

УТВЕРЖДАЮ

Руководитель Федерального  
государственного бюджетного  
научного учреждения Уфимского  
федерального исследовательского  
центра Российской академии наук,  
доктор биологических наук

 В.Б. Мартыненко

 « 29 » 2015 г.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

**Федерального государственного бюджетного научного учреждения  
Уфимского федерального исследовательского центра  
Российской академии наук  
Министерства науки и высшего образования  
Российской Федерации**

Диссертация Шавлукова Азамата Мавлетовича «Особенности решений одномерных уравнений газовой динамики и нелинейной геометрической оптики» выполнена в отделе дифференциальных уравнений Института математики с вычислительным центром – обособленного структурного подразделения Федерального государственного бюджетного научного учреждения Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук (ИМВЦ УФИЦ РАН).

В период подготовки диссертации соискатель Шавлуков Азамат Мавлетович обучался в аспирантуре по очной форме обучения по направлению подготовки 01.06.01 Математика и механика Федерального государственного бюджетного научного учреждения Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук, работал инженером-исследователем в отделе дифференциальных уравнений Института математики с вычислительным центром – обособленного структурного подразделения Федерального государственного бюджетного научного учреждения Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук, где и продолжает работать в настоящее время.

В 2018 году окончил федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Башкирский государственный университет» по направлению подготовки 01.04.01 Математика с присвоением квалификации Магистр.

В 2024 году окончил аспирантуру по очной форме обучения Федерального государственного бюджетного научного учреждения Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук по направлению подготовки 01.06.01 Математика и механика, направленности Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление с присвоением квалификации «Исследователь.

Преподаватель-исследователь».

Диплом об окончании аспирантуры выдан Федеральным государственным бюджетным научным учреждением Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук в 2024 году. Справка об обучении со сведениями о сданных кандидатских экзаменах выдана Федеральным государственным бюджетным образовательным учреждением высшего образования «Уфимский университет науки и технологий» в 2024 году и Федеральным государственным бюджетным научным учреждением Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук в 2024 году.

Научный руководитель — Сулейманов Булат Ирекович, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник отдела дифференциальных уравнений Института математики с вычислительным центром – обособленного структурного подразделения Федерального государственного бюджетного научного учреждения Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук.

По итогам обсуждения диссертации Шавлукова А.М. «Особенности решений одномерных уравнений газовой динамики и нелинейной геометрической оптики» принято следующее заключение.

Диссертационная работа Шавлукова Азамата Мавлетовича «Особенности решений одномерных уравнений газовой динамики и нелинейной геометрической оптики» является законченной научно-квалификационной работой, соответствующей п. 9 Положения о присуждении учёных степеней, утвержденного постановлением Правительства Российской Федерации от 24.09.2013 № 842 (ред. от 16.10.2024 г.).

Диссертация посвящена изучению типичных (с точки зрения теории особенностей дифференцируемых отображений) особенностей решений систем одномерных квазилинейных уравнений: системы уравнений течения изоэнтропического газа и системы уравнений нелинейной геометрической оптики. Показано, что в окрестности точки градиентной катастрофы решения локально описываются корнями канонических уравнений теории катастроф.

Тема диссертации непосредственно связана с научно-исследовательской темой отдела дифференциальных уравнений Института математики с вычислительным центром УФИЦ РАН «Асимптотический анализ и спектральная теория в задачах математической физики» и соответствует паспорту научной специальности 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика, а именно: пункту 6 — «Нелинейные дифференциальные уравнения и системы нелинейных дифференциальных уравнений».

Основы теории особенностей дифференцируемых отображений были заложены Х. Уитни, Р. Томом и В.И. Арнольдом. Также большой вклад внесли Дж. Мазер, Б. Мальгранж, Б. Морен, Г.Н. Тюрина, А.Н. Варченко, В.А. Васильев, В.В. Горюнов, С.М. Гусейн-Заде, А.А. Давыдов, М.Э. Казарян, Д. Милнор, В.Д. Седых, Д. Сирсма, Л.Н. Брызгалова и другие.

