

ОТЗЫВ

официального оппонента Воронина Сергея Михайловича на диссертационную работу Шавлукова Азамата Мавлетовича «Особенности решений одномерных уравнений газовой динамики и нелинейной геометрической оптики», представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика.

В диссертационной работе А. М. Шавлукова описываются типичные с точки зрения теории особенностей дифференцируемых отображений сингулярности решений двух вариантов – эллиптического и гиперболического – одномерной системы уравнений нелинейной геометрической оптики. В диссертации варианты этой системы уравнений трактуются как различные и исследуются по отдельности. Гиперболический вариант - система уравнений изоэнтропической газовой динамики. Эллиптический вариант - система уравнений нелинейной геометрической оптики. По существу системы различаются знаком перед входящей в первое уравнение каждой из них аналитической функцией: знак «плюс» соответствует гиперболической системе, знак «минус» соответствует эллиптической системе.

С помощью методов теории особенностей изучается поведение решений указанных квазилинейных систем в окрестностях точек градиентных катастроф – таких конечных точек, в которых первые производные решений стремятся к бесконечности при том, что сами решения остаются в них конечными. Решения локально выражаются через корни канонических уравнений теории особенностей.

Для исследования обоих вариантов используется широко применяемое в газовой динамике преобразование годографа, меняющее ролями зависимые и независимые переменные и сводящее квазилинейную систему к линейной. При этом преобразование теряет гладкость и взаимную однозначность в точке градиентной катастрофы - в ней обращается в нуль якобиан преобразования годографа. Изучены всевозможные случаи обращения в нуль якобиан преобразования годографа и соответствующие им особенности. Отдельно рассмотрена ситуация возникновения провальных особенностей при стремлении к нулю плотности газа.

Показано, что решения образа годографа исходной квазилинейной системы определяются критическими точками локально бесконечно дифференцируемой (в случае эллиптической системы – аналитической) функции, которая исследуется методами теории особенностей и приводится к

ВХОД. № 4800-13
«09» 12. 2002.

нормальной форме, чьи критические точки локально задают решение исходной системы.

Диссертация состоит из трех глав. В первой главе рассматриваются сингулярности решений систем одномерных уравнений течения невязкого изоэнтропического газа. Во второй главе изучаются провальные катастрофы решений обоих вариантов квазилинейной системы. В третьей главе исследуются особенности решений системы уравнений нелинейной геометрической оптики.

Ключевой результат первой главы --- наблюдение о том, что все три типичные сингулярности решений систем уравнений газовой динамики (особенности типа складки, сборки и сечения гиперболической омбилики) наследуются из типичных сингулярностей линеаризованной системы газовой динамики (сводящейся к линейному волновому уравнению): в терминологии математической теории катастроф как у типичных сингулярностей линейного волнового уравнения, так и у наследуемых типичных сингулярностей гиперболического варианта системы один и тот же генотип (В. Д. Седых «Математические методы теории катастроф», М. МЦНМО, 2021 г., стр. 105).

Показано, что в частном случае газа Чаплыгина наследуется не только генотип, но и вся нормальная форма особенности сечения сборки. Показано, что в частном случае газа Бехерта-Станюковича наследуется не только генотип, но и вся нормальная форма особенности сечения гиперболической омбилики. Эти два частных случая, служащих для аппроксимации течения реальных газов -- и только они -- нарушают условие, еще более жесткое, чем условие сильной нелинейности, с учетом которого велся ряд предшествующих исследований, начиная с основополагающей для этого направления статьи А. Х. Рахимова 1993 г. Показано, что условие сильной нелинейности нарушает лишь частный случай газа Чаплыгина.

Вторая глава посвящена особенностям типа сборки, присущим решениям обоих вариантов квазилинейной системы при стремлении к нулю плотности газа (интенсивности). Дан пример для уравнений мелкой воды (частный случай гиперболической системы). Обоснован формализм предыдущих работ. Отмечается, что провальные особенности не наследуются.

В третьей главе о градиентных катастрофах решений системы уравнений нелинейной геометрической оптики так же подчеркивается свойство наследования: единственная типичная сингулярность решений этого варианта, являющаяся сечением особенности типа эллиптической омбилики, имеет тот же генотип, что и единственная типичная особенность решений системы Коши-Римана (эквивалентной уравнению Лапласа), являющейся

линеаризацией эллиптического варианта квазилинейной системы. Автором выдвигается гипотеза, что подобное наследование должно иметь место и в пространственно неоднородных случаях как в гиперболическом, так и в эллиптическом вариантах изученных систем. В главе уточняется вывод о виде данного сечения, ранее полученный на формальном уровне рассуждений в известной работе Б. А. Дубровина, Т. Гравы и К. Клейна 2009 г.

Работа носит теоретический характер и обладает теоретической значимостью. Изучены решения квазилинейных систем уравнений первого порядка в окрестности типичной конечной точки градиентной катастрофы. Представлен конструктивный метод проведения подобного исследования на основе методов теории особенностей с использованием конечного числа преобразований в классе локально бесконечно дифференцируемых (для гиперболической системы) или аналитических (для эллиптической системы) функций.

К положительным сторонам диссертации можно отнести математически строгую обоснованность всех используемых формальных построений, которая в некоторых из предшествующих работ отсутствовала. Достоверность результатов обеспечена конструктивным доказательством теорем в соответствии с фундаментальными результатами теории особенностей дифференцируемых отображений и теории уравнений с частными производными со всеми необходимыми ссылками. Кроме того, исследование почти завершает описание типичных особенностей решений одномерных диагональных квазилинейных систем. Как отмечает автор, в частности, остается обоснование непустоты множества гладких решений при описании провальной особенности сборки для случая произвольного аналитического в окрестности нуля давления (интенсивности). Кроме того, математически строго не решена проблема описания точки типичной градиентной катастрофы, происходящей при трансформации слабых разрывов решений гиперболического варианта системы в их сильные разрывы.

Недостатком работы является то, что автор не заостряет внимание на ряде исследований предшественников об особенностях, не являющихся типичными с точки зрения теории катастроф, в том числе, интересных с точки зрения приложений, и не комментирует их с точки зрения теории особенностей. В пункте 3 главы 2 автор затрагивает тему особенностей, возникающих при стремлении плотности к бесконечности, но не развивает ее для систем более общего вида, не распадающихся на два отдельных уравнения, как в линейной геометрической оптике. Нумерация источников по

мере упоминания, а не в алфавитном порядке, может затруднять прочтение списка литературы.

Приведенные замечания не влияют на положительную оценку диссертации в целом. Считаю, что диссертация А. М. Шавлукова удовлетворяет критериям, указанным в пунктах 9-11, 13, 14 Положения о присуждении ученых степеней, утвержденного постановлением № 842 Правительства Российской Федерации от 24 сентября 2013 г. Соискатель заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по научной специальности 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика.

Официальный оппонент

доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Челябинский государственный университет» Воронин Сергей Михайлович

Докторская диссертация защищена по специальности 01.01.02 Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Даю согласие на обработку персональных данных.

Адрес основного места работы: 454001, Россия, г. Челябинск, ул. Братьев Кашириных, 129, каб. 447, рабочий тел. +7(351)7997235.

E-mail: voron@csu.ru.

05 декабря 2025 года.



С. М. Воронин

С. М. Воронин

Воронин
Сергей Михайлович
ведущий специалист