{03})^{2/3}}, \quad b_{01,00} = \frac{-b_{00,2}e_{21,01}}{3(b_{20} - (r_* - l_*)b_{03})^{2/3}}, \quad \dots
\end{aligned} \tag{1.106}$$

Следовательно, справедливо представление

$$H = R^3 + L^3 + e_{11}R + e_{21}L + e_{12} + e_{22}$$

или, после замен $R = \frac{y_1}{3^{1/3}}$, $L = \frac{y_2}{3^{1/3}}$, $\frac{e_{21}}{3^{1/3}} = -k_1$, $\frac{e_{11}}{3^{1/3}} = -k_2$, $e_{12} + e_{22} = k_0$ и $H - k_0 = W$ представление в виде нормальной формы особенности *сечения* гиперболической омбилики D_4^+ :

$$W = \frac{y_1^3 + y_2^3}{3} - k_2 y_1 - k_1 y_2, \quad (1.107)$$

критические точки которой определяются из системы квадратных уравнений

$$\begin{aligned} y_1^2 &= k_2, \\ y_2^2 &= k_1, \end{aligned}$$

решения которой локально задают решения системы (1.91).

Таким образом, в случае газа Бехерта-Станюковича происходит наследование не только генотипа, но и всей нормальной формы особенности D_4^+ .

Теорема 1.3. Рассмотрим такое бесконечно дифференцируемое в окрестности точки (r_*, l_*) решение $B(r, l)$ уравнения типа Эйлера-Пуассона-Дарбу (1.95), что коэффициенты его тейлоровского разложения (1.98) в окрестности точки (r_*, l_*) удовлетворяют двойному равенству (1.99). Рассмотрим решения системы (1.91) (получаемой из системы (1.1) в частном случае давления газа Бехерта-Станюковича (1.65)), которые в некоторой малой окрестности точек t_* , x_* , $u_* = u(t_*, x_*)$, $\rho_* = \rho(t_*, x_*)$ определяются через инварианты Римана (1.92), равенства $r_* = r(u_*, \rho_*)$, $l = l_*(u_*, \rho_*)$ и функцию $B(r, l)$. Локально гладкая функция (1.20) (критические точки которой определяют решения (1.91)) принимает вид (1.100). Существуют локально гладкие обратимые замены в виде рядов Тейлора (1.103), (1.104) с коэффициентами (1.105), (1.106) которые позволяют локально свести (1.100) к нормальной форме особенности *сечения* гиперболической омбилики (1.107).

Замечание 1.7. Омбилическая особенность в случае Чаплыгина не имеет такой же специфики. В самом деле, «единая функция» (1.20) имеет вид $F = \frac{2m}{l-r} \left[\frac{r+l}{2} t - x - f(r) - g(l) \right]$ и ее разложение в ряд Тейлора в окрестности точек t_* ,

x_* , r_* , l_* с учетом равенств $g_2 = f_2 = 0$ и $\rho = -\frac{2m}{(r-l)}$ принимает вид

$$\begin{aligned}
F = & m(f_1 - g_1) + \frac{m[2\Delta x - \Delta t(r_* + l_*)]}{(r_* - l_*)} + \\
& + \Delta r \left[\frac{-2m(\Delta x - l_*\Delta t)}{(r_* - l_*)^2} \right] + \Delta l \left[\frac{-2m(r_*\Delta t - \Delta x)}{(r_* - l_*)^2} \right] + \\
& + (\Delta r)^2 \left(\frac{-2m(l_*\Delta t - \Delta x)}{(r_* - l_*)^3} \right) + \Delta r \Delta l \left(\frac{-2m(2\Delta x - \Delta t(r_* + l_*))}{(r_* - l_*)^3} \right) + \\
& + (\Delta l)^2 \left(\frac{-2m(r_*\Delta t - \Delta x)}{(r_* - l_*)^3} \right) + \\
& + \frac{2f_3m}{(r_* - l_*)}(\Delta r)^3 + \frac{2g_3m}{(r_* - l_*)}(\Delta l)^3 + \\
& + (\Delta r)^3 \left(\frac{-2m(\Delta x - l_*\Delta t)}{(r_* - l_*)^4} \right) + (\Delta r)^2 \Delta l \left(\frac{-2m[(r_* + 2l_*)\Delta t - 3\Delta x]}{(r_* - l_*)^4} \right) + \\
& + \Delta r (\Delta l)^2 \left(\frac{-2m[3\Delta x - (2r_* + l_*)\Delta t]}{(r_* - l_*)^4} \right) + (\Delta l)^3 \left(\frac{-2m(r_*\Delta t - \Delta x)}{(r_* - l_*)^4} \right) + \\
& + \sum_{i+j \geq 4} \tilde{f}_{ij}(\Delta r)^i(\Delta l)^j,
\end{aligned}$$

где

$$\tilde{f}_{ij} = \sum_{M+N=0}^1 \tilde{f}_{ij}^{MN}(\Delta t)^M(\Delta x)^N,$$

т.е.

$$F(t_*, x_*) = m(f_1 - g_1) + \frac{2f_3m}{(r_* - l_*)}(\Delta r)^3 + \frac{2g_3m}{(r_* - l_*)}(\Delta l)^3 + \sum_{i+j \geq 4} \tilde{f}_{ij}^{00}(\Delta r)^i(\Delta l)^j.$$

Каждый коэффициент кратен $m \neq 0$. Поскольку в ситуации «общего положения» $f_1 \neq g_1$, $f_3 \neq 0$, $g_3 \neq 0$, ни один коэффициент при членах не старше третьего порядка не обращается в нуль. Само тейлоровское разложение невозможно представить в виде суммы двух степенных рядов по натуральным степеням каждой из переменных по отдельности, в чем заключалась повлиявшая на итоговый результат специфика исследования газа Бехерта-Станюковича.

Как в случае газа Чаплыгина, так и в случае газа Бехерта-Станюковича имеет место совпадение с точностью до растяжений генотипов особенностей решений линейного волнового уравнения и генотипов особенностей решений системы уравнений ГД.

Пример. Пусть $t_0 = 0$ и частное решение системы уравнений Хопфа (1.93) имеет вид

$$\begin{cases} x = rt - \alpha arsh(\beta r - \lambda) - \varphi, \\ x = lt - \gamma arsh(\delta l - \mu) - \psi, \end{cases} \quad (1.108)$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu, \varphi, \psi$ – вообще говоря, не произвольные вещественные постоянные, подлежащие определению с учетом наложенных выше ограничений и получаемых далее условий.

Продифференцировав функции (1.108) соответственно по r и l , определим, что

$$r_* = \frac{\lambda t_* \pm \sqrt{\alpha^2 \beta^2 - t_*^2}}{\beta t_*}, \quad l_* = \frac{\mu t_* \pm \sqrt{\gamma^2 \delta^2 - t_*^2}}{\delta t_*}. \quad (1.109)$$

Очевидно,

$$\begin{aligned} \beta &\neq 0, \quad \delta \neq 0, \quad t_* \neq 0, \\ t_* &\leq |\alpha\beta|, \quad t_* \leq |\gamma\delta|. \end{aligned}$$

После выбора, например, знака плюс в r_* и знака минус в l_* и подстановки (1.109) в (1.108) получаем определяющее t_* уравнение

$$\begin{aligned} &\beta\delta[\alpha arsh(\frac{\sqrt{\alpha^2 \beta^2 - t_*^2}}{t_*}) + \gamma arsh(\frac{\sqrt{\gamma^2 \delta^2 - t_*^2}}{t_*}) + \varphi - \psi] = \\ &= t_*(\delta\lambda - \beta\mu) + \beta\sqrt{\gamma^2 \delta^2 - t_*^2} + \delta\sqrt{\alpha^2 \beta^2 - t_*^2}. \end{aligned}$$

Выбрав

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{3}, \quad \alpha = 1, \quad \beta = 2, \quad \gamma = 1, \quad \delta = 3, \\ \lambda &= \frac{151}{100}, \quad \mu = 0, \quad \varphi = 0, \quad \psi = \frac{41}{100}, \end{aligned}$$

численно решим это уравнение и получим

$$\begin{aligned} t_* &\approx 1,042, \quad x_* \approx 0,371, \\ r_{*+} &\approx 1,574, \quad l_{*-} \approx -0,899, \\ u_* &\approx 0,337, \quad \rho_* \approx 0,357. \end{aligned}$$

На первом графике ниже изображена положительная разность обратных функций в начальный момент времени $t_0 = 0$, на втором – пересечение каустик решения в точке градиентной катастрофы.

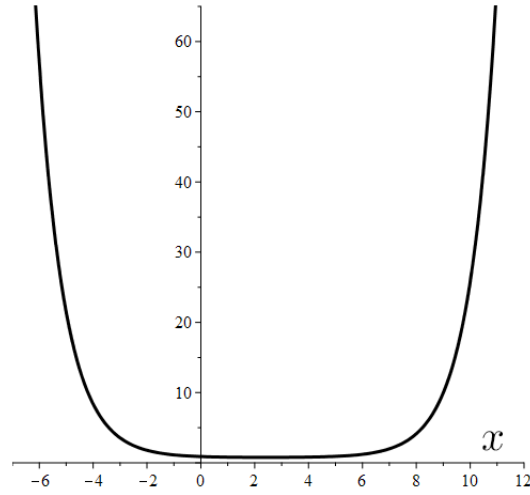


Рис. 1: $f^{-1}(X, 0) - g^{-1}(X, 0) > 0$.

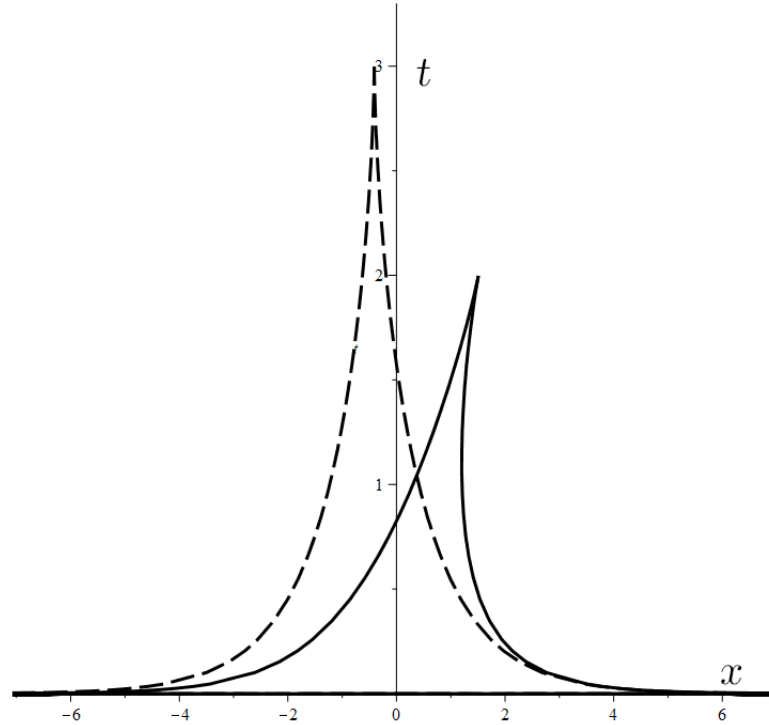


Рис. 2: Пересечение левой ветви каустики, соответствующей r с правой ветвью каустики, соответствующей l из решения (1.108) системы (1.93).

Этот пример показывает, что омбилическая особенность для газа Бехерта-Станюковича возникает из гладкого начального условия.

Замечание 1.8. Существует [108, Глава 2, §9, пункт 1] другой подход к

интегрированию уравнений течений изоэнтропического газа (1.1), основанный на представлении (1.9) в виде

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial r}[x - t(\frac{r+l}{2} - c)] = -t(\frac{1}{2} - c_r), \\ \frac{\partial}{\partial l}[x - t(\frac{r+l}{2} + c)] = -t(\frac{1}{2} + c_l), \end{cases}$$

и введении потенциальной функции $W(r, l)$, чья полная производная получается из уравнений выше, если $c_l = -c_r$ что справедливо для политропных газов с давлением $p = a^2 \rho^\gamma$. После этого получается уравнение

$$(r - l)W_{rl} = \frac{3 - \gamma}{2(\gamma - 1)}(W_r - W_l),$$

интегрируемое при помощи общего решения $w = \tilde{f}(r) + \tilde{g}(l)$ волнового уравнения $w_{rl} = 0$ по формуле (25) (или (32)) Главы 2, §9 из [108]. В частности, m -атомный газ (где $m = \frac{3-\gamma}{2(\gamma-1)}$, $\gamma \neq 1$) может быть проинтегрирован с помощью решения волнового уравнения.

Интересно, что это уравнение является волновым для случая Бехерта-Станюковича ($\gamma = 3$) и уравнением типа Эйлера-Пуассона-Дарбу для случая Чаплыгина ($\gamma = -1$) в то время как для уравнения (1.11) на функцию B было наоборот.

Оказывается, эти две аппроксимации к реальным течениям связаны, хотя при изучении их типичных особенностей выводы сохраняются, что следует из формул

$$B = \int \tilde{f}(r)dr + \int \tilde{g}(l)dl \quad (1.110)$$

для газа Чаплыгина и

$$B = \frac{W}{r - l} \quad (1.111)$$

для газа Бехерта-Станюковича (кроме знака при произвольной функции $g(l)$).

Замены $f_r = \tilde{f}$ и $g_l = \tilde{g}$ в (1.110) приводят к ранее полученным результатам для газа Чаплыгина, если подставить (1.110) в аналогичные (1.10) соотношения

$$\begin{aligned} t &= \frac{W_l - W_r}{l - r}, \\ x &= \frac{lW_l - rW_r}{l - r} \end{aligned}$$

а подстановка (1.111) в (1.20) ничего не меняет, если отразить произвольную функцию $g(l) := -g(l)$.

2 Провальные особенности решений гиперболической системы уравнений одномерной газовой динамики

2.1 Особенность сборки A_3 при $\rho \rightarrow 0$

В этом пункте показано, что решениям (1.1) присуща особенность типа сборки с такой точкой градиентной катастрофы, что $\rho_* = \rho(t_*, x_*) = 0$. Особенности, соответствующие такой точке, будем называть провальными, подразумевая стремление плотности газа ρ (или толщины слоя жидкости для уравнений мелкой воды, получаемым при $\alpha(\rho) \equiv \text{const}$) к нулю.

Посредством соотношений на производные преобразования годографа (1.70)

$$\begin{aligned} u_x &= Jt_\rho, & u_t &= -Jx_\rho, \\ \rho_x &= -Jt_u, & \rho_t &= Jx_u, \\ J &= u_x\rho_t - u_t\rho_x, & j &= x_ut_\rho - x_\rho t_u, & J &= j^{-1}. \end{aligned}$$

система (1.1)

$$\begin{cases} u_t + uu_x + \alpha(\rho)\rho_x = 0, \\ \rho_t + (\rho u)_x = 0, \end{cases}$$

локально переводится в линейную систему

$$\begin{cases} x_\rho = ut_\rho - \alpha(\rho)t_u, \\ x_u = ut_u - \rho t_\rho, \end{cases} \quad (2.1)$$

а якобиан преобразования годографа принимает вид

$$j = -\rho t_\rho^2 + \alpha(\rho)t_u^2. \quad (2.2)$$

Преобразования (1.10)

$$t = B_u, \quad x = uB_u - B - \rho B_\rho$$

сводят (2.1) к линейному гиперболическому (при $\rho > 0$) уравнению (1.12)

$$\rho B_{\rho\rho} + 2B_\rho = \alpha(\rho)B_{uu}, \quad (2.3)$$

гладкое решение которого ищется в виде ряда

$$B = \sum_{i+j \geq 0} b_{ij}(\Delta u)^i \rho^j \quad (2.4)$$

с коэффициентами однозначно определяемыми через коэффициенты тейлоровского разложения в окрестности $u = u_*$ функции $B_0(u) = B(u, 0)$

$$B_0(u) = b_{00} + \sum_{i \geq 1} b_{i0}(\Delta u)^i. \quad (2.5)$$

В самом деле, все коэффициенты ряда Тейлора $B = \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j B_j(u)$ решения уравнения (2.3) через его главный член $B_0(u)$ рекуррентно находятся по формулам

$$B_1 = 2(B_0)'', \quad B_2 = \frac{2(B_1)''}{3} + \frac{\alpha_1(B_0)''}{6},$$

$$B_{k+1} = \frac{1}{(k+1)(k+2)}(4(B_k)'' + \sum_{l=1}^k \alpha_l(B_{k-l})'').$$

В дальнейшем будет показано, что при $\alpha(\rho) \equiv \text{const}$ и аналитичности начальных данных ряд (2.4) соответствует аналитическому в окрестности $\rho = 0$ решению уравнения (1.12) и его эллиптическому аналогу, получаемому отражением $\rho \rightarrow -\rho$.

