ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ НАУЧНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ УФИМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи

Султанов Оскар Анварович

УСТОЙЧИВОСТЬ И БИФУРКАЦИОННЫЕ ЯВЛЕНИЯ В НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ С ЗАТУХАЮЩИМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

1.1.2 – Дифференциальные уравнения и математическая физика

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание учёной степени

доктора физико-математических наук

Уфа – 2026

Оглавление

Введение

Актуальность темы исследования. Моделирование широкого спектра явлений и процессов в природе приводит к динамическим системам, подверженным внешним и внутренним возмущениям: шумам данных, неопределённостям в параметрах, сезонным и структурным флуктуациям. Анализ влияния возмущений на устойчивость и глобальные свойства решений является классической проблемой качественной теории дифференциальных уравнений, основы которой были заложены в работах А. Пуанкаре [86] и А.М. Ляпунова [56] в конце XIX века. Результаты таких исследований позволяют судить о надежности и корректности моделей, прогнозировать долгосрочное поведение систем, а также разрабатывать эффективные методы управления динамикой.

Для автономных и периодических возмущений с малой постоянной интенсивностью многие задачи удаётся решить с помощью известных результатов и методов теории устойчивости, развитых в работах Н.Г. Четаева [106], И.Г. Малкина [57], Н.Н. Красовского [52], Ж. Ла-Салля [201], М.М. Хапаева [100], В.В. Румянцева [88], теории бифуркаций, содержащихся в работах А.А. Андронова с соавторами [6, 42], В.И. Арнольда с соавторами [95], Н.Н. Баутина [11], Ш. Чоу и Дж.К. Хейла [153], Дж. Гукенхеймера и Ф. Холмса [176], Л.П. Шильникова с соавторами [62, 63], и асимптотического анализа, отраженных, например, в работах Н.Н. Боголюбова и Ю.А. Митропольского [15], А.Х. Найфэ [68] и М.В. Федорюка [99].

Отдельный круг задач возникает в связи с исследованием решений дифференциальных уравнений под действием медленно меняющихся со временем возмущений, содержащих малый параметр. Явления, наблюдаемые в таких моделях, выступают объектами исследований теории релаксационных колебаний [95, гл. 4], динамических бифуркаций [211] и теории возмущений интегрируемых систем [9, гл. 6, § 4]. В частности, эффекты затягивания потери устойчивости, асимптотическое описание решений в переходных слоях, критические значения скорости изменения параметров и поведение решений на далеких временах или при стремлении параметра к нулю обсуждались в работах А.Н. Тихонова [96], Л.С. Понтрягина [85], В.И. Арнольда [7], А.Б. Васильевой и В.Ф. Бутузова [24], Е.Ф. Мищенко и Н. Х. Розова [65], А. И. Нейштадта [72, 73], Н.Р. Лебовица и Р.Дж. Шаара [202], Р. Хабермана [177], Г.Дж.М. Мари [216], О.М. Киселева [194], К. Кюна [198], К. Перриман [231], Л.А. Калякина [40, 41], А.И. Нейштадта и Д.В. Трещева [74] и С.В. Болотина [16]. Однако в настоящей работе наличие малого параметра не предполагается, и исследуются бифуркационные явления другого типа.

Многие современные задачи нелинейной математической физики сводятся к изучению дифференциальных уравнений с возмущениями, интенсивность которых затухает со временем. В этом случае возмущённая динамика описывается с помощью асимптотически автономных систем

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^\ell, \quad t \geq t_0, \tag{1}$$

где для любого компактного множества $D \subset \mathbb{R}^\ell$ существует предел $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \to 0$ при $t \to \infty$ равномерно для всех $\mathbf{x} \in D$. Вектор-функция $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$ соответствует возмущению предельной автономной системы

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{y}). \tag{2}$$

Известно, что такие возмущения могут существенно повлиять на качественные и асимптотические свойства решений предельных уравнений. Настоящая работа посвящена развитию методов исследования устойчивости и асимптотического анализа, позволяющих эффективно оценивать влияние различных классов затухающих детерминированных и стохастических возмущений типа белого шума на глобальные свойства решений нелинейных систем.

Первая часть работы посвящена детерминированным возмущениям нелинейных гамильтоновых систем на плоскости:

$$\frac{dx_1}{dt} = -\partial_{x_2} H(x_1, x_2) + g_1(x_1, x_2, t), \quad \frac{dx_2}{dt} = \partial_{x_1} H(x_1, x_2) + g_2(x_1, x_2, t). \tag{3}$$

Предполагается, что функции $H(x_1, x_2)$, $g_1(x_1, x_2, t)$ и $g_2(x_1, x_2, t)$ являются бесконечно дифференцируемыми для всех $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ и $t \geq t_0$. Изучается влияние возмущений на устойчивость, локальные бифуркации и асимптотическое поведение решений на бесконечности по независимой переменной. От возмущений не требуется сохранения гамильтоновой структуры уравнений, но предполагается степенная асимптотика

$$g_i(x_1, x_2, t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} t^{-\frac{k}{q}} g_{i,k}(x_1, x_2, S(t)), \quad t \to \infty, \quad q \in \mathbb{Z}_+ := \{1, 2, \dots\} \tag{4}$$

с коэффициентами, зависящими периодически от некоторой заданной функции $S(t)$. В частности, рассматриваются возмущения с асимптотически постоянной частотой $S'(t) \sim s$, с чирпированной частотой (chirped frequency) $S'(t) \sim st^{\nu}$ при $\nu > 0$, а также неосциллирующие возмущения с $S'(t) \equiv 0$. Заметим, что затухающие коэффициенты вида $t^{-k/q}$ встречаются в различных классах нелинейных дифференциальных уравнений, включая уравнения Пенлеве [136] и модели авторезонанса [195]. При этом в возмущениях можно рассматривать и другие функции, стремящиеся к нулю на бесконечности по времени. Однако, рассуждения и вычисления в таком случае в значительно степени повторяли бы приведённые ниже с большей громоздкостью и меньшей эффективностью.

Нетрудно проверить, что рациональные степени k/q при $q > 1$ в (4) могут быть сведены к целым показателям k заменой независимой переменной: $\theta = t^{1/q}$. Тогда в левой части возмущённой системы (3) появится затухающий множитель $\theta^{-(q-1)}$, что сделает задачу о долговременном поведении решений сингулярно возмущённой. В этом случае, глобальное поведение решений не может быть выведено из соответствующих предельных уравнений, в которых формально положено $\theta = \infty$. С другой стороны, возмущённая система, записанная в переменной $\tau = \epsilon t$ с малым параметром $0 < \epsilon \ll 1$, также является сингулярно возмущённой при $\epsilon \to 0$. В некоторых случаях асимптотическое решение такой задачи при $\epsilon \to 0$ и $0 < \tau \leq \mathcal{O}(1)$, даёт приближение для решений в исходной переменной $t = \tau/\epsilon$. Однако, такой подход обычно не используется при исследовании поведения решений на бесконечности [279], [228], [46], [18], [34]. Более того, известные асимптотические конструкции с малым параметром в таких задачах в общем случае оказываются не применимы [38].

Вторая часть работы посвящена влиянию случайных возмущений. Случайные коэффициенты в возмущениях позволяют учитывать неопределённости и флуктуации, делая математическую модель более реалистичной и адекватной исследуемым явлениям [105], [90], [79], [104], [44]. Специальный класс представляют возмущения типа белого шума. Под белым шумом обычно понимается стационарный гауссовский случайный процесс с нулевым средним значением и постоянной спектральной плотностью. Нетрудно проверить, что для такого процесса ковариационная функция имеет вид δ-функции Дирака, а дисперсия бесконечна. Поэтому такие процессы обычно понимаются в некотором обобщённом смысле и используются для моделирования воздействий, которые быстро меняются и не коррелируют в различные моменты времени (см., например, [79, гл.2, § 5] и [118, §3.2]). В этом случае возмущённые уравнения имеют вид стохастических дифференциальных уравнений и записываются в форме дифференциалов

$$d\mathbf{x} = (\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}, t))\,dt + \mu \mathbf{G}(\mathbf{x}, t)\,d\mathbf{w}, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^\ell,$$

которая является сокращённой записью интегрального уравнения

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \int\limits_{t_0}^{t} (\mathbf{f}(\mathbf{x}(s)) + \mathbf{g}(\mathbf{x}(s), s))\,ds + \mu \int\limits_{t_0}^{t} \mathbf{G}(\mathbf{x}(s), s)\,d\mathbf{w}(s),$$

где $\mathbf{w}(t) = (w_1(t), \dots, w_\ell(t))^T$ — многомерный винеровский процесс, определённый на некотором вероятностном пространстве, $\mathbf{G}(\mathbf{x}, t)$ — гладкая матрица размерности $\ell \times \ell$, $\mu > 0$ — параметр, который используется для контроля за интенсивностью шума, и последнее слагаемое — стохастический интеграл Ито (см., например, [227, гл. 3] и [241, гл. 4]). Известно, что даже слабые случайные возмущения способны существенно изменить поведение решений детерминированных систем: например, привести к потере устойчивости равновесия и выходу траекторий из любой ограниченной области.

В настоящей работе рассматриваются мультипликативные стохастические возмущения асимптотически автономных систем вида (3). В этом случае $\ell = 2$, $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \equiv (\partial_{x_2}H(x_1,x_2), -\partial_{x_1}H(x_1,x_2))^T$, $\mathbf{g}(\mathbf{x},t) \equiv (g_1(x_1,x_2,t), g_2(x_1,x_2,t))^T$. Предполагается, что для коэффициентов матрицы $\mathbf{G}(\mathbf{x},t) \equiv \{G_{i,j}(x_1,x_2,t)\}_{2\times 2}$ справедливы асимптотические разложения, аналогичные (4). Исследуется влияние шума на устойчивость, бифуркации и поведение траекторий решений на далеких временах.

Наконец, отметим задачи, в которых возникают асимптотически автономные системы. Например, уравнения Пенлеве, имеющие множество физических приложений [34, с. 31–44], с помощью замен П. Бутру [133], [134] сводятся к системам с затухающими коэффициентами. В частности, подстановка $u(z) = zx_1(t)$, $x_2(t) = x_1'(t)$, $t = z^2$ приводит четвёртое уравнение Пенлеве

$$u_{zz} = \frac{u_z^2}{2u} + \frac{3}{2}u^3 + 4zu^2 + 2(z^2 - \alpha_1)u + \frac{\alpha_2}{u}$$

к виду (1) с

$$\mathbf{f}(x_1,x_2) \equiv \begin{pmatrix} x_2 \\ \frac{x_2^2}{2x_1} + \frac{x_1}{2} + x_1^2 + \frac{3x_1^3}{8} \end{pmatrix},$$
$$\mathbf{g}(x_1,x_2,t) \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ -t^{-1}\Big(\frac{\alpha_1 x_1}{2} + x_2\Big) + t^{-2}\Big(\frac{\alpha_2}{4x_1} + \frac{x_1}{8}\Big) \end{pmatrix}.$$

Более того, похожие редукции имеют место для широкого класса нелинейных дифференциальных уравнений [136], [171], [91], [253], [254], [184]. Пример другого типа даёт математическая модель эпидемии [141]:

$$\frac{dS}{dt} = \alpha_0 - J - \alpha_1 S + \alpha_2 R, \quad \frac{dI}{dt} = J - (\alpha_3 + \alpha_1)I, \quad \frac{dR}{dt} = \alpha_3 I - (\alpha_1 + \alpha_2)R$$

с параметрами α_i и некоторой функцией скорости заражения $J = G(S,I,R,N)I$, где $N = S + I + R$. Нетрудно проверить, что функция $N(t)$ удовлетворяет уравнению $dN/dt = \alpha_0 - \alpha_1 N$ и имеет вид $N(t) \equiv \alpha_0/\alpha_1 + (N(t_0) - \alpha_0/\alpha_1)\exp(-\alpha_1(t-$

$t_0)$). Следовательно, функции $I(t) = x_1(t)$ и $R(t) = x_2(t)$ удовлетворяют асимптотически автономной системе (1) с

$$\mathbf{f}(x_1, x_2) \equiv \begin{pmatrix} G\left(\frac{\alpha_0}{\alpha_1} - x_1 - x_2, x_1, x_2, \frac{\alpha_0}{\alpha_1}\right) x_1 - (\alpha_3 + \alpha_1) x_1 \\ \alpha_3 x_1 - (\alpha_1 + \alpha_2) x_2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{g}(x_1, x_2, t) \equiv \begin{pmatrix} G\left(N - x_1 - x_2, x_1, x_2, N\right) x_1 - G\left(\frac{\alpha_0}{\alpha_1} - x_1 - x_2, x_1, x_2, \frac{\alpha_0}{\alpha_1}\right) x_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Похожие редукции к асимптотически автономным системам используются в задачах небесной механики [240], при исследовании синхронизации связанных осцилляторов [156] и в моделях динамики ДНК [273]. Затухающие со временем коэффициенты также встречаются в уравнениях типа Матукумы, моделирующих динамику шарового скопления звёзд [226], [237], в задаче об устойчивости сплавов с памятью формы [43, § 3.3.4], в системах, описывающих движение сжимаемого газа через пористую среду с зависящим от времени коэффициентом трения [229], [185], [173], в задачах о стабилизации вращательного движения твёрдых тел с переменным моментом инерции [107] и с переменным управляющим моментом [2], [111]. Стохастические дифференциальные уравнения с затухающими коэффициентами возникают, например, при моделировании процесса формирования планет из протосолнечной туманности [163], при моделировании аномальной диффузии [80], в задачах о стохастической аппроксимации [70], в задачах о глобальной оптимизации с помощью алгоритма имитации отжига [151], [146] и в задачах об оптимальном управлении стохастическими системами [13], [81].

Степень разработанности темы исследования. Влиянию затухающих возмущений на глобальные свойства динамических систем посвящено большое число работ.

Для линейных систем с почти постоянными коэффициентами вопросы об асимптотике решений возмущённых уравнений на бесконечности по независимой переменной обсуждались в работах О. Перрона [230], Н. Левинсона [206],

[207], [208], А. Винтнера [280], [281], Ф.В. Аткинсона [123], П. Хартмана [181], А. Девинаца [159], У.А. Хариса и Д.А. Латса [179], [180], Дж.С. Кассела [143], М. Пинто [233], В.Ш. Бурда [21], А. Самойленко [238], Ю.А. Коняева и Ю. Г. Мартыненко [49], П.Н. Нестерова [75], [76], [77], Н.Ф. Валеева и Я.Т. Султанаева [23] при различных ограничениях на затухающие возмущения. Близкие задачи об исследовании индекса дефекта и спектра соответствующих дифференциальных операторов рассматривались в работах М.А. Наймарка [67, гл. VII], Б. Саймона [245], М.В. Федорюка [98], А. Девинаца [160], Дж.Д. Долларда и Ч.Н. Фридмана [162], М. Бен-Арци [129], М. Истхэма [164], А. Киселева [193], С. Денисова и С. Купина [157] и М. Лукича [212].

Асимптотика решений на бесконечности для различных классов нелинейных неавтономных систем исследовалась в работах А.Д. Брюно [18], В.В. Козлова и С.Д. Фурты [46], где для построения главных членов асимптотики выводились соответствующие укороченные уравнения. При этом наиболее характерной формой асимптотических разложений оказывались ряды по степеням и логарифмам независимой переменной с постоянными коэффициентами. Построение асимптотических решений в форме степенных рядов с осциллирующими коэффициентами обсуждалось в работах П. Бутру [133], [134], А.Д. Брюно и И.В. Горючкиной [19], Л.А. Калякина [37], [38]. Вопросы обоснования формальных асимптотических конструкций изучались в работах А.Н. Кузнецова [54], Л.А. Калякина [187], [39], Р.Р. Гонцова и И.В. Горючкиной [28].

Качественное исследование асимптотически автономных систем восходит к работе Л. Маркуса [217], где обсуждалась связь между поведением траекторий возмущённой системы и свойствами решений соответствующих предельных уравнений, а также обобщалась теория Пуанкаре-Бендиксона (см., например, [45, гл. XIV]) на асимптотически автономные плоские системы. В частности, было доказано, что если предельная система имеет локально асимптотически устойчивую неподвижную точку, то она является аттрактором для возмущённой системы [217, Теорема 2]. Кроме того, если все траектории предельной системы являются неограниченными, то и решения асимптотически автономной системы также неограничены [217, Теорема 3]. Результаты Л. Маркуса уточнялись и обобщались на асимптотически автономные полупотоки в работах Х. Тиме [274], [221]. В частности, было показано, что предельное множество асимптотически автономного полупотока является цепно-рекуррентным множеством (см. [154, с. 37]) предельного автономного полупотока, обсуждались свойства траекторий при наличии функции Ляпунова для предельной системы, а также исследовались примеры асимптотически автономных систем, демонстрирующие поведение отличное от динамики соответствующих предельных уравнений.

Близкие вопросы обсуждались в работах Р. Беллмана [14, гл. II], где для линейных асимптотически автономных систем исследовались условия сохранения ограниченности решений. Условия почти периодичности решений исследовались в [282] для одного класса нелинейных уравнений второго порядка с асимптотически постоянным коэффициентом и в [276], [175], [33] для более общих асимптотически автономных систем. Задачи об устойчивости равновесия по Ляпунову в системах с неавтономными возмущениями, интегрируемыми на полуоси, обсуждалась в работах И. Вркоча [27], Ф.Брауэра [135], Т. Ёсидзавы [283, §24], А. Штрауса и Дж.А. Йорка [272] при довольно жёстких ограничениях на невозмущённые уравнения. Например, предполагалось наличие глобальной функции Ляпунова, линейность правой части, экспоненциальная или асимптотическая устойчивость. Отметим также работу [48], где анализировалась устойчивость равновесия в системах близких к линейным с полиномиально периодической матрицей при некоторых предположениях на действительные части собственных значений и достаточно быстром затухании нелинейных добавок. Такие системы сводятся к асимптотически автономным с помощью замены независимой переменной. Устойчивость специальных классов нелинейных диссипативных систем при постоянно действующих затухающих возмущениях исследовалась в [148]. Скорость сходимости решений асимптотически автономных скалярных систем к глобально устойчивому равновесию предельных уравнений обсуждалась в [117]. Устойчивость равновесия для одного класса неавтономных механических систем исследовалась в [1] методом функций Ляпунова. Отметим также работы [236], [182], в которых изучалась асимптотическая устойчивость равновесия для уравнений второго порядка с нелинейными неавтономными коэффициентами диссипации. Обзор результатов об устойчивости неавтономных систем второго порядка с потенциальными и диссипативными силами содержится в [64, гл. 3].

Работа Л. Маркуса стимулировала дальнейшие исследования, посвящённые качественным свойствам неавтономных систем дифференциальных уравнений. В частности, в работах Дж.Р. Селла [243] развивался подход, позволяющий свести изучение неавтономных уравнений к исследованию динамических систем на расширенном пространстве, построенном на множестве трансляций правых частей. Ключевое место при этом занимают соответствующие предельные уравнения, полученные как сходящаяся в определённой топологии последовательность сдвигов правой части [220], [244]. Заметим, что универсальность динамической системы сдвигов на пространстве непрерывных функций отмечалась ранее М.В. Бебутовом [12]. Применение такого подхода в задачах об устойчивости неавтономных систем содержится в [60], где различные свойства решений выводятся на основе анализа предельных уравнений. В частности, для асимптотически автономных систем показано (см. [60, Теорема 1.8.6]), что если предельная система (2) имеет функцию Ляпунова $V(\mathbf{y})$ и множество $\mathfrak{E} = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^\ell : dV/dt = 0\}$ является компактным и асимптотически устойчивым, то любое ограниченное решение возмущённой системы (1) сходится к $\mathfrak{E}$. Метод предельных уравнений использовался в работах А.С. Андреева при исследовании вопросов устойчивости и стабилизации неавтономных механических систем [4], [5].

Аналогичный переход к динамическим системам применялся в [147] при исследовании некоторых классов неавтономных диссипативных разностных, функционально-дифференциальных и полулинейных параболических уравнений. В [149] обсуждались условия существования аттракторов для неавтономных эволюционных уравнений в частных производных на основе анализа семейств операторов, действующих на фазовом пространстве, расширенном пространством символов, каждый из которых состоит из всех неавтономных коэффициентов правой части уравнения. Другой подход, основанный на понятии равномерной эквивалентности, к исследованию и классификации неавтономных векторных полей на замкнутых многообразиях при наличии у интегральных кривых экспоненциальной дихотомии содержится в работах Л.М. Лермана и В.З. Гринеса [55], [205], [29], [30]. В работах В.А. Плисса [82], [83], [53] рассматривались ограниченные решения, и обсуждались вопросы структурной устойчивости неавтономных систем с произвольной зависимостью от времени. При этом одним из ключевых условий выступала гиперболичность соответствующей линеаризованной системы на каждом отрезке разбиения временной оси.

Бифуркации в неавтономных и асимптотически автономных системах изучались, например, в [200], где вводились понятия устойчивости решений и аттрактора, основанные на идеи pullback-сходимости, при которой фиксируется текущий момент времени t, а предел рассматривается при устремлении начального момента t_0 к минус бесконечности. Используя эти понятия, для скалярных дифференциальных уравнений с коэффициентами, зависящими от времени, анализировались бифуркации, связанные с изменением pullback-устойчивости и появлением новых устойчивых состояний. В частности, обсуждались неавтономные версии бифуркации типа «вилка», «обмен устойчивости» и «седло-узел». Похожие уравнения рассматривались в [197], где под бифуркацией понималось (непрерывное или разрывное) изменение структуры pullback-аттрактора при вариации параметров системы. В [235] бифуркации связывались с изменением структуры области притяжения, и рассматривались примеры бифуркаций асимптотически автономных систем, которые переносятся из предельных уравнений. В [234] для неавтономных разностных и обыкновенных дифференциальных уравнений развивалась теория бифуркаций, основанная на методах функционального анализа [284, гл. 8], в рамках которой в качестве бифурцирующих объектов рассматривались ограниченные решения, а бифуркации понимались как ветвление решений.

Особый интерес в задачах с затухающими возмущениями представляют так называемые критические случаи, когда собственные значения матрицы предельной линеаризованной системы имеют нулевые действительные части. Случай чисто мнимых и различных собственных значений рассматривался в работе Л.Д. Пустыльникова [87], где обсуждалась «проблема центра» (см., например, [32, гл. III]), и для аналитической системы обыкновенных дифференциальных уравнений описывались условия, при которых затухающие возмущения не нарушают предельную динамику. Близкими к таким критическим случаям являются задачи о возмущённых гамильтоновых системах.

Теория возмущений гамильтоновых систем является активной и важной областью исследования (см., например, [58], [97], [9, гл. 5]). В частности, значительно число работ посвящено малым периодическим возмущениям гамильтониана. Классический результат о сохранении нерезонансных торов в возмущённых гамильтоновых системах связан с исследованиями А.Н. Колмогорова [47], В.И. Арнольда [8] и Ю.К. Мозера [66]. Малость меры разрушающихся торов оценивалась в работах А.И. Нейштадта [71], [225]. Экспоненциальная оценка времени устойчивости для многомерных гамильтоновых систем, близких к интегрируемым, обоснована в работе Н.Н. Нехорошева [78]. Формальная устойчивость и нормальные формы гамильтоновых систем обсуждались в работах А.Д. Брюно [17], [20]. Непрерывная процедура нормализации гамильтоновых систем конструировалась в работе Д.В. Трещева [275]. Устойчивость равновесий в резонансных случаях и близкие вопросы, связанные с границами областей устойчивости, обсуждались в [58], [59], [204], [219], [103], [108].

Гамильтоновы системы с затухающими возмущениями рассматривались в [84], где доказывалось слабое отклонение решений от инвариантных торов при условии интегрируемости мажоранты возмущений на полуоси. Устойчивость инвариантных торов относительно малых возмущений, экспоненциально затухающих со временем, исследовалась в [168] для систем с квадратичным по действию гамильтонианом и в [142] для более общих систем. Обобщение этих результатов для возмущений с достаточно быстрым степенным затуханием содержится в [239]. Затухающие негамильтоновы возмущения неавтономных гамильтоновых систем рассматривались в [203], где обсуждалась асимптотическая устойчивость равновесия системы при наличии некоторых специальных оценок как для гамильтониана, так и для возмущающих функций. Отметим, что в настоящей работе наличие гамильтоновой структуры возмущений не предполагается.

Таким образом, в зависимости от свойств как предельных уравнений, так и возмущений, затухающие добавки могут либо сохранять предельную автономную динамику и не оказывать на неё существенного влияния, либо приводить к качественным изменениям в глобальном поведении траекторий. Несмотря на большое число работ, посвящённых асимптотически автономным системам, локальные бифуркации и перестройки решений в гамильтоновых системах под действием затухающих со временем возмущений до сих пор недостаточно изучены. В частности, остаются открытыми вопросы о влиянии нелинейных затухающих возмущений на сохранение и потерю устойчивости предельных систем и на проявление резонансных эффектов в асимптотическом поведении решений на больших временах. Настоящая работа направлена на решение этих задач.

Влияние стохастических возмущений на качественные и асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений исследовалось в работах Г.Дж. Кушнера [199], М.И. Фрейдлина и А.Д. Вентцеля [169], А.В. Скорохода [242], Р.З. Хасьминского [192], И.Я. Каца и А.А. Мартынюка [188]. Известно, что даже слабые случайные возмущения могут привести к значительным изменениям в поведении траекторий, например, нарушить устойчивость системы и вызвать выход траекторий из любой ограниченной области. Кроме этого в нелинейных системах могут наблюдаться различные явления, индуцированные шумом, такие как, стохастический резонанс [172], когерентный резонанс [232], стохастическая синхронизация [224] и синхронизация шумом [174].

Значительное число работ посвящено стохастическим возмущениям с автономными коэффициентами: $\partial_t \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \equiv 0$ и $\partial_t \mathbf{G}(\mathbf{x}, t) \equiv 0$. В частности, в [191] рассматривались возмущения гамильтоновой системы с нелинейным трением, и исследовалось предельное поведение плотности стационарного распределения при стремлении параметров шума и трения к нулю. Похожие системы с малым параметром рассматривались в [127] и [158], где анализировалась асимптотика старшего показателя Ляпунова. Теория устойчивости и метод функций Ляпунова для стохастических дифференциальных уравнений разрабатывались в [199], [192], [188]. В [169] развивалась теория больших уклонений для оценки влияния малых стохастических возмущений на долговременное поведение траекторий. Асимптотика среднего времени выхода траекторий из окрестности равновесия под действием шума и оценка распределения вероятностей точек выхода исследовались в [169, гл. 4, §2], [218], [223], [131]. Условия стабилизации неустойчивого равновесия с помощью мультипликативного шума исследовались в [114]. Асимптотическая эквивалентность решений стохастических уравнений и соответствующих усечённых обыкновенных дифференциальных уравнений на бесконечности обсуждалась в [189] и [137]. Множество работ посвящено стохастическим бифуркациям, которые в целом понимаются как качественные изменения динамики стохастической системы при вариации параметров [121, гл. 9]. Например, в [222] рассматривались бифуркации через исследование качественных изменений стационарной функции плотности вероятности и анализ уравнений Фоккера-Планка. Метод функции стохастической чувствительности, основанный на приближении стационарной плотности вероятности вблизи аттрактора с помощью квазипотенциала и квадратичной формы, которая определяет ковариацию отклонений случайных траекторий, применялся в работах [124], [125], [126]. Комбинация метода функций Ляпунова и оценки плотности распределения амплитуды решений использовалась в [213] при исследовании бифуркаций в одной стохастически возмущённой системе. Анализ бифуркаций, связанный с исследованием соответствующих случайных динамических систем, инвариантных мер и качественных изменений свойств показателей Ляпунова, содержится в [119], [128], [120], [155]. Подход, основанный на исследовании свойств спектра дихотомии при анализе стохастических бифуркаций, применялся в [140] и [161].

Меньше работ посвящено неавтономным стохастическим возмущениям. Например, слабо нелинейные системы с малым периодическим возбуждением и малым шумом рассматривались в [69], где исследовалось усреднённое уравнение Фоккера-Планка. В [35] анализировался главный член асимптотики по малому параметру для решений одного класса сингулярно возмущённых стохастических дифференциальных уравнений. Теория сингулярных возмущений в сочетании с вероятностными методами применялась в [130] для исследования влияние шума на динамические бифуркации в системах с медленно меняющимися параметрами. Явление стохастического резонанса в системах с периодическим возбуждением и малым шумом анализировалось в [183] с помощью теории больших отклонений. Другой подход в задаче о стохастическом резонансе, основанный на методах случайных динамических систем, применялся в [150] для доказательства существования притягивающей случайной периодической орбиты. Вопросы существования случайных периодических траекторий в системах стохастических дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами обсуждались также в [166] и [167].

Отдельный круг работ посвящён влиянию шума с затухающей интенсивностью. В частности, устойчивость при наличии затухающих случайных возмущений исследовалась в [192, §7.4], где предполагалось существование глобальной функции Ляпунова и интегрируемой на полуоси мажоранты $\sigma(t) > 0$ для коэффициентов матрицы диффузии:

$$\mathbf{\Sigma}(\mathbf{x},t)=\frac{\mu^2}{2}\mathbf{G}(\mathbf{x},t)\mathbf{G}^T(\mathbf{x},t),\quad \sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^\ell}\|\mathbf{\Sigma}(\mathbf{x},t)\|\le\sigma(t),\quad \int\limits_{t_0}^{\infty}\sigma(s)\,ds<\infty.$$

Похожие условия на затухающие коэффициенты рассматривались в [70], где обсуждалась сходимость решений на бесконечности с вероятностью 1 в задачах о стохастической аппроксимации. Более слабые условия рассматривались в [145], где исследовалась устойчивость равновесия скалярных уравнений с коэффициентом диффузии, не интегрируемым на полуоси и стремящимся к нулю на бесконечности по времени так, что сходится интеграл

$$\int\limits_{t_0}^{\infty}\exp\left\{-\frac{\lambda}{\sigma(s)}\right\}ds<\infty\quad\forall\,\lambda>0.$$

Аналогичные условия в многомерном случае рассматривались в [50] и [51] для задачи о сходимости процессов стохастических аппроксимаций при дополнительных предположениях о поведении решений на бесконечности. В [214] и [210] обсуждались условия полиномиальной устойчивости с вероятностью 1 в терминах существования подходящих глобальных функций Ляпунова для многомерных стохастических систем и применялись к уравнениям с затухающими коэффициентами. В [112] и [113] для классов скалярных стохастических уравнений с сильно нелинейными автономными коэффициентами сноса исследовалось асимптотическое поведение и устойчивость решений, стремящихся к равновесию предельных уравнений, в случае полиномиально затухающих коэффициентов диффузии, не зависящих от состояния системы. Скалярные уравнения рассматривались также в [115], где при условии диссипативности автономных коэффициентов сноса было доказано, что для сохранения устойчивости равновесия предельных систем относительны шума с затухающими коэффициентами диффузии необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{t\to\infty}\sigma(t)\log(t)=0.$$

При этом, было показано, что если

$$\lim_{t\to\infty} \sigma(t)\log(t) = \infty,$$

то все решения возмущённых уравнений оказываются неограниченными с вероятностью единица. Похожие условия встречаются и в [116], где обсуждались глобальная устойчивость, ограниченность и неограниченность решений линейных стохастических уравнений. Эти результаты обобщались в [148] на многомерные линейные и нелинейные диссипативные системы с затухающими коэффициентами диффузии, зависящими только от времени. Условия неограниченности решений для одномерных стохастических уравнений с мультипликативными коэффициентами диффузии обсуждались в [196].

Влияние мультипликативных стохастических возмущений с затухающей интенсивностью на бифуркации, перестройки решений и резонансные эффекты в плоских гамильтоновых системах ранее не исследовалось. Эти вопросы рассматриваются в настоящей работе. Предлагаемый подход основан на исследовании устойчивости по вероятности с помощью построения локальных стохастических функций Ляпунова для возмущённых систем при некоторых предположениях о поведении коэффициентов уравнений вблизи исследуемых решений.