В области применения результатов теории к исследованию особенностей решений систем квазилинейных уравнений важную роль играют работы И.А. Богаевского, Т. Гравы, Б.А. Дубровина, К. Клейна, Б.Г. Конопельченко, Дж. Ортензи, А.Х. Рахимова, Б.И. Сулейманова, Д.В. Туницкого.

В настоящее время развитием теории особенностей в применении к теории дифференциальных уравнений занимаются так же ряд других ученых, в частности, Е.А. Асташов, С.М. Воронин, А.А. Давыдов, В.М. Закалюкин, Н.Г. Павлова, А.О. Ремизов.

Основные результаты диссертации изложены в трех главах.

В главе 1 рассматриваются градиентные катастрофы решений системы уравнений газовой динамики. Описаны три особенности: складки, сборки и сечения гиперболической омбилики. Сделано наблюдение о том, у всех трех типичных сингулярностей совпадают генотипы с аналогичными сингулярностями решений линейного волнового уравнения с постоянными коэффициентами, к которому сводится линеаризация системы уравнений газовой динамики. Это явление названо наследованием особенностей решений нелинейной системы от решений ее линеаризации. Показано, что только частные случаи газа Чаплыгина и газа Бехерта-Станюковича нарушают условие, еще более жесткое, чем условие сильной нелинейности, с учетом которого велся ряд предшествующих исследований и изучена специфика особенностей решений в случае этих двух аппроксимаций к реальным течениям: в случае газа Чаплыгина совпадает не только генотип, но и вся нормальная форма особенности сечения сборки, в случае газа Бехерта-Станюковича совпадает не только генотип, но и вся нормальная форма особенности сечения гиперболической омбилики.

В главе 2 изучена особенность типа сборки, характерная для решений обеих исследуемых квазилинейных систем при стремлении к нулю плотности газа (или интенсивности). Отмечено, что провальные особенности не наследуются. Для частного случая уравнений мелкой воды (или опрокинутой мелкой воды) дан пример полиномиального решения, обладающего особенностью сборки. В отдельном пункте для частного случая уравнений мелкой воды обоснован формализм из предыдущих работ.

В главе 3 рассмотрена единственная типичная особенность решений системы уравнений нелинейной геометрической оптики – особенность сечения эллиптической омбилики. Отмечено, что эта особенность имеет тот же генотип, что и единственная типичная особенность решения системы Коши-Римана (эквивалентной уравнению Лапласа с постоянными коэффициентами, к которому сводится линеаризация нелинейной системы). Уточнен вывод о виде нормальной формы сечения омбилической особенности, ранее полученный на формальном уровне строгости в известной работе Б. А. Дубровина, Т. Гравы и К. Клейна 2009 г.

**Актуальность темы исследования.** Изучение сингулярностей решений квазилинейных систем уравнений с частными производными первого порядка и связанных с ними эффектов – одна из актуальных задач математической физики, берущая начало с классической работы Бернхарда

Римана 1860 г., в которой было теоретически предсказано существование ударных волн, обнаруженных экспериментально лишь впоследствии. Активно развивавшаяся в XX веке теория особенностей дифференцируемых отображений дала мощный аппарат для изучения поведения решений систем квазилинейных уравнений в окрестности точки градиентной катастрофы. Начиная с работы А.Х. Рахимова 1993 г. (Рахимов А. Х. Особенности римановых инвариантов // Функц. анализ и его прил. 1993. Т. 27, №1. С. 46–59) начало формироваться направление исследований типичных (в смысле математической теории катастроф) особенностей решений квазилинейных систем. Такие системы могут применяться для описания различных процессов в газовой динамике, гидродинамике и нелинейной геометрической оптике.