Получаются следующие соотношения на коэффициенты b_{ij} ряда (2.4) и два соотношения, следующие из преобразований (1.10):

$$4b_{20} = b_{01}, \quad 12b_{30} = b_{11}, \quad 4b_{21} + \alpha_1 b_{20} = 3b_{02}, \quad 4b_{40} = b_{21}, \quad \dots$$

$$t_* = b_{10}, \quad x_* = u_* t_* - b_{00}. \quad (2.6)$$

Обращение якобиана (2.2) в нуль в точке $u = u_*$, $\rho = \rho_* = 0$ означает выполнение равенства $b_{20} = 0$, откуда следует, что $b_{01} = 0$. С учетом полученных соотношений и (2.6) введем новые переменные

$$\tau = \Delta t,$$

$$\xi = \Delta x - u_* \Delta t, \quad (2.7)$$

представимые в виде степенных рядов

$$\begin{aligned}
\tau &= b_{11}(\rho + \frac{(\Delta u)^2}{4}) + \frac{3}{2}b_{02}\Delta u\rho + (\frac{\alpha_1}{12}b_{11} + 4b_{31})\rho^2 + \\
&+ \frac{b_{02}}{8}(\Delta u)^3 + 3b_{31}(\Delta u)^2\rho + 2b_{22}\Delta u\rho^2 + b_{13}\rho^3 + \sum_{i+j \geq 4} \tau_{ij}(\Delta u)^i \rho^j, \\
\xi &= -b_{11}\Delta u\rho - 3b_{02}\rho^2 + \\
&+ \frac{b_{11}}{6}(\Delta u)^3 - (\frac{\alpha_1}{6}b_{11} + 8b_{31})\Delta u\rho^2 - (\frac{8}{3}b_{22} + \frac{\alpha_1 b_{02}}{2})\rho^3 + \sum_{i+j \geq 4} \xi_{ij}(\Delta u)^i \rho^j,
\end{aligned} \tag{2.8}$$

где коэффициенты τ_{ij} и ξ_{ij} однозначно определяются коэффициентами α_j и b_{ij} .

Считая, что $\rho_* = 0$ и, как следствие, $b_{20} = 0$, мы при рассмотрении ситуации «общего положения» задействовали оба возможных ограничения в виде равенств и потому не имеем оснований полагать, что $b_{11} = 0$. Считая, что $b_{11} \neq 0$, применим к первому ряду (2.8) теорему о неявной функции и представим плотность ρ в виде ряда по натуральным степеням τ и Δu :

$$\rho = \frac{\tau}{b_{11}} - \frac{(\Delta u)^2}{4} - \frac{3b_{02}}{2b_{11}^2}\Delta u\tau + \rho_{02}\tau^2 + \sum_{i+j \geq 3} \rho_{ij}(\Delta u)^i \tau^j, \tag{2.9}$$

где коэффициенты ρ_{ij} однозначно выражаются через α_j и b_{ij} .

Подстановка (2.9) в правую часть второго из равенств (2.8) дает представление в виде ряда по степеням τ и Δu

$$\begin{aligned}
\xi &= \frac{3b_{02}}{b_{11}^2}\tau^2 - \frac{72b_{02}b_{31} - 8b_{22}b_{11}}{3b_{11}^4}\tau^3 + \sum_{j \geq 3} \mu_j \tau^j - \\
&- \tau\Delta u + \frac{5}{12}b_{11}(\Delta u)^3 + \frac{\alpha_1 b_{11}^2 + 108b_{02}^2 - 48b_{31}b_{11}}{12b_{11}^3}\Delta u\tau^2 + \\
&+ \frac{3b_{02}}{b_{11}}(\Delta u)^2\tau + \sum_{i \geq 4} (\Delta u)^i \sum_{j \geq 0} \beta_{ij} \tau^j,
\end{aligned} \tag{2.10}$$

где $\mu_j(\tau_{ij}, b_{ij})$, $\beta_{ij}(\tau_{ij}, b_{ij})$ – однозначно определяемые константы.

Применим лемму Адамара и построим гладкую замену в виде ряда

$$\Delta u = Q + U_2 Q^2 + U_3 Q^3 + \sum_{i \geq 4} U_i Q^i$$

с целью исключить в (2.10) постоянные члены в рядах, определяющих коэффициенты при Q^i , $i \geq 4$:

$$Q^4\tau^0 : \frac{5}{4}b_{11}U_2 + \beta_{40} = 0 \Rightarrow U_2 = -\frac{4}{5b_{11}}\beta_{40},$$

$$Q^5\tau^0 : \frac{5}{4}b_{11}[U_3 + U_2^2] + 4\beta_{40}U_2 + \beta_{50} = 0 \Rightarrow U_3 = -\frac{4}{5b_{11}}(4\beta_{40}U_2 + \beta_{50}) - U_2^2, \dots$$

Получим, что функция $\xi(\tau, Q)$ имеет разложение

$$\begin{aligned} \xi = & \sum_{j \geq 2} \mu_j \tau^j + Q \sum_{j \geq 1} q_{1j} \tau^j + Q^2 \sum_{j \geq 1} q_{2j} \tau^j + \\ & + Q^3 \left[\frac{5}{12} b_{11} + \sum_{j \geq 1} q_{3j} \tau^j \right] + \sum_{i \geq 4} Q^i \sum_{j \geq 1} q_{ij} \tau^j, \end{aligned}$$

где коэффициенты q_{ij} однозначно определяются через b_{ij} , β_{ij} .

Из того, что $\xi(0, Q) = Q^3$ делаем вывод [93, §13] о том, что росток функции $\xi(\tau, Z)$ есть деформация с параметром τ ростка монома Q^3 , обладающего R -универсальной (миниверсальной) деформацией, являющейся ростком в нуле кубического многочлена $Q^3 + e_1 Q + e_2$ и существуют три локальных диффеоморфизма

$$S(Y, Q), \quad e_1(Y), \quad e_2(Y) : S(0, Q) = Q, \quad e_1(0) = 0, \quad e_2(0) = 0,$$

таких, что

$$\xi(\tau, Q) = S(\tau, Q)^3 + e_1(\tau)S(\tau, Q) + e_2(\tau). \quad (2.11)$$

Подстановка

$$\begin{aligned} e_i(\tau) &= \sum_{j \geq 1} e_{ij} \tau^j, \quad i = 1, 2, \\ S(\tau, Q) &= \sum_{j \geq 1} S_{0j} \tau^j + Q[S_0 + \sum_{j \geq 1} S_{1j} \tau^j] + \sum_{k \geq 2, j \geq 1} S_{kj} Q^k \tau^j \end{aligned}$$

в (2.11) и приравнивание коэффициентов при линейно независимых слагаемых однозначно определяет все коэффициенты:

$$S_0 = \left(\frac{5}{12}b_{11}\right)^{1/3}, \quad S_{01} = \frac{q_{21}}{3S_0^2}, \quad e_{11} = \frac{1}{q_{11}}, \quad e_{21} = 0, \quad e_{22} = \mu_2, \quad \dots$$

что позволяет вывести в итоге кубическое уравнение сборки

$$\delta(\xi, \tau) + \sigma(\tau)S + \frac{5}{12}b_{11}S^3 = 0 \quad (2.12)$$

с управляющими параметрами

$$\begin{aligned}\delta(\xi, \tau) &= \xi \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \delta_{1j} \tau^j \xi^j\right) + \sum_{j=2}^{\infty} \delta_{0j} \tau^j, \\ \sigma(\tau) &= \tau + \sum_{j=2}^{\infty} \sigma_j \tau^j.\end{aligned}\tag{2.13}$$

В главном порядке (2.12) представляется в виде

$$\xi + \tau Q + \frac{5}{12} b_{11} Q^3 = 0.\tag{2.14}$$

Такая же провальная особенность сборки присуща и решениям системы уравнений нелинейной геометрической оптики (эллиптический вариант гиперболической газодинамической системы). Описание происходит аналогично при замене $\rho \rightarrow -\rho$.

При этом, вообще говоря, неочевидна непустота множества гладких решений уравнения (1.12), но в пункте работы **2.2** доказана непустота множества аналитических решений при $\alpha(\rho) \equiv \text{const}$, что позволяет частично обосновать формальные результаты работ [73] (НГО, эллиптическая система) и [76] (газовая динамика, гиперболическая система).

2.1.1 Уравнения мелкой воды. Эталонное решение

Рассматривая частный случай $\alpha(\rho) \equiv 4$ (т.е. давление вида $p = p_0 + 2\rho^2$), получим из (1.1) систему уравнений течения мелкой воды

$$\begin{cases} u_t + uu_x + 4\rho_x = 0, \\ \rho_t + (\rho u)_x = 0, \end{cases}\tag{2.15}$$

образ годографа которой заменами (1.10) переводится в линейное гиперболическое (при $\rho > 0$) уравнение второго порядка

$$4B_{uu} = \rho B_{\rho\rho} + 2B_{\rho}.\tag{2.16}$$

Среди множества решений данного уравнения отметим функцию

$$B(u, \rho) = -u^3 - 12u\rho,\tag{2.17}$$

которую назовем эталонным решением, так как на ее примере наглядно демонстрируется возникновение провальной особенности типа сборки. Это было замечено научным руководителем диссертанта Б. И. Сулеймановым в совместной публикации [76].

Из (1.10) получаем, что

$$\begin{aligned} t &= -3u^2 - 12\rho, \\ x &= -2u^3 + 12u\rho, \end{aligned} \tag{2.18}$$

откуда выводим кубическое уравнение сборки

$$x + tu + 5u^3 = 0 \tag{2.19}$$

совпадающее с (2.14) при $t_* = x_* = u_* = 0$, $b_{11} = 12$.

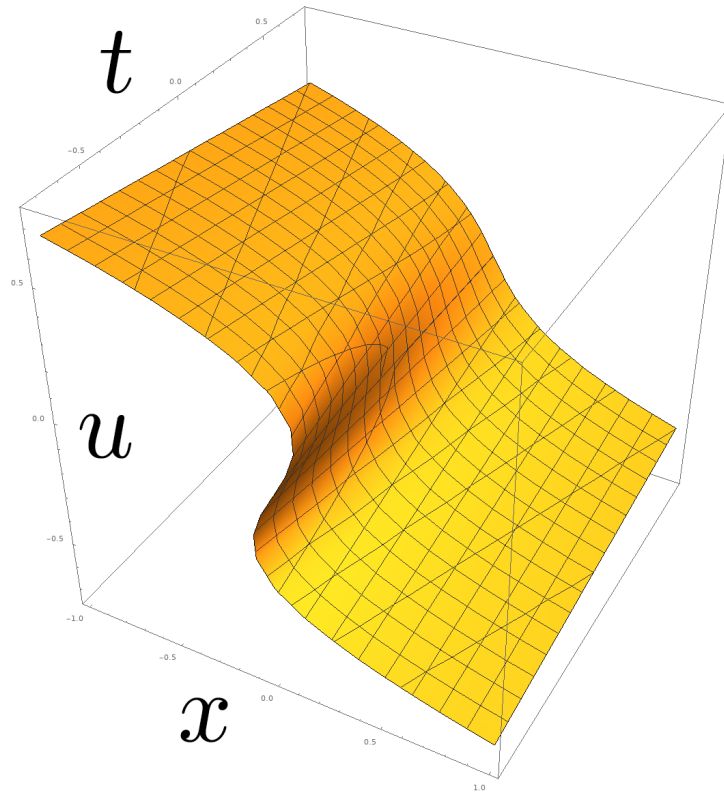


Рис. 3: График уравнения сборки $x + tu + 5u^3 = 0$.

По теореме о неявной функции $15u^2 + t > 0$ при $t > 0$, поэтому у уравнения при $t > 0$ корень один. В момент $t = 0$ происходит катастрофа, и решение становится многозначным. При $t < 0$ – три корня уравнения.

На графике ниже показано: сначала происходит провал, а кривая, отвечающая нулям якобиана, находится между ветвями кривой провала. Пересечение этих кривых происходит только в начале координат (t, x) –плоскости.

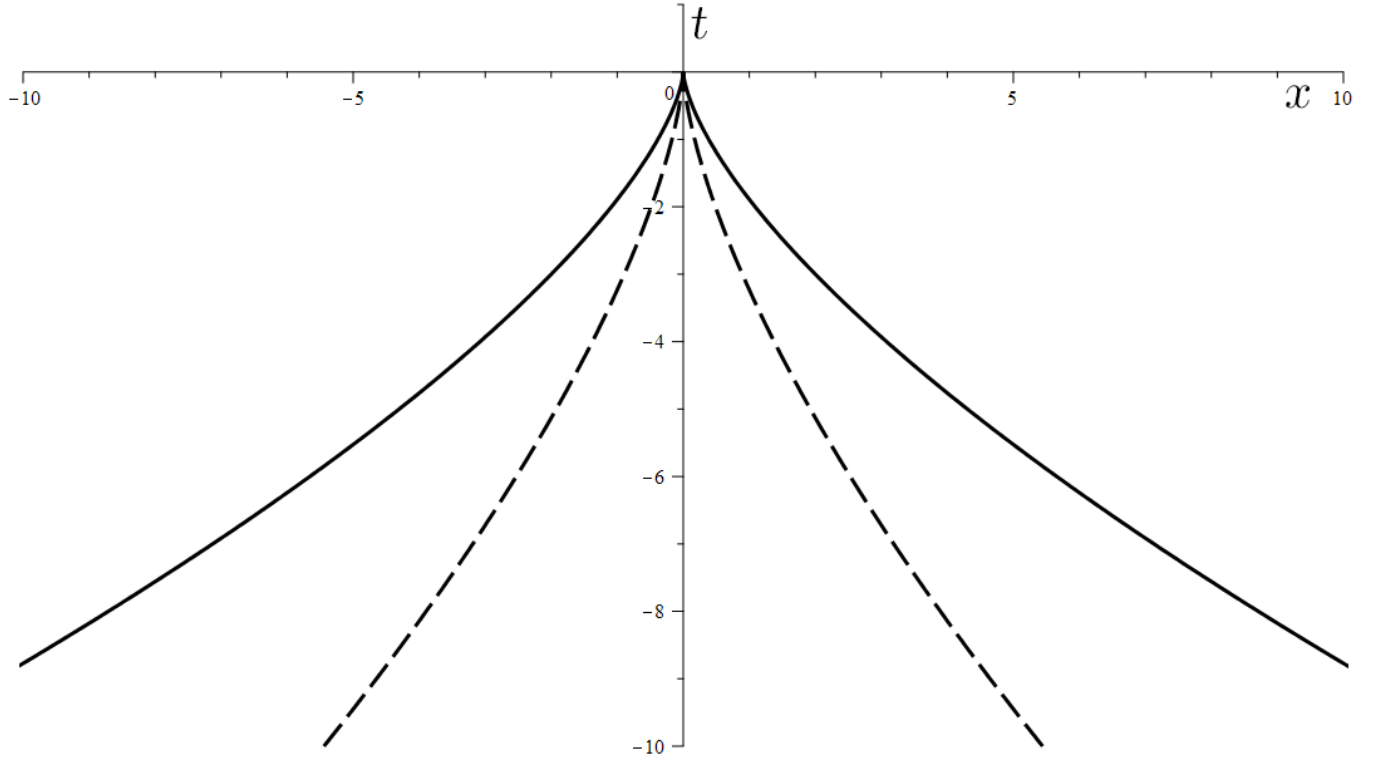


Рис. 4: Кривая провала $x = \mp 2(-\frac{t}{3})^{3/2}$ и кривая нулей якобиана $x = \pm 10(-\frac{t}{15})^{3/2}$ (пунктир) для (2.17).