Цели и задачи диссертационной работы. Целью диссертационной работы является разработка методов исследования качественных и асимптотических свойств решений классов асимптотически автономных систем дифференциальных уравнений, описывающих нелинейные автономные гамильтоновы системы на плоскости под действием детерминированных и стохастических возмущений с затухающей интенсивностью. Исследуются бифуркации в возмущённых системах, условия сохранения и потери устойчивости равновесий по Ляпунову, появление притягивающих и отталкивающих состояний, асимптотические режимы для решений и различные проявления резонансных эффектов. Развивается подход, основанный на комбинации метода усреднения и построения функций Ляпунова.

Для достижения поставленных целей решаются следующие задачи:

1. Исследуются бифуркации, связанные с изменением устойчивости равновесия по Ляпунову и появлением новых притягивающих или отталкивающих состояний, и их зависимость от параметров и структуры возмущений.
2. Изучаются условия сохранения и нарушения бифуркации типа центр-седло под действием возмущений с затухающей интенсивностью.
3. Изучается устойчивость равновесия и асимптотические режимы для решений гамильтоновых систем под действием осциллирующих возмущений с асимптотически постоянной резонансной частотой.
4. Изучаются эффекты типа нелинейный резонанс и появление устойчивых состояний, близких к периодическим, в системах с затухающими возмущениями.
5. Исследуется возникновение и устойчивость резонансных решений с неограниченно растущей амплитудой в нелинейных системах под действием затухающих возмущений с чирпированной частотой.
6. Изучается устойчивость по вероятности динамических систем при постоянно действующих случайных возмущениях типа белого шума на асимптотически больших временных интервалах.
7. Изучаются бифуркации, вызванные шумом и связанные с изменением устойчивости по вероятности равновесия или с появлением новых притягивающих состояний в системах, близких к гамильтоновым.
8. Изучается совместное влияние шума и возмущений с асимптотически постоянной резонансной частотой на устойчивость гамильтоновых систем.
9. Исследуется возникновение резонансных решений с неограниченно растущей амплитудой и их стохастическая устойчивость в системах с затухающими чирпированными возмущениями и белым шумом.

Положения, выносимые на защиту:

1. Описаны бифуркации в гамильтоновых системах под действием затухающих возмущений. Найдены условия, при которых равновесие системы остаётся нейтрально устойчивым, становится асимптотически устойчивым, либо теря-

ет устойчивость с возникновением устойчивых решений, близких к периодическим. Показана неэффективность метода линеаризации для асимптотически автономных систем.

2. Установлены условия, при которых сохраняется или исчезает бифуркация центр-седло в системах с затухающими возмущениями. Описаны асимптотические режимы для решений и условия их устойчивости при различных значениях бифуркационного параметра предельной системы.

3. Описаны режимы фазового захвата и фазового дрейфа для решений нелинейных систем, возникающих под действием затухающих осциллирующих возмущений с асимптотически постоянной резонансной частотой. Выявлена роль возмущений в смещении границы устойчивости равновесия.

4. Найдены условия существования и устойчивости захвата осциллирующих систем в нелинейный резонанс под действием затухающих возмущений. Выведена модельная система, описывающая усреднённую динамику.

5. Доказано существование и устойчивость резонансных решений с неограниченно растущей энергией в нелинейных системах с затухающими возмущениями с чирпированной частотой. Построена асимптотика для общих резонансных решений на бесконечности по времени. Исследованы резонансные режимы для осциллятора Дуффинга с затухающими возмущениями.

6. Определены классы стохастических возмущений типа белого шума, при которых гарантируется устойчивость по вероятности динамических систем на асимптотически больших временных интервалах и на полуоси. Предложена конструкция стохастических функций Ляпунова на основе локальной функции Ляпунова невозмущённой детерминированной системы.

7. Найдены условия на структуру и параметры шума, при которых равновесие в стохастических системах, близких к гамильтоновым, либо становится асимптотически устойчивым по вероятности, либо теряет устойчивость. Доказана устойчивость по вероятности равновесия на асимптотически больших временных интервалах в некоторых промежуточных случаях.

8. Описаны условия устойчивости по вероятности равновесия в режимах фазового захвата и фазового дрейфа в нелинейных гамильтоновых системах под действием шума и резонансных возмущений. Выведена модельная система обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающая усреднённую динамику.
9. Найдены условия существования и устойчивости резонансных решений с неограниченно растущей амплитудой и фазой, синхронизированной с чирпированными возмущениями, при наличии белого шума. Определены пороговые значения и их зависимость от параметров возмущений.

Научная новизна. Результаты диссертации являются новыми. Новизна обоснована тем, что, в отличие от известных результатов для близких задач, в настоящей работе не предполагается ни линейности уравнений, ни гамильтоновой структуры возмущений, ни наличия специальных ограничений на правые части предельных уравнений и возмущения, ни существования заранее заданных функций Ляпунова для возмущённых систем. Основные предположения касаются локального поведения предельной системы в окрестности равновесия и степенного затухания возмущений на бесконечности по независимой переменной.

Теоретическая и практическая значимость. Результаты работы носят теоретический характер и могут быть использованы при исследовании нелинейных детерминированных и стохастических математических моделей. В частности, развитая теория и разработанные методы применялись в задачах о стабилизации неустойчивых резонансных режимов [249], [253], [254], [259], при исследовании решений возмущённых уравнений Пенлеве [263] и уравнений, описывающих процесс самофокусировки [250], а также при описании резонансных режимов в возмущённых осцилляторах Дуффинга [258], [265], [270].

Методология и методы исследования. В работе применяются и развиваются методы теории обыкновенных и стохастических дифференциальных уравнений, теории устойчивости и асимптотического анализа.

При исследовании устойчивости часто используется метод первого приближения, основанный на анализе собственных значений матрицы системы, линеаризованной на решении. В некоторых случаях по знакам действительных частей собственных значений удаётся сделать выводы об устойчивости или неустойчивости решения в исходных уравнениях. В критических случаях, например, когда собственные значения являются чисто мнимыми, такой метод оказывается неэффективным (см., например, [57, §5]). Метод первого приближения не работает и при исследовании асимптотически автономных систем (см., например, § 1.5.2). В этих случаях свойство устойчивости зависит от нелинейных членов уравнений, и для исследования применяется метод, связанный с построением функций Ляпунова. Под функцией Ляпунова обычно понимается некоторая вспомогательная функция, производная которой, вычисленная на траекториях возмущённой системы обладает определёнными оценками, позволяющими анализировать устойчивость без нахождения явных формул для решений. Существует множество способов построения таких функций для различных классов детерминированных систем (см., например, [56, § 26], [106, гл. II], [57], [52], [201], [10], [3], [89, гл. 4], [22], [101], [61, §4.1], [26, §2.1]). Вопросы построения функций Ляпунова для систем стохастических дифференциальных уравнений обсуждались в [199, гл. II, § 5], [192, гл. 5], [188, гл. 2–3], [101, гл. VII], [278, § 7.2]. В настоящей работе предлагаются конструкции функций Ляпунова для классов асимптотически автономных систем, основанные на методе усреднения и учитывающие специфику затухающих со временем возмущений. Отметим, что близкие идеи использовались в [100] и [101, гл. III] при исследовании задач с малым параметром. Однако эти результаты и подходы не допускают прямого переноса на системы с затухающими возмущениями и не могут быть эффективно использованы в рассматриваемых задачах.

Таким образом, в настоящей работе разрабатывается подход к исследованию качественных и асимптотических свойств решений асимптотически автономных нелинейных систем, близких к гамильтоновым, основанный на комбинации метода усреднения и построения функций Ляпунова. На первом шаге строятся замены переменных, преобразующие и упрощающие уравнения в главных членах асимптотики на бесконечности по независимой переменной. Упрощения связаны с усреднением правых частей уравнений по некоторой быстрой переменной. Для различных классов возмущений на роль такой переменной подходит либо переменная угол, либо фаза возмущений. На следующем шаге исследуются модельные уравнения, получаемые из преобразованных путём отбрасывания остаточных членов асимптотики правой части. На уровне модельных уравнений описываются возможные асимптотические режимы для решений и обосновывается их устойчивость или неустойчивость с помощью построения функций Ляпунова или Четаева. На последнем шаге доказывается, что отброшенные слагаемые при выводе модельных уравнений являются несущественными и не влияют на глобальную динамику. В этом случае обоснование проводится путём построения классических и стохастических функций Ляпунова для полных возмущённых уравнений на основе усредняющих преобразований. В задачах со случайными возмущениями предложена последовательная конструкция стохастических функций Ляпунова, позволяющая обосновать устойчивость по вероятности решений относительно шума на любом полиномиально большом временном интервале.

Степень достоверности и апробация результатов. Достоверность результатов обеспечивается строгими доказательствами на основе фундаментальных положений качественной теории дифференциальных уравнений, теории устойчивости и теории стохастических дифференциальных уравнений.

Результаты работы обсуждались на общегородских семинарах им. А.М. Ильина по дифференциальным уравнениям математической физики ИМВЦ УФИЦ РАН (Уфа, 2016–2026), семинарах по теории вероятностей и случайным процессам УГАТУ (Уфа, 2016–2018), семинаре «Нелинейный анализ» факультета математики Потсдамского университета (Потсдам, 2018), коллоквиуме Междисциплинарной исследовательской лаборатории им. П.Л. Чебышева СПбГУ (Санкт-Петербург, 2020), семинаре Международной лаборатории динамических систем и приложений ВШЭ (Нижний Новгород, 2026), международной конференции EquaDiff (Лион, 2015), Уфимской международной математической конференции (Уфа, БашГУ, 2016), Международной конференции по теории функций, посвящённой столетию А.Ф. Леонтьева (Уфа, БашГУ, 2017), Международных конференциях «Проблемы математической физики и математическое моделирование» (Москва, МИФИ, 2017, 2018), Международных конференциях по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям (DFDE) (Москва, РУДН, 2017, 2022), Международной конференции «Спектральная теория и смежные вопросы» (Уфа, БГПУ, 2018), Международных конференциях «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы», посвящённых выдающемуся математику И.Г. Петровскому (Москва, МГУ, 2021, 2025), Международной конференции «Дифференциальные уравнения и оптимальное управление», посвящённой 100-летию со дня рождения академика Е.Ф. Мищенко (Москва, МИАН, 2022), Международных конференциях «Нелинейные уравнения и комплексный анализ» (Р. Башкортостан, 2022, 2023, 2025), Международной Воронежской весенней математической школе «Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения» (Воронеж, 2023), Всероссийской конференции «Нелинейные дни» (Саратов, СГУ, 2023), IV Конференции математических центров России (Санкт-Петербург, СПбГУ, 2024), Международных научных конференциях «Уфимская осенняя математическая школа» (Уфа, УУНиТ, 2024, 2025), Международной конференции «Динамические системы: устойчивость, управление, дифференциальные игры», посвящённая 100-летию со дня рождения академика Н.Н. Красовского (Екатеринбург, ИММ УрО РАН, 2024), VIII Международной конференции «Topological methods in dynamics and related topics» (Нижний Новгород, ВШЭ, 2025).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 29 работах [92], [93], [94], [246], [247], [248], [249], [250], [251], [252], [253], [254], [255], [256], [257], [258], [259], [260], [261], [262], [263], [264], [265], [266], [267], [268], [269], [270], [271].

Личный вклад автора. Содержание диссертации и положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Все представленные результаты получены лично автором.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, 9 глав, заключения и библиографии. В каждой главе выделены параграфы, содержащие постановку задач, формулировку результатов, их доказательства и примеры. Общий объём диссертации составляет 391 страницу. Библиография включает 285 источников.

Благодарности. Автор выражает искреннюю признательность коллегам из отдела дифференциальных уравнений Института математики с вычислительным центром УФИЦ РАН и постоянным участникам общегородских семинаров им. А.М. Ильина по дифференциальным уравнениям математической физики — Л.А. Калякину, В.Ю. Новокшенову, Д.И. Борисову, Р.Н. Гарифуллину, О.М. Киселёву, Ю.А. Кордюкову и Б.И. Сулейманову — за стимулирующие дискуссии и ценные научные замечания.

Глава 1

Бифуркации в асимптотически автономных почти гамильтоновых системах

1.1. Введение

В настоящей главе исследуется влияние затухающих со временем возмущений на бифуркации и устойчивость гамильтоновых систем.

Структура главы следующая. В § 1.2 приводится постановка задачи и описывается класс неавтономных возмущений. Основные результаты, связанные с описанием возможных бифуркаций и асимптотических режимов, представлены в § 1.3. Достаточные условия на возмущения, при которых гарантируется применимость результатов, описаны в § 1.4. Примеры обсуждаются в § 1.5. Обоснование результатов содержится в § 1.6. Предлагаемый метод исследования устойчивости и бифуркаций основан на замене переменных, связанной с функцией Ляпунова для полной асимптотически автономной системы. Построение такой замены описывается в § 1.6.1. В § 1.6.2 описываются бифуркации, связанные с изменением свойств устойчивости равновесия. Появление решений, близких к периодическим, обсуждается в § 1.6.3. Доказательство применимости полученных результатов для описания бифуркаций в полной системе при различных ограничениях на возмущения содержится в § 1.7. Выводы главы содержатся в § 1.8.

1.2. Постановка задачи

Рассматривается система двух обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_1}{dt} = \partial_{x_2} H(x_1, x_2, t), \quad \frac{dx_2}{dt} = -\partial_{x_1} H(x_1, x_2, t) + F(x_1, x_2, t), \tag{1.1}$$

$t > 0$. Предполагается, что функции $H(x_1, x_2, t)$ и $F(x_1, x_2, t)$ являются бесконечно дифференцируемыми и для любого компакта $D \subset \mathbb{R}^2$ имеют место пределы $H(x_1, x_2, t) \to H_0(x_1, x_2)$ и $F(x_1, x_2, t) \to 0$ при $t \to \infty$ для любых $(x_1, x_2) \in D$. Для предельной автономной системы

$$\frac{dx_1}{dt} = \partial_{x_2} H_0(x_1, x_2), \quad \frac{dx_2}{dt} = -\partial_{x_1} H_0(x_1, x_2) \tag{1.2}$$

с гамильтонианом $H_0(x_1, x_2)$ предполагается наличие изолированной неподвижной точки $(0, 0)$ типа центр. Без ограничения общности будем считать, что

$$H_0(x_1, x_2) = \frac{|\mathbf{x}|^2}{2} + \mathcal{O}(|\mathbf{x}|^3), \quad |\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \to 0, \tag{1.3}$$

и существуют $r_0 > 0$ и $E_0 > 0$ такие, что линии уровня $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : H_0(x_1, x_2) = E\}$, лежащие в области $D_0 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |\mathbf{x}| < r_0\}$ при $E \in (0, E_0]$, представляют собой замкнутые кривые на фазовой плоскости (x_1, x_2), параметризованные параметром E. Этим кривым соответствуют периодические решения системы (1.2) с периодом $T(E) = 2\pi/\omega(E)$, где $\omega(E) \neq 0$ для всех $E \in [0, E_0]$ и $\omega(E) = 1 + \mathcal{O}(E)$ при $E \to 0$. Значение $E = 0$ соответствует неподвижной точке $(0, 0)$.

Неавтономные возмущения предельной системы описываются функциями со степенной асимптотикой:

$$\begin{aligned} H(x_1, x_2, t) &\sim H_0(x_1, x_2) + \sum_{k=1}^{\infty} t^{-\frac{k}{q}} H_k(x_1, x_2), \\ F(x_1, x_2, t) &\sim \sum_{k=1}^{\infty} t^{-\frac{k}{q}} F_k(x_1, x_2) \end{aligned} \tag{1.4}$$

при $t \to \infty$, где $q \in \mathbb{Z}_+ := \{1, 2, \dots\}$. Предполагается, что возмущения сохраняют неподвижную точку $(0, 0)$:

$$\partial_{x_1} H(0, 0, t) \equiv 0, \quad \partial_{x_2} H(0, 0, t) \equiv 0, \quad F(0, 0, t) \equiv 0.$$

Заметим, что структура возмущений может быть более сложной, например, асимптотические ряды (1.4) могут быть отличными от степенных или коэффициенты асимптотик могу явно зависеть от t. Однако, такие возмущения не рассматриваются в настоящей главе.

Цель главы — описать возможные асимптотические режимы в возмущённой системе и раскрыть роль затухающих возмущений в соответствующих бифуркациях. Здесь под бифуркациями понимается изменение свойств устойчивости равновесия по Ляпунову и появление новых притягивающих или отталкивающих состояний.

Заметим, что такие затухающие возмущения действительно могу повлиять на устойчивость системы. Рассмотрим простой пример:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = \gamma t^{-\kappa}\frac{dx}{dt}, \quad \gamma, \kappa \in \mathbb{R}, \quad \gamma \neq 0, \quad \kappa > 0.$$

Это уравнение в переменных $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$ имеет вид (1.1) с $H(x_1, x_2, t) \equiv H_0(x_1, x_2) \equiv |\mathbf{x}|^2/2$ и $F(x_1, x_2, t) \equiv \gamma t^{-\kappa} x_2$. Легко проверить, что невозмущённое уравнение ($\gamma = 0$) имеет следующее общее решение: $x(t; a, \varphi) = a\cos(\varphi + t)$. Асимптотика на далеких временах для двух-параметрического семейства решений возмущённого уравнения ($\gamma \neq 0$) находится с помощью метода ВКБ (см., например, [99, гл. II, § 6]):

$$\begin{aligned}
&x(t; a, \varphi) = a\big[\cos(\varphi + t) + \mathcal{O}(t^{1-\kappa})\big], && \kappa > 1;\\
&x(t; a, \varphi) = a t^{\gamma/2}\big[\cos(\varphi + t) + \mathcal{O}(t^{-1})\big], && \kappa = 1;\\
&x(t; a, \varphi) = a\exp\Big(\frac{\gamma t^{1-\kappa}}{1-\kappa}\Big)\Big\{\cos\big(\varphi + t + \mathcal{O}(t^{1-2\kappa}) + \mathcal{O}(\log t)\big) + \mathcal{O}(t^{-\kappa})\Big\}, && \kappa < 1,
\end{aligned}$$

где $a, \varphi \in \mathbb{R}$ — произвольные параметры. Отсюда следует, что устойчивость тривиального решения $x(t) \equiv 0$ или неподвижной точки $(0, 0)$ зависит от параметров γ и κ. В частности, если $\kappa > 1$, то неподвижная точка является устойчивой, но не асимптотически. В этом случае неавтономное уравнение описывают такую же динамику, что и решения предельного уравнения. Неподвижная точка становится притягивающей, когда $\gamma < 0$ (полиномиально устойчивой при $\kappa = 1$ и экспоненциально устойчивой при $0 < \kappa < 1$), и теряет устойчивость, когда $\gamma > 0$. В общем случае, долговременная асимптотика для решения вычисляется не так просто, и устойчивость равновесия зависит от нелинейных членов уравнений. Примеры нелинейных уравнений обсуждаются в § 1.7.

1.3. Основные результаты

Предлагаемый метод исследования асимптотических режимов в системе (1.1) основан на построении подходящих функций Ляпунова. При этом функция Ляпунова используется в качестве новой зависимой переменной. В настоящей главе строятся такая функция и замена переменных удобные для дальнейшего анализа бифуркаций в системе (1.1).

Пусть $(x_1^0(t,E), x_2^0(t,E))$ — $T(E)$-периодическое решение системы (1.2) такое, что $H_0(x_1^0(t), x_2^0(t)) \equiv E$, $x_1^0(0,E) > 0$, $x_2^0(0,E) = 0$ для всех $E \in (0, E_0]$. Определим $\mathcal{D}_0 := \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : H_0(x_1,x_2) \le E_0\} \cap D_0$. Тогда справедлива

Теорема 1. *Пусть система* (1.1) *удовлетворяет условиям* (1.3), (1.4). *Тогда для любого* $N \in \mathbb{Z}_+$ *и* $\varepsilon \in (0,1)$ *найдется* $t_0 > 0$ *и цепочка обратимых преобразований* $(x_1,x_2) \mapsto (E,\varphi) \mapsto (v,\varphi)$,

$$x_1(t) = x_1^0\left(\frac{\varphi(t)}{\omega(E(t))}, E(t)\right), \quad x_2(t) = x_2^0\left(\frac{\varphi(t)}{\omega(E(t))}, E(t)\right), \tag{1.5}$$

$$v(t) = V_N(E(t), \varphi(t), t), \quad V_N(E,\varphi,t) = E + \sum_{k=1}^{N} t^{-\frac{k}{q}} v_k(E,\varphi), \tag{1.6}$$

где $v_k(E,\varphi)$ — 2π*-периодические функции по* φ,

$$|V_N(E,\varphi,t) - E| \le \varepsilon E, \quad |\partial_E V_N(E,\varphi,t) - 1| \le \varepsilon$$

при всех $E \in [0, E_0]$, $\varphi \in \mathbb{R}$ *и* $t \ge t_0$, *такие, что для всех* $(x_1,x_2) \in \mathcal{D}_0$ *и* $t \ge t_0$ *система* (1.1) *приводится к виду*

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{k=1}^{N} t^{-\frac{k}{q}} \Lambda_k(v) + R_{N+1}(v,\varphi,t), \tag{1.7}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega(v) + G_N(v,\varphi,t), \tag{1.8}$$

где $\Lambda_k(v) = \mathcal{O}(v)$ *при* $v \to 0$, *а функции* $R_{N+1}(v,\varphi,t)$ *и* $G_N(v,\varphi,t)$ *определены для всех* $v \in [0, d_0]$, $\varphi \in \mathbb{R}$ *с* $d_0 = (1-\varepsilon)E_0$, *являются* 2π-*периодическими по* φ *и удовлетворяют оценкам*

$$R_{N+1}(v,\varphi,t) = \mathcal{O}(t^{-\frac{N+1}{q}}), \quad G_N(v,\varphi,t) = \mathcal{O}(t^{-\frac{1}{q}})$$

при $t \to \infty$ *равномерно для всех* $v \in [0, d_0]$, $\varphi \in \mathbb{R}$.

Доказательство теоремы 1 содержится в § 1.6.1.

Из свойств функции $R_{N+1}(v,\varphi,t)$ следует, что главные члены асимптотики решений уравнения (1.7) не зависят от φ. Долговременное поведение решений $v(t)$ определяется функциями $\{\Lambda_k(v)\}_{k=1}^N$. Кроме того, из (1.8) следует, что $\varphi(t) \to \infty$ при $t \to \infty$, в то время как $v(t) \in [0, d_0]$.

Пусть $n \geq 1$ — наименьшее целое число, такое что $\Lambda_n(v) \not\equiv 0$. Тогда уравнение (1.7) примет вид:

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{k=n}^{N} t^{-\frac{k}{q}} \Lambda_k(v) + R_{N+1}(v,\varphi,t), \quad t \geq t_0.$$

Теорема 2. *Пусть* $n \geq 1$ *— целое число такое, что* $\Lambda_k(v) \equiv 0$ *для* $k < n$ *и*

$$\Lambda_n(v) = \lambda_n v + \mathcal{O}(v^2), \quad v \to 0, \quad \lambda_n = \text{const} \neq 0. \tag{1.9}$$

Тогда равновесие $(0,0)$ *системы* (1.1) *неустойчиво при* $\lambda_n > 0$, $n \leq q$ *и равномерно устойчиво при* $\lambda_n < 0$. *Более того, если* $\lambda_n < 0$ *и* $n < q$ ($n = q$), *то равновесие равномерно экспоненциально* (*полиномиально*) *устойчиво.*

Отметим, что при потере устойчивости равновесия решения уравнения (1.7), стартующие из окрестности нуля, либо остаются внутри интервала $(0, d_0)$, либо пересекают границу d_0 при $t_{\text{exit}} > t_0$. В первом случае траектории возмущённой системы могут притягиваться периодическими решениями предельной системы. Условия, гарантирующие существование таких притягивающих или отталкивающих состояний, обсуждаются ниже. Во втором случае траектории (1.1) могут проходить через сепаратрису предельной системы при $t > t_{\text{exit}}$ и быть захвачены другим аттрактором. Однако такие глобальные бифуркации решений в данной работе не обсуждаются.

Таким образом, для неавтономных возмущений, удовлетворяющих условиям теоремы 2, λ_n можно рассматривать как параметр бифуркации. При этом $\lambda_n = 0$ является критическим значением.

Рассмотрим случай, когда главный член правой части уравнения (1.7) является нелинейным относительно v.

Теорема 3. *Пусть* $1 \leq m < n$ *— целые числа такие, что* $\Lambda_k(v) \equiv 0$ *для* $k < m$,

$$\begin{aligned}
&\Lambda_m(v) = \gamma_{m,s} v^s + \mathcal{O}(v^{s+1}), \quad \Lambda_j(v) = \mathcal{O}(v^s), \quad m \leq j < n, \\
&\Lambda_n(v) = \lambda_n v + \mathcal{O}(v^2), \quad v \to 0,
\end{aligned}$$

где $\gamma_{m,s}, \lambda_n = \mathrm{const} \neq 0$, $s \in \mathbb{Z}$, $s \geq 2$. *Тогда равновесие* $(0,0)$ *системы* (1.1) *является*

- *равномерно устойчивым, если* $\lambda_n < 0$ *и* $\gamma_{m,s} < 0$;
- *неустойчивым, если* $\lambda_n > 0$, $\gamma_{m,s} > 0$ *и* $n \leq q$.

Заметим, что в некоторых случаях последнее утверждение можно улучшить. В частности, мы имеем

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы 3.*

- *Если* $m < n < q$, *то равновесие* $(0,0)$ *системы* (1.1)
  - *равномерно экспоненциально устойчиво при* $\lambda_n < 0$;
  - *полиномиально устойчиво при* $\lambda_n > 0$ *и* $\gamma_{m,s} < 0$.
- *Если* $m < n = q$, *то равновесие* $(0,0)$ *системы* (1.1)
  - *равномерно полиномиально устойчиво при* $\lambda_n + \frac{n-m}{q(s-1)} < 0$;

– *полиномиально устойчиво при* $\lambda_n + \frac{n-m}{q(s-1)} > 0$ *и* $\gamma_{m,s} < 0$.

- *Если* $m < q < n$, *то равновесие* $(0,0)$ *системы* (1.1) *полиномиально устойчиво при* $\gamma_{m,s} < 0$;

- *Если* $q \le m < n$, *то равновесие* $(0,0)$ *системы* (1.1) *устойчиво при* $\gamma_{m,s} < 0$.

Заметим, что в случае $n = q$ при $\gamma_{m,s} > 0$ и $\lambda_n + \nu > 0$, $\nu = \frac{n-m}{q(s-1)}$ устойчивость равновесия по Ляпунову не обоснована. Более того, из теоремы 4 следует, что тривиальное решение слабо неустойчиво с весом t^ν: существует $\epsilon > 0$ такое, что для сколь угодно малых начальных данных $\exists\, t_* > 0$: $E(t)t^\nu \ge \epsilon$ при $t \ge t_*$. Из (1.3) следует, что равновесие $(0,0)$ неустойчиво с весом $t^{\nu/2}$. Аналогично, в случае $m < q < n$ при $\gamma_{m,s} > 0$ неподвижная точка $(0,0)$ системы (1.1) неустойчива с весом $t^{\eta/2}$.

Для неавтономных возмущений, удовлетворяющих условиям теоремы 3, устойчивость равновесия определяется двумя параметрами λ_n и $\gamma_{m,s}$ (см. рис. 1.1). Разбиение плоскости параметров зависит от отношения n/q. Отметим, что если $\lambda_n > 0$, то равновесие становится неустойчивым в соответствующей линеаризованной системе. Однако асимптотическая устойчивость может сохраняться в полной системе из-за нелинейных членов уравнений.

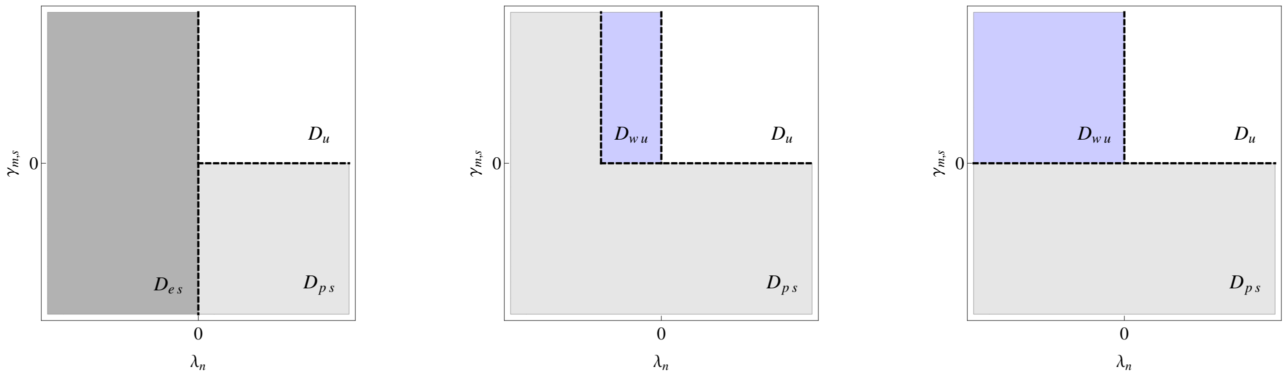
Теперь рассмотрим случай, когда правая часть уравнения (1.7) не имеет линейных членов относительно v.

Теорема 5. *Пусть* $1 \le m < n$ *являются целыми числами, такими что* $\Lambda_k(v) \equiv 0$ *для* $k < m$ *и*

$$\Lambda_m(v) = \gamma_{m,s} v^s + \mathcal{O}(v^{s+1}), \quad \Lambda_j(v) = \mathcal{O}(v^s), \quad j < n,$$
$$\Lambda_n(v) = \gamma_{n,d} v^d + \mathcal{O}(v^{d+1}), \quad \Lambda_i(v) = \mathcal{O}(v^d), \quad i > n$$

при $v \to 0$ *с* $\gamma_{m,s}, \gamma_{n,d} = \mathrm{const} \ne 0$, $s, d \in \mathbb{Z}$, $s, d \ge 2$.

1. *Если* $s \le d$, *то равновесие* $(0,0)$ *системы* (1.1)



$n < q$ $\qquad$ $n = q$ $\qquad$ $n > q$

Рис. 1.1. Разбиение плоскости параметров $(\lambda_n, \gamma_{m,s})$ при $m < q$. Здесь D_{es} и D_{ps} — области экспоненциальной и полиномиальной устойчивости, D_u — область неустойчивости, а D_{wu} — область неустойчивости с весом.

- *равномерно устойчиво при* $\gamma_{m,s} < 0$*;*
- *неустойчиво при* $\gamma_{m,s} > 0$ *и* $m \le q$*.*

2. *Если* $s > d$*, то равновесие* $(0,0)$ *системы* (1.1)

- *равномерно устойчиво при* $\gamma_{m,s} < 0$ *и* $\gamma_{n,d} < 0$*;*
- *неустойчиво при* $\gamma_{m,s} > 0$*,* $\gamma_{n,d} > 0$ *и* $m \le q$*.*

Доказательство теорем 2, 3, 4, 5 содержится в § 1.6.2.

Покажем, что затухающие неавтономные возмущения могут приводить к появлению траекторий, сходящихся к периодическим решениям соответствующей предельной системы.