В настоящее время результаты теории особенностей применяют к теории дифференциальных уравнений многие ученые в России и за рубежом: Е.А. Асташов, И.А. Богаевский, С.М. Воронин, Т. Грава, А.А. Давыдов, В.М. Закалюкин, К. Клейн, Дж. Ортензи, Н.Г. Павлова, А.О. Ремизов, Б.И. Сулейманов, Д.В. Туницкий.

**Теоретическая и практическая значимость результатов.** Работа носит теоретический характер и обладает теоретической значимостью. Изучены решения квазилинейных систем уравнений первого порядка в окрестности типичной конечной точки градиентной катастрофы. Представлен конструктивный метод проведения подобного исследования на основе методов теории особенностей с использованием конечного числа преобразований в классе локально бесконечно дифференцируемых или аналитических функций.

**Личное участие соискателя в получении научных результатов.** Основные результаты диссертации опубликованы в работах автора 1–5. В работе 1 научным руководителем Б.И. Сулеймановым отмечено, что одно из найденных соискателем частных решений служит наглядным примером полученного результата. В работе 2 Б.И. Сулеймановым доказана лемма о гладкости решений линейного уравнения (Лемма 1.1 Главы 1). В работе 3 Б.И. Сулеймановым замечено, что полученный результат применим как для гиперболического, так и для эллиптического варианта системы уравнений. Соавтором С.Н. Мелиховым в Теореме 2 доказана необходимость (Теорема 2.1 Главы 2). В работе 5 Б.И. Сулеймановым со ссылкой на результат Э. Пикара обоснована необходимость аналитичности решений линейного уравнения. Все основные результаты диссертации получены автором самостоятельно.

**Степень достоверности результатов** проведенных исследований обеспечивается их публикацией в рецензируемых журналах из Перечня ВАК и международных реферативных баз данных Web of Science и Scopus. Все основные результаты, изложенные в диссертации Шавлукова А.М., достоверны и строго обоснованы. Они получены соискателем лично и опубликованы в виде 5 статей в рецензируемых журналах, которые рекомендованы ВАК для публикации результатов диссертаций. Все статьи

изданы в журналах, включенных в Перечень ВАК и международные реферативные базы данных Web of Science и Scopus.

**Новизна и значение выводов** диссертационной работы заключается в следующем.

Строго обоснованы формальные результаты предыдущих работ. Дополнены два результата предшественников: впервые описана особенность типа сборки для газа Чаплыгина (оставленного за рамками анализа в работе В.Р. Кудашева и Б.И. Сулейманова, 2001 г.) и уточнен вид сечения нормальной формы особенности типа эллиптической омбилики решений системы уравнений нелинейной геометрической оптики (чем уточняется известная работа Б.А. Дубровина, Т. Гравы, К. Клейна, 2009 г.).

Замечено совпадение с точностью до растяжений генотипов особенностей складки, сборки и сечения гиперболической омбилики решений системы уравнений одномерной газовой динамики и генотипов особенностей складки, сборки и сечения гиперболической омбилики решений линейного волнового уравнения в образе годографа.

Замечено совпадение с точностью до растяжений генотипа особенности эллиптической омбилики решения системы уравнений нелинейной геометрической оптики и генотипа особенности эллиптической омбилики решения уравнения Лапласа.

**Полнота изложения материалов диссертации в работах, опубликованных соискателем.** Все основные результаты, изложенные в диссертационной работе, опубликованы в виде статей в рецензируемых изданиях, рекомендованных перечнем ВАК для публикации результатов диссертаций. По теме диссертации имеются 5 статей, изданных в журналах из Перечня ВАК, входящих в международные реферативные базы данных Web of Science и Scopus.