2.2 Обоснование формальных провальных асимптотик для уравнений мелкой воды

Для частного случая уравнений мелкой воды ($\alpha(\rho) \equiv 4$) в работе [104] доказана непустота множества аналитических решений уравнения (2.16) в окрестности $\rho = 0$, обладающих разложениями с коэффициентами, связанными соотношениями (2.6), что, вообще говоря, неочевидно для случая произвольной аналитической функции $\alpha(\rho)$. Доказательство основано на частном случае теоремы Ю. Ф. Коробейника [131] об аналитичности решений уравнения

$$hG_{hh} = G_{uu}, \quad (2.20)$$

к которому (2.16) сводится заменами

$$B(\rho, u) = \frac{G(\rho, u)}{\rho},$$

$$u := \frac{u}{2}.$$

Доказательство самого Ю. Ф. Коробейника нигде не было обнаружено. В работе диссертанта, научного руководителя Б. И. Сулейманова и соавтора С. Н. Мелихова [104] было приведено независимое доказательство для частного случая $\alpha(\rho) \equiv \text{const}$. Соавтором данной работы С. Н. Мелиховым была доказана необходимость утверждения из условия нижеследующей теоремы – в тексте диссертации необходимость приводится для полноты изложения.

При этом в доказательстве опускается требование $\rho > 0$ – рассматриваются и $\rho < 0$. Хотя неравенство $\rho < 0$ не соответствует физическому смыслу положительной плотности, но рассмотрение и этой области позволяет обосновать непустоту множества аналитических решений как гиперболического ($\rho > 0$), так и эллиптического ($\rho < 0$) варианта уравнения (2.20) в окрестности провала $\rho = 0$. Тем самым обоснован формализм провальной особенности сборки как для системы уравнений мелкой воды (гиперболическая система, исследованная в [76]), так и для системы уравнений «опрокинутой» мелкой воды (эллиптическая система, исследованная в [73]).

Согласно этой теореме Ю. Ф. Коробейника, аналитичность решений (2.20) следует из аналитичности начальной функции $B(0, u) = g_1(u)$. Тогда ряд

$$G(h, u) = g_1(u)h + \sum_{k=2}^{\infty} g_k(u)h^k \quad (2.21)$$

есть аналитическая функция переменных ρ и u в некотором бикруге

$$D(R_1, R) := \{\rho, u \in \mathbb{C}, |\rho| < R_1, |u - u_*| < R\}. \quad (2.22)$$

Отметим, что коэффициенты $g_{k+1}(u)$ при $k \geq 1$ формального решения в виде ряда (2.21) уравнения (2.20) выражаются через производные $g_1^{(2k)}(u)$ порядка $2k$ коэффициента $g_1(u)$ в некоторой окрестности точки $u = u_*$ равенствами

$$g_{k+1}(u) = \frac{g_1^{(2k)}(u)}{k!(k+1)!}.$$

Поэтому в дальнейшем речь пойдет о формальном решении уравнения (2.20) в виде ряда

$$G(h, u) = g_1(u)h + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!(k+1)!} g_1^{(2k)}(u) h^{k+1}. \quad (2.23)$$

Теорема 2.1. (Ю. Ф. Коробейник, 1961 г.) Пусть R и R_1 – произвольные вещественные положительные числа, u_* – произвольное комплексное число, $G(\rho, u)$ – формальное решение в виде ряда (2.23) уравнения (2.20), где функция

$$g_1(u) = g_1(Re\, u + iIm\, u)$$

бесконечно дифференцируема в круге

$$\{u \in \mathbb{C}, |u - u_*| < R\}$$

как функция двух вещественных переменных $Re\, u, Im\, u$. Для того, чтобы функция $G(\rho, u)$ была аналитической в бикруге (2.22) и ряд (2.23) сходиллся по ρ в круге $\{\rho \in \mathbb{C}, |\rho| < R_1\}$ при любом u из круга $\{u \in \mathbb{C}, |u - u_*| < R\}$, необходимо и достаточно, чтобы функция $g_1(u)$ была аналитической в круге

$$\{u \in \mathbb{C}, |u - u_*| < R + 2\sqrt{R_1}\}$$

.

Сначала докажем следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 2.1. Пусть $f(z)$ – функция, аналитическая в круге $\{z \in \mathbb{C}, |z| < r\}$, $r \in (0, \infty)$. Для произвольных $r_0 \in [0, r)$ и $\varepsilon \in (0, r - r_0)$ существует такая положительная постоянная $C(\varepsilon)$, что при всех натуральных n в круге $|z| \leq r_0$ справедлива оценка

$$|f^{(n)}(z)| \leq C(\varepsilon) \frac{n!(r - \varepsilon)}{(r - r_0 - \varepsilon)^{n+1}}.$$

Доказательство. Вследствие интегральной формулы Коши для любого $z \in \mathbb{C}$, лежащего в круге $|z| \leq r_0$, при всех натуральных n выполняется равенство

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|t|=r-\varepsilon} \frac{f(t)}{(t - z)^{n+1}} dt.$$

Отсюда следует, что

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!}{2\pi} 2\pi(r - \varepsilon) \max_{|t|=r-\varepsilon} \frac{|f(t)|}{|t - z|^{n+1}} \leq C(\varepsilon) \frac{n!(r - \varepsilon)}{(r - r_0 - \varepsilon)^{n+1}},$$

где $C(\varepsilon) = \max_{|t|=r-\varepsilon} |f(t)|$. Лемма доказана.

Докажем достаточность в теореме 2. Предположим, что функция $g_1(u)$ аналитична в круге $\{u \in \mathbb{C}, |u - u_*| < R + 2\sqrt{R_1}\}$. Покажем, что для любого $\delta \in (0, R)$ ряд в правой части (2.23) сходится равномерно на бикруге

$$E(\delta) = \{\rho, u \in \mathbb{C}, \quad |\rho| \leq R_1, \quad |u - u_*| \leq R - \delta\}. \quad (2.24)$$

Рассмотрим величины

$$\beta_k = \sup \left\{ \frac{|\rho|^{k+1}}{k!(k+1)!} |g_1^{(2k)}(u)|, \quad |\rho| \leq R_1, |u - u_*| \leq R - \delta \right\}.$$

В силу только что доказанной леммы, в которой надо положить $f(z) = g_1(z + u_*)$, $z = u - u_*$, $r = R + 2\sqrt{R_1}$, $r_0 = R - \delta$, для любого $\varepsilon \in (0, \delta)$ существует такая положительная постоянная $C(\varepsilon)$, что при всех натуральных k на круге $|u - u_*| \leq R - \delta$ имеет место оценка

$$|g_1^{(2k)}(u)| \leq \frac{C(\varepsilon)(2k)!(R + 2\sqrt{R_1} - \varepsilon)}{(2\sqrt{R_1} + \delta - \varepsilon)^{2k+1}}.$$

Значит,

$$\beta_k \leq (R_1)^{k+1} \frac{C(\varepsilon)(2k)!(R + 2\sqrt{R_1} - \varepsilon)}{k!(k+1)!(2\sqrt{R_1} + \delta - \varepsilon)^{2k+1}} =: \alpha_k.$$

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ сходится. Действительно, для любого $k \geq 1$

$$\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} = \frac{R_1(2k+1)(2k+2)}{(k+1)(k+2)(2\sqrt{R_1} + \delta - \varepsilon)^2}$$

и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} = \frac{R_1}{(\sqrt{R_1} + \frac{\delta - \varepsilon}{2})^2} < 1.$$

Таким образом, ряд (2.23) равномерно сходится на множестве $E(\delta)$ (см.(2.24)) для любого $\delta \in (0, R)$. Поэтому в бикруге (2.22) функция $G(h, u)$ действительно аналитична.

Теперь докажем необходимость. Предположим, что функция $G(\rho, u)$ аналитична в бикруге (2.22) и ряд (2.23) сходится по ρ в круге $\{\rho \in \mathbb{C}, |\rho| < R_1\}$ для любого u , удовлетворяющего неравенству $|u - u_*| < R$. Поскольку $g_1(u) = \frac{\partial G}{\partial \rho}(0, u)$, $|u - u_*| < R$, то функция $g_1(u)$ аналитична в круге

$\{u \in \mathbb{C}, |u - u_*| < R\}$. Покажем, что ее можно аналитически продолжить в круг $\{u \in \mathbb{C}, |u - u_*| < R + 2\sqrt{R_1}\}$ с помощью степенного ряда

$$g_1(u) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{g_1^{(j)}(u)}{j!} \rho^j. \quad (2.25)$$

Прежде всего, вследствие представления (2.23) для любого $u \in \mathbb{C}$ такого, что $|u - u_*| < R$, при каждом натуральном k справедливо равенство

$$g_1^{(2k)}(u) = k! \frac{\partial^{k+1} G}{\partial \rho^{k+1}}(0, u).$$

Зафиксируем числа $t \in (0, R)$, $t_1 \in (t, R)$ и числа $r_0 \in (0, 2\sqrt{R_1})$, $\rho \in (r_0, 2\sqrt{R_1})$. Из равенств

$$\frac{\partial^{k+1} G}{\partial \rho^{k+1}}(0, u) = \frac{(k+1)!}{2\pi i} \int_{|\rho|=\rho^2/4} \frac{G(\rho, u)}{\rho^{k+2}} d\rho$$

следует, что для любого $u \in \mathbb{C}$, для которого $|u - u_*| \leq t_1$, при всяком натуральном $k \geq 1$

$$|g_1^{(2k)}(u)| \leq \frac{k!(k+1)!M(\rho, t_1)}{(\rho^2/4)^{k+1}} = \frac{4^{k+1}k!(k+1)!}{\rho^{2k+2}} M(\rho, t_1), \quad (2.26)$$

где

$$M(\rho, t_1) := \max\{|G(\rho, u)|, |\rho| \leq \rho^2/4, |u - u_*| \leq t_1\}.$$

Функция $g^{(2k+1)}(u)$ является производной функции $g^{(2k)}(u)$. Поэтому, используя формулу Коши

$$g^{(2k+1)}(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|v-u_*|=t_1} \frac{g^{(2k)}(v)}{(v-u)^2} dv,$$

получим, что для любого натурального $k \geq 1$ и всякого $u \in \mathbb{C}$ такого, что $|u - u_*| \leq t$, выполняется неравенство

$$|g_1^{(2k+1)}(u)| \leq \frac{t_1 4^{k+1} k!(k+1)! M(\rho, t_1)}{(t_1 - t)^2 \rho^{2k+2}}. \quad (2.27)$$

Вследствие неравенства (2.26) для любого натурального $k \geq 1$

$$\sup \left\{ \frac{|g^{(2k)}(u)|}{(2k)!} |\rho|^{2k}, |u - u_*| \leq t_1, |\rho| \leq r_0 \right\} \leq M(\rho, t_1) \frac{4^{k+1} k!(k+1)!}{(2k)! \rho^{2k+2}} (r_0)^{2k},$$

откуда следует (см. доказательство достаточности), что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{g^{(2k)}(u)}{(2k)!} \rho^{2k}$$

для любого $t_1 \in (0, R)$ и каждого $u \in \mathbb{C}$ из круга $|u - u_*| \leq t_1$, сходится равномерно на круге $\{\rho \in \mathbb{C}, |\rho| \leq r_0\}$. Значит, он сходится для любых $u, \rho \in \mathbb{C}$ таких, что $|u - u_*| < R, |\rho| < 2\sqrt{R_1}$.

Аналогично, с помощью неравенств (2.27), показывается, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{g^{(2k+1)}(u)}{(2k+1)!} \rho^{2k+1}$$

также сходится для всех $u, \rho \in \mathbb{C}$, таких, что $|u - u_*| < R, |\rho| < 2\sqrt{R_1}$. Таким образом, для всех $u, \rho \in \mathbb{C}$, удовлетворяющих неравенствам $|u - u_*| < R, |\rho| < 2\sqrt{R_1}$, ряд (2.25) сходится.

При этом его сумма для каждого $u \in \mathbb{C}$ из круга $|u - u_*| < R$ аналитически продолжает функцию $g_1(w)$ в круг $\{w \in \mathbb{C}, |w - u| < 2\sqrt{R_1}\}$. Поэтому $g_1(u)$ аналитически продолжима в больший круг $\{u \in \mathbb{C}, |u - u_*| < R + 2\sqrt{R_1}\}$.

Теорема 2.1 доказана.

Если зафиксировать сумму $R + 2\sqrt{R_1}$, а положительные числа R и R_1 менять, то можно получить более широкую область, в каждой точке которой ряд Тейлора $G(\rho, u)$ вида (2.23) сходится (к $G(\rho, u)$) и функция $G(\rho, u)$ аналитическая. Эта область является объединением бикругов (2.22) с центром в точке $\rho = 0, u = u_*$, о которых идет речь в предыдущей теореме.

Зафиксируем положительное число R_0 . Определим область в \mathbb{C}^2

$$P(R_0) = \{\rho, u \in \mathbb{C}, |u - u_*| + 2\sqrt{|\rho|} < R_0\}.$$

Ясно, что

$$P(R_0) = \bigcup_{R, R_1 > 0, R + 2\sqrt{R_1} = R_0} D(R_1, R).$$

Предположим, что функция $g_1(u)$ аналитична в круге $\{u \in \mathbb{C}, |u - u_*| < R_0\}$. Пусть функция $G(\rho, u)$ задается рядом (2.23). Возьмем точку (ρ, u) в $P(R_0)$. Найдутся числа $R, R_1 > 0$, для которых $R + 2\sqrt{R_1} = R_0$ и (ρ, u) принадлежит бикругу $D(R_1, R)$. По **теореме 2.1** ряд в правой части формулы (2.23) сходится

в каждой точке $D(R_1, R)$, функция $G(\rho, u)$ аналитична в $D(R_1, R)$ и является решением уравнения (2.20). Получили такое

Следствие. Пусть функция $g_1(u)$ аналитична в круге $\{u \in \mathbb{C}, |u - u_*| < R_0\}$, где R_0 – положительное число. Тогда ряд в правой части (2.23) сходится в каждой точке из $P(R_0)$ к функции $G(\rho, u)$, являющейся решением уравнения (2.20), аналитическим в области $P(R_0)$.

Замечание 2.1. А. И. Янушаускасом в статье [132] и монографии [133, Глава 6, §5] описывались аналитические решения ряда эллиптических и вырождающихся уравнений в частных производных. Эти решения для части из рассмотренных в [132], [133] уравнений строятся в виде рядов по одной из независимых переменных, сходимость которых обосновывается с помощью метода мажорант. В частности, в этих публикациях изучена структура решений уравнения

$$s(v_k)_{ss} + (k+1)(v_k)_s + (v_k)_{zz} = 0, \quad (2.28)$$

(в нумерации из [132] уравнение (16) для случая оператора $L = \frac{\partial^2}{\partial z^2}$), при $k = 1$ сводящегося к исследуемому нами уравнению (2.20).

Но для уравнения (2.28) в [132] нет обоснования сходимости соответствующих рядов, не описана область, в которой рассматриваемые ряды сходятся, не указана ее зависимость от определяющей функции $v_0^{(k)}(z)$. Доказанные же нами **теорема 2.1** и ее **следствие** позволяют проследить связь областей специального вида, в которых решение $G(h, u)$ уравнения (2.20) и коэффициент $g_1(u)$ аналитичны.

2.3 Замечание о случае $\alpha(\rho) \equiv 0$

Тип уравнения (1.12)

$$\rho B_{\rho\rho} + 2B_\rho = \alpha(\rho)B_{uu}$$

определяется знаком соотношения $D = \rho\alpha(\rho)$. В первой главе рассматривалась ситуация, когда $\rho > 0$ и $\alpha(\rho) > 0$, в третьей главе – $\rho > 0$ и $\alpha(\rho) < 0$ (точнее, в первом уравнении системы (1.1) перед $\alpha(\rho) > 0$ будет поставлен знак минус, а не плюс), а в текущей главе – $\rho \rightarrow 0$, $\alpha(\rho) > 0$ и $\alpha(\rho) < 0$. Настоящее замечание касается случая $\alpha(\rho) \equiv 0$ или, что равносильно, $p(\rho) \equiv \text{const}$. В таком случае уравнение (1.12) редуцируется к обыкновенному дифференциальному уравнению с независимой переменной ρ .

Тем самым будут рассмотрены все три возможности знака $\alpha(\rho)$. Кроме того, как было показано в **Замечании 1.6** к $\alpha(\rho) \equiv 0$ приводит – противоречащее положительности массы газа $m > 0$ – требование $r_* = l_* = 0$ в изучении газа Чаплыгина.