Теорема 6. *Пусть* $n \ge 1$ *— целое число, такое что* $\Lambda_k(v) \equiv 0$ *для* $k < n$*,* $\Lambda_n(v) \not\equiv 0$ *и* $V_c \in (0, E_0)$ *— действительное число, такое что* $\Lambda_n(V_c) = 0$ *и* $\Lambda_n'(V_c) < 0$*. Тогда для любого* $\epsilon > 0$ *найдутся* $\delta_* > 0$ *и* $t_* > 0$ *такие, что* $\forall\,(x_{1,0}, x_{2,0}) \in D_0$*:* $|H_0(x_{1,0}, x_{2,0}) - V_c| \le \delta_*$ *и* $\tau_0 \ge t_*$ *решение* $x_1(t)$*,* $x_2(t)$ *системы* (1.1) *с начальными данными* $x_1(\tau_0) = x_{1,0}$*,* $x_2(\tau_0) = x_{2,0}$ *удовлетворяет оценке* $|H_0(x_1(t), x_2(t)) - V_c| < \epsilon$ *для всех* $t \ge \tau_0$*. Более того, если* $1 \le n \le q$*,* $H_0(x_1(t), x_2(t)) \to V_c$ *при* $t \to \infty$*.*

Теорема 7. *Пусть* $1 \le n \le q$ *— целое число, такое что* $\Lambda_k(v) \equiv 0$ *для* $k < n$, $\Lambda_n(v) \not\equiv 0$ *и* $V_c \in (0, E_0)$ *— действительное число, такое что* $\Lambda_n(V_c) = 0$ *и* $\Lambda_n'(V_c) > 0$. *Тогда существует* $\epsilon > 0$ *такое, что для любого* $\delta_* > 0$ $\exists\,(x_{1,0}, x_{2,0}) \in D_0$: $|H_0(x_{1,0}, x_{2,0}) - V_c| \le \delta_*$ *и* $\tau_0 > 0$ *решение* $x_1(t)$, $x_2(t)$ *системы* (1.1) *с начальными данными* $x_1(\tau_0) = x_{1,0}$, $x_2(\tau_0) = x_{2,0}$ *удовлетворяет оценке* $|H_0(x_1(t), x_2(t)) - V_c| \ge \epsilon$ *при некотором* $t \ge \tau_0$.

Следствие 1. *Пусть* $n \ge 1$ *— целое число, такое что в* $\Lambda_k(v) \equiv 0$ *для* $k < n$, $\Lambda_n(v) \not\equiv 0$ *и* $V_c^l \in (0, E_0)$, $l = 1, \dots, s$, $s \ge 1$ *— множество действительных чисел, такое что* $\Lambda_n(V_c^l) = 0$, $\Lambda_n'(V_c^l) < 0$. *Тогда для любого целого числа* $l \in [1, s]$ *и для любого* $\epsilon > 0$ *найдутся* $\delta_* > 0$ *и* $t_* > 0$ *такие, что* $\forall\,(x_{1,0}, x_{2,0}) \in D_0$: $|H_0(x_{1,0}, x_{2,0}) - V_c^l| \le \delta_*$ *и* $\tau_0 \ge t_*$ *решение* $x_1(t)$, $x_2(t)$ *системы* (1.1) *с начальными данными* $x_1(\tau_0) = x_{1,0}$, $x_2(\tau_0) = x_{2,0}$ *удовлетворяет оценке* $|H_0(x_1(t), x_2(t)) - V_c^l| < \epsilon$ *для всех* $t \ge \tau_0$. *Более того, если* $1 \le n \le q$, $H_0(x_1(t), x_2(t)) \to V_c^l$ *при* $t \to \infty$.

Доказательство теорем 6, 7 содержится в § 1.6.3.

1.4. Применимость результатов

Выше были описаны возможные асимптотические режимы в системах вида (1.1). Далее приведем некоторые условия на возмущения, которые гарантируют применимость этих результатов.

Теорема 8. *Пусть* l, h, n *— положительные целые числа, такие, что* $l + h \ge n$, *а коэффициенты возмущений* (1.4) *удовлетворяют следующим условиям:*

$$H_i(x_1, x_2) \equiv 0, \quad 1 \le i < h, \quad F_j(x_1, x_2) \equiv 0, \quad 1 \le j < l; \tag{1.10}$$

$$\oint\limits_{H_0(x_1,x_2)=E} \frac{F_k(x_1, x_2)\partial_{x_2} H_0(x_1, x_2)}{|\nabla H_0(x_1, x_2)|}\, dl = 0 \quad \forall\, E \in (0, E_0), \quad l \le k < n; \tag{1.11}$$

$$F_k(x_1, x_2) = \mathcal{O}(|\mathbf{x}|^2), \quad l \le k < n, \quad F_n(x_1, x_2) = \lambda_n x_2 + \mathcal{O}(|\mathbf{x}|^2) \tag{1.12}$$

при $|\mathbf{x}|\to 0$, *где* $\lambda_n = const \neq 0$. *Тогда равновесие* $(0,0)$ *системы* (1.1) *неустойчиво при* $\lambda_n>0$, $n\leq q$ *и равномерно устойчиво при* $\lambda_n<0$. *Более того, если* $\lambda_n<0$ *и* $n<q$ $(n=q)$, *равновесие равномерно экспоненциально (полиномиально) устойчиво.*

Теорема 9. *Пусть* l,h,n,m — *положительные целые числа, такие что* $l+h\geq n$, $n>m\geq l$ *и коэффициенты возмущений* (1.4) *удовлетворяют* (1.10), (1.12),

$$\oint\limits_{H_0(x_1,x_2)=E}\frac{F_k(x_1,x_2)\partial_{x_2}H_0(x_1,x_2)}{|\nabla H_0(x_1,x_2)|}\,dl=0\quad\forall\,E\in(0,E_0),\quad l\leq k<m,$$

$$F_m(x_1,x_2)=x_2(\alpha_m x_1^2+\beta_m x_2^2)+\mathcal{O}(|\mathbf{x}|^4),\quad |\mathbf{x}|\to 0,$$

где $\alpha_m,\beta_m=\text{const}$. *Равновесие системы* (1.1)

- *равномерно устойчиво при* $\lambda_n<0$ *и* $\alpha_m+3\beta_m<0$;
- *неустойчиво при* $\lambda_n>0$, $\alpha_m+3\beta_m>0$ *и* $n\leq q$.

Следствие 2. *При условиях теоремы 9 теорема 4 применима к системе* (1.1) *с* $s=2$ *и* $\gamma_{m,s}=(\alpha_m+3\beta_m)/2$.

Теорема 10. *Пусть* n — *положительное целое число такое, что* $1\leq n\leq q$ *и возмущения* (1.4) *удовлетворяют следующим условиям:*

$$\begin{aligned}&F_i(x_1,x_2)\equiv 0,\quad 1\leq i<n;\\&F_n(x_1,x_2)\equiv\partial_{x_2}H_0(x_1,x_2)\big(\lambda_n-\mu_n H_0(x_1,x_2)\big)+\hat F_n(x_1,x_2),\end{aligned}\tag{1.13}$$

где $\lambda_n,\mu_n=\text{const}\neq 0$ *и* $\hat F_n(x_1,x_2)$ *удовлетворяет* (1.11). *Тогда равновесие* $(0,0)$ *системы* (1.1) *является*

- *неустойчивым при* $\lambda_n>0$;
- *равномерно асимптотически устойчивым при* $\lambda_n<0$.

Если $\lambda_n>0$, $\mu_n>0$ *и* $|\lambda_n/\mu_n|<E_0$, *то для любого* $\epsilon>0$ *найдутся* $\delta_*>0$ *и* $t_*>0$ *такие, что* $\forall\,(x_{1,0},x_{2,0})\in D_0$: $|H_0(x_{1,0},x_{2,0})-\lambda_n/\mu_n|\leq\delta_*$ *и* $\tau_0\geq t_*$ *решение*

$x_1(t)$, $x_2(t)$ системы (1.1) с начальными данными $x_1(\tau_0) = x_{1,0}$, $x_2(\tau_0) = x_{2,0}$ удовлетворяет оценке $|H_0(x_1(t), x_2(t)) - \lambda_n/\mu_n| < \epsilon$ для всех $t \geq \tau_0$. Более того, $H_0(x_1(t), x_2(t)) \to \lambda_n/\mu_n$ при $t \to \infty$.

Замечание 1. *Если $\lambda_n < 0$, $\gamma_n < 0$ и $|\lambda_n/\mu_n| < E_0$, то неподвижная точка $(0,0)$ асимптотически устойчива и множество $\{(x_1, x_2) \in D_0 : H_0(x_1, x_2) = E_c\}$ с $E_c = \lambda_n/\mu_n$ неустойчиво (в смысле теоремы 7). Если E_c — минимальный ненулевой корень $\Lambda_n(E)$, то $\{(x_1, x_2) \in D_0 : 0 < H_0(x_1, x_2) < E_c\}$ — область притяжения неподвижной точки $(0,0)$.*

Доказательство теорем 8, 9, 10 содержится в § 1.7.

1.5. Примеры

1.5.1. Пример 1

Система

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -\sin x_1 + t^{-\frac{l}{q}}\kappa_l x_2 \sin x_1 + t^{-\frac{n}{q}}\lambda_n x_2, \quad t \geq 1, \tag{1.14}$$

где κ_l, $\lambda_n = \mathrm{const}$, $0 < l < n$, имеет вид (1.1) с

$$H_0(x_1, x_2) \equiv 1 - \cos x_1 + \frac{x_2^2}{2}, \quad F_l(x_1, x_2) \equiv \kappa_l x_2 \sin x_1, \quad F_n(x_1, x_2) \equiv \lambda_n x_2,$$

$H_i(x_1, x_2) \equiv 0$ для $i \neq 0$ и $F_j(x_1, x_2) \equiv 0$ для $j \notin \{n, m\}$. Легко проверить, что система (1.14) удовлетворяет условиям теоремы 8 с $h = \infty$. Следовательно, устойчивость равновесия $(0,0)$ определяется параметром λ_n и отношением n/q (см. рис. 1.2).

1.5.2. Пример 2

Система

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -\sin x_1 + t^{-\frac{m}{q}}\alpha_m x_1^2 x_2 + t^{-\frac{n}{q}}\lambda_n x_2, \quad t \geq 1, \tag{1.15}$$

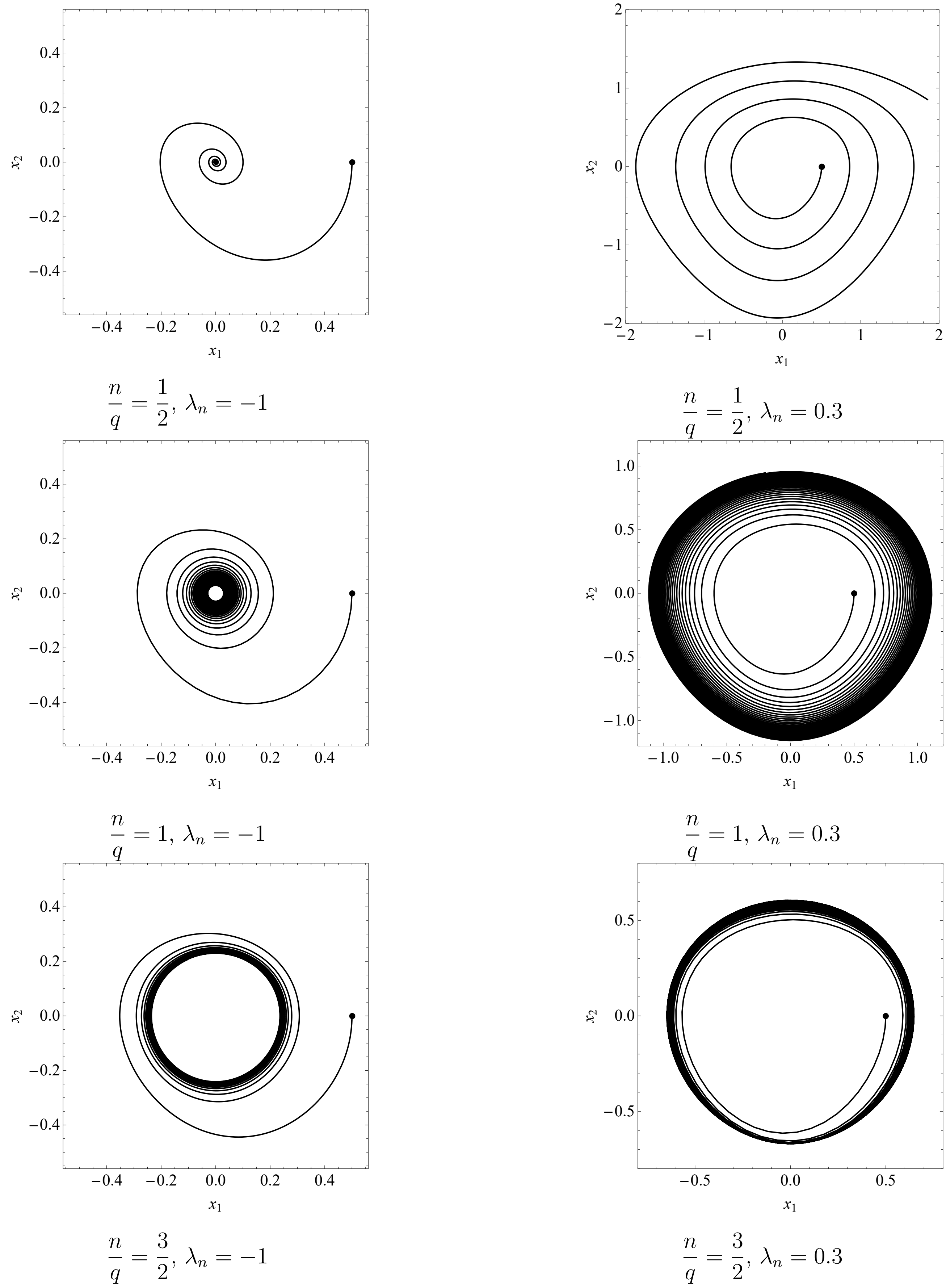
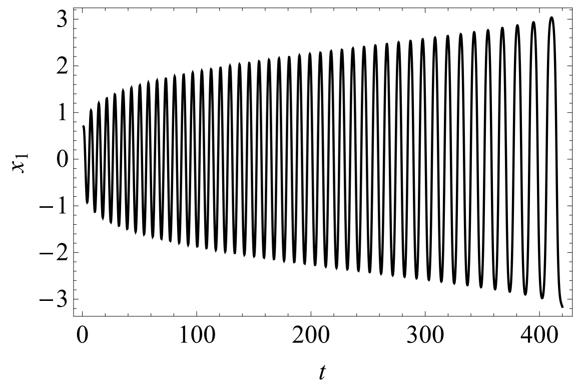
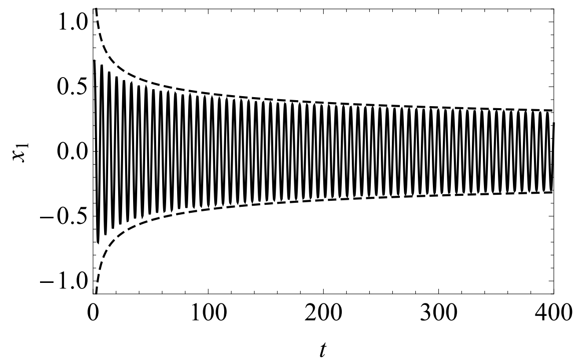


Рис. 1.2. Эволюция $(x_1(t), x_2(t))$ для решений (1.14) при $q = 4$, $l = 1$, $\kappa_l = 1$. Чёрные точки соответствуют начальным данным $(0.5, 0)$.



$\alpha_m = 0,\, \lambda_n = 0.4$



$\alpha_m = -2,\, \lambda_n = 0.4$

Рис. 1.3. Эволюция $x_1(t)$ для решений (1.15) с $q = 2$, $m = 1$ и $n = 2$. Пунктирные линии соответствуют $\pm t^{\nu/2}$, $\nu =\ (n-m)/q = 0.5$.

где $\alpha_m, \lambda_n = \text{const}$, $0 < m < n$, демонстрирует неэффективность линейного анализа устойчивости для неавтономных систем вида (1.1). Матрица линеаризованной системы $dx_1/dt = x_2$, $dx_2/dt = -x_1 + \lambda_n t^{-n/q} x_2$ имеет следующие собственные значения:

$$\mu_\pm(t) = \frac{1}{2}\Big(\lambda_n t^{-\frac{n}{q}} \pm i\sqrt{4 - \lambda_n^2 t^{-\frac{2n}{q}}}\Big).$$

Пусть $\lambda_n > 0$, тогда $\Re\mu_+(t) > 0$ для всех $t \geq 1$. Из теоремы 8 следует, что равновесие $(0,0)$ неустойчиво в линеаризованной системе. С другой стороны, система (1.15) удовлетворяет условиям теоремы 9 при $l = m$ и $F_m(x,y) = \alpha_m x^2 y$. Из следствия 2 следует, что равновесие устойчиво, если $\lambda_n > 0$ и $\alpha_m < 0$ (см. рис. 1.3).

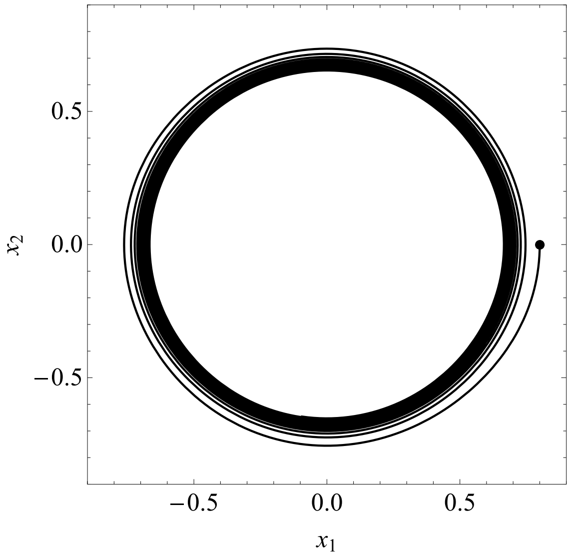
1.5.3. Пример 3

Система

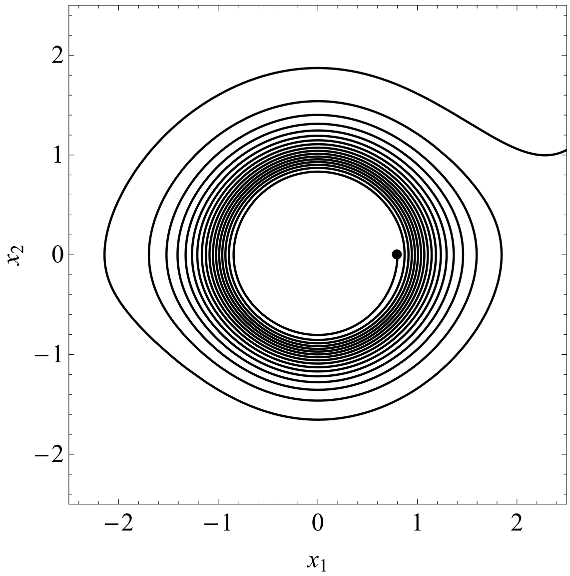
$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -\sin x_1 + t^{-\frac{m}{q}}\delta_m x_1^4 x_2 + t^{-\frac{n}{q}}\alpha_n x_1^2 x_2, \quad t \geq 1 \tag{1.16}$$

с $\delta_m, \alpha_n = \text{const}$, $0 < m < n$ имеет вид (1.1) с функциями

$$H_0(x_1,x_2) \equiv 1 - \cos x_1 + \frac{x_2^2}{2}, \quad F_m(x_1,x_2) \equiv \delta_m x_1^4 x_2, \quad F_n(x_1,x_2) \equiv \alpha_n x_1^2 x_2,$$



$\delta_m = -0.3$, $\alpha_n = -0.3$



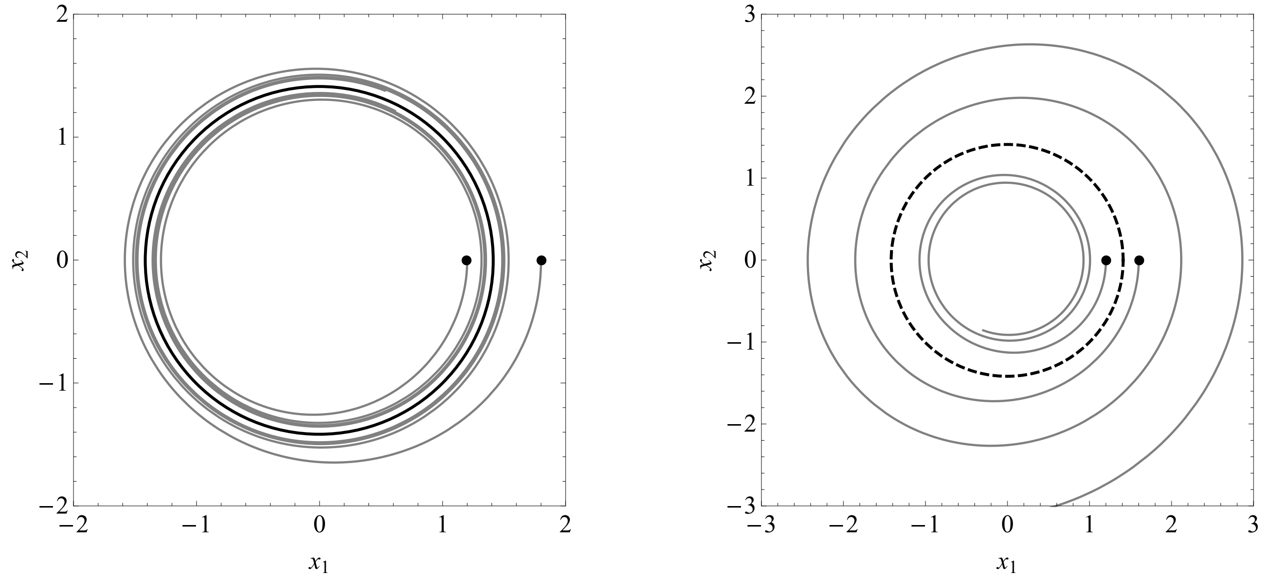
$\delta_m = 0.3$, $\alpha_n = 0.3$

Рис. 1.4. Эволюция $(x_1(t), x_2(t))$ для решений (1.16) при $q = 2$, $m = 1$ и $n = 2$. Чёрные точки соответствуют начальным данным.

$H_i(x_1, x_2) \equiv 0$ для $i \neq 0$ и $F_j(x_1, x_2) \equiv 0$ для $j \notin \{m, n\}$. Из § 1.6.1 следует, что

$$
\begin{aligned}
&Z_k(E,\varphi) \equiv 0, && \Lambda_k(E) \equiv 0, \quad k < m,\\
&Z_m(E,\varphi) \equiv 0, && \Lambda_m(E) = \oint\limits_{H_0(x_1,x_2)=E} \frac{\omega F_m \partial_{x_2} H_0}{2\pi |\nabla H_0|}\, dl\\
& && \qquad = \gamma_{m,3} E^3 (1 + \mathcal{O}(E)),\\
&Z_j(E,\varphi) = \mathcal{O}(E^3), && \Lambda_j(E) = \mathcal{O}(E^3), \quad m \le j < n,\\
&Z_n(E,\varphi) = \mathcal{O}(E^3), && \Lambda_n(E) = \oint\limits_{H_0(x_1,x_2)=E} \frac{\omega F_n \partial_{x_2} H_0}{2\pi |\nabla H_0|}\, dl - \langle Z_n(E,\varphi)\rangle\\
& && \qquad = \gamma_{n,2} E^2 (1 + \mathcal{O}(E)),
\end{aligned}
$$

при $E \to 0$, где $\gamma_{m,3} = \delta_m/2$ и $\gamma_{n,2} = \alpha_n/2$. Следовательно, система (1.16) удовлетворяет условию теоремы 5 при $s = 3$ и $d = 2$. Это означает, что равновесие $(0, 0)$ равномерно устойчиво, если $\gamma_{m,3} < 0$ и $\gamma_{n,2} < 0$ (см. рис. 1.4).



$\lambda_n = \mu_n = 0.5$ $\qquad$ $\lambda_n = \mu_n = -0.5$

Рис. 1.5. Эволюция $(x_1(t), x_2(t))$ для решений (1.17) с $n/q = 1$ и $\kappa_n = 0$ при $t \geq 1$. Чёрные точки соответствуют начальным данным. Чёрные сплошные и пунктирные линии соответствуют $\{(x_1, x_2) : H_0(x_1, x_2) = 1\}$.

1.5.4. Пример 4

Система

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -x_1 + t^{-\frac{n}{q}} x_2 \Big(\lambda_n + \kappa_n x_1 - \mu_n \frac{(x_1^2 + x_2^2)}{2} \Big), \quad t \geq 1 \qquad (1.17)$$

с $\lambda_n, \mu_n, \kappa_n = \text{const}$ удовлетворяет условиям теоремы 10 с $H_0(x_1, x_2) = |\mathbf{x}|^2/2$ и $\hat{F}_n(x_1, x_2) = \kappa_n x_1 x_2$. Следовательно, если $\lambda_n > 0$ и $\mu_n > 0$, то $H_0(x_1(t), x_2(t)) \to \lambda_n/\mu_n$ при $t \to \infty$ для решений (1.17) с начальными данными, достаточно близкими к множеству $\{(x_1, x_2) : H_0(x_1, x_2) = \lambda_n/\mu_n\}$ (см. рис. 1.5).

1.6. Обоснование результатов

1.6.1. Замена переменных

Доказательство теоремы 1. Определим 2π-периодические функции

$$X_1(\varphi, E) = x_1^0 \left(\frac{\varphi}{\omega(E)}, E \right), \quad X_2(\varphi, E) = x_2^0 \left(\frac{\varphi}{\omega(E)}, E \right),$$

удовлетворяющие системе

$$\omega(E)\frac{\partial X_1}{\partial\varphi} = \partial_{X_2} H_0(X_1, X_2), \quad \omega(E)\frac{\partial X_2}{\partial\varphi} = -\partial_{X_1} H_0(X_1, X_2).$$

Эти функции используются для переписывания системы (1.1) в переменных типа действие-угол (E, φ). Из тождества $H_0(X_1(\varphi, E), X_2(\varphi, E)) \equiv E$ следует, что

$$\begin{vmatrix} \partial_\varphi X_1 & \partial_E X_1 \\ \partial_\varphi X_2 & \partial_E X_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{\omega(E)} \neq 0.$$

Последнее неравенство гарантирует обратимость преобразования (1.5) для всех $E \in (0, E_0)$ и $\varphi \in [0, 2\pi)$. Легко проверить, что в новых переменных (E, φ) система (1.1) принимает вид:

$$\frac{dE}{dt} = f(E, \varphi, t), \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega(E) + g(E, \varphi, t), \tag{1.18}$$

где

$$\begin{aligned} f &\equiv -\omega\Big(\partial_\varphi H\big(X_1, X_2, t\big) - F\big(X_1, X_2, t\big)\partial_\varphi X_1\Big), \\ g &\equiv \omega\Big(\partial_E H\big(X_1, X_2, t\big) - 1 - F\big(X_1, X_2, t\big)\partial_E X_1\Big) \end{aligned}$$

являются 2π-периодическими функциями по φ. Так как $(0, 0)$ является равновесием системы (1.1), то $f(0, \varphi, t) \equiv 0$. Из (1.4) следует, что

$$f(E, \varphi, t) = \sum_{k=1}^{\infty} t^{-\frac{k}{q}} f_k(E, \varphi), \quad g(E, \varphi, t) = \sum_{k=1}^{\infty} t^{-\frac{k}{q}} g_k(E, \varphi), \quad t \to \infty,$$

где

$$\begin{aligned} f_k &\equiv -\omega\Big(\partial_\varphi H_k\big(X_1, X_2\big) - F_k\big(X_1, X_2\big)\partial_\varphi X_1\Big), \\ g_k &\equiv \omega\Big(\partial_E H_k\big(X_1, X_2\big) - F_k\big(X_1, X_2\big)\partial_E X_1\Big). \end{aligned} \tag{1.19}$$

Для упрощения первого уравнения в (1.18) рассмотрим преобразование переменной E в виде (1.6), где коэффициенты $v_k(E, \varphi)$ выбираются таким образом, чтобы правая часть уравнения для новой переменной $v(t) \equiv V_N(E(t), \varphi(t), t)$ не зависела от φ по крайней мере в первых членах асимптотики. При преобразовании $(E,\varphi)\mapsto(v,\varphi)$ вид второго уравнения в (1.18) меняется незначительно. При этом

$$G_N(v,\varphi,t)=\sum_{k=1}^{\infty}t^{-\frac{k}{q}}g_{N,k}(v,\varphi),\quad t\to\infty.$$

Здесь каждая функция $g_{N,k}(v,\varphi)$ является 2π-периодической относительно φ и выражается через $v_1,\dots,v_k$ и $g_1,\dots,g_k$. Например,

$$\begin{aligned}
g_{N,1}(v,\varphi)&=g_1(v,\varphi)-\omega'(v)v_1(v,\varphi),\\
g_{N,2}(v,\varphi)&=g_2(v,\varphi)-\omega'(v)\big(v_2(v,\varphi)-\partial_v v_1(v,\varphi)v_1(v,\varphi)\big)\\
&\qquad-\partial_v g_1(v,\varphi)v_1(v,\varphi)+\omega''(v)v_1^2(v,\varphi).
\end{aligned}$$

Отметим, что такое преобразование обычно применяется при усреднении систем с малым параметром и связано с исключением быстрой переменной [9, гл. 6]. Здесь аналогом быстрой переменной может служить φ. Однако наличие малого параметра в системе не предполагается, и термины «быстрые» и «медленные» переменные не совсем уместны.

Перейдем к вычислению коэффициентов v_k. Полная производная функции $V_N(E,\varphi,t)$ по t вдоль траекторий системы (1.18) имеет следующий вид

$$\begin{aligned}
\frac{dV_N}{dt}\Big|_{(1.18)}&:=\partial_t V_N+f\partial_E V_N+\Big(\omega+g\Big)\partial_\varphi V_N\\
&=\sum_{k=1}^{\infty}t^{-\frac{k}{q}}\Big(\omega\partial_\varphi v_k+f_k-\frac{k-q}{q}v_{k-q}\Big)\\
&+\sum_{k=2}^{\infty}t^{-\frac{k}{q}}\sum_{i+j=k}\Big(f_j\partial_E v_i+g_j\partial_\varphi v_i\Big),
\end{aligned}\tag{1.20}$$

где предполагается, что $v_j(E,\varphi)\equiv 0$ для $j\le 0$ и $j>N$. Подстановка (1.6) в правую часть (1.7) и сравнение результата с (1.20) приводит к следующей цепочке дифференциальных уравнений:

$$\omega(E)\partial_\varphi v_k=\Lambda_k(E)-f_k(E,\varphi)+Z_k(E,\varphi),\quad k=1,2,\dots,N,\tag{1.21}$$

где каждая функция $Z_k(E,\varphi)$ выражается через $v_1,\dots,v_{k-1}$. В частности,

$$\begin{aligned}
Z_1 \equiv& 0,\\
Z_2 \equiv& v_1\partial_E\Lambda_1 - \big(f_1\partial_E v_1 + g_1\partial_\varphi v_1\big),\\
Z_3 \equiv& v_2\partial_E\Lambda_1 + v_1\partial_E\Lambda_2 + \frac{1}{2}v_1^2\partial_E^2\Lambda_1 - \sum_{i+j=3}\big(f_j\partial_E v_i + g_j\partial_\varphi v_i\big),\\
Z_k \equiv& \sum_{\substack{j+\alpha_1+2\alpha_2+\dots+i\alpha_i=k\\ \alpha_1+\dots+\alpha_i=m\geq 1}} C_{i,\alpha,m} v_1^{\alpha_1}v_2^{\alpha_2}\dots v_i^{\alpha_i}\partial_E^m\Lambda_j - \sum_{i+j=k}\big(f_j\partial_E v_i + g_j\partial_\varphi v_i\big)\\
&+\frac{k-q}{q}v_{k-q},
\end{aligned}$$

где $C_{i,\alpha,m}=\text{const}$. Определим

$$\Lambda_k(E) = \langle f_k(E,\varphi)\rangle - \langle Z_k(E,\varphi)\rangle, \tag{1.22}$$

где

$$\langle f_k(E,\varphi)\rangle \stackrel{def}{=} \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f_k(E,\phi)\,d\phi.$$

Следовательно, для каждого $k\geq 1$ правая часть (1.21) является 2π-периодической функцией относительно φ с нулевым средним. Интегрируя (1.21) относительно φ, получаем

$$v_k = H_k(X_1,X_2) + \frac{1}{\omega}\int\limits_0^{\varphi} \Lambda_k - \omega F_k(X_1,X_2)\partial_\phi X_1 + Z_k\,d\phi, \quad k=1,\dots,N.$$

Заметим, что каждая $v_k(E,\varphi)$ является гладкой 2π-периодической функцией относительно φ такой, что $v_k(0,\varphi)\equiv 0$. Из (1.22) следует, что $\Lambda_k(v)=\mathcal{O}(v)$ при $v\to 0$. Функция $R_{N+1}(E,\varphi,t)$ имеет следующий вид:

$$R_{N+1}(E,\varphi,t) \equiv \sum_{k=N+1}^{\infty} t^{-\frac{k}{q}}\Big(f_k - \frac{k-q}{q}v_{k-q} + \sum_{j=1}^{k-1}\big(f_{k-j}\partial_E v_j + g_{k-j}\partial_\varphi v_j\big)\Big).$$

Ясно, что $R_{N+1}(E,\varphi,t)$ является 2π-периодической функцией относительно φ, такой что $R_{N+1}(0,\varphi,t)\equiv 0$ и $R_{N+1}(v,\varphi,t)=\mathcal{O}(t^{-(N+1)/q})$ при $t\to\infty$ для всех $v\in[0,d_0]$, $\varphi\in\mathbb{R}$ с $d_0=(1-\varepsilon)E_0$.