#### **Основные публикации по теме диссертации:**

1. Шавлуков А.М. Типичная провальная особенность сборки решений уравнений движения одномерного изоэнтропического газа / А.М. Шавлуков, Б.И. Сулейманов // Известия РАН. Серия физическая. — 2020. — Т. 84, № 5. — С. 664–666.
2. Шавлуков А.М. О наследовании решениями уравнений движения изоэнтропического газа типичных особенностей решений линейного волнового уравнения / А.М. Шавлуков, Б.И. Сулейманов // Математические заметки. — 2022. — Т. 112, № 4. — С. 625–640.
3. Шавлуков А.М. Типичные провальные асимптотики квазиклассических приближений к решениям нелинейного уравнения Шредингера / А.М. Шавлуков, С.Н. Мелихов, Б.И. Сулейманов // Дифференциальные уравнения. — 2024. — Т. 60, № 5. — С. 618–631.
4. Shavlukov A.M. On Generic Singularities of Solutions to the 1D Gas Flow Equations: Chaplygin and Bechert–Stanyukovich Cases / A.M. Shavlukov // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2024. — V. 45, № 6. — P. 2793–2805.
5. Шавлуков А.М. Омбилическая особенность квазиклассических приближений к решениям фокусирующего нелинейного уравнения

Шрёдингера / А.М. Шавлуков, Б.И. Сулейманов // Математические заметки. — 2024. — Т. 116, № 6. — С. 982–997.

Диссертационная работа Шавлукова Азамата Мавлетовича «Особенности решений одномерных уравнений газовой динамики и нелинейной геометрической оптики» соответствует п. 14 Положения о присуждении учёных степеней:

- отсутствуют недостоверные сведения об опубликованных соискателем учёной степени работах, в которых изложены основные научные результаты диссертации;
- соискатель ссылается на авторов и источники заимствования.

Основные результаты диссертации обсуждались на Общегородском семинаре им. А.М. Ильина по дифференциальным уравнениям математической физики Института математики с вычислительным центром УФИЦ РАН, а также неоднократно докладывались на международных конференциях по дифференциальным уравнениям: «Уфимская осенняя математическая школа» (Уфа, 2019, 2020, 2021, 2022, 2023 г.); «Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании» (Уфа, 2020 г.); «Теория функций, теория операторов и квантовая теория информации» (Уфа, 2020 г.); «Математическая весна» (Нижний Новгород, 2020, 2021 г.); «Ломоносов» (г. Москва, 2020, 2021, 2022, 2023 г.); Конференция международных математических центров мирового уровня (г. Сочи, 2021 г.); Школа для молодых механиков и математиков SYMM (г. Москва, 2021, 2022, 2024 г.); «Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения» (оз. Банное, 2021, 2022 г.); «Nonlinear Dynamics and Integrability» (г. Ярославль, 2022 г.); «O.A. Ladyzhenskaya centennial conference on PDEs» (г. Санкт-Петербург, 2022 г.).

Текст диссертации представляет собой самостоятельную научно-квалификационную работу, не содержит заимствованного материала без ссылок на автора или источник.

Диссертация «Особенности решений одномерных уравнений газовой динамики и нелинейной геометрической оптики» Шавлукова Азамата Мавлетовича удовлетворяет п. 9–11, 13, 14 постановления Правительства Российской Федерации от 24 сентября 2013 г. № 842 «О порядке присуждения учёных степеней» (в редакции от 16.10.2024 г.) и рекомендуется к защите на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по научной специальности 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика.

Заключение принято на расширенном заседании отдела дифференциальных уравнений Института математики с вычислительным центром – обособленного структурного подразделения Федерального государственного бюджетного научного учреждения Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук.

На заседании присутствовало 10 человек (в том числе 5 докторов наук, 4 кандидата наук), с правом голоса 8 человек.

Результаты голосования: «за» – 8 чел., «против» – 0 чел.,  
«воздержалось» – 0 чел. (протокол № 1 от 29 мая 2025 г.).

Председатель заседания  
д.ф.-м.н., главный научный сотрудник,  
заведующий отделом  
дифференциальных уравнений  
ИМВЦ УФИЦ РАН

Д.И. Борисов

Подпись Борисова Д.И. заверяю:  
Ученый секретарь ИМВЦ УФИЦ РАН  
кандидат физико-математических наук

В.Ф. Вильданова