При $\alpha(\rho) \equiv 0$ система (1.1) принимает вид

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0, \\ \rho_t + (\rho u)_x = 0, \end{cases} \quad (2.29)$$

где первое уравнение – уравнение Хопфа (или безвязкостное уравнение Бюргера), общее локально бесконечно дифференцируемое (или, при аналитичности начальных данных – аналитическое) решение которого представимо в виде

$$x - u(t - t_0) = q(u),$$

где $q(u)$ – произвольная локально бесконечно дифференцируемая (аналитическая) функция.

В силу возможности совершить сдвиг $\tau = t - t_0$ далее без ограничения общности считаем, что начальный момент времени $t_0 = 0$. Таким образом, в силу соотношений (1.10) общее решение системы (2.29) имеет вид

$$\begin{aligned} x - ut &= q(u), \\ \rho &= \frac{p'(u)}{t + q'(u)}, \end{aligned} \quad (2.30)$$

где $p(u)$ – произвольная локально бесконечно дифференцируемая (аналитическая) функция.

Нетрудно видеть, что тогда типичные (в смысле математической теории катастроф) особенности решений (2.29) по существу определяются только лишь кривой $t = -q'(u)$, а плотность ρ обращается в бесконечность на этой кривой.

В самом деле, применяя теорему о неявной функции к первой строке (2.30), т.е. к уравнению

$$x - ut = q(u),$$

определим каустическую кривую

$$-t = q'(u),$$

в малой окрестности которой уравнение разрешимо относительно u , но на которой плотность ρ , очевидно, обращается в бесконечность, так как на ней обращается в нуль знаменатель дроби

$$\rho = \frac{p'(u)}{t + q'(u)}.$$

Покажем, что для решений u системы (2.29) типичны особенности типа складки и сборки.

Пусть, как и ранее, u_* , t_* , x_* – точка градиентной катастрофы и $\Delta u = u - u_*$, $\Delta t = t - t_*$, $\Delta x = x - x_*$. Напишем в окрестности этой точки тейлоровское разложение

$$x_* + \Delta x - (t_* + \Delta t)[u_* + \Delta u] = q_0 + q_1 \Delta u + \frac{q_2}{2}(\Delta u)^2 + \frac{q_3}{6}(\Delta u)^3 + \sum_{i \geq 4} \frac{q_i}{i!}(\Delta u)^i,$$

откуда следует, что

$$x_* - t_* u_* = q_0,$$

и, кроме того, мы предполагаем, что условия теоремы о неявной функции нарушаются и при рассмотрении ситуации «общего положения» мы накладываем первое из допустимых двух ограничений в виде равенств

$$-t_* = q_1.$$

С учетом этих равенств получаем, что

$$\Delta x - u_* \Delta t = \Delta t \Delta u + \frac{q_2}{2}(\Delta u)^2 + \frac{q_3}{6}(\Delta u)^3 + \sum_{i \geq 4} \frac{q_i}{i!}(\Delta u)^i.$$

Для удобства обозначим

$$\xi = \Delta x - u_* \Delta t.$$

Далее возможны две ситуации – с наложением второго (и последнего допустимого в ситуации «общего положения») ограничения в виде равенства на коэффициент ряда q_i или без наложения второго ограничения. Рассмотрим сначала ситуацию без наложения второго ограничения.

Ситуация 1. $q_1 = -t_*$, $q_2 \neq 0$. Тогда по лемме Морса существует такая локальная невырожденная обратимая замена $\Delta u = \Delta u(\tilde{u})$, что

$$\xi = \Delta t \tilde{u} + \frac{q_2}{2} \tilde{u}^2,$$

а после сдвига $\tilde{u} = U - \frac{\Delta t}{q_2}$ и переобозначения $\xi + \frac{(\Delta t)^2}{2q_2} = \chi$ получается каноническое уравнение складки

$$\chi = \frac{q_2}{2} U^2.$$

Ситуация 2. $q_1 = -t_*$, $q_2 = 0$, $q_3 \neq 0$. Тогда существует [92, Глава 4, §3, Теорема 4.4] такая локальная невырожденная обратимая замена $\Delta u = \Delta u(U)$, что получается каноническое уравнение сборки

$$\xi = \Delta t U + U^3.$$

В качестве примеров для описанных выше складок и сборок можно рассмотреть решения уравнения Хопфа с функциями $q(u) = A_2 u^2$ (сделав затем сдвиг $u = U - \frac{t}{2A_2}$) и, соответственно, $q(u) = A_3 u^3$, где A_2, A_3 – ненулевые постоянные.

Зададимся вопросом о поведении ρ при стремлении к бесконечности, т.е. как ведет себя решение ρ при стремлении к каустической кривой, определяемой с помощью теоремы о неявной функции посредством подстановки

$$t = -q'(u_k)$$

в решение:

$$x + tq'(t)^{-1} = q(-q'(t)^{-1}),$$

где $q'(t)^{-1}$ – производная обратной функции. Условия теоремы об обратной функции применимы, так как функция $q(u)$ локально является непрерывно дифференцируемой и обладает ненулевой первой производной.

Например, для решения

$$x - ut = u^3$$

каустическая кривая это

$$x = \pm \frac{4}{\sqrt{27}} t^{3/2}.$$

Используем далее обозначения $\Delta x = x - x_k$, $\Delta t = t - t_k$, $\Delta u = u - u_k(t)$, где нижний индекс k обозначает принадлежность точки к каустической кривой. Для экономии места будем писать u_k вместо $u_k(t)$.

С учетом равенства $t = -q'(u_k)$ теилоровское разложение решения уравнения Хопфа в окрестности (t_k, x_k) имеет вид

$$\Delta x = \frac{q_2}{2} (\Delta u)^2 + \frac{q_3}{6} (\Delta u)^3 + \sum_{i \geq 4} \frac{q_i}{i!} (\Delta u)^i.$$

Пусть $q_2 \neq 0$. Выразим теперь Δu через t, x посредством ряда

$$\Delta u = u_1(t)\sqrt{\Delta x} + u_2(t)\Delta x + u_3(t)(\Delta x)^{3/2} + \sum_{i \geq 4} (\Delta x)^{i/2},$$

являющимся сходящимся при локальной аналитичности $q(u)$ и, вообще говоря, асимптотическим при локальной бесконечной дифференцируемости $q(u)$.

Из подстановки и сравнения линейно независимых членов определим, что

$$\Delta u = \pm \sqrt{\frac{2}{q_2}} \sqrt{\Delta x} - \frac{q_3}{3q_2^2} \Delta x + \sum_{i \geq 3} u_i(t)(\Delta x)^{i/m},$$

а после подстановки в решение ρ заключаем, что

$$\rho = O((\Delta x)^{-1/2}),$$

и, в свою очередь,

$$\sqrt{\rho} = O((\Delta x)^{-1/4}).$$

В оптическом смысле обращение ρ в бесконечность на каустической кривой означает резкое возрастание интенсивности света в точках фокусировки лучей. Занимательно отметить, что согласно древнегреческим легендам, Архимед использовал [134, Введение, стр. 22], [135, Глава 3, стр. 47] этот факт и уничтожил римский флот, атакующий Сиракузы, создав систему зеркал, действующих как параболический отражатель. Впрочем, этому нет [136] ни исторических подтверждений, ни успешных повторений опыта.

3 Особенности сечения эллиптической омбилики D_4^- решений эллиптической системы уравнений нелинейной геометрической оптики

Эллиптический вариант системы уравнений нелинейной геометрической оптики (НГО)

$$\begin{cases} u_t + uu_x - \alpha(\rho)\rho_x = 0, \\ \rho_t + (\rho u)_x = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

на функции $u = u(t, x)$ и $\rho = \rho(t, x) \geq 0$, отвечающий случаю знакоположительной функции $\alpha(\rho)$, в приложениях чаще всего служит для описания квазиклассических приближений уравнений типа фокусирующего нелинейного уравнения Шрёдингера (НУШ)

$$-i\varepsilon\Psi_t = \varepsilon^2\Psi_{xx} + K(|\Psi|^2)\Psi \quad (0 < \varepsilon \ll 1). \quad (3.2)$$

Второе из уравнений системы НГО имеет смысл закона сохранения. В первом уравнении слагаемые $u_t + uu_x$ соответствуют обычному уравнению эйконала, а третий член связан с нелинейным самовоздействием поля [110, §1.3, стр. 15]. Система (3.1) отличается от системы (1.1) знаком минус вместо знака плюс перед слагаемым $\alpha(\rho)\rho_x$.

В отличие от гиперболического варианта, решениям эллиптической системы (3.1) с $\alpha(\rho) > 0$ присуще не образование ударных волн, а разбиение на отдельные самостягивающиеся сгустки, разделенные промежутками нулевой интенсивности, на которых $\rho(t, x) \equiv 0$ [110], [125], [126, Глава V, §26, стр. 87-90].

Из второго уравнения системы (3.1) после интегрирования по переменной x следует, что для каждого самостягивающегося сгустка площадь $\int \rho(t, x)dx$ не зависит от t . А значит – в силу неотрицательности $\rho(t, x)$ – в таких сгустках с течением времени неизбежно возникают области больших перепадов значений ρ . И, в частности, для решений системы НГО (3.1) оказываются характерными точки (t_*, x_*) градиентных катастроф (ГК) – в них при конечных значениях $u(t_*, x_*) = u_*$ и $\rho(t_*, x_*) = \rho_* > 0$ первые производные решений данной системы обращаются в бесконечность.

Такая ГК для случая $\alpha(\rho) \equiv \text{const} > 0$ впервые четко была описана в работе Б. А. Дубровина, Т. Гравы и К. Клейна [100]. Для данного частного случая в [100] было фактически продемонстрировано, что рассматриваемые в этой статье точки ГК возникают как типичные с точки зрения идеологии математической теории катастроф [77], [78], [79] – [82], [91] – [93] омбилические особенности проектирования на (t, x) -плоскость двумерного многообразия, определяемого гладкими решениями $t(u, \rho)$, $x(u, \rho)$ линейной системы

$$\begin{cases} x_\rho = ut_\rho + \alpha(\rho)t_u, \\ x_u = ut_u - \rho t_\rho, \end{cases} \quad (3.3)$$

которая из системы НГО (3.1) возникает в результате применения преобразования годографа.

Отметим, что ранее в статье [73] такой подход был использован для описания сингулярностей типа сборки решений эллиптической системы (3.1), которые в ситуации «общего положения» отвечают процессам самопроизвольного появления – первоначально в виде точек – областей провала интенсивности $\rho = 0$.

При этом как выводы [73], так и выводы [100] были выполнены на уровне рассуждений, опирающихся лишь на формальные асимптотические решения системы (3.1). И если результаты [73] недавно были строго обоснованы в [104] (на основе этой публикации написана предыдущая глава) для случая $\alpha(\rho) \equiv \text{const} > 0$, то аналогичная задача строго обоснования упомянутого выше вывода авторов [100] до настоящего времени решена не была. В настоящей главе проводится обоснование уточнения этого вывода для общего случая локально аналитической и положительной в окрестности точки $\rho_* > 0$ функции $\alpha(\rho)$.

Описываются решения эллиптической системы (3.1) в окрестностях их точек ГК, трактуемых – как и в [100] – как типичные с точки зрения математической теории особенностей гладких отображений сингулярные точки, которые образуются при обращении в нуль якобиана

$$j = x_u t_\rho - x_\rho t_u \quad (3.4)$$

гладких решений (3.3).

При преобразовании годографа справедливы соотношения (см., например,

[109, Лекция 16]) (1.70)

$$\begin{aligned} u_x &= Jt_\rho, & u_t &= -Jx_\rho, \\ \rho_x &= -Jt_u, & \rho_t &= Jx_u, \\ J &= u_x\rho_t - u_t\rho_x, & j &= x_ut_\rho - x_\rho t_u, & J &= j^{-1} \end{aligned}$$

из которых следует, что данное преобразование квазилинейную систему (3.1) переводит в линейную систему (3.3). Из вида (1.8) следует, что при конечности t_u , t_ρ , x_u , x_ρ обращение в нуль якобиана (3.4) в конечных точках ($u = u_*$, $\rho = \rho_* > 0$) будет сопровождаться обращением в бесконечность производных решений системы (3.1) при том, что значения самих решений u , ρ в этой точке конечны.

Из вида линейной системы (3.3) вытекает равенство для этого якобиана

$$j = -\rho t_\rho^2 - \alpha(\rho)t_u^2. \quad (3.5)$$

Посредством непротиворечивых соотношений (1.10)

$$\begin{aligned} t &= B_u, \\ x &= uB_u - B - \rho B_\rho \end{aligned}$$

решения линейной системы (3.3) могут быть [110, Глава I, §2, 2.1, формула 2.7, стр. 18] выражены через решения скалярного уравнения

$$\alpha(\rho)B_{uu} + \rho B_{\rho\rho} + 2B_\rho = 0, \quad (3.6)$$

которое при положительных значениях ρ является эллиптическим.

Отметим, что для эллиптических систем вида (3.1) не существует аналогов инвариантов Римана (1.4) в силу отрицательности квадрата скорости звука.

Нас далее будет интересовать поведение решения (3.1) в окрестности конечной точки (t_* , x_* ; u_* , $\rho_* > 0$), в которой якобиан (3.5) обращается в нуль. Для описания такого поведения будут использоваться разложения Тейлора ($\Delta u = u - u_*$, $\Delta \rho = \rho - \rho_*$, b_{ij} – постоянные коэффициенты)

$$B(u, \rho) = b_{00} + b_{10}\Delta u + b_{01}\Delta \rho + \sum_{i+j \geq 2} b_{ij}(\Delta u)^i(\Delta \rho)^j \quad (3.7)$$

решений эллиптического уравнения (3.6) в точках ($u = u_*$, $\rho = \rho_* > 0$).

Вновь, следуя [101, Введение, стр. 18, формула (44)], введем в рассмотрение потенциальную локально аналитическую функцию (1.20)

$$F(u, \rho; t, x) = \rho(ut - x - B(u, \rho)),$$

чьи критические точки $F_u = 0$, $F_\rho = 0$ определяются равенством (1.10), т.е. решением системы (3.3), связанным с решением (3.1) преобразованием годографа. Аналитичность (1.20) в данной главе будет обоснована далее.

При используемом нами подходе исследование типичных особенностей решений (3.1) в окрестности точки ГК сводится к задаче исследования типичных вырожденных критических точек функции (1.20), которая помимо двух основных независимых переменных u и ρ , зависит еще от двух параметров t и x , которые в терминологии математической теории катастроф называются *управляющими параметрами* [77, Лекция 1, Определение 2, стр. 11], [80, Часть 1, Глава 1, стр. 9], [92, Глава 5, §2, стр. 109].

Научным руководителем диссертанта Б. И. Сулеймановым в совместной публикации [106] было сделано следующее утверждение, обосновывающее необходимость аналитичности решений уравнения (3.6) и, как следствие, фигурирующих в дальнейшем функций (1.10) и (1.20).

Э. Пикар доказал [111], что внутри области своей определенности всякое непрерывное вместе со всеми производными до второго порядка решение уравнения

$$az_{xx} + 2bz_{xy} + cz_{yy} + dz_x + ez_y + fz = F,$$

где a, b, c, d, e, f, F – аналитические функции переменных x и y , аналитично по x и y при выполнении условия эллиптичности $ac > b^2$.

Следовательно, все решения (3.6) в некоторых окрестностях рассматриваемых нами точек $u = u_*$, $\rho = \rho_* > 0$ обязательно должны быть аналитическими функциями, и ряды (3.7) необходимо должны иметь ненулевой радиус сходимости. В частности, сходящимися должны быть и ряды Тейлора

$$B(u, \rho_*) = b_{00} + b_{10}\Delta u + b_{20}(\Delta u)^2 + b_{30}(\Delta u)^3 + \sum_{i>3} b_{i0}(\Delta u)^i, \quad (3.8)$$

$$B_\rho(u, \rho_*) = b_{01} + b_{11}\Delta u + b_{21}(\Delta u)^2 + \sum_{i\geq 3} b_{i1}(\Delta u)^i, \quad (3.9)$$

по коэффициентам которых остальные коэффициенты b_{ij} разложений Тейлора (3.7) находятся однозначно. Понятно, что и, наоборот, в силу теоремы Коши-Ковалевской из сходимости рядов (3.8), (3.9) будет следовать также сходимость рядов (3.7).

Итак, в дальнейшем мы рассматриваем ряды (3.8), (3.9), *сходящиеся* в некоторых окрестностях точек $(u = u_*, \rho = \rho_* > 0)$. Именно поэтому функция (1.20)

в настоящей главе именно локально аналитическая, а не локально бесконечно дифференцируемая.