Из (1.6) следует, что для любого $\varepsilon \in (0,1)$ существует $t_0 > 0$ такое, что

$$(1-\varepsilon)E \le V_N(E,\varphi,t) \le (1+\varepsilon)E, \quad (1-\varepsilon) \le \partial_E V_N(E,\varphi,t) \le (1+\varepsilon) \quad (1.23)$$

для всех $E \in [0, E_0]$, $\varphi \in \mathbb{R}$ и $t \ge t_0$. Следовательно, преобразование $(E,\varphi) \mapsto (v,\varphi)$ обратимо. $\square$

1.6.2. Бифуркации равновесия

В этом разделе обсуждаются возможные бифуркации неподвижной точки $(0,0)$ уравнения (1.1), а также тривиальное решение уравнения (1.7).

Из (1.3) и (1.5) следует, что $E = |\mathbf{x}|^2/2 + \mathcal{O}(|\mathbf{x}|^3)$ при $|\mathbf{x}| \to 0$. Объединяя это с (1.23), мы видим, что $V_N(E,\varphi,t)$ является положительно определённой функцией в окрестности неподвижной точки $(0,0)$. Таким образом, $V_N(E,\varphi,t)$ в переменных (x_1,x_2) может быть использована в качестве кандидата на функцию Ляпунова для системы (1.1). Если полная производная $V_N(E,\varphi,t)$ по t вдоль траекторий системы (1.18) знакоопределена при E, близких к нулю, и $\varphi \in \mathbb{R}$, то эта функция может быть эффективно использована для анализа устойчивости равновесия $(0,0)$. Легко видеть, что правая часть (1.7) совпадает с полной производной $V_n(E,\varphi,t)$.

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим $V_N(E,\varphi,t)$ с $N = n$ как кандидата на функцию Ляпунова для системы (1.1). Из (1.9) следует, что функция $v(t) = V_n(E(t),\varphi(t),t)$ удовлетворяет уравнениям:

$$\frac{dv}{dt} = t^{-\frac{n}{q}} v(\lambda_n + \mathcal{O}(v) + \mathcal{O}(t^{-\frac{1}{q}}))$$

при $t \to \infty$ и $v \to 0$ для всех $\varphi \in \mathbb{R}$. Следовательно, для любого $\sigma \in (0,1)$ существуют $0 < d_1 \le d_0$ и $t_1 \ge t_0$ такие, что

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &\ge t^{-\frac{n}{q}}(1-\sigma)\lambda_n v \ge 0, \quad \text{если } \lambda_n > 0, \\ \frac{dv}{dt} &\le -t^{-\frac{n}{q}}(1-\sigma)|\lambda_n| v \le 0, \quad \text{если } \lambda_n < 0, \end{aligned} \quad (1.24)$$

для всех $v \in [0, d_1]$, $\varphi \in \mathbb{R}$ и $t \geq t_1$. Интегрирование первой оценки в (1.24) по t даёт неустойчивость тривиального решения $v(t) \equiv 0$ уравнения (1.7) для всех $\varphi \in \mathbb{R}$. Действительно, существует $\epsilon \in (0, d_1/4)$ такое, что для всех $\delta \in (0, \epsilon)$ решение $v(t)$ с начальными данными $v(t_1) = \delta$ превышает значение ϵ при $t > t_*$, где

$$t_* = t_1 \Big(\frac{2\epsilon}{\delta}\Big)^{\frac{1}{(1-\sigma)\lambda_n}}, \qquad \text{если} \qquad \frac{n}{q} = 1;$$
$$t_*^{1-\frac{n}{q}} = t_1^{1-\frac{n}{q}} + \Big(\frac{q-n}{(1-\sigma)\lambda_n q}\Big) \log \Big(\frac{2\epsilon}{\delta}\Big), \qquad \text{если} \qquad \frac{n}{q} < 1.$$

Аналогично, из второй оценки в (1.24) следует, что для любого $\epsilon \in (0, d_1)$ найдется $\delta \in (0, \epsilon)$ такое, что решение $v(t)$ уравнения (1.7) с начальными данными $0 < v(t_1) < \delta$ не может превзойти значение ϵ при $t \geq t_1$. Следовательно, решение $v(t) \equiv 0$ уравнения (1.7) равномерно устойчиво для всех $\varphi \in \mathbb{R}$ (см., например, [190, § 4.5]). Более того, интегрируя эту оценку по t, получаем следующие неравенства:

$$0 \leq v(t) \leq v(t_1) \Big(\frac{t}{t_1}\Big)^{-(1-\sigma)|\lambda_n|}, \qquad \text{если} \qquad \frac{n}{q} = 1,$$
$$0 \leq v(t) \leq v(t_1) \exp\Big(- \frac{(1-\sigma)|\lambda_n| q}{q-n} \big(t^{1-\frac{n}{q}} - t_1^{1-\frac{n}{q}}\big)\Big), \qquad \text{если} \qquad \frac{n}{q} \neq 1 \quad (1.25)$$

при $t \geq t_1$. Отсюда следует, что решение $E(t) \equiv 0$ системы (1.18) равномерно асимптотически устойчиво для всех $\varphi \in \mathbb{R}$. В частности, устойчивость экспоненциальная при $n < q$, полиномиальная при $n = q$, и не асимптотическая при $n > q$. Учитывая (1.5) и (1.23), получаем соответствующие утверждения об устойчивости равновесия $(0, 0)$ системы (1.1). $\square$

Доказательство теоремы 3. Как и выше, рассмотрим $V_n(E, \varphi, t)$ в качестве кандидата на функцию Ляпунова. В этом случае его полная производная имеет вид:

$$\frac{dV_n}{dt}\Big|_{(1.18)} \equiv \frac{dv}{dt} = t^{-\frac{m}{q}} \Big[\Lambda_m(v) + \varrho_m(v, \varphi, t)\Big] + t^{-\frac{n}{q}} \Big[\Lambda_n(v) + \varrho_n(v, \varphi, t)\Big],$$

где $v(t)=V_n(E(t),\varphi(t),t)$, $|\varrho_m(v,\varphi,t)|\leq Mt^{-1/q}v^s$, $|\varrho_n(v,\varphi,t)|\leq Mt^{-1/q}v$ при $v\to 0$, $t\to\infty$ для всех $\varphi\in\mathbb{R}$ с $M=\mathrm{const}>0$. Следовательно, для любого $\sigma\in(0,1)$ существуют $0<d_1\leq d_0$ и $t_1\geq t_0$ такие, что

$$\frac{dv}{dt}\leq -(1-\sigma)\Big(t^{-\frac{m}{q}}|\gamma_{m,s}|v^s+t^{-\frac{n}{q}}|\lambda_n|v\Big)\leq -(1-\sigma)t^{-\frac{n}{q}}|\lambda_n|v\leq 0,$$
$$\text{если}\quad \lambda_n<0,\quad \gamma_{m,s}<0,$$
$$\frac{dv}{dt}\geq (1-\sigma)\Big(t^{-\frac{m}{q}}\gamma_{m,s}v^s+t^{-\frac{n}{q}}\lambda_n v\Big)\geq (1-\sigma)t^{-\frac{n}{q}}\lambda_n v\geq 0,$$
$$\text{если}\quad \lambda_n>0,\quad \gamma_{m,s}>0,$$

для всех $v\in[0,d_1]$, $\varphi\in\mathbb{R}$ и $t\geq t_1$. Из последних оценок, как и в предыдущей теореме, следует, что решение $E(t)\equiv 0$ системы (1.18) равномерно устойчиво, если $\lambda_n<0$, $\gamma_{m,s}<0$ и неустойчиво, если $\lambda_n>0$, $\gamma_{m,s}>0$ и $n\leq q$. Объединяя (1.5) и (1.23), получаем соответствующие утверждения об устойчивости равновесия $(0,0)$ системы (1.1). □

Доказательство теоремы 4. Производная функции $v(t)=V_n(E(t),\varphi(t),t)$ удовлетворяет асимптотической оценке:

$$\frac{dV_n}{dt}\Big|_{(1.18)}\equiv\frac{dv}{dt}=t^{-\frac{m}{q}}v^s(\gamma_{m,s}+\mathcal{O}(v)+\mathcal{O}(t^{-\frac{1}{q}}))+t^{-\frac{n}{q}}v(\lambda_n+\mathcal{O}(v)+\mathcal{O}(t^{-\frac{1}{q}}))$$

при $t\to\infty$, $v\to 0$ для всех $\varphi\in\mathbb{R}$. Правая часть последнего выражения не является знакоопределенной равномерно для всех малых v и больших t. Действительно, если $v\sim\epsilon$ и $t\sim\epsilon^{-\kappa}$, где $0<\epsilon\ll 1$, $\kappa=\mathrm{const}$, то знак dv/dt определяется λ_n в случае $\kappa<q(s-1)/(n-m)$, и $\gamma_{m,s}$ в противоположном случае. Поэтому $V_n(E,\varphi,t)$ не может быть использована в качестве функции Ляпунова для системы (1.1).

Определим

$$U(E,\varphi,t)\equiv t^{\nu}V_n(E,\varphi,t),\quad \nu=\frac{n-m}{q(s-1)}>0.$$

Из (1.23) следует, что

$$(1-\sigma)t^{\nu}E\leq U(E,\varphi,t)\leq(1+\sigma)t^{\nu}E \tag{1.26}$$

для всех $E \in [0, E_0]$, $\varphi \in \mathbb{R}$ и $t \geq t_0$. Эта функция соответствует замене переменной $u(t) = t^\nu v(t)$, так что уравнение (1.7) принимает вид:

$$\frac{du}{dt} \ = \ \nu t^{-1} u + \sum_{k=m}^{n} t^{\nu - \frac{k}{q}} \Lambda_k\big(t^{-\nu} u\big) + t^\nu R_{n+1}\big(t^{-\nu} u, \varphi, t\big). \tag{1.27}$$

Следовательно, полная производная функции $U(E, \varphi, t)$ по t вдоль траекторий системы (1.18) имеет следующую асимптотику:

$$\frac{dU}{dt}\Big|_{(1.18)} = \frac{du}{dt} = u\Big(\nu t^{-1} + t^{-\frac{n}{q}}(\lambda_n + \gamma_{m,s} u^{s-1}) + \mathcal{O}(t^{-\frac{n+q\nu}{q}}) + \mathcal{O}(t^{-\frac{n+1}{q}})\Big) \tag{1.28}$$

при $t \to \infty$ для всех $u \in [0, U_0]$ и $\varphi \in \mathbb{R}$ с $U_0 = \text{const} > 0$.

Рассмотрим случай $m < n < q$. Из (1.28) следует, что

$$\frac{du}{dt} = u t^{-\frac{n}{q}}\Big(\lambda_n + \gamma_{m,s} u^{s-1} + \mathcal{O}(t^{-\nu}) + \mathcal{O}(t^{-\frac{1}{q}})\Big)$$

при $t \to \infty$. Если $\lambda_n < 0$, то для всех $\sigma \in (0, 1)$ существуют $0 < U_1 \leq U_0$ и $t_1 \geq t_0$ такие, что

$$\frac{du}{dt} \leq -t^{-\frac{n}{q}}(1 - \sigma)|\lambda_n| u \leq 0$$

для всех $u \in [0, U_1]$, $\varphi \in \mathbb{R}$ и $t \geq t_1$. Следовательно, для любого $\epsilon \in (0, U_1)$ найдется $\delta \in (0, \epsilon)$ такое, что решение $u(t)$ уравнения (1.27) с начальными данными $0 < u(t_1) < \delta$ не может превзойти значение ϵ при $t \geq t_1$. Более того, интегрируя дифференциальное неравенство по t, получаем оценку вида (1.25) при $t \geq t_1$. Объединяя это с (1.26), получаем равномерную экспоненциальную устойчивость решения $E(t) \equiv 0$ уравнения (1.18).

Если $\lambda_n > 0$ и $\gamma_{m,s} < 0$, то главный член асимптотики du/dt имеет ноль при $u = U_c$, $U_c = (\lambda_n / |\gamma_{m,s}|)^{1/(s-1)}$. Покажем, что $U(E(t), \varphi(t), t) \to U_c$ при $t \to \infty$. Рассмотрим замену переменной $u(t) = U_c + z(t)$ в уравнении (1.27). Тогда $z(t)$ удовлетворяет уравнению:

$$\frac{dz}{dt} = t^{-\frac{n}{q}}(U_c + z)\Big(\lambda_n + \gamma_{m,s}(U_c + z)^{s-1}\Big) + p(z, \varphi, t), \tag{1.29}$$

где $|p(z,\varphi,t)| \le M t^{-n/q-\varkappa}$ при $t \ge t_1$ для всех $|z| \le z_1$ и $\varphi \in \mathbb{R}$ с положительными константами M, z_1, и $\varkappa = \min\{\nu, 1/q\}$. Легко проверить, что уравнение с $p(z,\varphi,t) \equiv 0$ имеет асимптотически устойчивое решение $z(t) \equiv 0$. Покажем, что это решение устойчиво относительно возмущения $p(z,\varphi,t)$. Рассмотрим $\ell(z) = z^2/2$ в качестве кандидата на функцию Ляпунова для уравнения (1.29). Полная производная $\ell(z)$ имеет вид:

$$\frac{d\ell}{dt}\Big|_{(1.29)} = t^{-\frac{n}{q}} z\Big(-\mu z + \mathcal{O}(z^2) + \mathcal{O}(t^{-\varkappa})\Big)$$

при $z \to 0$ и $t \to \infty$ с $\mu = |\gamma_{m,s}|(s-1)U_c^{s-1} > 0$. Следовательно, для любого $\sigma \in (0,1)$ существуют $0 < z_2 \le z_1$ и $t_2 \ge t_1$ такие, что

$$\frac{d\ell}{dt}\Big|_{(1.29)} \le t^{-\frac{n}{q}}\Big(-(1-\sigma)\mu z^2 + M|z|t^{-\varkappa}\Big) \tag{1.30}$$

для всех $|z| \le z_2$, $\varphi \in \mathbb{R}$ и $t \ge t_2$. Зафиксируем $\epsilon \in (0, z_2)$, тогда

$$\frac{d\ell}{dt}\Big|_{(1.29)} \le 2\ell t^{-\frac{n}{q}} \left(-(1-\sigma)\mu + \frac{M}{\delta} t^{-\varkappa}\right) \le 0$$

для всех $\delta \le |z| \le \epsilon$ и $t \ge t_*$, где

$$\delta = \frac{2Mt_*^{-\varkappa}}{(1-\sigma)\mu}, \quad t_* = \max\left\{ \left(\frac{4M}{\epsilon(1-\sigma)\mu}\right)^{\frac{1}{\varkappa}}, t_2\right\}.$$

Обратите внимание, что $0 < \delta < \epsilon$. Поскольку $\ell(z) \le \delta^2/2$ для всех $|z| \le \delta$, $\ell(z) = \epsilon^2/2$ для $|z| = \epsilon$, $d\ell/dt \le 0$ для всех $\delta < |z| < \epsilon$ и $t \ge t_*$, то мы видим, что решение $z(t)$ уравнения (1.29) с начальными данными $|z(t_*)| \le \delta$ не может выйти из окрестности $|z| \le \epsilon$ при $t \ge t_*$. Более того, из (1.30) следует, что $d\ell/dt \le t^{-n/q}(-\mu\ell + Mz_2 t^{-\varkappa})$ при $t \ge t_2$. Интегрируя последнее неравенство, получаем

$$\ell(z(t)) \le \ell(z(t_2)) e^{-\mu(\tau(t)-\tau(t_2))} + Mz_2 \int\limits_{t_2}^{t} e^{\mu(\tau(\varsigma)-\tau(t))}\tau'(\varsigma)\varsigma^{-\varkappa}\, d\varsigma, \quad \tau(t) = \frac{t^{1-\frac{n}{q}}}{1-n/q}.$$

Из этого следует, что $\ell(z(t)) = \mathcal{O}(t^{-\varkappa})$ при $t \to \infty$ для решений с начальными данными $|z(t_2)| \le z_2$. Следовательно, $U(E(t),\varphi(t),t) = U_c + \mathcal{O}(t^{-\varkappa/2})$ и

$E(t) = \mathcal{O}(t^{-\nu})$ при $t \to \infty$. Следовательно, решение $E(t) \equiv 0$ уравнения (1.18) полиномиально устойчиво.

Рассмотрим случай $m < n = q$. Из (1.28) следует, что

$$\frac{du}{dt} = ut^{-1}\Big(\lambda_n + \nu + \gamma_{m,s}u^{s-1} + \mathcal{O}(t^{-\nu}) + \mathcal{O}(t^{-\frac{1}{q}})\Big)$$

при $t \to \infty$. Если $\lambda_n + \nu < 0$, то для любого $\sigma \in (0, |\lambda_n + \nu|)$ существуют $0 < U_1 \le U_0$ и $t_1 \ge t_0$ такие, что

$$\frac{du}{dt} \le t^{-1}(-|\lambda_n + \nu| + \sigma)u \le 0$$

для всех $u \in [0, U_1]$, $\varphi \in \mathbb{R}$ и $t \ge t_1$. Следовательно, для любого $\epsilon \in (0, U_1)$ существует $\delta \in (0, \epsilon)$ такое, что решение $u(t)$ уравнения (1.27) с начальными данными $0 < u(t_1) < \delta$ не может превзойти значение ϵ при $t \ge t_1$. Интегрирование последнего неравенства даёт $0 \le v(t) = t^{-\nu}u(t) \le v(t_1)(t/t_1)^{\lambda_n + \sigma}$ при $t \ge t_1$. Следовательно, решение $E(t) \equiv 0$ равномерно полиномиально устойчиво. Если $\lambda_n + \nu > 0$ и $\gamma_{m,s} < 0$, то, как и в предыдущем случае, можно показать, что $U(E(t), \varphi(t), t) = U_\nu + \mathcal{O}(t^{-\varkappa/2})$ при $t \to \infty$, где $U_\nu = ((\lambda_n + \nu)/|\gamma_{m,s}|)^{1/(s-1)}$. Учитывая преобразование переменных, получаем полиномиальную устойчивость решения $E(t) \equiv 0$ системы (1.18).

В случае $m < q < n$ функция $U(E, \varphi, t)$ не может быть использована в анализе устойчивости. Рассмотрим функцию

$$W(E, \varphi, t) \equiv t^\eta V_n(E, \varphi, t), \quad \eta = \frac{q - m}{q(s-1)} > 0,$$

которая соответствует замене переменных в (1.7): $v(t) = t^{-\eta}w(t)$. Полная производная $W(E, \varphi, t)$ имеет асимптотику

$$\frac{dw}{dt} = t^{-1}w\Big(\eta + \gamma_{m,s}w^{s-1} + \mathcal{O}(t^{-\beta}) + \mathcal{O}(t^{-\frac{n-m}{q}})\Big)$$

при $t \to \infty$ для всех $w \in [0, W_0]$ и $\varphi \in \mathbb{R}$ с $W_0 = \text{const} > 0$. Если $\gamma_{m,s} < 0$, то главный член dw/dt имеет ноль при $w = W_c$, где $W_c = (\eta/|\gamma_{m,s}|)^{1/(s-1)}$. Как и выше, можно показать, что $W(E(t),\varphi(t),t)\to W_c$ при $t\to\infty$. Следовательно, $E(t)=\mathcal{O}(t^{-\eta})$ при $t\to\infty$ и решение $E(t)\equiv 0$ системы (1.18) является полиномиальным.

Наконец, рассмотрим случай $q\le m<n$. Для любого $\sigma\in(0,1)$ существуют $0<d_1\le d_0$ и $t_1\ge t_0$ такие, что

$$\frac{dv}{dt}\le -(1-\sigma)|\gamma_{m,s}|t^{-\frac{m}{q}}v^s+Mt^{-\frac{n}{q}}v$$

для всех $v\in[0,d_1]$, $\varphi\in\mathbb{R}$ и $t\ge t_1$. Зафиксируем $0<\epsilon<d_1$ и определим

$$t_2=\max\Big\{\Big(\frac{2^sM}{\epsilon^{s-1}(1-\sigma)|\gamma_{m,s}|}\Big)^{\frac{q}{n-m}},t_1\Big\}.$$

Тогда для всех $v\in(\epsilon/2,\epsilon)$ и $t\ge t_2$ имеем

$$\frac{dv}{dt}\le -t^{-\frac{m}{q}}\frac{(1-\sigma)|\gamma_{m,s}|}{2}v^s.$$

Это означает, что любое решение $v(t)$ уравнения (1.7) с начальными данными $0<v(t_2)<\epsilon/2$ не может превышать значение ϵ при $t\ge t_2$. Следовательно, решение $E(t)\equiv 0$ по крайней мере устойчиво. $\square$

Доказательство теоремы 5. Если $s\le d$, то полная производная функции V_n имеет асимптотику:

$$\frac{dV_n}{dt}\Big|_{(1.18)}\equiv\frac{dv}{dt}=t^{-\frac{m}{q}}v^s(\gamma_{m,s}+\mathcal{O}(v)+\mathcal{O}(t^{-\frac{1}{q}}))$$

при $t\to\infty$ и $v\to 0$ для всех $\varphi\in\mathbb{R}$. Если $\gamma_{m,s}>0$ и $m\le q$, то полная производная положительна и решение $E(t)\equiv 0$ системы (1.18) неустойчиво. В противоположном случае, когда $\gamma_{m,s}<0$, полная производная отрицательна. Более того, для любого $\sigma\in(0,1)$ существуют $0<d_1\le d_0$ и $t_1\ge t_0$ такие, что

$$\frac{dv}{dt}\le -t^{-\frac{m}{q}}(1-\sigma)|\gamma_{m,s}|v^s\le 0$$

для всех $v\in[0,d_1]$, $\varphi\in\mathbb{R}$ и $t\ge t_1$. Следовательно, для любого $\epsilon\in(0,d_1)$ существует $\delta\in(0,\epsilon)$ такое, что решение $v(t)$ уравнения (1.7) с начальными данными $0 < v(t_1) < \delta$ не может превзойти значение ϵ при $t \geq t_1$. В этом случае тривиальное решение равномерно устойчиво.

Пусть $s > d$, $\gamma_{m,s} < 0$ и $\gamma_{n,d} < 0$. Тогда для любого $\sigma > 0$ существуют $0 < d_1 \leq d_0$ и $t_1 \geq t_0$ такие, что

$$\frac{dv}{dt} \leq -t^{-\frac{m}{q}}(1-\sigma)v^d\Big(|\gamma_{m,s}|v^{s-d} + |\gamma_{n,d}|t^{-\frac{n-m}{q}}\Big) \leq 0$$

для всех $v \in [0, d_1]$, $\varphi \in \mathbb{R}$ и $t \geq t_1$. Рассуждая, как и выше, приходим к выводу, что решение $E(t) \equiv 0$ системы (1.18) равномерно устойчиво. Аналогично, если $\gamma_{m,s} > 0$, $\gamma_{n,d} > 0$ и $m \leq q$, то

$$\frac{dv}{dt} \geq t^{-\frac{m}{q}}(1-\sigma)v^d\Big(\gamma_{m,s}v^{s-d} + \gamma_{n,d}t^{-\frac{n-m}{q}}\Big) \geq 0.$$

Зафиксируем $\delta \in (0, d_1/4)$. Тогда $dv/dt \geq C_\delta t^{-m/q}v$ при $v \in [\delta, \epsilon]$, $\varphi \in \mathbb{R}$ и $t \geq t_1$ с $C_\delta = (1-\sigma)\gamma_{m,s}\delta^{s-1} > 0$ и $\epsilon = d_1/2$. Интегрируя последнее неравенство при $t \geq t_1$ и $v(t_1) = \delta$, мы видим, что найдется $t_* > t_1$ такое, что $v(t_*) \geq \epsilon$. Следовательно, тривиальное решение неустойчиво. □

1.6.3. Решения близкие к периодическим

Доказательство теоремы 6. Рассмотрим функцию $V_n(E, \varphi, t)$ на траекториях системы (1.18). Из неё следует, что $v(t) = V_n(E(t), \varphi(t), t)$ удовлетворяет следующему уравнению:

$$\frac{dv}{dt} = t^{-\frac{n}{q}}\Big(\Lambda_n(v) + \mathcal{O}(t^{-\frac{1}{q}})\Big)$$

при $t \to \infty$ для всех $v \in [0, d_0]$ и $\varphi \in \mathbb{R}$. Замена переменной $v(t) = V_c + z(t)$ приводит к следующему уравнению:

$$\frac{dz}{dt} = t^{-\frac{n}{q}}\Lambda_n(V_c + z) + p(z, \varphi, t), \qquad (1.31)$$

где $p(0, \varphi, t) \not\equiv 0$, $|p(z, \varphi, t)| \leq Mt^{-(n+1)/q}$ для всех $z \in [-V_c, d_0 + V_c]$, $\varphi \in \mathbb{R}$ и $t \geq t_0$ с положительной константой $M > 0$. Из $\lambda_n := \Lambda_n'(V_c) < 0$ следует, что тривиальное решение (1.31) с $p(z,\varphi,t)\equiv 0$ устойчиво. Покажем, что это решение устойчиво относительно возмущения $p(z,\varphi,t)$. Действительно, рассмотрим $\ell(z)=z^2/2$ как кандидата на функцию Ляпунова для (1.31). Её полная производная имеет вид:

$$\frac{d\ell}{dt}\Big|_{(1.31)} = t^{-\frac{n}{q}}\Lambda_n(V_c+z)z + p(z,\varphi,t)z. \tag{1.32}$$

Сначала отметим, что существует $\delta_1>0$, такое что $\Lambda_n(V_c+z)z \le -|\lambda_n|z^2/2$ при $|z|\le\delta_1$. Давайте зафиксируем $0<\epsilon<\delta_1$ и выберем

$$\delta_* = \frac{\epsilon}{2}, \quad t_* = \max\Big\{\Big(\frac{4M}{\delta_*|\lambda_n|}\Big)^q, t_0\Big\},$$

тогда

$$\frac{d\ell}{dt} \le -t^{-\frac{n}{q}} z^2\Big(\frac{|\lambda_n|}{2} - M\delta_*^{-1}t_*^{-\frac{1}{q}}\Big) \le -t^{-\frac{n}{q}}z^2\frac{|\lambda_n|}{4}$$

для всех $\delta_*\le|z|\le\epsilon$, $\varphi\in\mathbb{R}$ и $t\ge t_*$. Следовательно, любое решение $z(t)$ с начальными данными $|z(\tau_0)|\le\delta_*$, $\tau_0\ge t_*$ не может покинуть область $\{|z|<\epsilon\}$ при $t\ge\tau_0$. Возвращаясь к исходным переменным, получаем результат теоремы.

Покажем, что $H_0(x_1(t),x_2(t))\to V_c$ при $t\to\infty$, если $n\le q$. Из (1.32) следует, что $d\ell/dt \le t^{-n/q}(-|\lambda_n|\ell + M\delta_1 t^{-1/q})$ при $t\ge t_0$. Интегрируя последнее неравенство в случае $n=q$, получаем

$$0\le \ell(z(t)) \le \ell(z(t_0))\Big(\frac{t}{t_0}\Big)^{-|\lambda_n|} + M\delta_1 t^{-|\lambda_n|}\int\limits_{t_0}^{t} s^{|\lambda_n|-\frac{1}{q}-1}\,ds$$

при $|z(t_0)|\le\delta_1$. Аналогичные оценки справедливы и в случае $n<q$. Следовательно, если $n\le q$, то $v(t)\to V_c$ при $t\to\infty$. □

Доказательство теоремы 7. Из (1.32) следует, что

$$\frac{d\ell}{dt} \ge t^{-\frac{n}{q}}z^2\Big(\frac{|\lambda_n|}{2} - M\delta_*^{-1}\tau_0^{-\frac{1}{q}}\Big)$$

для всех $\delta_*\le|z|<\delta_1$, $\varphi\in\mathbb{R}$ и $t\ge\tau_0$. Выбираем $\tau_0=(2M\delta_*/|\lambda_n|)^q$ так, чтобы $d\ell/dt\ge t^{-n/q}\delta_*^2|\lambda_n|/4$. Интегрируя последнее неравенство в случае $n=$

q, получаем $\ell(z(t)) \geq \delta_*^2/4(2+|\lambda_n|\log(t/\tau_0))$, где $z(\tau_0)=\delta_*$. Таким образом, существует $0<\epsilon<\delta_1$ такое, что для всех $\delta_*<\epsilon$ решение $z(t)$ удовлетворяет оценке $|z(t)|>\epsilon$ при

$$t = 2\tau_0 \exp\Big(\frac{2\epsilon^2}{\delta_*^2(2+|\lambda_n|)}\Big).$$

Аналогичная оценка справедлива и в случае $n<q$. $\square$

1.7. Обоснование применимости результатов

Доказательство теоремы 8. Покажем, что найдется цепочка преобразований $(x_1,x_2)\mapsto(E,\varphi)\mapsto(v,\varphi)$ такая, что уравнение (1.7) имеет $\Lambda_k(v)\equiv 0$ для $k<n$ и $\Lambda_n(v)=\lambda_n v+\mathcal{O}(v^2)$ при $v\to 0$. В этом случае применима теорема 2.