Обращение в этих точках якобиана (3.4) в нуль в силу справедливости тождества (3.5) и соотношений (1.10) означает, что

$$j(u_*, \rho_*) = -\rho_* b_{11}^2 - 16b_{20}^2 = 0,$$

то есть

$$b_{20} = b_{11} = 0. \quad (3.10)$$

Из уравнения (3.6) и двух равенств (3.10) получаем следующие три соотношения на коэффициенты b_{ij} :

$$b_{02} = -\frac{b_{01}}{\rho_*}, \quad b_{12} = -\frac{12b_{30}}{\rho_*}, \quad b_{03} = \frac{b_{01}}{(\rho_*)^2} - \frac{4b_{21}}{3}. \quad (3.11)$$

Кроме того, из вида подстановок (1.10) следует справедливость равенств

$$\begin{aligned} t_* &= b_{10}, \\ x_* &= u_* t_* - b_{00} - \rho_* b_{01}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Разложение функции (1.20) в ряд Тейлора в окрестности $(u_*, \rho_*; t_*, x_*)$ с учетом соотношений (3.10)–(3.12) имеет вид

$$\begin{aligned} F &= \rho_*^2 b_{01} + \rho_*(u_* \Delta t - \Delta x) + \rho_* \Delta u \Delta t + \Delta \rho (u_* \Delta t - \Delta x) + \Delta u \Delta \rho \Delta t + \\ &+ b_{30}(12\Delta u (\Delta \rho)^2 - \rho_*(\Delta u)^3) + b_{21}(\frac{4}{3}(\Delta \rho)^3 - \rho_*(\Delta u)^2 \Delta \rho) + \\ &+ \sum_{i+j \geq 4} f_{ij}(\Delta u)^i (\Delta \rho)^j, \end{aligned} \quad (3.13)$$

где все постоянные f_{ij} однозначно вычисляются через ρ_* , а также коэффициенты α_k , b_{k0} и b_{k1} разложений Тейлора (1.2), (3.8) и (3.9).

Заметим, что от Δt , Δx зависят лишь линейные и единственный квадратичный член, а кубические слагаемые разбиты на пары, вид которых с точностью до растяжений совпадает с *генотипом* канонического ростка катастрофы типа эллиптической омбилики D_4^- [93, §13, Пример 13.6; §14, стр. 105].

На множестве *всех* гладких функций двух основных переменных и двух управляющих параметров такая вырожденность критических точек не типична – типичными на этом множестве являются [91, Глава 1, §1, 1.5, стр. 13],

[93, §6, стр. 44-45] лишь особенности складки A_2 и сборки A_3 , которые в главном порядке описываются решениями, соответственно, уравнений $y^2 + x = 0$ и $y^3 + x_1 u + x_2 = 0$. Однако на его подмножестве функций вида (1.20), определяемых аналитическими в окрестностях точек $(u = u_*, \rho = \rho_* > 0)$ решениями эллиптических уравнений (3.6), вырождения критических точек таких функций, которые соответствуют разложениям (3.13), в смысле идеологии математической теории катастроф уже оказываются типичными.

Действительно, общность положения при обращении якобиана (3.5) в нуль – т.е., выполнении равенства $b_{20} = b_{11} = 0$ – обеспечивается за счет выбора подходящих для этого значений двух постоянных u_*, ρ_* , находящихся в нашей власти за счет возможности вариации *двух* управляющих параметров t и x . На этом свобода выбора исчерпывается, и в ситуации «общего положения» мы не можем наложить других ограничений в виде равенств на коэффициенты b_{ij} .

Поэтому далее можно считать, что одновременно $b_{21} \neq 0$ и $b_{30} \neq 0$. Но в дальнейшем мы будем исходить лишь из еще одного дополнительного ограничения $b_{30} \neq 0$. (Вариант с $b_{30} = 0$ и $b_{21} \neq 0$ простыми переобозначениями и растяжениями сводится к варианту с $b_{30} \neq 0, b_{21} = 0$.) Помимо равенств (3.10) и, естественно, ограничений, обеспечивающих сходимость рядов Тейлора (3.8), (3.9), никаких других ограничений на коэффициенты этих рядов Тейлора далее не накладывается.

Замечание 3.1. Данная ситуация во многом аналогична той, что описана в Примере раздела 1.8 монографии [91]:

«Рассмотрим отображение плоскости комплексного переменного $z = x_1 + ix_2$ на плоскость комплексного переменного $w = y_1 + iy_2$, заданное формулой $w = z^2$, как гладкое отображение двумерной вещественной плоскости на двумерную вещественную плоскость:

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1^2 - x_2^2, \\ y_2 &= 2x_1x_2. \end{aligned}$$

... Мы заключаем, что рассматриваемое отображение имеет в начале координат особенность, отличную от складки и сборки. Следовательно, по теореме Уитни оно неустойчиво, и его особенность в нуле при малом шевелении должна распасться на складки и сборки.

В классе ростков голоморфных отображений $\mathbb{C}^1 \rightarrow \mathbb{C}^1$ особенность $w = z^2$ устойчива.»

Из процитированного следует и устойчивость в классе аналитических функций подобных ГК вещественных решений линеаризации системы (3.1)

$$\begin{cases} u_t + u_* u_x - 4\rho_x = 0, \\ \rho_t + u_* \rho_x + \rho_* u_x = 0, \end{cases} \quad (3.14)$$

которая простыми растяжениями сводится к системе Коши-Римана

$$\begin{aligned} (x_1)_{y_1} &= (x_2)_{y_2}, \\ (x_1)_{y_2} &= -(x_2)_{y_1}. \end{aligned}$$

Описываемая окрестность точки типичной ГК решений системы НГО (3.1) в главном порядке определяется корнями канонических уравнений, которые схожи с уравнениями

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1^2 - x_2^2, \\ y_2 &= 2x_1 x_2 \end{aligned}$$

особенности комплексной складки. Как уже было отмечено в [103] эта сингулярность системы (3.1) *наследуется* из типичной сингулярности решений ее линеаризации (3.14) – у соответствующих ростков один и тот же генотип [93, §13, Пример 13.6, стр. 102; §14, стр. 105].

Невырожденным линейным преобразованием (3.18) кубическую форму

$$b_{30}(12\Delta u(\Delta\rho)^2 - \rho_*(\Delta u)^3) + b_{21}\left(\frac{4}{3}(\Delta\rho)^3 - \rho_*(\Delta u)^2\Delta\rho\right) \quad (3.15)$$

из второй строки правой части формулы (3.13) приведем к виду

$$-b_{30}\rho_*(p^2q - \frac{q^3}{3}). \quad (3.16)$$

Для этого, все еще считая, что $b_{30} \neq 0$, кубическое уравнение

$$b_{30}(12\Delta u(\Delta\rho)^2 - \rho_*(\Delta u)^3) + b_{21}\left(\frac{4}{3}(\Delta\rho)^3 - \rho_*(\Delta u)^2\Delta\rho\right) = 0 \quad (3.17)$$

разрешим относительно Δu . В изучаемой нами ситуации «общего положения» дискриминант [137, §9, Замечание 3] этого кубического уравнения

$$D = \frac{16}{3}\rho_*(\Delta\rho)^6(\rho_*b_{21}^2 + 36b_{30}^2)^2$$

при $\Delta\rho \neq 0$, очевидно, положителен, т.е. мы считаем, что, вообще говоря, коэффициенты b_{21} и b_{30} не обращаются в нуль одновременно – иначе бы в разложении (3.13) вообще не было бы кубических членов.

Поэтому [137, §9, стр. 142] при $\Delta\rho \neq 0$ данное кубическое уравнение обладает тремя различными вещественными корнями, а значит [92, Глава 2, §6, стр. 46-53], посредством невырожденных линейных преобразований вида

$$\begin{aligned}\Delta u &= u_1 p + u_2 q, \\ \Delta \rho &= \rho_1 p + \rho_2 q,\end{aligned}\tag{3.18}$$

кубический многочлен (3.15) действительно переводится в двучлен (3.16).

Для этого найдем корни кубического уравнения (3.17) тригонометрическим методом Виета [138, Chapter III, §7, стр. 36-37]:

$$(\Delta u)_k = \frac{\Delta \rho}{3b_{30}} \left[2\sqrt{(b_{21})^2 + \frac{36}{\rho_*}(b_{30})^2} \cos\left(\varphi + \frac{2(k-1)\pi}{3}\right) - b_{21} \right] \quad (k = 1, 2, 3),$$

где

$$\varphi = \frac{1}{3} \arccos \left(\frac{b_{21}}{\sqrt{(b_{21})^2 + \frac{36}{\rho_*}(b_{30})^2}} \right).$$

Следовательно, кубическую форму (3.15) можно переписать в виде

$$-\rho_* b_{30} (\Delta u + c_1 \Delta \rho) (\Delta u + c_2 \Delta \rho) (\Delta u + c_3 \Delta \rho),$$

где несовпадающие между собой постоянные c_k имеют вид

$$c_k = -\frac{1}{3b_{30}} \left[2\sqrt{(b_{21})^2 + \frac{36}{\rho_*}(b_{30})^2} \cos\left(\varphi + \frac{2(k-1)\pi}{3}\right) - b_{21} \right] \quad (k = 1, 2, 3). \tag{3.19}$$

А эта форма линейным невырожденным преобразованием

$$\begin{aligned}U &= (\Delta u + c_2 \Delta \rho) \frac{(c_1 - c_3)}{(c_2 - c_3)} \left(\frac{(c_2 - c_3)^2}{(c_1 - c_2)(c_1 - c_3)} \right)^{1/3}, \\ V &= (\Delta u + c_3 \Delta \rho) \frac{(c_1 - c_2)}{(c_2 - c_3)} \left(\frac{(c_2 - c_3)^2}{(c_1 - c_2)(c_1 - c_3)} \right)^{1/3}\end{aligned}\tag{3.20}$$

сводится к произведению

$$-\rho_* b_{30} UV(U - V),$$

которое, в свою очередь, после замен

$$U = \frac{\sqrt{3}}{6^{1/3}}p + \frac{1}{6^{1/3}}q,$$

$$V = \frac{\sqrt{3}}{6^{1/3}}p - \frac{1}{6^{1/3}}q$$

переводится как раз в двучлен (3.16). Из вида данной замены и из вида замены (3.20) следует, что невырожденное линейное преобразование, которое кубическую форму (3.15) переводит в форму (3.16), можно выбрать следующим:

$$\Delta u = \frac{\sqrt{3}c_1(c_2 - c_3)^{1/3}}{6^{1/3}(c_1 - c_2)^{2/3}(c_1 - c_3)^{2/3}}p - \frac{(c_1c_2 + c_1c_3 - 2c_2c_3)}{6^{1/3}(c_1 - c_2)^{2/3}(c_1 - c_3)^{2/3}(c_2 - c_3)^{2/3}}q,$$

$$\Delta \rho = -\frac{\sqrt{3}(c_2 - c_3)^{1/3}}{6^{1/3}(c_1 - c_2)^{2/3}(c_1 - c_3)^{2/3}}p + \frac{(2c_1 - c_2 - c_3)}{6^{1/3}(c_1 - c_2)^{2/3}(c_1 - c_3)^{2/3}(c_2 - c_3)^{2/3}}q. \quad (3.21)$$

Теперь заменой

$$\tilde{F} = -\frac{(F - (\rho_*)^2 b_{01} - \rho_*(u_*\Delta t - \Delta x))}{b_{30}\rho_*}$$

разложение (1.20) переводится в сходящийся ряд, который в переменных p и q имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{F} = & (F_{10,10}\Delta t + F_{10,01}\Delta x)p + (F_{01,10}\Delta t + F_{01,01}\Delta x)q + \\ & F_{20}\Delta tp^2 + F_{11}\Delta tpq + F_{02}\Delta tq^2 + \\ & p^2q - \frac{q^3}{3} + \sum_{i+j \geq 4} F_{ij}p^i q^j, \end{aligned} \quad (3.22)$$

где

$$F_{10,10} = -\frac{\sqrt{3}(\rho_*c_1 - u_*)(c_2 - c_3)^{1/3}}{6^{1/3}\rho_*b_{30}(c_1 - c_2)^{2/3}(c_1 - c_3)^{2/3}},$$

$$F_{10,01} = -\frac{\sqrt{3}(c_2 - c_3)^{1/3}}{6^{1/3}\rho_*b_{30}(c_1 - c_2)^{2/3}(c_1 - c_3)^{2/3}},$$

$$F_{01,10} = \frac{u_*(2c_1 - c_2 - c_3) - \rho_*(c_1c_2 + c_1c_3 - 2c_2c_3)}{6^{1/3}\rho_*b_{30}(c_1 - c_2)^{2/3}(c_1 - c_3)^{2/3}(c_2 - c_3)^{2/3}},$$

$$F_{01,01} = \frac{(2c_1 - c_2 - c_3)}{6^{1/3}\rho_*b_{30}(c_1 - c_2)^{2/3}(c_1 - c_3)^{2/3}(c_2 - c_3)^{2/3}},$$

$$\begin{aligned}
F_{20} &= -\frac{6^{1/3}c_1(c_2 - c_3)^{2/3}}{2\rho_*b_{30}(c_1 - c_2)^{4/3}(c_1 - c_3)^{4/3}}, \\
F_{11} &= \frac{6^{1/3}((c_1)^2 - c_2c_3)}{\sqrt{3}\rho_*b_{30}(c_2 - c_3)^{1/3}(c_1 - c_2)^{4/3}(c_1 - c_3)^{4/3}}, \\
F_{02} &= -\frac{(2c_1 - c_2 - c_3)(c_1c_2 + c_1c_3 - 2c_2c_3)}{6^{2/3}\rho_*b_{30}(c_1 - c_2)^{4/3}(c_1 - c_3)^{4/3}(c_2 - c_3)^{4/3}},
\end{aligned}$$

а остальные постоянные F_{ij} также однозначно вычисляются по ρ_* , а также коэффициенты α_k , b_{k0} и b_{k1} сходящихся разложений Тейлора (1.2), (3.8) и (3.9).

Росток функции $\tilde{F}(u, \rho; t, x)$ в точке $(t = t_*, x = x_*)$ есть [91, §8, стр. 121] 2-параметрическая деформация ростка функции $\tilde{F}(u, \rho; t_*, x_*)$, задаваемой сходящимся рядом

$$\tilde{F}(u, \rho; t_*, x_*) = p^2q - \frac{q^3}{3} + \sum_{i+j \geq 4} F_{ij}p^i q^j.$$

Она посредством аналитических в окрестности точки $(y_1 = 0, y_2 = 0)$ диффеоморфизмов $y_j(p, q)$ сводится [96, первое предложение §2, определение 2.9, Леммы 5.1, 5.3] к канонической кубической форме

$$\tilde{F}(u, \rho; t_*, x_*) = y_1^2 y_2 - \frac{y_2^3}{3}.$$

Из теории особенностей гладких отображений известно, что каноническая нормальная форма

$$G = y_1^2 y_2 - \frac{y_2^3}{3} - k_3 y_2^2 - k_2 y_1 - k_1 y_2 + \gamma \quad (3.23)$$

с управляющими параметрами k_1, k_2, k_3 является R -миниверсальной (и, в частности, R -версальной).