Для определённости пусть $h<l$. Доказательство в случае $h\geq l$ аналогично. Из (1.10) следует, что $f_k(E,\varphi)\equiv 0$, $g_k(E,\varphi)\equiv 0$ для $1\leq k<h$;

$$f_k(E,\varphi)\equiv -\omega(E)\partial_\varphi H_k(X_1(\varphi,E),X_2(\varphi,E)),$$
$$g_k(E,\varphi)\equiv \omega(E)\partial_E H_k(X_1(\varphi,E),X_2(\varphi,E))$$

для $h\leq k<l$. Функции $f_k(E,\varphi)$, $g_k(E,\varphi)$ имеют вид (1.19) для $l\leq k\leq n$. Следовательно, кандидата на функцию Ляпунова для системы (1.1) следует рассматривать в следующем виде:

$$V(E,\varphi,t) = E+\sum_{k=h}^{n} t^{-\frac{k}{q}} v_k(E,\varphi). \tag{1.33}$$

Мы предполагаем, что $v_i(E,\varphi)\equiv 0$ для $i<h$. Согласно схеме, описанной в разделе 1.6.1, функции $v_k(E,\varphi)$ определяются из системы (1.21). Следовательно, для $h\leq k<l$ имеем

$$Z_k(E,\varphi)\equiv 0, \quad \Lambda_k(E)\equiv\langle f_k(E,\varphi)\rangle\equiv 0, \quad v_k(E,\varphi)\equiv H_k(X_1(\varphi,E),X_2(\varphi,E)).$$

Для $l\leq k\leq n-1$ условие (1.11) используется для гарантии равенства

$\Lambda_k(E) \equiv 0$. Действительно, из (1.20) следует, что

$$\begin{aligned} Z_l(E,\varphi) &= -\sum_{i+j=l} \Big(f_i(E,\varphi)\partial_E v_j(E,\varphi) + g_i(E,\varphi)\partial_\varphi v_j(E,\varphi)\Big) \\ &= -\sum_{j=h}^{l-h} \Big(f_{l-j}(E,\varphi)\partial_E v_j(E,\varphi) + g_{l-j}(E,\varphi)\partial_\varphi v_j(E,\varphi)\Big) \\ &= \omega(E)\sum_{j=h}^{l-h} \Big(\partial_\varphi H_{l-j}\partial_E H_j - \partial_E H_{l-j}\partial_\varphi H_j\Big) \equiv 0. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \Lambda_l(E) &\equiv \langle f_l(E,\varphi)\rangle \equiv \omega(E)\langle F_l(X_1(\varphi,E), X_2(\varphi,E))\partial_\varphi X_1(\varphi,E)\rangle \\ &\equiv \langle \partial_y H_0(X(\varphi,E), Y(\varphi,E)) F_l(X_1(\varphi,E), X_2(\varphi,E))\rangle \equiv 0 \end{aligned}$$

и $v_l(E,\varphi) \equiv H_l(X_1(\varphi,E), X_2(\varphi,E)) + \hat v_l(E,\varphi)$, где

$$\hat v_l(E,\varphi) = \int F_l(X_1(\varphi,E), X_2(\varphi,E))\partial_\varphi X_1(\varphi,E)\, d\varphi.$$

Для $l+1 \le k \le n-1$ имеем

$$Z_k(E,\varphi) = -\sum_{i+j=k} \Big(f_i(E,\varphi)\partial_E v_j(E,\varphi) + g_i(E,\varphi)\partial_\varphi v_j(E,\varphi)\Big).$$

Заметим, что f_j и g_j с $j \ge l$ не участвуют в этих суммах. Такие функции имеют множители $\partial_\varphi v_{k-j}$ и $\partial_E v_{k-j}$ соответственно. Если $j \ge l$, то $k-j \le n-j-1 \le n-l-1 \le h-1$ и $v_{k-j}(E,\varphi) \equiv 0$. Аналогично, функции $\partial_\varphi v_j$ и $\partial_\varphi v_j$ с $j \ge l$ не содержатся в этих суммах. Поэтому,

$$\begin{aligned} Z_k(E,\varphi) &= -\sum_{\substack{i+j=k\\ h\le i,j<l}} \Big(f_i(E,\varphi)\partial_E v_j(E,\varphi) + g_i(E,\varphi)\partial_\varphi v_j(E,\varphi)\Big) \\ &= -\sum_{j=h}^{k-h} \Big(f_{k-j}(E,\varphi)\partial_E v_j(E,\varphi) + g_{k-j}(E,\varphi)\partial_\varphi v_j(E,\varphi)\Big) \\ &= \omega(E)\sum_{j=h}^{k-h} \Big(\partial_\varphi H_{k-j}\partial_E H_j - \partial_E H_{k-j}\partial_\varphi H_j\Big) \equiv 0 \end{aligned}$$

и $\Lambda_k(E) = 0$. Отсюда вытекает, что

$$v_k(E,\varphi) \equiv H_k(X_1(\varphi,E), X_2(\varphi,E)) + \hat{v}_k(E,\varphi),$$
$$\hat{v}_k(E,\varphi) = \int F_k(X_1(\varphi,E), X_2(\varphi,E))\partial_\varphi X_1(\varphi,E)\, d\varphi.$$

Заметим, что $v_k(E,\varphi) = \mathcal{O}(E)$, $\hat{v}_k(E,\varphi) = \mathcal{O}(E^{3/2})$ при $E \to 0$ для всех $\varphi \in \mathbb{R}$.

При $k = n$ функция $Z_n(E,\varphi)$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
Z_n(E,\varphi) &= -\sum_{\substack{i+j=n\\ h\le i,j\le l}} \Big(f_i(E,\varphi)\partial_E v_j(E,\varphi) + g_i(E,\varphi)\partial_\varphi v_j(E,\varphi)\Big)\\
&= -\sum_{i\in\{l,n-l\}} \Big(f_i(E,\varphi)\partial_E v_{n-i}(E,\varphi) + g_i(E,\varphi)\partial_\varphi v_{n-i}(E,\varphi)\Big)\\
&\quad -\sum_{\substack{i+j=n\\ h\le i,j\le l-1}} \Big(f_i(E,\varphi)\partial_E v_j(E,\varphi) + g_i(E,\varphi)\partial_\varphi v_j(E,\varphi)\Big)\\
&\equiv Z_n^1(E,\varphi) + Z_n^2(E,\varphi).
\end{aligned}$$

Если $l + h > n$, то $Z_n^1(E,\varphi) \equiv 0$. Если $l + h = n$, то

$$Z_n^1(E,\varphi) = \omega(E)\Big(\partial_\varphi H_h(\partial_E \hat{v}_l + F_l \partial_E X_1) - \partial_E H_h(\partial_\varphi \hat{v}_l + F_l\partial_\varphi X_1)\Big). \qquad (1.34)$$

Несложно проверить, что

$$Z_n^2(E,\varphi) = \omega(E) \sum_{\substack{i+j=n\\ h\le i,j\le l-1}} \Big(-\partial_\varphi H_j \partial_E H_i + \partial_E H_j \partial_\varphi H_i\Big) \equiv 0. \qquad (1.35)$$

Следовательно,

$$\Lambda_n(E) = \langle \omega(E) F_n(X_1(\varphi,E), X_2(\varphi,E))\partial_\varphi X_1(\varphi,E) - Z_n(E,\varphi)\rangle$$

и $v_n(E,\varphi) = H_n(E,\varphi) + \hat{v}_n(E,\varphi)$, где

$$\hat{v}_n = \frac{1}{\omega}\int \Big(\Lambda_n + Z_n - \omega F(X_1, X_2)\partial_\varphi X_1\Big)\, d\varphi.$$

Так как $H_0(X_1(\varphi,E), X_2(\varphi,E)) \equiv E$, то из (1.3) и (1.12) следует, что

$$X_1(\varphi,E) = -\sqrt{2E}\cos\varphi + \mathcal{O}(E), \quad X_2(\varphi,E) = \sqrt{2E}\sin\varphi + \mathcal{O}(E),$$
$$F_n(X_1(\varphi,E), X_2(\varphi,E)) = \lambda_n\sqrt{2E}\sin\varphi + \mathcal{O}(E), \quad Z_n(E,\varphi) = \mathcal{O}(E^{3/2})$$

при $E\to 0$ для всех $\varphi\in\mathbb{R}$. Таким образом,

$$\begin{aligned}\Lambda_n(E) &= \Big\langle\frac{\omega(E)}{\omega(E)}(\sqrt{2E}\sin\varphi+\mathcal{O}(E))(\lambda_n\sqrt{2E}\sin\varphi+\mathcal{O}(E))-Z_n(E,\varphi)\Big\rangle\\ &= \lambda_n E+\mathcal{O}(E^2),\quad E\to 0.\end{aligned}$$

Это означает, что система (1.1) удовлетворяет условиям теоремы 2 и устойчивость равновесия определяется знаком λ_n. □

Доказательство теоремы 9. Доказательство аналогично доказательству теоремы 8. В этом случае мы показываем, что теорема 3 применима при $s=2$ и $\gamma_{m,s}=(\alpha_m+3\beta_m)/2$. Заметим, что замена переменных на основе (1.33) приводит к уравнению (1.7) с $\Lambda_k(E)\equiv 0$ для $k<m$,

$$\begin{aligned}\Lambda_i(E) \equiv&\omega(E)\langle F_i\partial_\varphi X_1\rangle=\mathcal{O}(E^2),\quad E\to 0,\quad m\le i\le n-1,\\ \Lambda_m(E) =&4E^2\Big\langle\sin^2\varphi(\alpha_m\cos^2\varphi+\beta_m\sin^2\varphi)\Big\rangle+\mathcal{O}(E^3)=\gamma_{m,2}E^2+\mathcal{O}(E^3).\end{aligned}$$

Функции $\{\Lambda_i(E)\}_{i=m}^{n-1}$ используются при вычислении $Z_j(E,\varphi)$, $j\ge m+h\ge n$. Если $j=m+h=n$, то $Z_n(E,\varphi)=Z_n^1(E,\varphi)+Z_n^2(E,\varphi)+Z_n^3(E,\varphi)$, где $Z_n^1(E,\varphi)$ и $Z_n^2(E,\varphi)$ определяются формулами (1.34) и (1.35), $Z_n^3(E,\varphi)=\partial_E\Lambda_m(E)v_h(E,\varphi)=\mathcal{O}(E^2)$ при $E\to 0$. Следовательно, $\Lambda_n(E)=\lambda_n E+\mathcal{O}(E^2)$ при $E\to 0$. Это означает, что система (1.1) удовлетворяет условиям теоремы 3. □

Доказательство теоремы 10. Доказательство основано на применении теоремы 2 и теоремы 6. Из (1.13) следует, что существует преобразование $(x_1,x_2)\mapsto(E,\varphi)\mapsto(v,\varphi)$ с

$$V(E,\varphi,t)=E+\sum_{k=1}^n t^{-\frac{k}{q}}v_k(E,\varphi),$$

которое приводит систему (1.1) к следующему виду:

$$\begin{gathered}\frac{dv}{dt}=t^{-\frac{n}{q}}\Lambda_n(v)+R_{n+1}(v,\varphi,t),\quad \frac{d\varphi}{dt}=\omega(v)+G(v,\varphi,t),\\ R_{n+1}(v,\varphi,t)=\mathcal{O}(t^{-\frac{n+1}{q}}),\quad G(v,\varphi,t)=\mathcal{O}(t^{-\frac{1}{q}}),\quad t\to\infty,\\ \Lambda_n(E)\equiv\omega(E)\langle F_n(X_1(\varphi,E),X_2(\varphi,E))\partial_\varphi X_1(\varphi,E)\rangle\equiv(\lambda_n-\mu_n E)\langle\big(\partial_{x_2}H_0\big)^2\rangle.\end{gathered}$$

Заметим, что $\Lambda_n(E) = \lambda_n E + \mathcal{O}(E^2)$ при $E \to 0$. Следовательно, равновесие асимптотически устойчиво, если $\lambda_n < 0$, и равновесие неустойчиво, если $\lambda_n > 0$.

Если $\lambda_n > 0$ и $\mu_n > 0$, то уравнение $\Lambda_n(E) = 0$ имеет корень $E_c = \lambda_n/\mu_n$ такой, что $\Lambda_n'(E_c) < 0$. В этом случае из теоремы 6 следует, что $H_0(x_1(t), x_2(t)) \to E_c$ при $t \to \infty$ для решений системы (1.1) с начальными данными такими, что величина $|H_0(x_1(\tau_0), x_2(\tau_0)) - E_c|$ достаточно мала. □

1.8. Выводы

Таким образом, описаны возможные бифуркации в асимптотически гамильтоновых системах на плоскости. Важной особенностью неавтономных систем является неэффективность линейного анализа устойчивости: существуют примеры нелинейных систем, решения которых ведут себя совершенно иначе, чем решения соответствующей линеаризованной системы. В настоящей главе с помощью метода функций Ляпунова показано, что в зависимости от структуры затухающих возмущений равновесие предельной системы может сохранять или терять устойчивость. Отметим, что если возмущения не сохраняют равновесие гамильтоновой системы, следует рассмотреть некоторое частное решение возмущённых уравнений.

Результаты главы опубликованы в [261]. Связанные результаты о роли функций Ляпунова при исследовании асимптотики решений на далеких временах опубликованы в [250] и [257].

Глава 2

Влияние затухающих возмущений на бифуркацию центр-седло

2.1. Введение

В данной главе исследуется влияние возмущений на автономные системы с бифуркацией центр-седло. Рассматривается класс возмущений, описываемых функциями, исчезающими на бесконечности по времени, и исследуется поведение решений в окрестности точки бифуркации соответствующих предельных систем. В частности, обсуждаются условия, гарантирующие сохранение бифуркации в возмущённой системе, и описываются различные асимптотические режимы для решений на бесконечности, когда бифуркация нарушается. Предложенная теория применяется к модели автофазировки в системах с квадратично изменяющейся частотой возбуждения.

Структура главы следующая. В § 2.2 дана формулировка задачи и описан класс возмущений, затухающих на бесконечности. Основные результаты главы содержатся в § 2.3. В § 2.4 обсуждаются примеры асимптотически автономных систем. В § 2.5 полученные результаты применяются к модели авторезонанса. Обоснование результатов содержится в § 2.6. В частности, в § 2.6.1 построены асимптотические решения, связанных с неподвижными точками соответствующей предельной системы. Устойчивость асимптотических режимов обсуждается в § 2.6.2 и § 2.6.3. Неустойчивость некоторых режимов может быть обоснована методом линеаризацией. Для других решений линейный анализ не работает, и устойчивость исследуется путём построения соответствующих функций Ляпунова. Глава завершается краткими выводами.

2.2. Постановка задачи

Рассмотрим неавтономную систему двух дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= \partial_{x_2} H(x_1, x_2; \lambda) + F(x_1, x_2, t),\\ \frac{dx_2}{dt} &= -\partial_{x_1} H(x_1, x_2; \lambda) + G(x_1, x_2, t),\end{aligned} \tag{2.1}$$

где функции $H(x_1, x_2; \lambda)$, $F(x_1, x_2, t)$ и $G(x_1, x_2, t)$ являются бесконечно дифференцируемыми для всех $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $t > 0$ и $\lambda \in \mathbb{R}$. Предполагается, что для любого компакта $D \subset \mathbb{R}^2$ имеют место пределы $G(x_1, x_2, t) \to 0$ и $F(x_1, x_2, t) \to 0$ при $t \to \infty$ для $(x_1, x_2) \in D$, а предельная гамильтонова система имеет бифуркацию центр-седло такую, что при изменении параметра λ равновесия типа центр и седло сливаются и исчезают [178, §2.1.1]. Без ограничения общности будем считать, что

$$H(x_1, x_2; \lambda) = \frac{x_2^2}{2} + V(x_1; \lambda), \quad \partial_x V(x; \lambda) = (x^2 - \lambda) w(x),$$

где $w(x) > 0$ для всех $(x, \lambda) \in \{|x| < \sqrt{\lambda} + d_0, \lambda \ge 0\} \cup \{|x| < d_0, \lambda < 0\}$ с некоторым $d_0 > 0$. В работе исследуется влияние $F(x_1, x_2, t)$ и $G(x_1, x_2, t)$ на глобальное поведение решений. В частности, изучаются возможные асимптотические режимы в возмущённой системе (2.1) и их устойчивость при различных значениях параметра λ.

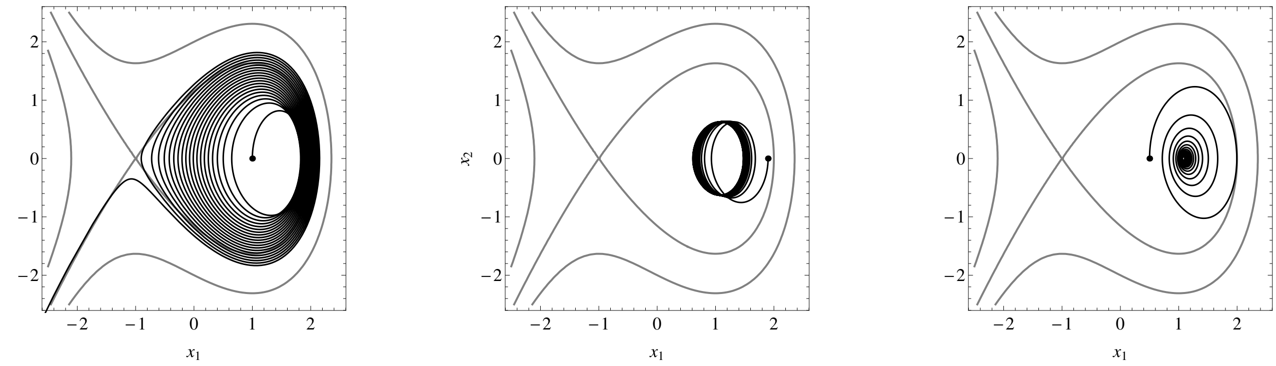
Предполагается, что возмущения описываются функциями со степенной асимптотикой:

$$F(x_1, x_2, t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} t^{-\frac{k}{q}} F_k(x_1, x_2), \quad G(x_1, x_2, t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} t^{-\frac{k}{q}} G_k(x_1, x_2) \tag{2.2}$$

при $t \to \infty$, где $q \in \mathbb{Z}_+ = \{1, 2, \dots\}$.

Рассмотрим пример, демонстрирующий возможные эффекты затухающих возмущений в системе с бифуркацией центр-седло:

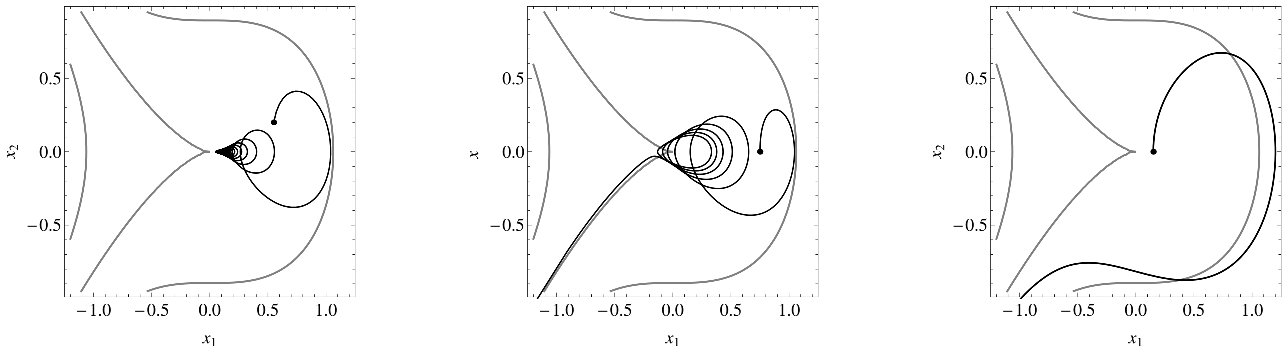
$$\frac{d^2x}{dt^2} + x^2 - \lambda = t^{-\kappa}\Big(B\frac{dx}{dt} + C\Big), \quad B, C, \lambda \in \mathbb{R}, \quad \kappa > 0. \tag{2.3}$$



(а) $B = 0.1$ (б) $B = 0$ (в) $B = -0.5$

Рис. 2.1. Эволюция $(x_1(t), x_2(t))$ для решений (2.3) с $C = 1.5$, $\kappa = 0.5$ и $\lambda = 1$. Чёрные точки соответствуют начальным данным $(x_1(1), x_2(1))$. Серые кривые соответствуют линиям уровня $H(x, y; 1)$.

Это уравнение в переменных $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$ принимает вид (2.1) с $V(x;\lambda) = x^3/3 - \lambda x$, $w(x) \equiv 1$, $F(x_1, x_2, t) \equiv 0$ и $G(x_1, x_2, t) \equiv t^{-\kappa}(Bx_2 + C)$. Легко видеть, что если $\lambda > 0$, то предельное уравнение имеет две неподвижные точки: $\mathbf{x}_s = (-\sqrt{\lambda}, 0)$ — седло, а $\mathbf{x}_c = (\sqrt{\lambda}, 0)$ — центр. Если $\lambda = 0$, то невозмущённое уравнение имеет вырожденную неустойчивую неподвижную точку $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$, которая исчезает при $\lambda < 0$. Если $\lambda < 0$, то все траектории предельной системы неограниченны. Вне бифуркационного значения затухающие возмущения изменяют поведение решений в окрестности центра: в зависимости от параметров возмущения траектории притягиваются к $\mathbf{x}_c$, отталкиваются от $\mathbf{x}_c$ или остаются в некоторой окрестности $\mathbf{x}_c$ без притяжения к ней (см. рис. 2.1). При этом поведение решений вблизи седла $\mathbf{x}_s$ меняется незначительно. При $\lambda = 0$ вблизи неподвижной точки $\mathbf{x}_0$ возможны следующие режимы: траектории стремятся к $\mathbf{x}_0$ на бесконечности по времени (см. рис. 2.2, а); траектории колеблются вблизи $\mathbf{x}_0$ в течение конечного промежутка времени и в конечном итоге покидают её окрестность (см. рис. 2.2, б); и траектории покидают окрестность $\mathbf{x}_0$ без задержки (см. рис. 2.2, в). В следующих разделах обсуждаются условия на возмущения (2.2), при которых имеют место различные режимы.



(а) $B = -1.5$ (б) $B = -0.6$ (в) $B = 0.5$

Рис. 2.2. Эволюция $(x_1(t), x_2(t))$ для решений (2.3) с $\kappa = 1$, $C = 1.5$ и $\lambda = 0$. Чёрные точки соответствуют начальным данным $(x_1(1), x_2(1))$. Серые кривые соответствуют линиям уровня $H(x_1, x_2; 0)$.

2.3. Основные результаты

Рассмотрим асимптотические решения возмущённой системы (2.1), стремящиеся к неподвижным точкам предельной гамильтоновой системы. Асимптотические разложения для таких решений можно построить в виде степенных рядов с постоянными коэффициентами.

Будем предполагать, что выполняется следующее условие:

$$\exists\, n \le q: \quad F_i(x_1, x_2) \equiv 0, \quad G_i(x_1, x_2) \equiv 0 \quad \forall\, i < n. \tag{2.4}$$

Тогда справедлива

Теорема 11. *Пусть система* (2.1) *удовлетворяет условиям* (2.2) *и* (2.4). *Если* $\lambda > 0$, *тогда для любого* $N \in \mathbb{Z}_+$ *существуют функции*

$$\xi_I^N(t) = \sigma + \sum_{k=n}^{n+N} t^{-\frac{k}{q}} \xi_k, \quad \eta_I^N(t) = \sum_{k=n}^{n+N} t^{-\frac{k}{q}} \eta_k, \tag{2.5}$$

с постоянными коэффициентами ξ_k, η_k *и* $\sigma = \pm\sqrt{\lambda}$ *такие, что*

$$\begin{aligned} \Xi_I(t) &:= \frac{d\xi_I^N(t)}{dt} - \partial_{x_2} H(\xi_I^N(t), \eta_I^N(t); \lambda) - F(\xi_I^N(t), \eta_I^N(t); t) = \mathcal{O}(t^{-\frac{n+N+1}{q}}), \\ \Theta_I(t) &:= \frac{d\eta_I^N(t)}{dt} + \partial_{x_1} H(\xi_I^N(t), \eta_I^N(t); \lambda) - G(\xi_I^N(t), \eta_I^N(t); t) = \mathcal{O}(t^{-\frac{n+N+1}{q}}) \end{aligned} \tag{2.6}$$

при $t \to \infty$.

При $\lambda = 0$ вид асимптотических решений существенно зависит от структуры возмущений (2.2). Наряду с (2.4) рассмотрим одно из следующих предположений:

$$\exists\, m < n: \quad G_{n+m}(0,0) \neq 0, \quad G_{n+l}(0,0) = 0 \quad \forall\, l < m; \tag{2.7}$$

$$G_{n+l}(0,0) = 0 \quad \forall\, l < n, \quad G_{2n}(0,0) - F_n(0,0)\big(\partial_y G_n(0,0) + \delta_{n,q}\big) \neq 0, \tag{2.8}$$

где $\delta_{n,q}$ — символ Кронекера.

Теорема 12. *Пусть система* (2.1) *удовлетворяет условиям* (2.2), (2.4) *и* (2.7). *Если* $\lambda = 0$ *и* $G_{n+m}(0,0) > 0$, *тогда для любого* $N \in \mathbb{Z}_+$ *существуют функции*

$$\xi_{II}^N(t) = \sum_{k=n+m}^{n+m+N} t^{-\frac{k}{2q}} \xi_k, \quad \eta_{II}^N(t) = \sum_{k=2n}^{2n+N} t^{-\frac{k}{2q}} \eta_k \tag{2.9}$$

с постоянными коэффициентами ξ_k, η_k *и*

$$\xi_{n+m} = \pm\mu, \quad \mu = \sqrt{\frac{G_{n+m}(0,0)}{w(0)}}$$

такие, что

$$\Xi_{II}(t) := \frac{d\xi_{II}^N(t)}{dt} - \partial_{x_2} H(\xi_{II}^N(t), \eta_{II}^N(t); 0) - F(\xi_{II}^N(t), \eta_{II}^N(t), t) = \mathcal{O}(t^{-\frac{2n+N+1}{2q}}),$$
$$\Theta_{II}(t) := \frac{d\eta_{II}^N(t)}{dt} + \partial_{x_1} H(\xi_{II}^N(t), \eta_{II}^N(t); 0) - G(\xi_{II}^N(t), \eta_{II}^N(t), t) = \mathcal{O}(t^{-\frac{n+m+N+1}{2q}})$$

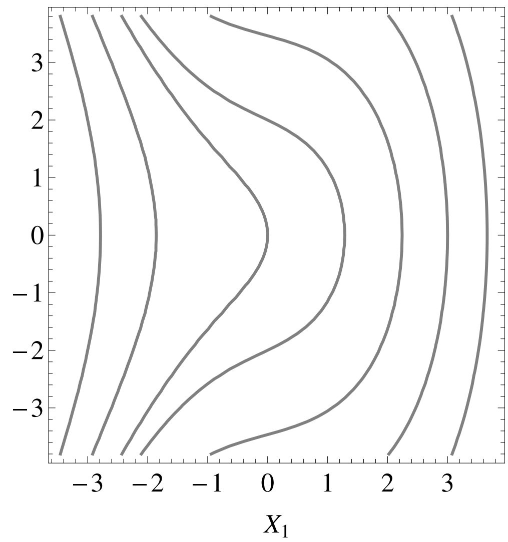
при $t \to \infty$.

Если $G_{n+m}(0,0) < 0$, то асимптотическое решение в виде (2.9) не существует. Более того, в этом случае траектории возмущённой системы ведут себя как решения предельной системы с $\lambda < 0$. Действительно, замена переменных

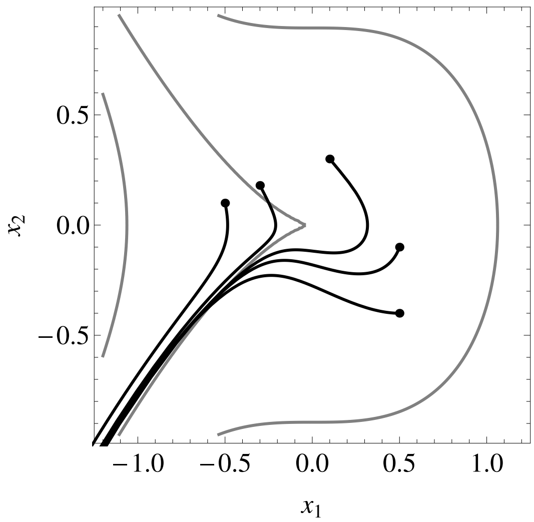
$$x_1(t) = \vartheta_1 X_1(\tau) t^{-\frac{n+m}{2q}}, \quad x_2(t) = \sqrt{\vartheta_1^3 w(0)}\, X_2(\tau) t^{-\frac{3(n+m)}{4q}}, \quad \tau = \vartheta_2 \sqrt{\vartheta_1 w(0)}\, t^{1-\frac{n+m}{4q}}$$

с $\vartheta_1 = \sqrt{|G_{n+m}(0,0)|/w(0)} > 0$ и $\vartheta_2 = 4q/(4q-n-m) > 0$, преобразует систему (2.1) к следующему виду:

$$\frac{dX_1}{d\tau} = X_2 + \mathcal{O}(\tau^{-\frac{3n-m}{4q-n-m}}) + \mathcal{O}(\tau^{-1}), \quad \frac{dX_2}{d\tau} = -(X_1^2 + 1) + \mathcal{O}(\tau^{-\frac{2(n-m)}{4q-n-m}}) + \mathcal{O}(\tau^{-1})$$



(а)



(б)

Рис. 2.3. (а) Линии уровня $\tilde{H}(X_1, X_2)$. (б) Эволюция $(x_1(t), x_2(t))$ для решений (2.3) при $B = -1.5$, $C = -0.1$, $\varkappa = 1$ и $\lambda = 0$. Чёрные точки соответствуют начальным данным $(x_1(2), x_2(2))$. Серые кривые соответствуют линиям уровня $H(x_1, x_2; 0)$.

при $\tau \to \infty$. Легко видеть, что любое решение соответствующей гамильтоновой предельной системы с $\tilde{H}(X_1, X_2) = X_1 + X_1^3/3 + X_2^2/2$ покидает окрестность начала координат (см. рис. 2.3, а). Следовательно, траектории системы (2.1) с $\lambda = 0$ и начальными данными из окрестности неподвижной точки $(0, 0)$ обладают тем же свойством (см. рис. 2.3, б).

Обозначим

$$\Delta_n \equiv \big(\partial_{x_1} G_n(0,0)\big)^2 - 4w(0)\Big(\big(\partial_{x_2} G_n(0,0) + \delta_{n,q}\big) F_n(0,0) - G_{2n}(0,0)\Big).$$

Тогда справедлива

Теорема 13. *Пусть система* (2.1) *удовлетворяет условиям* (2.2), (2.4) *и* (2.8). *Если* $\lambda = 0$ *и* $\Delta_n > 0$, *тогда для любого* $N \in \mathbb{Z}_+$ *существуют функции*

$$\xi_{III}^N(t) = \sum_{k=n}^{n+N} t^{-\frac{k}{q}} \xi_k, \quad \eta_{III}^N(t) = \sum_{k=n}^{n+N} t^{-\frac{k}{q}} \eta_k \tag{2.10}$$

с постоянными коэффициентами ξ_k, η_k *и*

$$\xi_n = \nu_\pm, \quad \nu_\pm = \frac{1}{2w(0)}\Big(\partial_{x_1} G_n(0,0) \pm \sqrt{\Delta_n}\Big) \neq 0$$

такие, что

$$\begin{aligned}\Xi_{III}(t) &:= \frac{d\xi^N_{III}(t)}{dt} - \partial_{x_2} H(\xi^N_{III}(t), \eta^N_{III}(t); 0) - F(\xi^N_{III}(t), \eta^N_{III}(t), t)\\ &= \mathcal{O}(t^{-\frac{n+N+1}{q}}),\\ \Theta_{III}(t) &:= \frac{d\eta^N_{III}(t)}{dt} + \partial_{x_1} H(\xi^N_{III}(t), \eta^N_{III}(t); 0) - G(\xi^N_{III}(t), \eta^N_{III}(t), t)\\ &= \mathcal{O}(t^{-\frac{2n+N+1}{q}})\end{aligned}$$

при $t \to \infty$.

Обратим внимание, что если $\Delta_n < 0$, то асимптотическое решение в виде (2.10) не строится. В этом случае рассмотрим следующую замену переменных:

$$\begin{aligned}x_1(t) &= \Big(\frac{\partial_{x_1} G_n(0,0)}{2w(0)} + \vartheta_1 X_1(\tau)\Big) t^{-\frac{n}{q}},\\ x_2(t) &= -F_n(0,0) t^{-\frac{n}{q}} + \sqrt{\vartheta_1^3 w(0)} X_2(\tau) t^{-\frac{3n}{2q}},\\ \tau &= \vartheta_2 \sqrt{\vartheta_1 w(0)}\, t^{1-\frac{n}{2q}},\end{aligned} \tag{2.11}$$

где $\vartheta_1 = \sqrt{|\Delta_n|}/(2w(0)) > 0$ и $\vartheta_2 = 2q/(2q-n) > 0$. Подстановка (2.11) в (2.1) даёт

$$\frac{dX_1}{d\tau} = X_2 + \mathcal{O}(\tau^{-\frac{n}{2q-n}}) + \mathcal{O}(\tau^{-1}), \quad \frac{dX_2}{d\tau} = -(X_1^2+1) + \mathcal{O}(\tau^{-\frac{n}{2q-n}}) + \mathcal{O}(\tau^{-1})$$

при $\tau \to \infty$. Таким образом, как и в предыдущем случае, видно, что качественное поведение возмущённой системы (2.1) такое же, как и у предельной системы при $\lambda < 0$.

Доказательство теорем 11, 12, 13 содержится в § 2.6.1.

Заметим, что построенные функции $\xi^N_i(t)$, $\eta^N_i(t)$, $i \in \{I, II, III\}$ при подстановке в систему (2.1) дают затухающие со временем невязки $\Xi_i(t)$ и $\Theta_i(t)$. Для части этих функций далее будет показано, что при определённых условиях существуют решения системы (2.1), имеющие соответствующие асимптотические разложения на бесконечности. Для другой части функций будет доказано, что соответствующее поведение траекторий является неустойчивым в системе

(2.1). Для этих целей приведем определения, которые несколько модифицируют понятия устойчивости и неустойчивости при постоянно действующих возмущениях (см. [57, §70]).

Определение 1. *Асимптотический режим* $\xi_*(t)$, $\eta_*(t)$ *устойчив в системе* (2.1), *если для любой* $\varepsilon > 0$ *найдутся* $t_\varepsilon > 0$ *и* $\delta_\varepsilon > 0$ *такие, что любое решение* $x_1(t)$, $x_2(t)$ *системы* (2.1) *с исходными данными* $|x_1(t_s) - \xi_*(t_s)| + |x_2(t_s) - \eta_*(t_s)| \leq \delta$ *и любой* $t_s \geq t_\varepsilon$ *удовлетворяет неравенству* $|x_1(t) - \xi_*(t)| + |x_2(t) - \eta_*(t)| < \varepsilon$ *для всех* $t \geq t_s$.

Определение 2. *Асимптотический режим* $\xi_*(t)$, $\eta_*(t)$ *является неустойчивым в системе* (2.1), *если существуют* $\varepsilon > 0$ *и* $t_* > 0$ *такие, что для всех* $\delta \in (0, \varepsilon)$ *решение* $x_1(t)$, $x_2(t)$ *системы* (2.1) *с начальными данными* $|x_1(t_s) - \xi_*(t_s)| + |x_2(t_s) - \eta_*(t_s)| \leq \delta$ *при некотором* $t_s \geq t_*$ *удовлетворяет неравенству* $|x_1(t_e) - \xi_*(t_e)| + |x_2(t_e) - \eta_*(t_e)| \geq \varepsilon$ *при некотором* $t_e > t_s$.

В частности, с помощью метода линеаризации и построения функций Четаева доказываются следующие утверждения:

Теорема 14. *Пусть система* (2.1) *удовлетворяет условиям* (2.2) *и* (2.4) *с* $\lambda > 0$. *Тогда для любого* $N \geq 1$ *асимптотический режим* $\xi_I^N(t)$, $\eta_I^N(t)$ *с* $\sigma = -\sqrt{\lambda}$ *является неустойчивым.*

Теорема 15. *Пусть система* (2.1) *удовлетворяет условиям* (2.2), (2.4) *и* (2.7) *с* $\lambda = 0$ *и* $G_{n+m}(0,0) > 0$. *Тогда для любого* $N \geq n+m$ *асимптотический режим* $\xi_{II}^N(t)$, $\eta_{II}^N(t)$ *с* $\xi_{n+m} = -\mu$ *является неустойчивым.*

Теорема 16. *Пусть система* (2.1) *удовлетворяет условиям* (2.2), (2.4) *и* (2.8) *с* $\lambda = 0$ *и* $\Delta_n > 0$. *Тогда для любого* $N \geq n/2$ *асимптотический режим* $\xi_{III}^N(t)$, $\eta_{III}^N(t)$ *с* $\xi_n = \nu_-$ *является неустойчивым.*

Доказательство теорем 14, 15, 16 содержится в § 2.6.2.

Рассмотрим следующие случаи, которые не охватываются теоремами 14, 15 и 16:

Случай I : $\lambda > 0$, $\xi_I^N(t) = \sqrt{\lambda} + \mathcal{O}(t^{-n/q})$ при $t \to \infty$;

Случай II : $\lambda = 0$, $\xi_{II}^N(t) = \mu t^{-(n+m)/2q}(1 + \mathcal{O}(t^{-n/q}))$ при $t \to \infty$;

Случай III : $\lambda = 0$, $\xi_{III}^N(t) = \nu_+ t^{-n/q}(1 + \mathcal{O}(t^{-n/q}))$ при $t \to \infty$.

В этих случаях корни соответствующего характеристического уравнения являются комплексными:

$$\begin{aligned} e_\pm(t) &= \pm i\lambda^{\frac{1}{4}}\sqrt{2w\big(\sqrt{\lambda}\big)} + \mathcal{O}(t^{-\frac{n}{q}}), && \textbf{Случай I}, \\ e_\pm(t) &= \pm i t^{-\frac{n+m}{4q}}\sqrt{2\mu w(0)}\big(1 + \mathcal{O}(t^{-\frac{n}{q}})\big), && \textbf{Случай II}, \\ e_\pm(t) &= \pm i t^{-\frac{n}{2q}}\sqrt[4]{\Delta_n}\big(1 + \mathcal{O}(t^{-\frac{n}{q}})\big), && \textbf{Случай III} \end{aligned}$$

и $\Re e_\pm(t) = \mathcal{O}(t^{-n/q})$ при $t \to \infty$. Следовательно, неподвижная точка $(0,0)$ в соответствующих системах (2.20), (2.22), (2.24) с $\mathbf{c}_i(t) \equiv 0$ является центром в асимптотическом пределе, и метод линеаризации оказывается неэффективным для анализа устойчивости (см., например, гл. 1). В этих случаях используется метод функции Ляпунова.

Рассмотрим сначала **Случай I**, когда $\lambda > 0$. Предположим, что

$$\exists\, h \in [0, n): \quad \partial_x F_k(x,y) \equiv -\partial_y G_k(x,y) \quad \forall\, k < n + h; \tag{2.12}$$

и определим $\gamma_{n+h}(\lambda) = \partial_x F_{n+h}(\sqrt{\lambda}, 0) + \partial_y G_{n+h}(\sqrt{\lambda}, 0)$.

Теорема 17. *Пусть система* (2.1) *удовлетворяет условиям* (2.2), (2.4) *и* (2.12) *с* $\lambda > 0$. *Тогда для любого* $N \geq h$ *асимптотический режим* $\xi_I^N(t)$, $\eta_I^N(t)$ *с* $\sigma = \sqrt{\lambda}$ *является*

- *устойчивым, если* $\gamma_{n+h}(\lambda) < 0$;
- *неустойчивым, если* $\gamma_{n+h}(\lambda) > 0$ *и* $n + h \leq q$.

Теорема 18. *Пусть система* (2.1) *соответствует условиям* (2.2), (2.4) *и* (2.12) *с* $\lambda > 0$, $\gamma_{n+h}(\lambda) < 0$ *и* $n + h < q$. *Тогда существует асимптотически устойчивое решение* $\xi_I(t)$, $\eta_I(t)$ *системы* (2.1) *с асимптотикой* (2.5) *и* $\sigma = \sqrt{\lambda}$.

Похожее утверждение имеет место в случае, когда возмущения являются гамильтоновыми:

$$\partial_{x_1} F(x_1, x_2, t) \equiv -\partial_{x_2} G(x_1, x_2, t) \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad t > 0. \tag{2.13}$$

Определим $d_n = \omega_I^2 \partial_{x_2} F_n(\sqrt{\lambda}, 0) + G_n(\sqrt{\lambda}, 0) + \partial_{x_1} G_n(\sqrt{\lambda}, 0)$, где $\omega_I^2 = 2\sqrt{\lambda} w\big(\sqrt{\lambda}\big)$.

Теорема 19. *Пусть система* (2.1) *удовлетворяет условиям* (2.2), (2.4) *и* (2.13) *с* $\lambda > 0$ *и* $\sigma = \sqrt{\lambda}$. *Тогда для любого* $N \geq q$ *асимптотический режим* $\xi_I^N(t)$, $\eta_I^N(t)$ *в системе* (2.1) *является устойчивым, если* $d_n > 0$.

Доказательство теорем 17, 18, 19 содержится в § 2.6.3.

Теперь рассмотрим **Случай II**, когда $\lambda = 0$ и асимптотическое решение имеет вид (2.9) с $\xi_{n+m} = \mu > 0$. Определим

$$\alpha_{n,m} = \gamma_{n+h}(0) + \delta_{n+h,q} \frac{5(n+m)}{4q},$$

где $\gamma_{n+h}(0) = \partial_{x_1} F_{n+h}(0,0) + \partial_{x_2} G_{n+h}(0,0)$. Справедливы следующие утверждения:

Теорема 20. *Пусть система* (2.1) *удовлетворяет условиям* (2.2), (2.4), (2.7) *и* (2.12) *с* $\lambda = 0$ *и* $G_{n+m}(0,0) > 0$. *Тогда для любого* $N \geq (5n + m + 4h - 1)/2$ *асимптотический режим* $\xi_{II}^N(t)$, $\eta_{II}^N(t)$ *с* $\xi_{n+m} = \mu$ *является*

- *устойчивым, если* $\alpha_{n,m} < 0$;
- *неустойчивым, если* $\alpha_{n,m} > \delta_{n+h,q} 3(n+m)/(2q)$ *и* $n + h \leq q$.

Теорема 21. *Пусть система* (2.1) *удовлетворяет условиям* (2.2), (2.4), (2.7) *и* (2.12) *с* $\lambda = 0$, $G_{n+m}(0,0) > 0$, $\alpha_{n,m} < 0$ *и* $n+h < q$. *Тогда существует асимптотически устойчивое решение* $\xi_{II}(t)$, $\eta_{II}(t)$ *системы* (2.1) *с асимптотикой* (2.9), $\xi_{n+m} = \mu$.

Заметим, что из (2.34) следует, что неподвижная точка $(0,0)$ неустойчива при постоянно действующих возмущениях в системе (2.33), если $n + h = q$ и

$\alpha_{n,m} > 0$. Объединяя это с (2.32), мы видим, что режим $\xi_{II}^N(t), \eta_{II}^N(t)$ с асимптотикой (2.9), $\xi_{n+m} = \mu$ неустойчив с весами: существуют $\varepsilon > 0$ и $t_* > 0$ такие, что для любого $\delta > 0$ существует решение системы (2.1) с начальными данными $|x_1(t_s) - \xi_{II}^N(t_s)| + |x_2(t_s) - \eta_{II}^N(t_s)| \le \delta$ при некотором $t_s \ge t_*$ удовлетворяет условию

$$t_e^{\frac{n+m}{2q}} |x_1(t_e) - \xi_{II}^N(t_e)| + t_e^{\frac{3(n+m)}{4q}} |x_2(t_e) - \eta_{II}^N(t_e)| > \varepsilon$$

при некотором $t_e > t_s$. Заметим, что в этом случае можно показать, что режим устойчив на конечном, но асимптотически большом интервале времени. Уточним определение устойчивости, которое является вариантом понятия практической устойчивости [201, §25].

Определение 3. *Асимптотический режим $\xi_*(t)$, $\eta_*(t)$ в системе (2.1) является устойчивым на асимптотически большом временном интервале, если для любого $\varepsilon > 0$ найдутся $t_\varepsilon > 0$, $\delta_\varepsilon > 0$ и $K_\varepsilon > t_\varepsilon$ такие, что $K_\varepsilon \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$ и любое решение $x_1(t)$, $x_2(t)$ системы (2.1) с начальными данными $|x_1(t_s) - \xi_*(t_s)| + |x_2(t_s) - \eta_*(t_s)| \le \delta$ и любой $t_s \in [t_\varepsilon, K_\varepsilon]$ удовлетворяет неравенству $|x_1(t) - \xi_*(t)| + |x_2(t) - \eta_*(t)| < \varepsilon$ для всех $t_s \le t \le K_\varepsilon$.*

Теорема 22. *Пусть система (2.1) удовлетворяет условиям (2.2), (2.4), (2.7) и (2.12) с $\lambda = 0$, $G_{n+m}(0,0) > 0$, $n + h = q$ и $\alpha_{n,m} < (3n - m)/(4q)$. Тогда для любого $N \ge 2q + 5n - m - 1$ асимптотический режим $\xi_{II}^N(t)$, $\eta_{II}^N(t)$ с $\xi_{n+m} = \mu$ является устойчивым на асимптотически большом временном интервале.*

Доказательство теорем 20, 21, 22 содержится в § 2.6.3.

Наконец, рассмотрим случай III, когда $\lambda = 0$ и асимптотическое решение имеет вид (2.10) с $\xi_n = \nu_+$. Определим

$$\beta_n = \gamma_{n+h}(0) + \delta_{n+h,q} \frac{5n}{2q}.$$

Справедлива

Теорема 23. *Пусть система* (2.1) *удовлетворяет условиям* (2.2), (2.4), (2.8) *и* (2.12) *с* $\lambda = 0$ *и* $\Delta_n > 0$. *Тогда для любого* $N \geq n + h$ *асимптотический режим* $\xi_{III}^N(t)$, $\eta_{III}^N(t)$ *с* $\xi_n = \nu_+$ *является*

- *устойчивым, если* $\beta_n < 0$*;*
- *неустойчивым, если* $\beta_n > \delta_{n+h,q}(3n/q)$ *и* $n + h \leq q$.

Теорема 24. *Пусть система* (2.1) *удовлетворяет условиям* (2.2), (2.4), (2.8) *и* (2.12) *с* $\lambda = 0$, $\Delta_n > 0$, $\beta_n < 0$ *и* $n+h < q$. *Тогда существует асимптотически устойчивое решение* $\xi_{III}(t)$, $\eta_{III}(t)$ *системы* (2.1) *с асимптотикой* (2.10), $\xi_n = \nu_+$.

Как и в предыдущем случае, (2.40) подразумевает, что при $n + h = q$ и $\beta_n > 0$ асимптотический режим $\xi_{III}^N(t), \eta_{III}^N(t)$ с асимптотикой (2.10), $\xi_n = \nu_+$ неустойчив с весами $t^{n/q}$ и $t^{3n/(2q)}$. Более того, справедливо следующее утверждение:

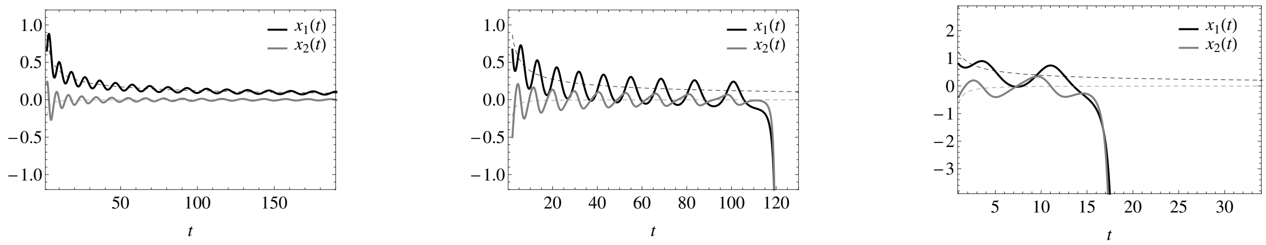
Теорема 25. *Пусть система* (2.1) *удовлетворяет условиям* (2.2), (2.4), (2.8) *и* (2.12) *с* $\lambda = 0$, $G_{n+m}(0,0) > 0$, $n + h = q$ *и* $\beta_n < n/(2q)$. *Тогда для любого* $N \geq q + 2n - 1$ *асимптотический режим* $\xi_{III}^N(t)$, $\eta_{III}^N(t)$ *с* $\xi_n = \nu_+$ *является устойчивым на асимптотически большом временном интервале.*

Доказательство теорем 23, 24, 25 содержится в § 2.6.3.

2.4. Примеры

2.4.1. Пример 1

Рассмотрим снова уравнение (2.3), соответствующее системе (2.1) с $w(x) \equiv 1$, $F(x_1, x_2, t) \equiv 0$, $G(x_1, x_2, t) \equiv t^{-\kappa}(Bx_2 + C)$. Легко проверить, что эта система удовлетворяет уравнениям (2.4) и (2.12) с $\kappa = n/q$, $h = 0$, $\gamma_n(\lambda) = B$. Следовательно, если $\lambda > 0$, то существуют два асимптотических режима (2.5):



(а) $B = -1.5$ (б) $B = -0.6$ (в) $B = 0.5$

Рис. 2.4. Эволюция $x_1(t)$ и $x_2(t)$ для решений уравнения (2.3) при $\lambda = 0$, $C = 1.5$, $\kappa = 1$.

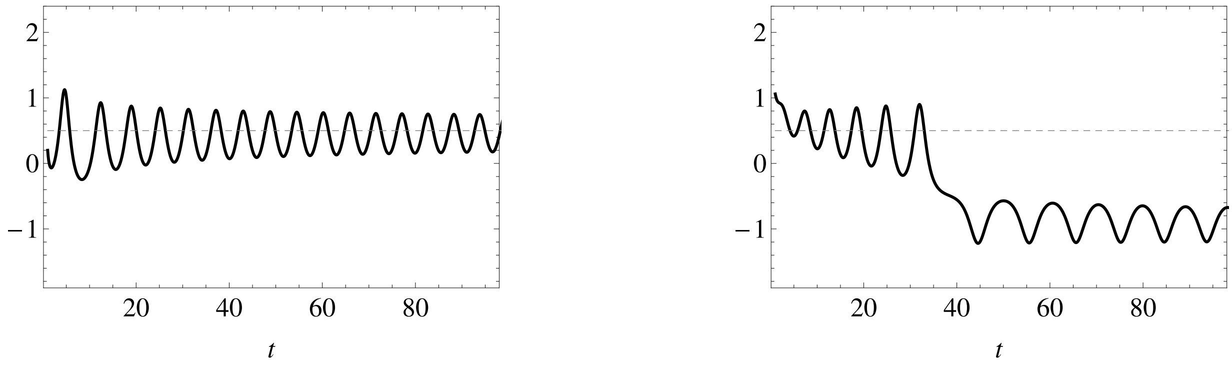
$\xi_\pm(t) = \pm\sqrt{\lambda} + \mathcal{O}(t^{-\kappa})$, $\eta_\pm(t) = \mathcal{O}(t^{-1-\kappa})$ при $t \to \infty$. Режим $\xi_-(t)$, $\eta_-(t)$ неустойчив (теорема 14); режим $\xi_+(t)$, $\xi_+(t)$ неустойчив, если $B > 0$, и устойчив, если $B < 0$ (теорема 17). Из теоремы 18 следует, что $\xi_+(t)$, $\eta_+(t)$ асимптотически устойчиво, если $B < 0$ и $0 < \kappa \le 1$. Если $B = 0$, уравнение (2.3) удовлетворяет (2.13) с $d_n = C$. В этом случае из теоремы 19 следует, что решение $\xi_+(t)$, $\eta_+(t)$ (нейтрально) устойчиво, если $C > 0$, и неустойчиво, если $C < 0$ (см. рис. 2.1, б).

Заметим, что система (2.3) удовлетворяет (2.7) с $m = 0$, $G_{n+m}(0,0) = C$ и $\alpha_{n,m} = B + \delta_{\kappa,1}(5/4)$. Следовательно, если $\lambda = 0$ и $C > 0$, существуют два асимптотических режима (2.9): $\tilde{\xi}_\pm(t) = \pm\mu t^{-\kappa/2}(1 + o(1))$, $\tilde{\eta}_\pm(t) = \mathcal{O}(t^{-1-\kappa/2})$ при $t \to \infty$ с $\mu = \sqrt{C}$. Режим $\tilde{\xi}_-(t)$, $\tilde{\eta}_-(t)$ неустойчив (теорема 14); режим $\tilde{\xi}_+(t)$, $\tilde{\eta}_+(t)$ неустойчив, если $B > \delta_{\kappa,1}(1/4)$, и устойчив, если $B < -\delta_{\kappa,1}(5/4)$ (теорема 20). Из теоремы 22 следует, что если $\kappa = 1$ ($n = q$) и $-5/4 \le B < -1/2$, то режим $\tilde{\xi}_+(t)$, $\tilde{\eta}_+(t)$ устойчив на асимптотически большом интервале времени (см. рис. 2.4).

2.4.2. Пример 2

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned}
&\frac{dx_1}{dt} = x_2,\\
&\frac{dx_2}{dt} = -(x_1^2 - \lambda)(1 + x_1) + t^{-1}\big(Ax_1 + Bx_2 + g(x_1, x_2)\big) + t^{-2}C,
\end{aligned} \tag{2.14}$$

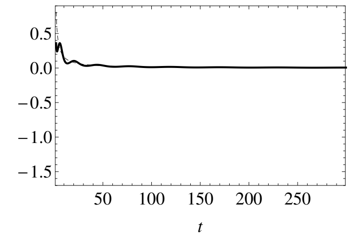


(а) $B = -1$ (б) $B = 0.5$

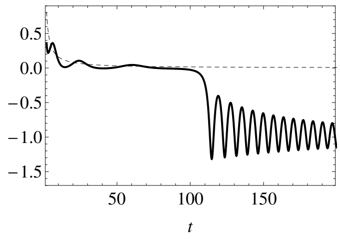
Рис. 2.5. Эволюция $x_1(t)$ для решений уравнения (2.14) при $\lambda = 0.25$, $A = C = 1$.

где $g(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2$, $\lambda, A, B, C = \text{const}$, $C \neq 0$, $\lambda < 1$. Легко проверить, что эта система имеет вид (2.1) с $w(x) = 1 + x$, $q = 1$, $F(x_1, x_2, t) \equiv 0$, $G(x_1, x_2, t) \equiv t^{-1} G_1(x_1, x_2) + t^{-2} G_2(x_1, x_2)$, $G_1(x_1, x_2) \equiv A x_1 + B x_2 + g(x_1, x_2)$, $G_2(x_1, x_2) \equiv C$. Эта система удовлетворяет (2.4) и (2.12) с $n = 1$, $h = 0$, $\gamma_n(\lambda) = B + \sqrt{\lambda}$. Следовательно, если $0 < \lambda < 1$, то существуют два асимптотических режима (2.5): $\xi_\pm(t) = \pm\sqrt{\lambda} + \mathcal{O}(t^{-1})$, $\eta_\pm(t) = \mathcal{O}(t^{-2})$ при $t \to \infty$. В этом случае из теоремы 14 следует, что режим $\xi_-(t)$, $\eta_-(t)$ неустойчив. Из теоремы 17 и теоремы 18 следует, что режим $\xi_+(t)$, $\eta_+(t)$ неустойчив, если $B > -\sqrt{\lambda}$, и асимптотически устойчив, если $B < -\sqrt{\lambda}$ (см. рис. 2.5).

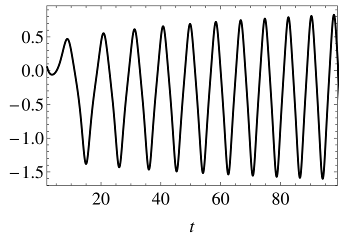
Легко видеть, что система (2.14) удовлетворяет дополнительно условию (2.8) с $G_{2n}(0,0) = C$, $\Delta_n = A^2 + 4C$ и $\beta_n = B + 5/2$. Следовательно, если $\lambda = 0$ и $A^2 + 4C > 0$, система (2.14) имеет два асимптотических режима (2.10): $\tilde{\xi}_\pm(t) = \nu_\pm t^{-1}(1 + o(1))$, $\tilde{\eta}_\pm(t) = \mathcal{O}(t^{-2})$ при $t \to \infty$ с $\nu_\pm = (A \pm \sqrt{A^2 + 4C})/2$. Из теоремы 16 следует, что режим $\tilde{\xi}_-(t)$, $\tilde{\eta}_-(t)$ неустойчив. Применяя теорему 23, получаем, что режим $\tilde{\xi}_+(t)$, $\tilde{\eta}_+(t)$ неустойчив, если $B > 1/2$, и устойчив, если $B < -5/2$ (см. рис. 2.6, а, в). Из теоремы 25 следует, что если $-5/2 \leq B < -2$, то режим $\tilde{\xi}_+(t)$, $\tilde{\eta}_+(t)$ устойчив на асимптотически большом интервале времени (см. рис. 2.6, б).



(а) $B = -3$



(б) $B = -2.25$



(в) $B = 1$

Рис. 2.6. Эволюция $x_1(t)$ для решений уравнения (2.14) при $\lambda = 0$, $A = C = 1$.

2.5. Приложение

В данном разделе полученные результаты применяются к исследованию устойчивости авторезонанса в системах с квадратично изменяющейся частотой возбуждения. Авторезонанс — это явление устойчивой фазовой синхронизации между нелинейной системой и возбуждением с чирпированной частотой, приводящее к значительному увеличению энергии системы [170]. Рассмотрим уравнения, описывающие начальную стадию авторезонансного захвата [36]:

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \varrho^2 - \Lambda(\tau) - D\frac{\sin\varphi}{\varrho}, \quad \frac{d\varrho}{d\tau} = \cos\varphi, \quad \Lambda(\tau) = A^2\tau^2 + B\tau + C, \tag{2.15}$$

с параметрами $A, B, C, D = \mathrm{const}$, $A > 0$. Функция $\Lambda(\tau)$ связана с частотой возбуждения. Функции $\varphi(\tau)$, $\varrho(\tau)$ описывают эволюцию фазового рассогласования и амплитуды осцилляторов. Решения с ограниченным фазовым рассогласованием и неограниченно растущей амплитудой при $\tau \to \infty$ связаны с явлением фазовой синхронизации и захватом в авторезонанс. Опишем условия бифуркации и устойчивости авторезонансных решений.

Легко проверить, что замена

$$\varphi(\tau) = x_1(t), \quad \varrho(\tau) = \sqrt{\Lambda(\tau)} + \tau^{-\frac{1}{2}}\frac{x_2(t)}{2A}, \quad t = \frac{2}{3}\tau^{\frac{3}{2}}$$

приводит (2.15) к следующему виду:

$$
\frac{dx_1}{dt} = y\frac{\sqrt{\Lambda(\tau)}}{A\tau} + t^{-1}\frac{x_2^2}{6A^2} - t^{-1}\frac{2D\sin x_1}{3A}\left(\frac{\sqrt{\Lambda(\tau)}}{A\tau} + t^{-1}\frac{x_2}{3A^2}\right)^{-1},
$$

$$
\frac{dx_2}{dt} = 2A\left(\cos x_1 - \frac{\Lambda'(\tau)}{2\sqrt{\Lambda(\tau)}}\right) + t^{-1}\frac{x_2}{3}. \tag{2.16}
$$

Так как

$$
\frac{\sqrt{\Lambda(\tau)}}{A\tau} = 1 + t^{-\frac{2}{3}}\frac{B}{A^2\sqrt[3]{18}} + \mathcal{O}(t^{-\frac{4}{3}}),
$$

$$
\frac{\Lambda'(\tau)}{2\sqrt{\Lambda(\tau)}} = A + t^{-\frac{4}{3}}\frac{B^2 - 4A^2C}{6A^3\sqrt[3]{12}} + \mathcal{O}(t^{-2}), \quad t \to \infty,
$$

то система (2.16) является асимптотически автономной. Определим

$$
\lambda := \begin{cases} \big(\arccos A\big)^2 & \text{при} \;\; 0 < A \le 1, \\ -\big(\arccos(2 - A)\big)^2 & \text{при} \;\; 1 < A \le 3, \end{cases}
$$

тогда система (2.16) принимает вид (2.1) с $q = 3$, $\lambda \in (-\pi^2, \pi^2/4)$, $F_1(x_1, x_2) \equiv G_1(x_1, x_2) \equiv G_2(x_1, x_2) \equiv 0$,

$$
w(x) \equiv 2\left(\sin^2\frac{x}{2} - \operatorname{sgn}(\lambda)\sin^2\frac{\sqrt{|\lambda|}}{2}\right)(x^2 - \lambda)^{-1},
$$

$$
F_2(x_1, x_2) \equiv \frac{x_2 B}{A^2\sqrt[3]{18}}, \quad F_3(x_1, x_2) \equiv \frac{x_2^2}{6A^2} - \frac{2D\sin x_1}{3A},
$$

$$
G_3(x_1, x_2) \equiv \frac{x_2}{3}, \quad G_4(x_1, x_2) \equiv \frac{4A^2C - B^2}{3A^2\sqrt[3]{12}}.
$$

Если $0 < A < 1$ ($\lambda > 0$), то система (2.16) удовлетворяет уравнениям (2.4) и (2.12) при $n = 2$, $h = 1$ и $\gamma_{n+h}(\lambda) = (1 - 2D)/3$. В этом случае существуют два асимптотических режима (2.5): $\xi_\pm(t) = \pm\arccos A + \mathcal{O}(t^{-4/3})$, $\eta_\pm(t) = \mathcal{O}(t^{-1})$ при $t \to \infty$. Из теоремы 14 следует, что режим $\xi_-(t)$, $\eta_-(t)$ неустойчив. Применение теоремы 17 и теоремы 18 приводит к неустойчивости режима $\xi_+(t)$, $\eta_+(t)$, если $D < 1/2$, и асимптотической устойчивости, если $D > 1/2$ (см. рис. 2.7).

Если $A = 1$ ($\lambda = 0$) и $4C - B^2 \neq 0$, система (2.16) удовлетворяет (2.8) с $G_4(0, 0) \neq 0$, $\Delta_n = 2G_4(0, 0)$ и $\beta_n = (6 - 2D)/3$. Следовательно, если $A = 1$

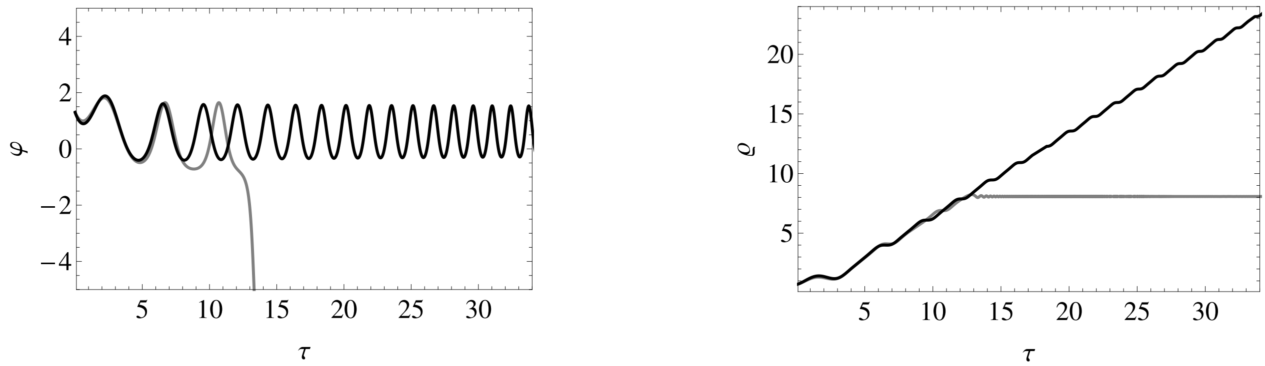


Рис. 2.7. Эволюция $\varphi(\tau)$ и $\varrho(\tau)$ для решений уравнения (2.15) при $A = 1/\sqrt{2}$, $B = -1$, $C = 1$. Чёрные кривые соответствуют $D = 0,6$, серые кривые соответствуют $D = 0,4$.

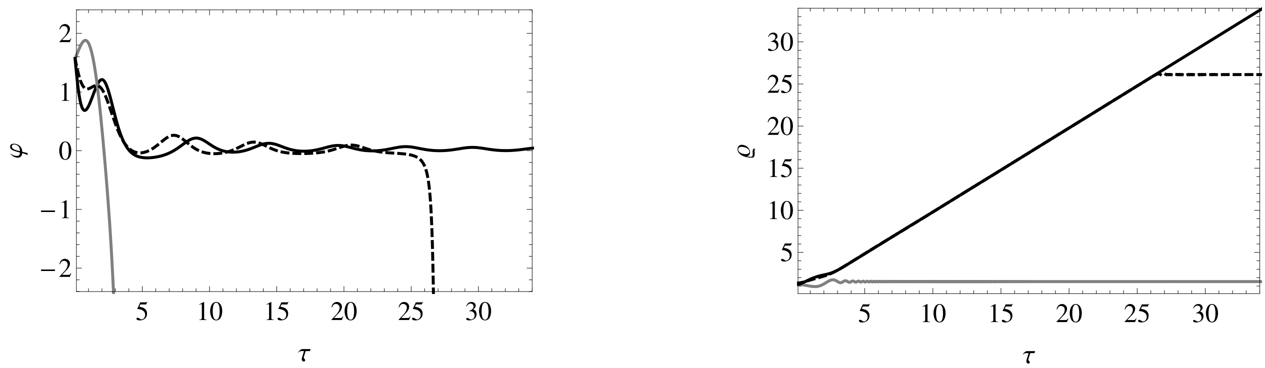


Рис. 2.8. Эволюция $\varphi(\tau)$ и $\varrho(\tau)$ для решений уравнения (2.15) при $A = 1$, $B = -0,5$, $C = 1$. Серые кривые соответствуют $D = -0,1$, чёрные кривые соответствуют $D = 3,5$, пунктирные кривые соответствуют $D = 2,7$.