Это означает [93, §13, Пример 13.6, стр. 102], [96, §2, Замечание 2.13, §8], [139] существование невырожденных обратимых локально аналитических в окрестности точки $y_1 = 0, y_2 = 0$ по переменным y_1, y_2 и аналитических в окрестности точки $(t = t_*, x = x_*)$ функций $p(y_1, y_2; t, x)$, $q(y_1, y_2; t, x)$, а также локально аналитических в окрестности точки $(t = t_*, x = x_*)$ функций $k_1(t, x)$, $k_2(t, x)$, $k_3(t, x)$ и $\gamma(t, x)$, гарантирующих выполнение в достаточно малой окрестности точки $(p = 0, q = 0, t = t_*, x = x_*)$ тождества

$$\tilde{F}(u, \rho; t, x) \equiv y_1^2 y_2 - \frac{y_2^3}{3} - k_3 y_2^2 - k_2 y_1 - k_1 y_2 + \gamma. \quad (3.24)$$

Найдем коэффициенты разложений

$$\begin{aligned}
p = & \sum_{m+n>0} a_{mn,00}(\Delta t)^m(\Delta x)^n + \\
& + y_1[1 + \sum_{m+n>0} a_{mn,10}(\Delta t)^m(\Delta x)^n] + y_2 \sum_{m+n>0} a_{mn,01}(\Delta t)^m(\Delta x)^n + \\
& \sum_{i+j \geq 2} \sum_{m+n \geq 0} a_{mn,ij}(y_1)^i(y_2)^j(\Delta t)^m(\Delta x)^n,
\end{aligned} \tag{3.25}$$

$$\begin{aligned}
q = & \sum_{m+n>0} b_{mn,00}(\Delta t)^m(\Delta x)^n + \\
& + y_1 \sum_{m+n>0} b_{mn,01}(\Delta t)^m(\Delta x)^n + y_2[1 + \sum_{m+n>0} b_{mn,10}(\Delta t)^m(\Delta x)^n] + \\
& \sum_{i+j \geq 2} \sum_{m+n \geq 0} b_{mn,ij}(y_1)^i(y_2)^j(\Delta t)^m(\Delta x)^n,
\end{aligned} \tag{3.26}$$

$$\begin{aligned}
k_i = & k_{i,10}\Delta t + k_{i,01}\Delta x + \sum_{m+n \geq 2} k_{i,mn}(\Delta t)^m(\Delta x)^n, \quad (i = 1, 2, 3), \\
\gamma = & \gamma_{10}\Delta t + \gamma_{01}\Delta x + \sum_{i+j \geq 2} \gamma_{ij}(\Delta t)^i(\Delta x)^j.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

этих локально аналитических функций.

Кроме постоянного коэффициента $b_{00,11}$, который может быть выбран произвольно (например, $b_{00,11} = 0$), все остальные эти коэффициенты однозначно определяются через коэффициенты разложения (3.22) в результате подстановки рядов (3.25), (3.26), (3.27) в форму (3.23) и приравнивания результата этой подстановки левой части тождества (3.24), задаваемой разложением (3.22):

$$\begin{aligned}
a_{00,20} = & -\frac{F_{31} + b_{00,11}}{2}, \quad a_{00,11} = -\frac{F_{40} + F_{22} + F_{04}}{2}, \\
a_{00,02} = & -\frac{F_{13} - b_{00,11}}{2}, \quad b_{00,20} = -F_{40}, \quad b_{00,02} = F_{04}, \\
a_{10,00} = & -\frac{1}{2}\left[F_{11} - \frac{F_{10,10}(F_{40} + F_{22} + F_{04})}{2} + F_{01,10}b_{00,11}\right], \\
a_{01,00} = & \frac{1}{2}\left[\frac{F_{10,01}(F_{40} + F_{22} + F_{04})}{2} - F_{01,01}b_{00,11}\right],
\end{aligned} \tag{3.28}$$

$$\begin{aligned}
b_{10,00} &= -F_{20} + F_{01,10}F_{40} + F_{10,10}\frac{(F_{31} + b_{00,11})}{2}, \\
b_{01,00} &= F_{01,01}F_{40} + F_{10,01}\frac{(F_{31} + b_{00,11})}{2}, \\
k_{1,10} &= -F_{01,10}, \quad k_{1,01} = -F_{01,01}, \quad k_{2,10} = -F_{10,10}, \quad k_{2,01} = -F_{10,01}, \\
k_{3,10} &= \frac{F_{10,10}(F_{13} + F_{31})}{2} + F_{01,10}(F_{40} - F_{04}) - F_{20} - F_{02}, \\
k_{3,01} &= \frac{F_{10,01}(F_{13} + F_{31})}{2} + F_{01,01}(F_{40} - F_{04}), \\
\gamma_{10} &= F_{00,10}, \quad \gamma_{01} = F_{00,01}, \quad \dots
\end{aligned} \tag{3.29}$$

При этом управляющий параметр k_3 представляется сходящимся рядом по натуральным степеням управляющих параметров k_1, k_2 :

$$\begin{aligned}
k_3 &= \kappa_{10}k_1 + \kappa_{01}k_2 + \sum_{i+j \geq 2} \kappa_{ij}k_1^i k_2^j, \\
\kappa_{10} &= \frac{(F_{40} - F_{04})[F_{10,01}F_{01,10} - F_{10,10}F_{01,01}] - F_{10,01}(F_{20} + F_{02})}{F_{10,10}F_{01,01} - F_{10,01}F_{01,10}} \\
\kappa_{01} &= \frac{\frac{(F_{13}+F_{31})}{2}[F_{01,10}F_{10,01} - F_{01,01}F_{10,10}] - F_{01,01}(F_{20} + F_{02})}{F_{10,10}F_{01,01} - F_{10,01}F_{01,10}}.
\end{aligned} \tag{3.30}$$

То есть потенциальная функция (1.20), разлагающаяся в сходящийся ряд (3.13), действительно локально сводится к форме (3.23) с коэффициентом k_3 , который при достаточно малых k_1, k_2 является аналитической функцией этих двух переменных, задаваемой сходящимся разложением (3.30).

А так как критические точки функции (1.20) посредством соотношений (1.10) задают решение (3.1) в окрестности точки градиентной катастрофы $(u_*, \rho_*; t_*, x_*)$, то данное решение системы НГО (3.1) локально представляется через зависящее от параметров k_1, k_2 решение системы уравнений

$$\begin{aligned}
y_1^2 - y_2^2 &= k_1 + 2k_3(k_1, k_2)y_2, \\
2y_1y_2 &= k_2,
\end{aligned} \tag{3.31}$$

определяющей согласно равенствам $G_{y_1} = 0, G_{y_2} = 0$ критические точки функции (3.23).

При независимости трех переменных k_i друг от друга эти уравнения совпадают с каноническими уравнениями катастрофы эллиптической омбилики D_4^- . В рассматриваемой же нами ситуации аналитической зависимости k_3 от перемен-

ных k_1 и k_2 уместно говорить о сечении этой канонической катастрофы теории особенностей гладких отображений.

В силу ранее сделанного **Замечания 3.1** делаем вывод о совпадении – с точностью до растяжений – генотипа особенностей решения уравнения Лапласа и генотипа только что описанной особенности типа D_4^- . Подобно гиперболическому случаю, исследованному в пунктах **1.1** и **1.2**, имеет место наследование генотипов.

Тем самым доказана

Теорема 3.1. Пусть коэффициент $\alpha(\rho)$ системы (3.1) – положительная локально аналитическая в окрестности точки $\rho = \rho_* > 0$ функция, разлагающаяся в ряд Тейлора (1.2). И пусть аналитическое в точке $(u = u_*, \rho = \rho_*)$ решение $B(u, \rho)$ скалярного эллиптического уравнения (3.6) и его производная $B_\rho(u, \rho)$ при $\rho = \rho_*$ задаются сходящимися в некоторой окрестности точки $u = u_*$ рядами Тейлора (3.8) и, соответственно, (3.9), коэффициенты b_{20} и b_{11} которых равны нулю, а коэффициент b_{30} отличен от нуля.

Тогда определяемое согласно (1.10) решение системы (3.1), которое принимает значение $u = u_*, \rho = \rho_*$ в точке $(t = t_*, x = x_*)$, задаваемой формулами (3.12), претерпевает в этой точке градиентную катастрофу. Данное решение системы (3.1) посредством сходящихся в достаточно малых окрестностях этих точек рядов (3.25), (3.26), (3.27), (3.28), (3.29) и формул (3.19), (3.21) выражается через решения системы алгебраических уравнений (3.31). Коэффициент k_3 этой системы при $t \rightarrow t_*$ и $x \rightarrow x_*$ является аналитической функцией $k_3(k_1, k_2)$, представляемой сходящимся рядом (3.30).

Доказанную теорему уточняет следующая, уточняющая вывод работы [100] по части возмущения генотипа особенности D_4^- .

Теорема 3.2. В условиях предыдущей теоремы функция $k_3(k_1, k_2)$, вообще говоря, не равна тождественно нулю.

Доказательство. Для доказательства продемонстрируем справедливость этого утверждения на примере описываемого ниже точного решения системы (3.1) из §7 статьи [100] (авторы которой получили, что для рассматриваемой ими ГК данного точного решения в уравнениях (3.31) функция k_3 равна нулю).

При наших обозначениях в работе [100, 7.1.1, формула (7.8)] в качестве эталонного рассматривалось решение задачи Коши для системы уравнений (3.1) при $\alpha(\rho) \equiv 4$ (система уравнений «перевернутой» (или «опрокинутой») мелкой

воды) с начальными данными

$$\begin{aligned} u(0, x) &= -2 \tanh(x), \\ \rho(0, x) &= (2 \cosh)^{-2}(x). \end{aligned}$$

Как следует из результатов [140] и [141], это решение задачи Коши задается формулами (1.10) через следующее точное решение уравнения (3.6)

$$B = \frac{u}{4\rho} - \frac{u}{8\rho} \sqrt{\frac{u^2}{4} + 4\rho} + \ln\left(\frac{\sqrt{\frac{u^2}{4} + 4\rho} - \frac{u}{2}}{2\sqrt{\rho}}\right). \quad (3.32)$$

Для такого B условие обращения якобиана (3.4) в нуль в точке $u = u_*$, $\rho = \rho_*$ принимает вид

$$\rho_* = -\frac{u_*^2}{8} + \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{4 - u_*^2}}{4}.$$

Пусть выбран знак плюс и $u_* = 0$. Тогда, в силу полученного условия и соотношений (1.10) в точке ГК

$$u_* = 0, \quad \rho_* = 1, \quad t_* = -\frac{1}{4}, \quad x_* = 0.$$

В окрестности точки ($u = 0, \rho = 16$) разложение точного решения (3.32) в ряд Тейлора принимает вид

$$B = -\frac{u}{4} + \frac{u(\Delta\rho)^2}{16} - \frac{u^3}{192} + \sum_{i+j \geq 4} b_{ij} u^i (\Delta\rho)^j,$$

где

$$\Delta\rho = \rho - 1, \quad b_{21} = 0, \quad b_{30} = -\frac{1}{192}.$$

В свою очередь, в окрестности точки ГК соответствующая потенциальная функция (1.20) раскладывается в ряд ($\Delta t = t + \frac{1}{4}$)

$$\begin{aligned} F &= -x - x\Delta\rho + \Delta t u + \Delta t u \Delta\rho - \\ &- \frac{u(\Delta\rho)^2}{16} + \frac{u^3}{192} + \frac{u(\Delta\rho)^3}{32} - \frac{u^3 \Delta\rho}{384} + \sum_{i+j \geq 5} f_{ij} u^i (\Delta\rho)^j, \end{aligned}$$

который заменами

$$\begin{aligned} \tilde{F} &= -64(F + x), \\ \Delta\rho &= \frac{p}{2}, \quad u = q \end{aligned}$$

приводится к виду (3.22):

$$\begin{aligned}\tilde{F} = & 32xp - 64\Delta tq - 32\Delta tpq + \\ & + p^2q - \frac{q^3}{3} - \frac{p^3q}{4} + \frac{pq^3}{12} + \sum_{i+j \geq 5} F_{ij} p^i q^j.\end{aligned}$$

Из вида коэффициентов полученного разложения

$$\begin{aligned}F_{10,01} &= 32, & F_{01,10} &= -64, \\ F_{20} &= F_{02} = F_{10,10} = F_{01,01} = F_{40} = F_{22} = F_{04} = 0, \\ F_{11} &= -32, & F_{31} &= -\frac{1}{4}, & F_{13} &= \frac{1}{12}\end{aligned}$$

в силу (3.30) следует вывод о том, что в разложении (3.30)

$$\kappa_{10} = 0, \quad \kappa_{01} = \frac{1}{12}.$$

Следовательно, в рассматриваемом примере $k_3 \not\equiv 0$. **Теорема 3.2** доказана.

Замечание 3.2. Причина расхождения этого заключения с выводами работы [100] состоит в том, что авторы [100] в своих формальных рассуждениях сразу фактически отбросили в ряде (3.22) сумму $\sum_{i+j \geq 4} f_{ij} \Delta u^i \Delta \rho^j$, через коэффициенты f_{ij} которой и выражаются коэффициенты ряда Тейлора функции $k_3(t, x)$ в точке $(t = t_*, x = x_*)$.

Замечание 3.3. У гиперболического варианта системы НГО (3.1), т.е. системы изоэнтропической газовой динамики (1.1) есть частный случай давления Бехерта-Станюковича $p = \frac{a^2}{3} \rho^3$. Как было доказано в пункте **1.3.2**, решениям системы (1.1) в таком случае присуща особенность омбилического типа D_4^+ , в канонических уравнениях которой управляющий параметр $k_3(t, x) \equiv 0$. В эллиптическом же случае $k_3 \not\equiv 0$ для произвольной положительной аналитической функции $\alpha(\rho)$ и в этом тоже проявляется принципиальное отличие между омбилическими особенностями решений систем газовой динамики (1.1) и нелинейной геометрической оптики (3.1).

Заключение

Диссертационная работа посвящена исследованию поведения решений квазилинейной системы одномерных уравнений изоэнтропической газовой динамики (0.1) и решений квазилинейной системы одномерных уравнений нелинейной геометрической оптики (0.2) в окрестности соответствующих конечных точек градиентных катастроф: таких, в которых первые производные решений обращаются в бесконечность, а сами решения при этом остаются конечными. Решения этих систем выражаются через решения канонических уравнений теории катастроф, получаемых из анализа локально бесконечно дифференцируемых (для системы НГО – аналитических) функций вида (0.7), зависящих дополнительно от параметров.

Основные результаты работы заключаются в следующем:

1. Решения системы уравнений идеальной одномерной изоэнтропической газовой динамики (0.1) в окрестности типичной омбилической точки градиентной катастрофы (соответствующей ситуации с наложением двух ограничений на коэффициенты разложения решения уравнения (0.10)) заданы в терминах решений канонических уравнений сечения гиперболической омбилики (1.25).

2. Показано, что с точностью до растяжений генотипы всех трех особенностей A_2 (1.58), A_3 (1.60), D_4^+ (1.62) решений линейного одномерного однородного волнового уравнения (к которому сводится линеаризация системы уравнений идеальной одномерной газовой динамики) совпадают с генотипами всех трех особенностей решений системы уравнений идеальной одномерной газовой динамики (0.1). Происходит наследование особенностей.

3. В окрестности типичной точки градиентной катастрофы типа сборки (при одном ограничении на коэффициенты разложения решения уравнения (0.10) при $p = p_0 - \frac{m^2}{\rho}$) решение системы уравнений идеальной одномерной газовой динамики в случае Чаплыгина (1.67) (нарушающего условие сильной нелинейности (1.7)) описано в терминах решений канонического уравнения сечения сборки (1.84). Этот вывод дополняет результат статьи [74], где газ Чаплыгина был оставлен за рамками анализа. Отмечено, что в данном случае, в отличие от более общего, происходит наследование не только генотипа, но и всей канониче-

ской нормальной формы катастроф A_2 , A_3 , типичных для решений волнового уравнения.

4. В окрестности типичной омбилической точки градиентной катастрофы (при двух ограничениях на коэффициенты разложения решения уравнения (0.10) при $p = \frac{a^2}{3}\rho^3$) описаны решения системы уравнений идеальной одномерной газовой динамики в случае Бехерта-Станюковича (1.91) (нарушающего условие более сильное, чем условие сильной нелинейности (1.6)) в терминах решений канонических уравнений сечения гиперболической омбилики (1.107). Отмечено, что в данном специфическом случае один из управляющих параметров канонической нормальной формы тождественно равен нулю.

5. В окрестности типичной точки градиентной катастрофы типа сборки (при одном ограничении на коэффициенты разложения решения уравнения (0.10)) решение системы уравнений идеальной одномерной газовой динамики (0.1) (и решение системы НГО (0.2) при замене $\rho \rightarrow -\rho$) описано в терминах решений канонического уравнения сборки (2.12) при стремлении плотности газа (в случае НГО – интенсивности) к нулю.

6. В окрестности типичной омбилической точки градиентной катастрофы (при двух ограничениях на коэффициенты разложения решения уравнения (0.12)) описаны решения системы уравнений нелинейной геометрической оптики (0.2) в терминах решений канонических уравнений сечения эллиптической омбилики (3.31). Показано, что с точностью до растяжений генотип омбилической особенности решения системы уравнений нелинейной геометрической оптики совпадает с генотипом омбилической особенности решения уравнения Лапласа – тем самым происходит наследование особенности. Дополнительно уточнен (по части неравенства нулю одного из управляющих параметров) и выполнен не на формальном уровне, а на уровне сходящихся рядов Тейлора аналитических функций, результат работы Б. А. Дубровина, Т. Гравы, К. Клейна 2009 г. [100].