и $4C > B^2$, система (2.16) имеет два асимптотических режима (2.10): $\tilde{\xi}_\pm(t) = \pm\sqrt{\Delta_n}t^{-2/3}(1 + o(1))$, $\tilde{\eta}_\pm(t) = \mathcal{O}(t^{-5/3})$ при $t \to \infty$. Применение теоремы 16 показывает, что решение $\tilde{\xi}_-(t)$, $\tilde{\eta}_-(t)$ неустойчиво. Режим $\tilde{\xi}_+(t)$, $\tilde{\eta}_+(t)$ неустойчив, если $D < 0$, и устойчив, если $D > 3$ (теорема 23). Наконец, из теоремы 25 следует, что если $5/2 < D \leq 3$, то режим $\tilde{\xi}_+(t)$, $\tilde{\eta}_+(t)$ устойчив на асимптотически большом интервале времени (см. рис. 2.8).

2.6. Обоснование результатов

2.6.1. Асимптотические решения

Доказательство теоремы 11. Подставляя (2.5) в систему (2.1) и группируя члены одинаковой степени t, получаем $\sigma^2 = \lambda$ и следующую цепочку линейных уравнений для коэффициентов ξ_k, η_k при $k \geq n$:

$$-2\sigma w(\sigma)\xi_k + G_k(\sigma, 0) = g_k, \quad \eta_k + F_k(\sigma, 0) = f_k, \tag{2.17}$$

где $g_i = f_i = 0$ для $n \leq i < 2n$, а g_k, f_k при $k \geq 2n$ выражаются через $\xi_n, \eta_n, \ldots, \xi_{2n-1}, \eta_{2n-1}$. Например, $g_{2n} = -(\xi_n \partial_{x_1} + \eta_n \partial_{x_2})G_n(\sigma, 0) + \partial_x^2 V(\sigma)\xi_n^2/2 - \delta_{n,q} n\eta_n/q$, $f_{2n} = -(\xi_n \partial_{x_1} + \eta_n \partial_{x_2})F_n(\sigma, 0) - \delta_{n,q} n\xi_n/q$. Очевидно, что система (2.17) разрешима с $\sigma = \pm\sqrt{\lambda}$, когда $\lambda > 0$. □

Доказательство теоремы 12. Подстановка (2.9) в систему (2.1) даёт

$$-\xi_{n+m}^2 w(0) + G_{n+m}(0, 0) = 0, \quad \eta_{2n} + F_n(0, 0) = 0. \tag{2.18}$$

Система (2.18) имеет два различных корня: $\xi_{n+m} = \pm\mu$, $\eta_{2n} = -F_n(0, 0)$. Оставшиеся коэффициенты ξ_{n+m+k}, η_{2n+k} при $k \geq 1$ определяются из следующей системы уравнений: $-2x_{n+m} w(0)\xi_{n+m+k} = \tilde{g}_k$, $\eta_{2n+k} = \tilde{f}_k$, где функции $\tilde{g}_k$, $\tilde{f}_k$ выражаются через $\xi_{n+m}, \ldots, \xi_{n+m+k-1}, \eta_{2n}, \ldots, \eta_{2n+k-1}$. Если $n = 1$ и $m = 0$, то имеем $\xi_1 = \pm\sqrt{G_1(0, 0)/w(0)}$, $\eta_2 = -F_1(0, 0)$,

$$\begin{aligned}
\tilde{g}_1 \equiv &\xi_1^3 \partial_x w(0) - \xi_1 \partial_{x_1} G_1(0, 0), \\
\tilde{g}_2 \equiv &\xi_2^2 w(0) + 3\xi_1^2 \xi_2 \partial_x w(0) + \frac{\xi_1^4}{2}\partial_x^2 w(0) - G_2(0, 0) \\
&- \left(\xi_2 \partial_{x_1} + \eta_2 \partial_{x_2} + \frac{\xi_1^2}{2}\partial_{x_1}^2\right) G_1(0, 0), \\
\tilde{f}_3 \equiv &- \xi_1 \partial_{x_1} F_1(0, 0), \\
\tilde{f}_4 \equiv &- F_2(0, 0) - \left(\xi_2 \partial_{x_1} + \eta_2 \partial_{x_2} + \frac{\xi_1^2}{2}\partial_{x_1}^2\right) F_1(0, 0).
\end{aligned}$$

□

Доказательство теоремы 13. Подставляя (2.10) в систему (2.1) и группируя коэффициенты при одинаковых степенях t, получаем

$$\begin{aligned}
-\xi_n^2 w(0) + \xi_n \partial_{x_1} G_n(0, 0) + G_{2n}(0, 0) + \eta_n\big(\partial_{x_2} G_n(0, 0) + \delta_{n,q}\big) = 0, \\
\eta_n + F_n(0, 0) = 0
\end{aligned}$$

и следующую цепочку уравнений:

$$\Big(-2\xi_n w(0)+\partial_{x_1}G_n(0,0)\Big)\xi_{n+k}+\Big(\partial_{x_2}G_n(0,0)+\Big(1+\frac{k}{q}\Big)\delta_{n,q}\Big)\eta_{n+k}=\hat g_k,$$

$$\eta_{n+k}=\hat f_k, \quad (2.19)$$

где функции $\hat g_k$, $\hat f_k$ при $k\geq 1$ выражаются через $\xi_n,\eta_n,\dots,\xi_{n+k-1},\eta_{n+k-1}$. Например,

$$\begin{aligned}\hat g_k\equiv &-G_{2n+k}(0,0)+w(0)\sum_{i=0}^{k-1}\xi_{n+i}\xi_{n+k-i}-\sum_{i=0}^{k-1}\big(\xi_{n+i}\partial_{x_1}+\eta_{n+i}\partial_{x_2}\big)G_{n+k-i}(0,0)\\ &+\Big(1-\frac{2n+k}{q}\Big)(1-\delta_{n,q})\eta_{2n+k-q},\\ \hat f_k\equiv &-F_{n+k}(0,0)+\Big(1-\frac{n+k}{q}\Big)\xi_{n+k-q}\end{aligned}$$

при $k\leq n-1$, и

$$\begin{aligned}\hat g_n\equiv &-G_{3n}(0,0)+w(0)\sum_{i=0}^{n-1}\xi_{n+i}\xi_{2n-i}-\sum_{i=0}^{n-1}\big(\xi_{n+i}\partial_{x_1}+\eta_{n+i}\partial_{x_2}\big)G_{2n-i}(0,0)\\ &+\xi_n^3\partial_{x_1}w(0)-\Big(\frac{\xi_n^2}{2}\partial_{x_1}^2+\xi_n\eta_n\partial_{x_1}\partial_{x_2}+\frac{\eta_n^2}{2}\partial_{x_2}^2\Big)G_n(0,0)\\ &+\Big(1-\frac{3n}{q}\Big)(1-\delta_{n,q})y_{3n-q},\\ \hat f_n\equiv &-F_{2n}(0,0)+\Big(1-\frac{2n}{q}\Big)\xi_{2n-q}-\big(\xi_n\partial_{x_1}+\eta_n\partial_{x_2}\big)F_n(0,0),\end{aligned}$$

где предполагается, что $\xi_i=\eta_i=0$ при $i<n$. Легко проверить, что система (2.19) разрешима, если $\Delta_n>0$. В этом случае $\xi_n=\nu_\pm$, $\eta_n=-F_n(0,0)$. $\Box$

2.6.2. Линейный анализ устойчивости

Доказательство теоремы 14. Подстановка $x_1(t)=\xi_I^N(t)+y_1(t)$, $x_2(t)=\eta_I^N(t)+y_2(t)$ в (2.1) даёт следующую систему:

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt}=\mathbf{a}_I(\mathbf{y},t)+\mathbf{c}_I(t), \qquad (2.20)$$

где $\mathbf{y} = (y_1, y_2)^T$, $\mathbf{a}_I(\mathbf{y}, t) \equiv (\mathfrak{F}_I(y_1, y_2, t), \mathfrak{G}_I(y_1, y_2, t))^T$, $\mathbf{c}_I(t) = -(\Xi_I(t), \Theta_I(t))^T$,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}_I(y_1, y_2, t) \equiv{}& y_2 + F(\xi_I^N(t) + y_1, \eta_I^N(t) + y_2, t) - F(\xi_I^N(t), \eta_I^N(t), t), \\
\mathfrak{G}_I(y_1, y_2, t) \equiv{}& -\partial_x V(\xi_I^N(t) + y_1; \lambda) + \partial_x V(\xi_I^N(t); \lambda) \\
&+ G(\xi_I^N(t) + y_1, \eta_I^N(t) + y_2, t) - G(\xi_I^N(t), \eta_I^N(t), t).
\end{aligned}$$

При этом $\mathbf{a}_I(0, t) \equiv 0$. Рассмотрим матрицу линеаризованной системы:

$$\mathbf{A}_I(t) := \begin{pmatrix} \partial_{y_1}\mathfrak{F}_I(0,0,t) & \partial_{y_2}\mathfrak{F}_I(0,0,t) \\ \partial_{y_1}\mathfrak{G}_I(0,0,t) & \partial_{y_2}\mathfrak{G}_I(0,0,t) \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что $\mathbf{A}_I(t) = \mathbf{A}_I^0 + \mathcal{O}(t^{-n/q})$ при $t \to \infty$, где

$$\mathbf{A}_I^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2\sigma w(\sigma) & 0 \end{pmatrix}.$$

Корни $e_+(t)$ и $e_-(t)$ характеристического уравнения $|\mathbf{A}_I(t) - e\mathbf{I}| = 0$ — вещественные числа разных знаков: $e_\pm(t) = \pm\varsigma + \mathcal{O}(t^{-n/q})$ при $t \to \infty$, где $\varsigma = \lambda^{\frac{1}{4}}\sqrt{2w(-\sqrt{\lambda})}$. Отсюда следует, что если $\Xi_I(t) \equiv \Theta_I(t) \equiv 0$, то неподвижная точка $(0, 0)$ системы (2.20) является седлом в асимптотическом пределе. По предположим, что похожее свойство имеет место и в случае функций $\Xi_I(t)$, $\Theta_I(t)$, обладающих приложениями (2.6).

Заметим, что существует матрица $\mathbf{T}_0$ такая, что $\mathbf{T}_0^{-1}\mathbf{A}_I^0\mathbf{T}_0 = \mathbf{B}_I^0$, где $\mathbf{B}_I^0 = \operatorname{diag}\{\varsigma, -\varsigma\}$. Следовательно, подставив $\mathbf{y}(t) = \mathbf{T}_0\mathbf{z}(t)$ в (2.20), получим

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \mathbf{B}_I(t)\mathbf{z} + \tilde{\mathbf{b}}_I(\mathbf{z}, t) + \mathbf{p}_I(t), \tag{2.21}$$

где $\mathbf{z} = (z_1, z_2)^T$, $\mathbf{B}_I(t) \equiv \mathbf{T}_0^{-1}\mathbf{A}_I(t)\mathbf{T}_0$, $\tilde{\mathbf{b}}_I(\mathbf{z}, t) \equiv \mathbf{T}_0^{-1}\mathbf{a}_I(\mathbf{T}_0\mathbf{z}, t) - \mathbf{B}_I(t)\mathbf{z}$ и $\mathbf{p}_I(t) \equiv \mathbf{T}_0^{-1}\mathbf{c}_I(t)$. Справедливы равенства $\mathbf{B}_I(t) = \mathbf{B}_I^0 + \mathcal{O}(t^{-n/q})$, $\tilde{\mathbf{b}}_I(\mathbf{z}, t) = \mathcal{O}(|\mathbf{z}|^2)$, $\mathbf{p}_I(t) = \mathcal{O}(t^{-(n+N+1)/q})$ при $|\mathbf{z}| \to 0$ и $t \to \infty$. Рассмотрим $J(z_1, z_2) \equiv z_1^2 - z_2^2$ в качестве кандидата на функцию Четаева для системы (2.21). Производная функции $J(z_1, z_2)$ на траекториях системы удовлетворяет равенству

$$\frac{dJ}{dt} = \big(2\varsigma|\mathbf{z}|^2 + \mathcal{O}(|\mathbf{z}|^3)\big) + \mathcal{O}(|\mathbf{z}|)\mathcal{O}(t^{-\frac{n+N+1}{q}}), \quad |\mathbf{z}| \to 0, \quad t \to \infty.$$

Следовательно, для любого $N \geq 1$ найдутся $\varepsilon > 0$, $t_1 > 0$ и $C_1 > 0$ такие, что

$$\frac{dJ}{dt} \geq \varsigma|\mathbf{z}|^2 - C_1 t^{-\frac{n+N+1}{q}}|\mathbf{z}| > 0$$

для всех $|\mathbf{z}| \leq \varepsilon$ и $t \geq t_1$. Отсюда следует, что для любого $\delta \in (0, \varepsilon)$ существует $t_* = \max\{t_1, (2C_1/(\varsigma\delta))^q\}$ такое, что

$$\frac{dJ}{dt} \geq |\mathbf{z}|^2 \left(\varsigma - t_*^{-\frac{1}{q}} \frac{C_1}{\delta}\right) \geq \frac{\varsigma|\mathbf{z}|^2}{2} \geq \frac{\varsigma J}{2}$$

для всех $\mathbf{z} \in \{(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2 : \delta \leq |\mathbf{z}| \leq \varepsilon, J(z_1, z_2) > 0\}$ и $t \geq t_*$. Интегрируя последнее неравенство при $t \geq t_s \geq t_*$ и беря $|\mathbf{z}(t_s)| = \delta$ так, что $J_\delta := J(z_1(t_s), z_2(t_s)) > 0$, получаем $|\mathbf{z}(t)| \geq \sqrt{J_\delta} \exp(\varsigma(t - t_s)/4)$. Следовательно, существует $t_e > t_s$ такое, что $|\mathbf{z}(t_e)| \geq \varepsilon$. Возвращаясь к переменным (x_1, x_2), получаем доказательство теоремы. $\square$

Доказательство теоремы 15. Подстановка

$$x_1(t) = \xi_{II}^N(t) + t^{-\frac{n+m}{2q}} y_1(t), \quad x_2(t) = \eta_{II}^N(t) + t^{-\frac{3(n+m)}{4q}} y_2(t)$$

в (2.1) приводит к следующей системе:

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{a}_{II}(\mathbf{y}, t) + \mathbf{c}_{II}(t), \tag{2.22}$$

где $\mathbf{a}_{II}(\mathbf{y}, t) \equiv (\mathfrak{F}_{II}(y_1, y_2, t), \mathfrak{G}_{II}(y_1, y_2, t))^T$,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}_{II} \equiv & t^{-\frac{n+m}{4q}} y_2 + \frac{n+m}{2q} t^{-1} y_1 \\
& + t^{\frac{n+m}{2q}} \left(F(\xi_{II}^N + t^{-\frac{n+m}{2q}} y_1, \eta_{II}^N + t^{-\frac{3(n+m)}{4q}} y_2, t) - F(\xi_{II}^N, \eta_{II}^N, t)\right) \\
\mathfrak{G}_{II} \equiv & t^{\frac{3(n+m)}{4q}} \Big(-\partial_x V(\xi_{II}^N + t^{-\frac{n+m}{2q}} y_1; 0) + \partial_x V(\xi_{II}^N; 0) \\
& + G(\xi_{II}^N + t^{-\frac{n+m}{2q}} y_1, \eta_{II}^N + t^{-\frac{3(n+m)}{4q}} y_2, t) - G(\xi_{II}^N, \eta_{II}^N, t)\Big) \\
& + \frac{3(n+m)}{4q} t^{-1} y_2, \\
\mathbf{c}_{II} \equiv & -\left(t^{\frac{n+m}{2q}} \Xi_{II}(t), t^{\frac{3(n+m)}{4q}} \Theta_{II}(t)\right)^T
\end{aligned}$$

Заметим, что $\mathbf{a}_{II}(0,t) \equiv 0$. Матрица линеаризованной системы имеет вид:

$$\mathbf{A}_{II}(t) := \begin{pmatrix} \partial_{y_1}\mathfrak{F}_{II}(0,0,t) & \partial_{y_2}\mathfrak{F}_{II}(0,0,t) \\ \partial_{y_1}\mathfrak{G}_{II}(0,0,t) & \partial_{y_2}\mathfrak{G}_{II}(0,0,t) \end{pmatrix}$$

Нетрудно проверить, что

$$\mathbf{A}_{II}(t) = t^{-\frac{n+m}{4q}}\left(\mathbf{A}^0_{II} + \mathcal{O}(t^{-\frac{n+m}{4q}})\right), \quad t \to \infty, \quad \mathbf{A}^0_{II} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2\mu w(0) & 0 \end{pmatrix}.$$

В этом случае корни $e_+(t)$ и $e_-(t)$ характеристического уравнения $|\mathbf{A}_{II}(t) - e\mathbf{I}| = 0$ вещественные разных знаков: $e_\pm(t) = t^{-(n+m)/(4q)}(\pm\varsigma + \mathcal{O}(t^{-n/q}))$ при $t \to \infty$, где $\varsigma = \sqrt{2\mu w(0)}$. Заметим, что существует матрица $\mathbf{T}_0$ такая, что $\mathbf{T}_0^{-1}\mathbf{A}^0_{II}\mathbf{T}_0 = \mathbf{B}^0_{II}$, где $\mathbf{B}^0_{II} = \operatorname{diag}\{\varsigma, -\varsigma\}$. Следовательно, подставив $\mathbf{y}(t) = \mathbf{T}_0\mathbf{z}(t)$ в (2.22), получим

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \mathbf{B}_{II}(t)\mathbf{z} + \tilde{\mathbf{b}}_{II}(\mathbf{z},t) + \mathbf{p}_{II}(t), \tag{2.23}$$

где $\mathbf{z} = (z_1, z_2)^T$, $\mathbf{B}_{II}(t) \equiv \mathbf{T}_0^{-1}\mathbf{A}_{II}(t)\mathbf{T}_0$, $\tilde{\mathbf{b}}_{II}(\mathbf{z},t) \equiv \mathbf{T}_0^{-1}\mathbf{a}_{II}(\mathbf{T}_0\mathbf{z},t) - \mathbf{B}_{II}(t)\mathbf{z}$, $\mathbf{p}_{II}(t) \equiv \mathbf{T}_0^{-1}\mathbf{c}_{II}(t)$. Справедливы равенства

$$\mathbf{B}_{II}(t) = t^{-\frac{n+m}{4q}}\left(\mathbf{B}^0_{II} + \mathcal{O}(t^{-\frac{n+m}{4q}})\right), \quad \tilde{\mathbf{b}}_{II}(\mathbf{z},t) = \mathcal{O}(|\mathbf{z}|^2)\mathcal{O}(t^{-\frac{n+m}{4q}}),$$
$$\mathbf{p}_{II}(t) = \mathcal{O}(t^{-\frac{2N+2-n-m}{4q}}), \quad |\mathbf{z}| \to 0, \quad t \to \infty.$$

Также как и в предыдущем случае рассмотрим $J(z_1,z_2) \equiv z_1^2 - z_2^2$ в качестве кандидата на функцию Четаева для системы (2.23). Производная функции $J(z_1,z_2)$ удовлетворяет равенству

$$\frac{dJ}{dt} = t^{-\frac{n+m}{4q}}\left(2\varsigma|\mathbf{z}|^2 + \mathcal{O}(|\mathbf{z}|^3)\right) + \mathcal{O}(|\mathbf{z}|)\mathcal{O}(t^{-\frac{2N+2-n-m}{4q}}), \quad |\mathbf{z}| \to 0, \quad t \to \infty.$$

Следовательно, для любого $N \geq n+m$ найдутся $\varepsilon > 0$, $t_1 > 0$ и $C_1 > 0$ такие, что

$$\frac{dJ}{dt} \geq t^{-\frac{n+m}{4q}}\left(\varsigma|\mathbf{z}|^2 - C_1 t^{-\frac{1}{4q}}|\mathbf{z}|\right) > 0$$

для всех $|\mathbf{z}| \le \varepsilon$ и $t \ge t_1$. Отсюда следует, что для всех $\delta \in (0,\varepsilon)$ существует $t_* = \max\{t_1, (2C_1/(\varsigma\delta))^{4q}\}$ такое, что

$$\frac{dJ}{dt} \ge t^{-\frac{n+m}{4q}}|\mathbf{z}|^2 \left(\varsigma - t_*^{-\frac{1}{4q}}\frac{C_1}{\delta}\right) \ge t^{-\frac{n+m}{4q}}\frac{\varsigma|\mathbf{z}|^2}{2} \ge t^{-\frac{n+m}{4q}}\frac{\varsigma J}{2}$$

для всех $\mathbf{z} \in \{(z_1,z_2) \in \mathbb{R}^2 : \delta \le |\mathbf{z}| \le \varepsilon, J(z_1,z_2) > 0\}$ и $t \ge t_*$. Интегрируя последнее неравенство при $t \ge t_s \ge t_*$ и беря $|\mathbf{z}(t_s)| = \delta$ так, что $J_\delta := J(z_1(t_s), z_2(t_s)) > 0$, получаем

$$|\mathbf{z}(t)| \ge \sqrt{J_\delta}\exp\left(\frac{q\varsigma}{4q-n-m}\left(t^{1-\frac{n+m}{4q}} - t_s^{1-\frac{n+m}{4q}}\right)\right).$$

Следовательно, существует $t_e > t_s$ такое, что $|\mathbf{z}(t_e)| \ge \varepsilon$. Возвращаясь к переменным (x_1, x_2), получаем доказательство теоремы. $\square$

Доказательство теоремы 16. Подстановка

$$x_1(t) = \xi^N_{III}(t) + t^{-\frac{n}{q}}y_1(t), \quad x_2(t) = \eta^N_{III}(t) + t^{-\frac{3n}{2q}}y_2(t)$$

в (2.1) даёт систему

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{a}_{III}(\mathbf{y},t) + \mathbf{c}_{III}(t), \tag{2.24}$$

где $\mathbf{a}_{III}(\mathbf{y},t) \equiv (\mathfrak{F}_{III}(y_1,y_2,t), \mathfrak{G}_{III}(y_1,y_2,t))^T$,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}_{III} \equiv\,& t^{-\frac{n}{2q}}y_2 + \frac{n}{q}t^{-1}y_1 \\
&+ t^{\frac{n}{q}}\left(F(\xi^N_{III} + t^{-\frac{n}{q}}y_1, \eta^N_{III} + t^{-\frac{3}{2q}}y_2, t) - F(\xi^N_{III}, \eta^N_{III}, t)\right) \\
\mathfrak{G}_{III} \equiv\,& t^{\frac{3n}{2q}}\Big(-\partial_x V(\xi^N_{III} + t^{-\frac{n}{q}}y_1; 0) + \partial_x V(\xi^N_{III}; 0) \\
&+ G(\xi^N_{III} + t^{-\frac{n}{q}}y_1, \eta^N_{III} + t^{-\frac{3n}{2q}}y_2, t) - G(\xi^N_{III}, \eta^N_{III}, t)\Big) \\
&+ \frac{3n}{2q}t^{-1}y_2, \\
\mathbf{c}_{III} \equiv\,& -\left(t^{\frac{n}{q}}\Xi_{III}(t), t^{\frac{3n}{2q}}\Theta_{III}(t)\right)^T
\end{aligned}$$

Заметим, что $\mathbf{a}_{III}(0,t) \equiv 0$. Матрица линеаризованной системы имеет вид:

$$\mathbf{A}_{III}(t) := \begin{pmatrix} \partial_{y_1}\mathfrak{F}_{III}(0,0,t) & \partial_{y_2}\mathfrak{F}_{III}(0,0,t) \\ \partial_{y_1}\mathfrak{G}_{III}(0,0,t) & \partial_{y_2}\mathfrak{G}_{III}(0,0,t) \end{pmatrix}$$

Нетрудно проверить, что

$$\mathbf{A}_{III}(t) = t^{-\frac{n}{2q}}\left(\mathbf{A}^0_{III} + \mathcal{O}(t^{-\frac{n}{2q}})\right), \quad t \to \infty, \quad \mathbf{A}^0_{III} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \mathcal{N}_n & 0 \end{pmatrix},$$

где $\mathcal{N}_n := -2w(0)\xi_n + \partial_{x_1} G_n(0,0)$. Легко проверить, что $\mathcal{N}_n = \sqrt{\Delta_n} > 0$, если $\xi_n = \nu_-$. В этом случае корни $e_+(t)$ и $e_-(t)$ характеристического уравнения $|\mathbf{A}_{III}(t) - e\mathbf{I}| = 0$ являются действительными числами разных знаков: $e_\pm(t) = t^{-n/(2q)}(\pm\varsigma + \mathcal{O}(t^{-n/q}))$ при $t \to \infty$, где $\varsigma = \sqrt{\mathcal{N}_n}$. Заметим, что существует матрица $\mathbf{T}_0$ такая, что $\mathbf{T}_0^{-1}\mathbf{A}^0_{III}\mathbf{T}_0 = \mathbf{B}^0_{III}$, где $\mathbf{B}^0_{III} = \operatorname{diag}\{\varsigma, -\varsigma\}$. Следовательно, подставив $\mathbf{y}(t) = \mathbf{T}_0\mathbf{z}(t)$ в (2.24), получим

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \mathbf{B}_{III}(t)\mathbf{z} + \tilde{\mathbf{b}}_{III}(\mathbf{z}, t) + \mathbf{p}_{III}(t), \tag{2.25}$$

где $\mathbf{z} = (z_1, z_2)^T$,

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{III}(t) &\equiv \mathbf{T}_0^{-1}\mathbf{A}_{III}(t)\mathbf{T}_0 = t^{-\frac{n}{2q}}\left(\mathbf{B}^0_{II} + \mathcal{O}(t^{-\frac{n}{2q}})\right), \\ \tilde{\mathbf{b}}_{III}(\mathbf{z}, t) &\equiv \mathbf{T}_0^{-1}\mathbf{a}_{III}(\mathbf{T}_0\mathbf{z}, t) - \mathbf{B}_{III}(t)\mathbf{z} = \mathcal{O}(|\mathbf{z}|^2)\mathcal{O}(t^{-\frac{n}{2q}}), \\ \mathbf{p}_{III}(t) &\equiv \mathbf{T}_0^{-1}\mathbf{c}_{III}(t) = \mathcal{O}(t^{-\frac{N+1}{q}}). \end{aligned}$$

при $|\mathbf{z}| \to 0$ и $t \to \infty$. Рассмотрим $J(z_1, z_2) \equiv z_1^2 - z_2^2$ в качестве кандидата на функцию Четаева для системы (2.25). Справедливо равенство

$$\frac{dJ}{dt} = t^{-\frac{n}{2q}}\left(2\varsigma|\mathbf{z}|^2 + \mathcal{O}(|\mathbf{z}|^3)\right) + \mathcal{O}(|\mathbf{z}|)\mathcal{O}(t^{-\frac{N+1}{q}}), \quad |\mathbf{z}| \to 0, \quad t \to \infty.$$

Следовательно, для любого $N \geq n/2$ найдутся $\varepsilon > 0$, $t_1 > 0$ и $C_1 > 0$ такие, что

$$\frac{dJ}{dt} \geq t^{-\frac{n}{2q}}\left(\varsigma|\mathbf{z}|^2 - C_1 t^{-\frac{1}{2q}}|\mathbf{z}|\right) > 0$$

для всех $|\mathbf{z}| \leq \varepsilon$ и $t \geq t_1$. Отсюда следует, что для всех $\delta \in (0, \varepsilon)$ существует $t_* = \max\{t_1, (2C_1/(\varsigma\delta))^{2q}\}$ такое, что

$$\frac{dJ}{dt} \geq t^{-\frac{n}{2q}}|\mathbf{z}|^2\left(\varsigma - t_*^{-\frac{1}{2q}}\frac{C_1}{\delta}\right) \geq t^{-\frac{n}{2q}}\frac{\varsigma|\mathbf{z}|^2}{2} \geq t^{-\frac{n}{2q}}\frac{\varsigma J}{2}$$

для всех $\mathbf{z} \in \{(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2 : \delta \le |\mathbf{z}| \le \varepsilon, J(z_1, z_2) > 0\}$ и $t \ge t_*$. Интегрируя последнее неравенство при $t \ge t_s \ge t_*$ и беря $|\mathbf{z}(t_s)| = \delta$ так, что $J_\delta := J(z_1(t_s), z_2(t_s)) > 0$, получаем

$$|\mathbf{z}(t)| \ge \sqrt{J_\delta} \exp\left(\frac{2q\varsigma}{2q-n}\left(t^{1-\frac{n}{2q}} - t_s^{1-\frac{n}{2q}}\right)\right).$$

Следовательно, существует $t_e > t_s$ такое, что $|\mathbf{z}(t_e)| \ge \varepsilon$. Возвращаясь к переменным (x_1, x_2), получаем доказательство теоремы. □

2.6.3. Нелинейный анализ устойчивости

Случай I

Доказательство теоремы 17. Обратим внимание, что систему (2.20) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dt} &= \partial_{y_2}\mathcal{H}(y_1, y_2, t) - \Xi_I(t),\\
\frac{dy_2}{dt} &= -\partial_{y_1}\mathcal{H}(y_1, y_2, t) + \mathcal{P}(y_1, y_2, t) - \Theta_I(t),
\end{aligned} \tag{2.26}$$

где

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} =& V(\xi_I^N + y_1; \lambda) - V(\xi_I^N; \lambda) - y_1 \partial_x V(\xi_I^N; \lambda) + \frac{\eta^2}{2}\\
&+ \int_0^{y_2} \Big(F(\xi_I^N + y_1, \eta_I^N + \theta, t) - F(\xi_I^N, \eta_I^N, t)\Big)\, d\theta\\
&- \int_0^{y_1} \Big(G(\xi_I^N + \zeta, \eta_I^N, t) - G(\xi_I^N, \eta_I^N, t)\Big)\, d\zeta,\\
\mathcal{P} =& \int_0^{y_2} \Big(\partial_{x_1} F(\xi_I^N + y_1, \eta_I^N + y_2, t) + \partial_{x_2} G(\xi_I^N + y_1, \eta_I^N + \theta, t)\Big)\, d\theta.
\end{aligned}$$

Из (2.5) следует, что $\mathcal{H}(y_1,y_2,t)=\mathcal{H}_0(y_1,y_2)+\mathcal{O}(|\mathbf{y}|^2)\mathcal{O}(t^{-n/q})$ и $\mathcal{P}(y_1,y_2,t)=t^{-(n+h)/q}\mathcal{P}_{n+h}(y_1,y_2)+\mathcal{O}(|\mathbf{y}|)\mathcal{O}(t^{-(n+h+1)/q})$ при $|\mathbf{y}|\to 0$ и $t\to\infty$, где

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_0(y_1,y_2)=&V(\sqrt{\lambda}+y_1;\lambda)-V(\sqrt{\lambda};\lambda)-y_1\partial_{x_1}V(\sqrt{\lambda};\lambda)+\frac{y_2^2}{2},\\ \mathcal{P}_{n+h}(y_1,y_2)=&\int\limits_0^{y_2}\Big(\partial_{x_1}F_{n+h}(\sqrt{\lambda}+y_1,\theta)+\partial_{x_2}G_{n+h}(\sqrt{\lambda}+y_1,\theta)\Big)\,d\theta.\end{aligned}$$

Легко видеть, что $\mathcal{H}_0(y_1,y_2)=\sqrt{\lambda}w\big(\sqrt{\lambda}\big)y_1^2+y_2^2/2+\mathcal{O}(|\mathbf{y}|^3)$, $\mathcal{P}_{n+h}(y_1,y_2)=\gamma_{n+h}(\lambda)y_2+\mathcal{O}(|\mathbf{y}|^2)$ при $|\mathbf{y}|\to 0$. Рассмотрим комбинацию

$$U_I(y_1,y_2,t)=\mathcal{H}(y_1,y_2,t)-\frac{\gamma_{n+h}(\lambda)}{2}t^{-\frac{n+h}{q}}y_1y_2 \tag{2.27}$$

как кандидат на функцию Ляпунова для системы (2.26). Легко проверить, что

$$U_I(y_1,y_2,t)=W_I(y_1,y_2)+\mathcal{O}(|\mathbf{y}|^3)+\mathcal{O}(|\mathbf{y}|^2)\mathcal{O}(t^{-\frac{n}{q}}),\quad |\mathbf{y}|\to 0,\quad t\to\infty,$$

где $W_I(y_1,y_2)=(\omega_I^2y_1^2+y_2^2)/2$, $\omega_I^2=2\sqrt{\lambda}w\big(\sqrt{\lambda}\big)>0$. Производная функции $U_I(y_1,y_2,t)$ по t вдоль траекторий системы (2.26) удовлетворяет равенству

$$\frac{dU_I}{dt}=t^{-\frac{n+h}{q}}W_I(y_1,y_2)\Big(\gamma_{n+h}(\lambda)+\mathcal{O}(|\mathbf{y}|)+\mathcal{O}(t^{-\frac{1}{q}})\Big)+\mathcal{O}(|\mathbf{y}|)\mathcal{O}(t^{-\frac{n+N+1}{q}})$$

при $|\mathbf{y}|\to 0$ и $t\to\infty$. Из этого следует, что для любого $N\geq h$ существуют $\rho_0>0$ и $t_0>0$, такие, что $A_-|\mathbf{y}|^2\leq U_I(y_1,y_2,t)\leq A_+|\mathbf{y}|^2$,

$$\begin{aligned}\frac{dU_I}{dt}&\leq -t^{-\frac{n+h}{q}}\Big(A_0|\mathbf{y}|^2-t^{-\frac{1}{q}}A_1|\mathbf{y}|\Big),\quad \text{если}\quad \gamma_{n+h}(\lambda)<0,\\ \frac{dU_I}{dt}&\geq t^{-\frac{n+h}{q}}\Big(A_0|\mathbf{y}|^2-t^{-\frac{1}{q}}A_1|\mathbf{y}|\Big),\quad \text{если}\quad \gamma_{n+h}(\lambda)>0\end{aligned}$$

для всех $|\mathbf{y}|\leq\rho_0$ и $t\geq t_0$ с положительными параметрами

$$A_-=\frac{1}{4}\min\{1,\omega_I^2\},\quad A_+=\max\{1,\omega_I^2\},\quad A_0=\frac{|\gamma_{n+h}(\lambda)|A_-}{2} \tag{2.28}$$

и некоторой постоянной $A_1>0$.