Все результаты получены математически строго: с применением конечной последовательности бесконечно дифференцируемых (при исследовании эллиптической системы уравнений НГО – аналитических) преобразований, а не посредством использования формальных степенных рядов и их усечений, как в значительной части более ранних работ предшественников.

Список литературы

- [1] Розанова, О. С. Образование особенностей решений уравнений движения сжимаемой жидкости в присутствии внешней силы в случае многих пространственных переменных / О. С. Розанова // Тр. сем. им. И. Г. Петровского. – 2007. – Т. 26 – С. 275–309.
- [2] Rozanova, O. A. Singularity formation for rotational gas dynamics / O. A. Rozanova // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2020. – V. 492, № 1– Art. no 124405.
- [3] Гаргянц, Л. В. Задача Римана для основных модельных случаев уравнений Эйлера–Пуассона / Л. В. Гаргянц, О. С. Розанова, М. К. Турцынский // СМФН. – 2024. – Т. 70, № 1 – С. 38–52.
- [4] Маслов, В. П. Три алгебры, отвечающие негладким решениям систем квазилинейных гиперболических уравнений / В. П. Маслов // Успехи математических наук. – 1980. – Т. 35, № 2 – С. 252–253.
- [5] Богаевский, И. А. Особенности многозначных решений квазилинейных гиперболических систем / И. А. Богаевский, Д. В. Туницкий // Труды Математического института имени В. А. Стеклова. – 2020. – Т. 308, № Дифференциальные уравнения и динамические системы С. 76–87.
- [6] Choryin, H. Blowup for projected 2-dimensional C^2 solutions of compressible Euler equations with Coriolis force / H. Choryin, Y. Manwai // Nonlinear Analysis: Real World Applications. – 2020. – V. 55, Art. no 103143
- [7] Alinhac, S. Blowup for Nonlinear Hyperbolic Equations. / Serge Alinhac. – Boston: Birkhäuser, 1995 – xiv+113 p.
- [8] Корпусов, М. О. Градиентная катастрофа в обобщенных уравнениях Бюргерса и Буссинеска / Е. В. Юшков, М. О. Корпусов // Изв. РАН. Сер. матем. – 2017. – Т. 81, № 6 – С. 232–242.

- [9] Корпусов, М. О. Разрушение решений систем уравнений мелкой воды / Е. В. Юшков, М. О. Корпусов // ТМФ. – 2020. – Т. 1772, № 2 – С. 264–275.
- [10] Давыдов, А. А. Полная классификация типичных линейных дифференциальных уравнений второго порядка с частными производными на плоскости / А. А. Давыдов, Э. Росалес-Гонсалес // Докл. РАН. – 1996. – Т. 350, № 2 – С. 151–154.
- [11] Давыдов, А. А. Нормальная форма дифференциального уравнения, не разрешенного относительно производной, в окрестности его особой точки / А. А. Давыдов // Функц. анализ и его прил. – 1985. – Т. 19, № 2 – С. 1–10.
- [12] Давыдов, А. А. Нормальные формы семейств линейных уравнений смешанного типа вблизи нерезонансных сложенных особых точек / А. А. Давыдов, Л. Чинь Тхи Зиен // УМН. – 2010. – Т. 65, № 5 (395) – С. 189–190.
- [13] Konopelchenko, B. G. Jordan form, parabolicity and other features of change of type transition for hydrodynamic type systems / B. G. Konopelchenko, G., Ortenzi // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. – 2017. – V. 50, № 21 – Art. no 215205.
- [14] Konopelchenko, B. G. On the plane into plane mappings of hydrodynamic type. Parabolic case / B. G. Konopelchenko, G., Ortenzi // Reviews in Mathematical Physics. – 2020. – V. 32, № 3 – 2050006.
- [15] Konopelchenko, B. G. Quasi-Classical Approximation in Vortex Filament Dynamics. Integrable Systems, Gradient Catastrophe, and Flutter / B. G. Konopelchenko, G., Ortenzi // Studies in Applied Mathematics. – 2013. – V. 130, № 2 – P. 167–199.
- [16] Ремизов, А. О. Сингулярности квазилинейных дифференциальных уравнений / А. О. Ремизов // Дальневост. матем. журн. – 2023. – Т. 23, № 1 – С. 85–105.
- [17] Сулейманов, Б. И. Катастрофа сборки в медленно меняющихся положениях равновесия / Б. И. Сулейманов // ЖЭТФ. – 2002. – Т. 122, № 5 – С. 1093–1106.

- [18] Ильин, А. М. О двух специальных функциях, связанных с особенностями типа сборки / А. М. Ильин, Б. И. Сулейманов // Доклады Академии наук. – 2002. – Т. 387, № 2 – С. 156–158.
- [19] Ильин, А. М. Асимптотика специального решения уравнения Абеля, связанного с особенностью сборки / А. М. Ильин, Б. И. Сулейманов // Матем. сб. – 2006. – Т. 197, № 1 – С. 55–70.
- [20] Ильин, А. М. Асимптотика специального решения уравнения Абеля, связанного с особенностью сборки. II. Большие значения параметра t / А. М. Ильин, Б. И. Сулейманов // Матем. сб. – 2007. – Т. 199, № 9 – С. 81–106.
- [21] Закалюкин, В. М. Лежандровы особенности в системах неявных обыкновенных дифференциальных уравнений и быстро-медленных динамических системах / В. М. Закалюкин, А. О. Ремизов // Труды МИАН. – 2008. – Т. 261 – С. 140–153.
- [22] Богаевский, И. А. Лежандровы особенности в системах неявных обыкновенных дифференциальных уравнений и быстро-медленных динамических системах / И. А. Богаевский // Труды МИАН. – 2009. – Т. 267 – С. 7–13.
- [23] Богаевский, И. А. Особенности распространения коротких волн на плоскости / И. А. Богаевский // Матем. сб. – 1995. – Т. 186, № 11 – С. 35–52.
- [24] Dobrokhotov, S. Yu. Efficient Formulas for the Maslov Canonical Operator near a Simple Caustic / S. Yu. Dobrokhotov, V. E. Nazaikinskii // Russ. J. Math. Phys. – 2018. – V. 25, № 4 – P. 545–552.
- [25] Аникин, А. Ю. Лагранжевы многообразия и эффективные формулы для коротковолновых асимптотик в окрестности точки возврата каустики / А. Ю. Аникин, С. Ю. Доброхотов, В. Е. Назайкинский, А. В. Цветкова // ТМФ. – 2019. – Т. 201, № 3 – С. 382–414.
- [26] Доброхотов, С. Ю. Лагранжевы многообразия и эффективные формулы для коротковолновых асимптотик в окрестности точки возврата каустики / С. Ю. Доброхотов, В. Е. Назайкинский // Матем. заметки. – 2020. – Т. 108, № 3 – С. 334–359.

- [27] Сулейманов, Б. И. О “нелинейном” обобщении специальных функций волновых катастроф, описываемых двухкратными интегралами / Б. И. Сулейманов // Матем. заметки. – 1992. – Т. 52, № 5 – С. 102–106.
- [28] Сулейманов, Б. И. Симметрии уравнения Кадомцева–Петвиашвили, изоморфные деформации и “нелинейные” обобщения специальных функций волновых катастроф / Б. И. Сулейманов, И. Т. Хабибуллин // ТМФ. – 1993. – Т. 97, № 2 – С. 213–226.
- [29] Сулейманов, Б. И. Об аналогах функций волновых катастроф, являющихся решениями нелинейных интегрируемых уравнений / Б. И. Сулейманов // Итоги науки и техн. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз. – 2019. – Т. 163, Дифференциальные уравнения – С. 81–95.
- [30] Павлова, Н. Г. Завершение классификации типичных особенностей геодезических потоков в метриках двух классов / Н. Г. Павлова, А. О. Ремизов // Изв. РАН. Сер. матем. – 2019. – Т. 83, № 3 – С. 119–139.
- [31] Давыдов, А. А. Управляемость нелинейных систем: типичные особенности и их устойчивость / А. А. Давыдов, В. М. Закалюкин // УМН. – 2012. – Т. 67, № 2 (404) – С. 65–92.
- [32] Воронин, С. М. Аналитическая классификация типичных вырожденных элементарных особых точек ростков голоморфных векторных полей на комплексной плоскости / С. М. Воронин, Ю. И. Мещерякова // Изв. вузов. Матем. – 2002. – № 1 С. 13–16.
- [33] Воронин, С. М. Аналитическая классификация ростков голоморфных векторных полей с вырожденной элементарной особой точкой / С. М. Воронин, Ю. И. Мещерякова // Вестник ЧелГУ. – 2003. – № 9 С. 16–41.
- [34] Ortiz-Bobadil’ya, L. Thom’s problem for degenerated singular points of holomorphic foliations in the plane / L. Ortiz-Bobadil’ya, È. Rosales-González, S. M. Voronin // Mosc. Math. J. – 2012. – V. 12, № 4 P. 825–862.
- [35] Elizarov, P. M. Finitely generated groups of germs of one-dimensional conformal mappings, and invariants for complex singular points of analytic foliations of the complex plane / P. M. Elizarov, Yu. S. Ilyashenko, A. A. Shcherbakov, S. M.

- Voronin // Adv. Soviet Math. – 1993. – V. 14, Nonlinear Stokes phenomena P. 57–105.
- [36] Voronin, S. M. The Darboux-Whitney theorem and related questions / S. M. Voronin // Adv. Soviet Math. – 1993. – V. 14, Nonlinear Stokes phenomena P. 139–233.
- [37] Воронин, С. М. Орбитальная аналитическая эквивалентность вырожденных особых точек голоморфных векторных полей на комплексной плоскости / С. М. Воронин // Труды МИАН. – 1997. – Т. 213, Дифференциальные уравнения с вещественным и комплексным временем. Сборник статей С. 35–55.
- [38] Voronin, S. M. An analytic classification of saddle resonant singular points of holomorphic vector fields in the complex plane / A. A. Grintchy, S. M. Voronin // Journal of Dynamical and Control Systems. – 1996. – V. 2, № 1 P. 21–53.
- [39] Кузнецов, Е. А. Коллапс вихревых линий в гидродинамике / Е. А. Кузнецов, В. П. Рубан // ЖЭТФ. – 2000. – Т. 118, № 4 – С. 893–905.
- [40] Кузнецов, Е. А. Заметки о коллапсе в магнитной гидродинамике / Е. А. Кузнецов, Е. А. Михайлов // ЖЭТФ. – 2020. – Т. 158, № 3 – С. 561–572.
- [41] Уразбахтина, Л. З. Плоский коллапс газа с линейным полем скоростей / Л. З. Уразбахтина, Ю. В. Юлмухаметова // Тр. ИММ УрО РАН. – 2023. – Т. 29, № 2 – С. 207–216.
- [42] Gurevich, A. V. Breaking a Simple Wave in the Kinetics of a Rarefied Plasma / A.V. Gurevich, L.P. Pitayevskii // Soviet Phys. JETP. – 1971. – V. 33, № 6 – P. 355–363.
- [43] Гуревич, А. В. Опрокидывание волны Римана в дисперсионной гидродинамике / А. В. Гуревич, А. Л. Крылов, Г. А. Эль // Письма в ЖЭТФ. – 1991. – Т. 54, № 2 – С. 104–109.
- [44] Mazova, R. Kh. Exact analytical solutions of nonlinear problems of tsunami wave run-up on slopes with different profiles / R. Kh. Mazova, E. N. Pelinovsky // Natural Hazards. – 1992. – V. 6, С. 227–249.

- [45] Giniyatullin, A. Universal power law for the energy spectrum of breaking Riemann waves / A. Giniyatullin, E. A. Kartashova, T. G. Talipova, D. R. Pelinovsky, E. N. Pelinovsky // Письма в ЖЭТФ. – 2013. – Т. 98, № 4 – Р. 265–269.
- [46] Dobrokhotov, S. Y. Hugoniot-Maslov Chains for Solitary Vortices of the Shallow Water Equations, I. Derivation of the Chains for the Case of Variable Coriolis Forces and Reduction to the Hill Equation / S. Y. Dobrokhotov // Russian Journal of Mathematical Physics. – 1999. – V. 6, № 2 – Р. 137–183.
- [47] Доброхотов, С. Ю. О гипотезе Маслова о структуре слабых точечных особенностей уравнений мелкой воды / С. Ю. Доброхотов, К. В. Панкрашкин, Е. С. Семенов // Доклады Академии наук. – 2001. – Т. 379, № 2 – С. 173–176.
- [48] Пелиновский, Е. Н. Гидродинамика волн цунами / Е. Н. Пелиновский. – Нижний Новгород: ИПФ РАН, 1996 – 276 с.
- [49] Didenkulova, I. Rogue waves in nonlinear hyperbolic systems (shallow-water framework) / I. Didenkulova, E. Pelinovsky // Nonlinearity. – 2011. – V. 4, № 3 – R1 – R18.
- [50] Слюняев, А. В. Морские волны-убийцы: наблюдения, физика и математика / А. В. Слюняев, Д. Е. Пелиновский, Е. Н. Пелиновский // УФН. – 2023. – Т. 193, № 2 – Р. 155–181.
- [51] Berry, M. V. The six roll mill: unfolding an unstable persistently extensional flow / M. V. Berry, M.R. Mackley // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences. – 1977. – V. 287, № 1337 – Р. 1–16.
- [52] Зубарев, Н. М. Формирование особенностей на поверхности жидкого металла в сильном электрическом поле / Н. М. Зубарев // ЖЭТФ. – 1998. – Т. 114, № 6 – С. 2043–2054.
- [53] Зубарев, Н. М. Точные решения уравнений движения жидкого гелия со свободной заряженной поверхностью / Н. М. Зубарев // ЖЭТФ. – 2001. – Т. 121, № 3 – С. 624–636.

- [54] Кочурин, Е. А. Формирование слабых особенностей на поверхности диэлектрической жидкости в тангенциальном электрическом поле / Е. А. Кочурин // Письма в ЖТФ. – 2019. – Т. 45, № 3 – С. 7–9.
- [55] Kochurin, E. A. Wave breaking on the surface of a dielectric liquid in a horizontal electric field / E. A. Kochurin, N. M. Zubarev, O. V. Zubareva // IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation. – 2020. – V. 27, № 4 – С. 1222–1228.
- [56] Зубарев, Н. М. Формирование особенностей на поверхности раздела жидкостей при развитии неустойчивости Кельвина-Гельмгольца / Н. М. Зубарев // ЖЭТФ. – 2014. – Т. 146, № 1 – С. 194–204.
- [57] Riemann, B. Über die Fortflanzung ebener Lufthellen von endlihenr Schwingungsweite / B. Riemann // Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften, Gottingen. Mathematisch-Physikalische Klasse. – 1860. – V. 8 – P. 43-66.
- [58] Горьков, Л. П. Возникновение ударной волны при отражении слабого разрыва от звуковой линии / Л. П. Горьков, Л. П. Питаевский // Докл. АН СССР. – 1962. – Т. 174, № 2 – С. 293–296.
- [59] Гуревич, А. В. Возникновение бездиссипативной ударной волны / А. В. Гуревич, А. Л. Крылов // Докл. АН СССР. – 1988. – Т. 301, № 4 – С. 851–854.
- [60] Stenflo, L. On shock wave formation in a magnetized plasma / L. Stenflo, A.B. Shvartsburg, J. Weiland // Physics Letters A. – 1997. – V. 225, № 1 – P. 113–116.
- [61] Buckmaster, T. Formation and development of singularities for the compressible Euler equations / T. Buckmaster, T. D. Drivas, S. Shkoller, V. Vicol // Proc. Int. Cong. Math. – 2022. – V. 5 – P. 3636–3659.
- [62] Neal, I. A new type of stable shock formation in gas dynamics / I. Neal, C. Rickard, S. Shkoller, V. Vicol // arXiv:math/2303.16842. – 2023.
- [63] Buckmaster, T. Shock formation and vorticity creation for 3d Euler / T. Buckmaster, S. Shkoller, V. Vicol // Communications on Pure and Applied Mathematics. – 2023. – V. 76, № 9 – P. 1965–2072.

- [64] Buckmaster, T. Formation of point shocks for 3D compressible Euler / T. Buckmaster, S. Shkoller, V. Vicol // Communications on Pure and Applied Mathematics. – 2023. – V. 76, № 9 – P. 2073–2191.
- [65] Haberman, R. Nonlinear Cusped Caustics for Dispersive Waves / R. Haberman, R. Sun // SIAM Journal on Applied Mathematics. – 1985. – V. 72, № 1 – P. 1–37.
- [66] Haberman, R. Note on the Initial Formation of Shocks / R. Haberman // SIAM Journal on Applied Mathematics. – 1986. – V. 46, № 1 – P. 16–19.
- [67] Haberman, R. The initial formation and structure of two-dimensional diffusive shock waves / R. Haberman // Wave Motion. – 1986. – V. 8, № 3 – P. 267–276.
- [68] Воронин, С. М. Структура фронта ударной волны в гетерогенной смеси двух изотермических газов с вязкостью / С. М. Воронин, В. А. Адарченко, А. В. Панов // Челяб. физ.-матем. журн. – 2023. – Т. 3, № 4 – С. 461–475.
- [69] Canic, S. Mathematical Analysis of the Quasilinear Effects in a Hyperbolic Model of Blood Flow through Compliant Axisymmetric Vessels / S. Canic, E. H. Kim // Mathematical Methods in Applied Sciences. – 2003. – V. 26, № 14 – P. 1161–1186.
- [70] Хабиров, С. В. Автомодельное схождение ударной волны по теплопроводному газу / С. В. Хабиров // Прикладная математика и механика. – 2009. – Т. 73, № 5 – С. 731–740.
- [71] Маслов, В. П. О распространении ударных волн в изоэнтропическом невязком газе / В. П. Маслов // Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат.. – 1977. – Т. 8 – С. 199–271.
- [72] Маслов, В. П. Распространение ударной волны в изоэнтропическом газе с малой вязкостью / В. П. Маслов, В. А. Цупин // Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат.. – 1977. – Т. 8 – С. 273–308.
- [73] Кудашев, В. Р. Особенности некоторых типичных процессов самопроизвольного падения интенсивности в неустойчивых средах / В. Р. Кудашев, Б. И. Сулейманов // Письма в ЖЭТФ. – 1995. – Т. 62, № 4 – С. 358–363.

- [74] Кудашев, В. Р.. Влияние малой диссипации на процессы зарождения одномерных ударных волн / В. Р. Кудашев, Б. И. Сулейманов // Прикладная математика и механика. – 2001. – Т. 65, № 3 – С. 456–466.
- [75] Гарифуллин, Р. Н. От слабых разрывов к бездиссипативным ударным волнам / Р. Н. Гарифуллин, Б. И. Сулейманов // ЖЭТФ. – 2010. – Т. 137, № 1 – С. 149–164.
- [76] Сулейманов, Б. И. Типичная провальная особенность сборки решений уравнений движения одномерного изоэнтропического газа / Б. И. Сулейманов, А. М. Шавлуков // Известия РАН. Серия физическая. – 2020. – Т. 84, № 5 – С. 664–666.
- [77] Алексеев, Ю. К., Сухоруков, А. П. Введение в теорию катастроф / Ю. К. Алексеев, А. П. Сухоруков. – М.: Изд-во Московского университета, 2000 – 182 с.
- [78] Арнольд, В. И. Теория катастроф / В. И. Арнольд. – М.: Наука, 1990 – 128 с.
- [79] Брёкер, Т., Ландер, Л. Дифференцируемые ростки и катастрофы / Т. Брёкер, Д. Ландер. – М.: Мир, 1977 – 208 с.
- [80] Гилмор, Р. Прикладная теория катастроф. Кн. 1 / Р. Гилмор. – М.: Мир, 1984 – 352 с.
- [81] Гилмор, Р. Прикладная теория катастроф. Кн. 2 / Р. Гилмор. – М.: Мир, 1984 – 285 с.
- [82] Том, Р. Структурная устойчивость и морфогенез / Р. Том. – М.: Логос, 2002 – 278 с.
- [83] Арнольд, В. И. Особенности каустик и волновых фронтов / В. И. Арнольд. – М.: Фазис, 1996 – х+334 с.
- [84] Павлова, Н. Г. Введение в теорию особенностей / Н. Г. Павлова, А. О. Ремизов. – М.: МФТИ, 2021 – 182 с.
- [85] Голубицкий, М. Устойчивые отображения и их особенности / М. Голубицкий, В. Гийемин. – М.: Мир, 1977 – 296 с.

- [86] Castrigiano, D. P. L. Catastrophe theory: Second edition / D. P. L. Castrigiano, S. A. Hayes. – Boca Raton: CRC Press, 2019 – 284 p.
- [87] Закалюкин, В. М. Огибающие семейств волновых фронтов и теория управления / В. М. Закалюкин // Тр. МИАН. – 1995. – Т. 209 – С. 133–142.
- [88] Кравцов, Ю. А. Каустики, катастрофы и волновые поля / Ю. А. Кравцов, Ю. И. Орлов // УФН. – 1983. – Т. 141, № 4 – С. 591–627.
- [89] Арнольд, В. И. Критические точки гладких функций и их нормальные формы / В. И. Арнольд // УМН. – 1975. – V. 30, № 5(185) – С. 3–65.
- [90] Арнольд, В. И. Особенности систем лучей / В. И. Арнольд // УМН. – 1983. – Т. 38, № 2(230) – С. 77–147.
- [91] Арнольд, В. И., Варченко, А. Н., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений. Классификация критических точек, каустик и волновых фронтов / В. И. Арнольд, А. Н. Варченко, С. М. Гусейн-Заде. – М. Наука, 1982 – 304 с.
- [92] Постон, Т., Стюарт, И. Теория катастроф и ее приложения / Т. Постон, И. Стюарт. – М.: Мир, 1980 – 607 с.
- [93] Седых, В. Д. Математические методы теории катастроф / В. Д. Седых. – М.: Издательство МЦНМО, 2021 – 224 с.
- [94] Арнольд, В. И. Нормальные формы функций в окрестности вырожденных критических точек / В. И. Арнольд // УМН. – 1974. – Т. 29, № 2(176) – С. 11–49.
- [95] Арнольд, В. И. Критические точки функций на многообразии с краем, простые группы Ли B_k , C_k , F_4 и особенности эволют / В. И. Арнольд // УМН. – 1978. – Т. 33, № 5(203) – С. 91–105.
- [96] Арнольд, В. И. Нормальные формы функций вблизи вырожденных критических точек, группы Вейля A_k , D_k , E_k и лагранжевы особенности / В. И. Арнольд // Функци. анализ и его прил. – 1972. – Т. 6, № 4 – С. 3–25.
- [97] Рахимов, А. Х. Особенности решений квазилинейных уравнений / А. Х. Рахимов // Алгебра и анализ. – 1992. – Т. 4, № 4 – С. 217–224.

- [98] Рахимов, А.Х. Особенности римановых инвариантов / А. Х. Рахимов // Функциональный анализ и его приложения. – 1993. – Т. 27, № 1 – С. 46–59.
- [99] Dubrovin, B. A. On Hamiltonian Perturbations of Hyperbolic Systems of Conservation Laws, II: Universality of Critical Behaviour / B. A. Dubrovin // Communications in Mathematical Physics. – 2006. – V. 267, № 1 – С. 117–139.
- [100] Dubrovin, B. A. On Universality of Critical Behavior in the Focusing Nonlinear Schrödinger Equation. Elliptic Umbilic Catstrophe and the Tritonque to the Painleve-I Equation / B. A. Dubrovin, T. Grava, C. Klein // Journal of Nonlinear Science. – 2009. – V. 19, № 1 – P. 57–94.
- [101] Сулейманов, Б.И. Некоторые типичные особенности решений уравнений с малым параметром. Диссертация на соискание степени д. ф. -м. н. / Б. И. Сулейманов. – Уфа: Учреждение Российской Академии наук Институт математики с вычислительным центром Уфимского научного центра РАН, 2009 – 223 с.
- [102] Сулейманов, Б.И. Типичные сингулярности решений уравнений мелкой воды / Б. И. Сулейманов // Доклады Академии наук. – 2012. – Т. 442, № 1 – С. 24–27.
- [103] Сулейманов, Б.И. О наследовании решениями уравнений движения изоэнтропического газа типичных особенностей решений линейного волнового уравнения / Б. И. Сулейманов, А. М. Шавлуков // Математические заметки. – 2022. – Т. 112, № 4 – С. 625–640.
- [104] Мелихов, С.Н. Типичные провальные асимптотики квазиклассических приближений к решениям нелинейного уравнения Шрёдингера / С. Н. Мелихов, Б. И. Сулейманов, А. М. Шавлуков // Дифференциальные уравнения. – 2024. – Т. 60, № 5 – С. 618–631.
- [105] Shavlukov, A. M. On Generic Singularities of Solutions to the 1D Gas Flow Equations: Chaplygin and Bechert–Stanyukovich Cases / A. M. Shavlukov // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2024. – V. 45, № 6 – P. 2779–2791.
- [106] Сулейманов, Б. И. Омбилическая особенность квазиклассических приближений к решениям фокусирующего нелинейного уравнения Шрёдингера /

Б. И. Сулейманов, А. М. Шавлуков // Матем. заметки. – 2024. – Т. 116, № 6 – С. 982–997.

- [107] Горюнов, В. В. Особенности проектирования полных пересечений / В. В. Горюнов // Итоги науки и техники. Серия «Современные проблемы математики. Новейшие достижения». – 1983. – Т. 22 – С. 167–206.
- [108] Рождественский, Б. Л., Яненко, Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике / Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко. – М.: Наука, 1978 – 688 с.
- [109] Березовский, А. А. Лекции по нелинейным краевым задачам математической физики. Ч. II. / А. А. Березовский. – Киев: Наукова думка, 1976 – 282 с.
- [110] Шварцбург, А. Б. Геометрическая оптика в нелинейной теории волн / А. Б. Шварцбург. – М.: Наука, 1977 – 120 с.
- [111] Picard, E. Mémoire sur la théorie des équations aux dérivés partielles et la méthode des approximations successives / E. Picard // J. math. pures et appl. Ser.4. – 1890. – V. 60. – P. 145–210; 231–232.
- [112] Berry, M. V. Waves and Thom’s theorem / M. V. Berry // Advances in Physics. – 1976. – V. 25, № 1 – P. 1–26.
- [113] Kravtsov, Y. A. Rays and caustics as physical objects / Y. A. Kravtsov // In Progress in Optics. – 1988. – V. 26 – P. 227–348.
- [114] Ludwig, D. Uniform asymptotic expansions at a caustic / D. Ludwig // Comm. Pure Appl. Math. – 1966. – V. 19 – P. 215–250.
- [115] Marston, P. L. Catastrophe optics of spheroidal drops and generalized rainbows / P. L. Marston // J. Quantit. Spec. and Rad. Trans. – 1999. – V. 63 – P. 341–351.
- [116] Nye, J. F. Natural Focusing and Fine Structure of Light: Caustics and Wave Dislocations / J. F. Nye. – Bristol: Institute of Physics Publishing, 1999 – 328 p.

- [117] Таланов, В. И. О самофокусировке волновых пучков в нелинейных средах / В. И. Таланов // Письма в ЖЭТФ. – 1965. – Т. 2, № 5 – С. 218–222.
- [118] Ахманов, С. А. Самофокусировка и дифракция света в нелинейной среде / С. А. Ахманов, А. П. Сухоруков, Р. В. Хохлов // УФН. – 1967. – Т. 93, № 1 – С. 19–70.
- [119] Shabat, A. B. Exact Theory of Two-dimensional Self-focusing and One-dimensional Self-modulation of Wave in Nonlinear Media / A. B. Shabat, V. F. Zakharov // Soviet Phys. JETP. – 1972. – V. 34, № 1 – P. 62–69.
- [120] Кравцов, А. Ю. Геометрическая оптика неоднородных сред. / А. Ю. Кравцов, Ю. И. Орлов. – М: Наука, 1980 – 304 с.
- [121] Métivier, G. Recent Results in Non Linear Geometric Optics / G. Métivier, J.L. Joly, J. Rauch // Hyperbolic Problems: Theory, Numerics, Applications. International Series of Numerical Mathematics. – 1999. – V. 130, P. 723–736.
- [122] Sulem, C. The Nonlinear Schrödinger Equation: Self-Focusing and Wave Collapse. / C. Sulem, P-L. Sulem. – New York: Springer-Verlag, 2007 – v+350 p.
- [123] Гуревич, А. В., Шварцбург, А. Б. Нелинейная теория распространения радиоволн в ионосфере / А. В. Шварцбург, А. В. Гуревич. – М.: Наука, 1973 – 272 с.
- [124] Шварцбург, А. Б. Линии перехода и особые точки в уравнениях нелинейной геометрической оптики / А. Б. Шварцбург // Докл. АН СССР. – 1971. – Т. 200, № 3 – С. 575–578.
- [125] Гуревич, А. В. Точные решения уравнений нелинейной геометрической оптики / А. В. Гуревич, А. Б. Шварцбург // ЖЭТФ. – 1970. – Т. 58, № 6 – С. 2012–2022.
- [126] Жданов, С. Л., Трубников, Б. А. Квазигазовые неустойчивые среды / С. Л. Жданов, Б. А. Трубников. – М.: Наука, 1991 – 174 с.
- [127] Симаков, С. С. Современные методы математического моделирования кровотока с помощью осредненных моделей / С. С. Симаков // Компьютерные исследования и моделирование. – 2018. – Т. 10, № 5 – С. 581–604.

- [128] Canic, S. Critical thresholds in a quasilinear hyperbolic model of blood flow / S. Canic, T. Li // Networks and Heterogeneous Media. – 2016. – V. 4, № 3 – P. 527–536.
- [129] Курант, Р. Уравнения с частными производными / Р. Курант. – М.: Мир, 1962 – 832 с.
- [130] Станюкович, К. П. Неустановившиеся движения сплошной среды / К. П. Станюкович. – М.: Наука, 1971 – 804 с.
- [131] Коробейник, Ю. Ф. Об аналитических решениях одного класса уравнений в частных производных / Ю. Ф. Коробейник // Докл. АН СССР. – 1961. – Т. 140, № 6 – С. 1248–1251.
- [132] Янушаускас, А.И. Структурные свойства решений некоторых аналитических уравнений с частными производными / А. И. Янушаускас // Дифференц. уравнения. – 1981. – Т. 17, № 1 – С. 182–194.
- [133] Янушаускас, А.И. Аналитические и гармонические функции многих переменных / А. И. Янушаускас. – Новосибирск: Наука, 1981 – 183 с.
- [134] Маслов, В.П., Федорюк М. В. Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики / В. М. Бабич, В. С. Булдырев. – М.: Наука, 1976 – 296 с.
- [135] Арнольд, В. И. Волновые фронты и топология кривых / В. И. Арнольд. – М.: МЦНМО, 2018 – 116 с.
- [136] Mills, A. A., Clift R. Reflections of the 'Burning mirrors of Archimedes'. With a consideration of the geometry and intensity of sunlight reflected from plane mirrors / A. A. Mills, R. Clift // European Journal of Physics. – 1992. – V. 13, № 6 – P. 268–279.
- [137] Винберг, Э. Б. Курс алгебры / Э. Б. Винберг. – М.: Издательство МЦНМО, 2014 – 592 с.
- [138] Dickson, L. E. Elementary theory of equations / L. E. Dickson. – New York: J. Wiley & Sons, 1914 – iv+184 p.

- [139] Тюрина, Г. Н. Локально полууниверсальные плоские деформации изолированных особенностей комплексных пространств / Г. Н. Тюрина // Известия Академии наук СССР. Серия математическая. – 1969. – Т. 33, № 5 – С. 1026–1058.
- [140] Kamvissis, S. Semiclassical Soliton Ensembles for the Focusing Nonlinear Schrodinger Equation / S. Kamvissis, K. D. T-R. McLaughlin, P. D. Miller // Annals of Mathematics Studies. – 2003. – V. 154 – P. 1–366.
- [141] Tovbis, A. On semiclassical (zero dispersion limit) solutions of the focusing nonlinear Schrodinger equation / A. Tovbis, S. Venakides, X. Zhou // Comm. Pure Appl. Math. – 2004. – V. 54. – P. 877–985.