Пусть $\gamma_{n+h}(\lambda)<0$. Тогда для любого $\varepsilon\in(0,\rho_0)$ существуют

$$\delta_\varepsilon=\frac{\varepsilon}{2},\quad t_\varepsilon=\max\left\{t_0,\left(\frac{4A_1}{\varepsilon A_0}\sqrt{\frac{A_+}{A_-}}\right)^q\right\}$$

такие, что

$$\frac{dU_I}{dt} \le t^{-\frac{n+h}{q}}|\mathbf{y}|^2\left(-A_0 + t_\varepsilon^{-\frac{1}{q}}\frac{A_1}{\delta_\varepsilon}\right) \le -t^{-\frac{n+h}{q}}\frac{A_0|\mathbf{y}|^2}{2} < 0$$

для всех $\delta_\varepsilon \le |\mathbf{y}| \le \varepsilon$ и $t \ge t_\varepsilon$. Более того, функция $U(y_1, y_2, t)$ удовлетворяет неравенству

$$\sup_{|\mathbf{y}|\le\delta_\varepsilon} U_I(y_1, y_2, t) \le A_+\delta_\varepsilon^2 < A_-\varepsilon^2 \le \inf_{|\mathbf{y}|=\varepsilon} U_I(y_1, y_2, t), \quad t \ge t_0.$$

Следовательно, любое решение $(y_1(t), y_2(t))$ системы (2.26) с начальными данными $|\mathbf{y}(t_s)| \le \delta_\varepsilon$, $t_s \ge t_\varepsilon$ не может выйти из окрестности $\{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : |\mathbf{y}| \le \varepsilon\}$ при $t > t_s$.

Пусть $\gamma_{n+h}(\lambda) > 0$. Отсюда следует, что для любого $\delta \in (0, \varepsilon)$, $\varepsilon = \varrho_0/2$ существует $t_* = \max\{t_0, (2A_1/(A_0\delta))^q\}$ такое, что

$$\frac{dU_I}{dt} \ge t^{-\frac{n+h}{q}}|\mathbf{y}|^2\left(A_0 - t_*^{-\frac{1}{q}}\frac{A_1}{\delta}\right) \ge t^{-\frac{n+h}{q}}\frac{A_0|\mathbf{y}|^2}{2} \ge t^{-\frac{n+h}{q}}\varsigma U_I$$

для всех $\delta \le |\mathbf{y}| \le \varepsilon$ и $t \ge t_*$ с $\varsigma = A_0/(2A_+)$. Интегрируя последнее неравенство при $t \ge t_s \ge t_*$ и принимая $|\mathbf{y}(t_s)| = \delta$, получаем

$$|\mathbf{y}(t)| \ge \delta\sqrt{\frac{A_-}{A_+}}\exp\left(\frac{\varsigma}{2}\int_{t_s}^{t}\tau^{-\frac{n+h}{q}}\,d\tau\right).$$

Следовательно, существует $t_e > t_s$ такое, что $|\mathbf{y}(t_e)| \ge \varepsilon$. $\square$

Доказательство теоремы 18. Подставляя $y_1(t) = t^{-\frac{N-h}{q}}z_1(t)$, $y_2(t) = t^{-\frac{N-h}{q}}z_2(t)$ в (2.26), получаем

$$\begin{aligned}\frac{dz_1}{dt} &= \partial_{z_2}\tilde{\mathcal{H}}(z_1, z_2, t) - \tilde{\Xi}_I(t),\\ \frac{dz_2}{dt} &= -\partial_{z_1}\tilde{\mathcal{H}}(z_1, z_2, t) + \tilde{\mathcal{P}}(z_1, z_2, t) - \tilde{\Theta}_I(t),\end{aligned} \tag{2.29}$$

где

$$
\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{H}}(z_1,z_2,t) &\equiv t^{\frac{2(N-h)}{q}}\mathcal{H}\left(t^{-\frac{N-h}{q}}z_1, t^{-\frac{N-h}{q}}z_2, t\right) + \frac{N-h}{q}t^{-1}z_1z_2\\
&= W_I(z_1,z_2) + \mathcal{O}(|\mathbf{z}|^2)\mathcal{O}(t^{-\frac{n}{q}}) + \mathcal{O}(|\mathbf{z}|^3)\mathcal{O}(t^{-\frac{N-h}{q}}),\\
\tilde{\mathcal{P}}(z_1,z_2,t) &\equiv t^{\frac{N-h}{q}}\mathcal{P}\left(t^{-\frac{N-h}{q}}z_1, t^{-\frac{N-h}{q}}z_2, t\right) + \frac{2(N-h)}{q}t^{-1}z_2\\
&= t^{-\frac{n+h}{q}}\left(\gamma_{n+h}(\lambda)z_2 + \mathcal{O}(|\mathbf{z}|^2)\mathcal{O}(t^{-\frac{N-h}{q}}) + \mathcal{O}(|\mathbf{z}|)\mathcal{O}(t^{-\frac{1}{q}})\right),\\
\tilde{\Xi}_I(t) &\equiv t^{\frac{N-h}{q}}\Xi_I(t) = \mathcal{O}(t^{-\frac{n+h+1}{q}}),\\
\tilde{\Theta}_I(t) &\equiv t^{\frac{N-h}{q}}\Theta_I(t) = \mathcal{O}(t^{-\frac{n+h+1}{q}})
\end{aligned}
$$

при $|\mathbf{z}| \to 0$ и $t \to \infty$. Рассмотрим

$$
\tilde{U}_I(z_1,z_2,t) = \tilde{\mathcal{H}}(z_1,z_2,t) - \frac{\gamma_{n+h}(\lambda)}{2}t^{-\frac{n+h}{q}}z_1z_2
$$

в качестве кандидата на функцию Ляпунова для системы (2.29). Тогда имеем

$$
\frac{d\tilde{U}_I}{dt} = t^{-\frac{n+h}{q}}W_I\left(\gamma_{n+h}(\lambda) + \mathcal{O}(|\mathbf{z}|)\mathcal{O}(t^{-\frac{N-h}{q}}) + \mathcal{O}(t^{-\frac{1}{q}})\right) + \mathcal{O}(|\mathbf{z}|)\mathcal{O}(t^{-\frac{n+h+1}{q}})
$$

при $|\mathbf{z}| \to 0$ и $t \to \infty$. Следовательно, существуют $\rho_0 > 0$ и $t_0 > 0$, такие, что

$$
A_-|\mathbf{z}|^2 \le \tilde{U}_I(z_1,z_2,t) \le A_+|\mathbf{z}|^2, \quad \frac{d\tilde{U}_I}{dt} \le t^{-\frac{n+h}{q}}\left(-A_0|\mathbf{z}|^2 + t^{-\frac{1}{q}}A_1|\mathbf{z}|\right)
$$

для всех $|\mathbf{z}| \le \rho_0$ и $t \ge t_0$ с активными параметрами $A_\pm$, A_0, определёнными в (2.28) и некоторой постоянной $A_1 > 0$. Далее, повторяя рассуждения из доказательств выводы 17, получаем, что для любого $\varepsilon \in (0,\rho_0)$ существуют $\delta_\varepsilon > 0$ и $t_\varepsilon \ge t_0$ такие, что любое решение $(z_1(t), z_2(t))$ системы (2.29) с начальными данными $|\mathbf{z}(t_s)| \le \delta_\varepsilon$, $t_s \ge t_\varepsilon$ не может выйти из окрестности $\{(z_1,z_2) \in \mathbb{R}^2 : |\mathbf{z}| \le \varepsilon\}$ при $t > t_s$. Следовательно, для любого $N \ge h$ существует решение $(\xi_I(t), \eta_I(t))$ системы (2.1) такое, что $\xi_I(t) = \xi_I^N(t) + \mathcal{O}(t^{-(N-h)/q})$, $\eta_I(t) = \eta_I^N(t) + \mathcal{O}(t^{-(N-h)/q})$ при $t \to \infty$.

Для доказательства устойчивости решения подставим $x_1(t) = \xi_I(t) + y_1(t)$, $x_2(t) = \eta_I(t) + y_2(t)$ в систему (2.1). Тогда для функций $y_1(t)$, $y_2(t)$ получим систему (2.26), в которой вместо $\xi_I^N(t)$, $\eta_I^N(t)$ стоят $\xi_I(t)$, $\eta_I^N(t)$. В этом случае $\Xi_I(t) \equiv \Theta_I(t) \equiv 0$ и $\tilde{\Xi}_I(t) \equiv \tilde{\Theta}_I(t) \equiv 0$ в системе (2.29). Нетрудно проверить, что в этом случае производная функции $\tilde{U}_I(z_1, z_2, t)$ на траекториях системы (2.29) удовлетворяет неравенству: $d\tilde{U}_I/dt \le -\varsigma t^{-\frac{n+h}{q}}\tilde{U}_I$ для всех $|\mathbf{z}| \le \rho_0$ и $t \ge t_0$ с постоянной $\varsigma = A_0/A_+ > 0$. Интегрируя последнее неравенство при $t \ge t_s \ge t_0$ с $|\mathbf{z}(t_s)| \le \delta_\varepsilon$, получаем

$$|\mathbf{z}(t)| \le |\mathbf{z}(t_s)|\sqrt{\frac{A_+}{A_-}} \exp\left(-\frac{\varsigma}{2}\int\limits_{t_s}^{t} \tau^{-\frac{n+h}{q}}\, d\tau\right).$$

Следовательно, $|\mathbf{z}(t)| \to 0$ при $t \to \infty$. Возвращаясь к исходным переменным, получаем асимптотическую устойчивость частного решения $\xi_I(t)$, $\eta_I(t)$. □

Доказательство теоремы 19. Система (2.26) рассматривается. Из (2.13) следует, что $\mathcal{P}(y_1, y_2, t) \equiv 0$ и $\mathcal{H}(y_1, y_2, t) = \mathcal{H}_0(y_1, y_2) + t^{-n/q}\mathcal{H}_n(y_1, y_2) + \mathcal{O}(t^{-(n+1)/q})$ при $t \to \infty$, где $\mathcal{H}_n(y_1, y_2) = (G_n(\sqrt{\lambda}, 0) + \partial_{x_1} G_n(\sqrt{\lambda}, 0))y_1^2/2 + \partial_{x_1} F_n(\sqrt{\lambda}, 0)y_1 y_2 + \partial_{x_2} F_n(\sqrt{\lambda}, 0)y_2^2/2 + \mathcal{O}(|\mathbf{y}|^3)$ при $|\mathbf{y}| \to 0$. В этом случае используем

$$\begin{aligned} U_0(y_1, y_2, t) = {} & \mathcal{H}(y_1, y_2, t) \\ & + t^{-1-\frac{n}{q}}\frac{n}{q}\left(\left(d_n - 2\omega_I^2\partial_{x_2}F_n(\sqrt{\lambda}, 0)\right)\frac{y_1 y_2}{4\omega_I^2} + \partial_{x_1}F_n(\sqrt{\lambda}, 0)\frac{y_1^2}{2}\right) \end{aligned}$$

в качестве кандидата на функцию Ляпунова для системы (2.26). Производная $U_0(y_1, y_2, t)$ вдоль траекторий системы определяется выражением

$$\frac{dU_0}{dt} = t^{-1-\frac{n}{q}} W_I(y_1, y_2)\left(-\frac{n d_n}{2q\omega_I^2} + \mathcal{O}(|\mathbf{y}|) + \mathcal{O}(t^{-\frac{1}{q}})\right) + \mathcal{O}(|\mathbf{y}|)\mathcal{O}(t^{-\frac{n+N+1}{q}})$$

при $|\mathbf{y}| \to 0$ и $t \to \infty$. Далее, повторяя рассуждения, использованные при доказательстве теоремы 17, видим, что асимптотические режимы $\xi_I^N(t)$, $\eta_I^N(t)$ являются устойчивыми при $d_n > 0$. □

Случай II

Доказательство теоремы 20. Обратим внимание, что система (2.22) может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= \partial_{y_2}\mathcal{H}(y_1,y_2,t) - \Xi_{II}(t), \\ \frac{dy_2}{dt} &= -\partial_{y_1}\mathcal{H}(y_1,y_2,t) + \mathcal{P}(y_1,y_2,t) - \Theta_{II}(t), \end{aligned} \tag{2.30}$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{H} =& V(\xi_{II}^N + y_1; 0) - V(\xi_{II}^N; 0) - y_1\partial_x V(\xi_{II}^N; 0) + \frac{y_2^2}{2} \\ &+ \int\limits_0^{y_2} \Big(F(\xi_{II}^N + y_1, \eta_{II}^N + \theta, t) - F(\xi_{II}^N, \eta_{II}^N, t)\Big)\, d\theta \\ &- \int\limits_0^{y_1} \Big(G(\xi_{II}^N + \zeta, \eta_{II}^N, t) - G(\xi_{II}^N, \eta_{II}^N, t)\Big)\, d\zeta, \\ \mathcal{P} =& \int\limits_0^{y_2} \Big(\partial_{x_1}F(\xi_{II}^N + y_1, \eta_{II}^N + y_2, t) + \partial_{x_2}G(\xi_{II}^N + y_1, \eta_{II}^N + \theta, t)\Big)\, d\theta. \end{aligned} \tag{2.31}$$

Из (2.9) следует, что

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(y_1,y_2,t) &= \mathcal{H}_0(y_1,y_2) + t^{-\frac{n+m}{2q}}\mathcal{H}_{n+m}(y_1,y_2) + \mathcal{O}(t^{-\frac{n+m+1}{2q}}), \\ \mathcal{P}(y_1,y_2,t) &= t^{-\frac{n+h}{q}}\mathcal{P}_{n+h}(y_1,y_2) + \mathcal{O}(t^{-\frac{n+h+1}{q}}), \quad t\to\infty, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0(y_1,y_2) &\equiv V(y_1;0) - V(0;0) - y_1\partial_{x_1}V(0;0) + \frac{y_2^2}{2} \\ &= w(0)\frac{y_1^3}{3} + \frac{y_2^2}{2} + \mathcal{O}(|\mathbf{y}|^4), \\ \mathcal{H}_{n+m}(y_1,y_2) &= x_{n+m}\left(\partial_x V(y_1;0) - \partial_{x_1}V(0;0) - y_1\partial_x^2 V(0;0)\right) \\ &= w(0)\mu y_1^2 + \mathcal{O}(|\mathbf{y}|^3), \\ \mathcal{P}_{n+h}(y_1,y_2) &= \gamma_{n+h}(0) y_2 + \mathcal{O}(|\mathbf{y}|^2) \end{aligned}$$

при $|\mathbf{y}| \to 0$. Поскольку функция $\mathcal{H}(y_1,y_2,t)$ знаконеопределена вблизи неподвижной точки $(0,0)$, комбинация вида (2.27) не может быть использована в качестве кандидата на функцию Ляпунова для системы (2.30).

Замена переменных

$$y_1(t) = t^{-\frac{n+m}{2q}} z_1(t), \quad y_2(t) = t^{-\frac{3(n+m)}{4q}} z_1(t) \tag{2.32}$$

приводит систему (2.30) к виду

$$\begin{aligned} \frac{dz_1}{dt} =& \partial_{z_2} \hat{\mathcal{H}}(z_1, z_2, t) - \hat{\Xi}_{II}(t), \\ \frac{dz_2}{dt} =& - \partial_{z_1} \hat{\mathcal{H}}(z_1, z_2, t) + \hat{\mathcal{P}}(z_1, z_2, t) - \hat{\Theta}_{II}(t), \end{aligned} \tag{2.33}$$

где

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}(z_1, z_2, t) \equiv& t^{\frac{5(n+m)}{4q}} \mathcal{H}\left(t^{-\frac{n+m}{2q}} z_1, t^{-\frac{3(n+m)}{4q}} z_2, t\right) + \frac{n+m}{2q} t^{-1} z_1 z_2, \\ \hat{\mathcal{P}}(z_1, z_2, t) \equiv& t^{\frac{3(n+m)}{4q}} \mathcal{P}\left(t^{-\frac{n+m}{2q}} z_1, t^{-\frac{3(n+m)}{4q}} z_2, t\right) + \frac{5(n+m)}{4q} t^{-1} z_2, \\ \hat{\Xi}_{II}(t) \equiv& t^{\frac{n+m}{2q}} \Xi_{II}(t), \\ \hat{\Theta}_{II}(t) \equiv& t^{\frac{3(n+m)}{4q}} \Theta_{II}(t). \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}} =& t^{-\frac{n+m}{4q}} \left(\frac{1}{2}(\omega_{II}^2 z_1^2 + z_2^2) + w(0) \frac{z_1^3}{3}\right) + \mathcal{O}(|\mathbf{z}|^2) \mathcal{O}(t^{-\frac{n+m}{2q}}) + \mathcal{O}(|\mathbf{z}|^2) \mathcal{O}(t^{-1}), \\ \hat{\mathcal{P}} =& t^{-\frac{n+h}{q}} \alpha_{n,m} z_2 + \mathcal{O}(t^{-\frac{n+h+1}{q}}) \mathcal{O}(|\mathbf{z}|), \\ \hat{\Xi}_{II} =& \mathcal{O}(t^{-\frac{n-m+N+1}{2q}}), \\ \hat{\Theta}_{II} =& \mathcal{O}(t^{-\frac{2N-n-m+2}{4q}}) \end{aligned}$$

при $|\mathbf{z}| \to 0$ и $t \to \infty$, где $\omega_{II}^2 = 2w(0)\mu > 0$. Рассмотрим

$$U_{II}(z_1, z_2, t) = t^{\frac{n+m}{4q}} \hat{\mathcal{H}}(z_1, z_2, t) - t^{-\frac{3n+4h-m}{4q}} \frac{\alpha_{n,m}}{2} z_1 z_2$$

в качестве кандидата на функцию Ляпунова для системы (2.33). Легко проверить, что

$$U_{II}(z_1, z_2, t) = W_{II}(z_1, z_2) + \mathcal{O}(|\mathbf{z}|^3) + \mathcal{O}(|\mathbf{z}|^2) \mathcal{O}(t^{-\frac{n+m}{4q}}), \quad |\mathbf{z}| \to 0, \quad t \to \infty,$$

где $W_{II}(z_1,z_2)=(\omega_{II}^2 z_1^2+z_2^2)/2$. Производная функции $U_{II}(z_1,z_2,t)$ по t вдоль траекторий системы (2.33) удовлетворяет равенству

$$\frac{dU_{II}}{dt}=t^{-\frac{n+h}{q}}W_{II}\left(\alpha_{n,m}+\mathcal{O}(|\mathbf{z}|)+\mathcal{O}(t^{-\frac{1}{q}})+\mathcal{O}(t^{-\frac{n+m}{4q}})\right)+\mathcal{O}(|\mathbf{z}|)\mathcal{O}(t^{-\frac{2N-n-m+2}{4q}})$$

при $|\mathbf{z}|\to 0$ и $t\to\infty$. Отсюда следует, что для любых $N\geq(5n+m+4h-1)/2$ и $\epsilon\in(0,1)$ существуют $\rho_0>0$ и $t_0>0$, такие, что

$$\begin{gathered}(1-\epsilon)W_{II}(z_1,z_2)\leq U_{II}(z_1,z_2,t)\leq(1+\epsilon)W_{II}(z_1,z_2),\\ \frac{dU_{II}}{dt}\leq -t^{-\frac{n+h}{q}}\left((1-\epsilon)|\alpha_{n,m}|W_{II}-t^{-\frac{1}{4q}}B_1\sqrt{W_{II}}\right),\quad \text{если}\quad \alpha_{n,m}<0,\\ \frac{dU_{II}}{dt}\geq t^{-\frac{n+h}{q}}\left((1-\epsilon)\alpha_{n,m}W_{II}-t^{-\frac{1}{4q}}B_1\sqrt{W_{II}}\right),\quad \text{если}\quad \alpha_{n,m}>0\end{gathered}$$

для всех $|\mathbf{z}|\leq\rho_0$ и $t\geq t_0$ с некоторой постоянной $B_1>0$.

Если $\alpha_{n,m}<0$, то, повторяя рассуждения доказательств 17, получаем, что для любого $\varepsilon\in(0,\rho_0)$ существуют $\delta_\varepsilon>0$ и $t_\varepsilon\geq t_0$ такие, что любое решение $(z_1(t),z_2(t))$ системы (2.33) с начальными данными $|\mathbf{z}(t_s)|\leq\delta_\varepsilon$, $t_s\geq t_\varepsilon$ не может выйти из окрестности $\{(z_1,z_2)\in\mathbb{R}^2:|\mathbf{z}|\leq\varepsilon\}$ при $t>t_s$. Объединяя это с (2.32), получаем устойчивость асимптотического режима $\xi_{II}^N(t)$, $\eta_{II}^N(t)$ при $\xi_{n+m}=\mu$.

Пусть $\alpha_{n,m}>\delta_{n+h,q}3(n+m)/(2q)$. Отсюда следует, что для любого $\delta\in(0,\varepsilon)$, $\varepsilon=\rho_0/2$ существует $t_*=\max\{t_0,(B_1/(\epsilon(1-\epsilon)\delta))^{4q}\}$ такое, что

$$\begin{aligned}\frac{dU_{II}}{dt}&\geq t^{-\frac{n+h}{q}}W_{II}(z_1,z_2)\left((1-\epsilon)\alpha_{n,m}-t_*^{-\frac{1}{4q}}\frac{B_1}{\delta}\right)\\ &\geq t^{-\frac{n+h}{q}}(1-\epsilon)^2\alpha_{n,m}W_{II}(z_1,z_2)\geq t^{-\frac{n+h}{q}}\varsigma U_{II}\end{aligned}\tag{2.34}$$

для всех $\delta^2\leq W_{II}(z_1,z_2)\leq\varepsilon^2$ и $t\geq t_*$ с $\varsigma=(1-\epsilon)^2|\alpha_{n,m}|/(1+\epsilon)$. Интегрируя последнее неравенство при $t\geq t_s\geq t_*$ с $W_{II}(z_1(t_s),z_2(t_s))=\delta^2$ и учитывая (2.32), получаем

$$|\mathbf{y}(t)|^2\geq\frac{(1-\epsilon)\delta^2}{(1+\epsilon)B_+}t^{-\frac{3(n+m)}{2q}}\exp\left(\varsigma\int\limits_{t_s}^{t}\tau^{-\frac{n+h}{q}}\,d\tau\right).$$

Выбрав $\epsilon\in(0,1)$ достаточно малым, мы видим, что существует $t_e>t_s$ такое, что $|\mathbf{y}(t_e)|\geq\varepsilon$. $\square$

Доказательство теоремы 21. Подстановка

$$z_1(t) = t^{-\frac{2N-\varkappa}{4q}} u_1(t), \quad z_2(t) = t^{-\frac{2N-\varkappa}{4q}} u_2(t), \quad \varkappa = 5n + m + 4h - 1$$

с (2.33) приводит к системе

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dt} &= \partial_{u_2} \tilde{\mathcal{H}}(u_1, u_2, t) - \tilde{\Xi}_{II}(t), \\ \frac{du_2}{dt} &= -\partial_{u_1} \tilde{\mathcal{H}}(u_1, u_2, t) + \tilde{\mathcal{P}}(u_1, u_2, t) - \tilde{\Theta}_{II}(t), \end{aligned} \tag{2.35}$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{H}}(u_1, u_2, t) &\equiv t^{\frac{2N-\varkappa}{2q}} \hat{\mathcal{H}}\left(t^{-\frac{2N-\varkappa}{4q}} u_1, t^{-\frac{2N-\varkappa}{4q}} u_2, t\right) + \frac{2N-\varkappa}{4q} t^{-1} u_1 u_2 \\ &= t^{-\frac{n+m}{4q}} \left(W_{II}(z_1, z_2) + \mathcal{O}(|\mathbf{u}|^2)\mathcal{O}(t^{-\frac{n+m}{4q}}) + \mathcal{O}(|\mathbf{u}|^3)\mathcal{O}(t^{-\frac{2N-\varkappa}{4q}})\right), \\ \tilde{\mathcal{P}}(z_1, z_2, t) &\equiv t^{\frac{2N-\varkappa}{4q}} \hat{\mathcal{P}}\left(t^{-\frac{2N-\varkappa}{4q}} u_1, t^{-\frac{2N-\varkappa}{4q}} u_2, t\right) + \frac{2N-\varkappa}{2q} t^{-1} u_2 \\ &= t^{-\frac{n+h}{q}} \left(\alpha_{n+h} u_2 + \mathcal{O}(|\mathbf{u}|^2)\mathcal{O}(t^{-\frac{2N-\varkappa}{4q}}) + \mathcal{O}(|\mathbf{u}|)\mathcal{O}(t^{-\frac{1}{q}})\right), \\ \tilde{\Xi}_{II}(t) &\equiv t^{\frac{2N-\varkappa}{4q}} \hat{\Xi}_{II}(t) = \mathcal{O}(t^{-\frac{n+h+1}{4q}}), \\ \tilde{\Theta}_{II}(t) &\equiv t^{\frac{2N-\varkappa}{4q}} \hat{\Theta}_{II}(t) = \mathcal{O}(t^{-\frac{n+h+1}{4q}}) \end{aligned}$$

при $|\mathbf{u}| \to 0$ и $t \to \infty$. Рассмотрим

$$\tilde{U}_{II}(u_1, u_2, t) = t^{\frac{n+m}{4q}} \tilde{\mathcal{H}}(u_1, u_2, t) - t^{-\frac{3n+4h-m}{4q}} \frac{\alpha_{n,m}}{2} u_1 u_2$$

в качестве кандидата на функцию Ляпунова для системы (2.35). Тогда имеем

$$\frac{d\tilde{U}_{II}}{dt} = t^{-\frac{n+h}{q}} W_{II} \left(\alpha_{n,m} + \mathcal{O}(|\mathbf{u}|)\mathcal{O}(t^{-\frac{2N-\varkappa}{4q}}) + \mathcal{O}(t^{-\frac{1}{q}})\right) + \mathcal{O}(|\mathbf{u}|)\mathcal{O}(t^{-\frac{4n+4h+1}{4q}})$$

при $|\mathbf{u}| \to 0$ и $t \to \infty$. Следовательно, существуют $\rho_0 > 0$ и $t_0 > 0$, такие, что

$$B_-|\mathbf{z}|^2 \le \tilde{U}_{II}(z_1, z_2, t) \le B_+|\mathbf{z}|^2, \quad \frac{d\tilde{U}_{II}}{dt} \le t^{-\frac{n+h}{q}} \left(-B_0|\mathbf{u}|^2 + t^{-\frac{1}{4q}} B_1 |\mathbf{u}|\right)$$

для всех $|\mathbf{u}| \le \rho_0$ и $t \ge t_0$ с действующими параметрами $B_- = \min\{1, \omega_{II}^2\}/4$, $B_+ = \max\{1, \omega_{II}^2\}$, $B_0 = |\alpha_{n,m}| B_-/2$ и некоторая постоянная $B_1 > 0$. Повторяя рассуждения доказательств из выводов 17, получаем, что для любого

$\varepsilon \in (0, \rho_0)$ существуют $\delta_\varepsilon > 0$ и $t_\varepsilon \geq t_0$ такие, что любое решение $(u_1(t), u_2(t))$ системы (2.35) с начальными данными $|\mathbf{u}(t_s)| \leq \delta_\varepsilon$, $t_s \geq t_\varepsilon$ не может выйти из окрестности $\{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 : |\mathbf{u}| \leq \varepsilon\}$ при $t > t_s$. Следовательно, для любого $N \geq \varkappa/2$ существует решение $(\xi_{II}(t), \eta_{II}(t))$ системы (2.1) такое, что $\xi_{II}(t) = \xi_{II}^N(t) + \mathcal{O}(t^{-(2N-\varkappa)/(4q)})$, $\eta_{II}(t) = \eta_{II}^N(t) + \mathcal{O}(t^{-(2N-\varkappa)/(4q)})$ при $t \to \infty$.

Доказательство асимптотической устойчивости решения $(\xi_{II}(t), \eta_{II}(t))$ проводится так же, как в теореме 18. □

Доказательство теоремы 22. Легко проверить, что замена переменных

$$y_1(t) = t^{-\frac{n+m}{2q}} z_1(t), \quad y_2(t) = t^{-\frac{m}{q}} z_2(t)$$

преобразует систему (2.30) к виду (2.33) с

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{H}} &\equiv t^{\frac{n+3m}{2q}} \mathcal{H}\Big(t^{-\frac{n+m}{2q}} z_1, t^{-\frac{m}{q}} z_2, t\Big) + \frac{n+m}{2q} t^{-1} XY \\
&= t^{\frac{n-m}{2q}} z_2^2 \left(\frac{1}{2} + \mathcal{O}(t^{-\frac{n+m+1}{2q}})\right) + t^{-\frac{n}{q}} z_1^2 \left(\frac{\omega_{II}^2}{2} + w(0)\frac{z_1}{3} + \mathcal{O}(t^{-\frac{1}{2q}})\right), \\
\hat{\mathcal{P}} &\equiv t^{\frac{m}{q}} \mathcal{P}\Big(t^{-\frac{n+m}{2q}} z_1, t^{-\frac{m}{q}} z_2, t\Big) + \frac{n+3m}{2q} t^{-1} z_2 \\
&= t^{-1} z_2 \left(\hat{\alpha}_{n,m} + \mathcal{O}(t^{-\frac{1}{q}})\right) + \mathcal{O}(z_1)\mathcal{O}(t^{-1-\frac{n}{q}}), \\
\hat{\Xi}_{II} &\equiv t^{\frac{n+m}{2q}} \Xi_{II}(t) = \mathcal{O}(t^{-\frac{n-m+N+1}{2q}}), \\
\hat{\Theta}_{II} &\equiv t^{\frac{m}{q}} \Theta_{II}(t) = \mathcal{O}(t^{-\frac{n-m+N+1}{2q}})
\end{aligned}$$

при $|\mathbf{z}| \to 0$ и $t \to \infty$, где $\hat{\alpha}_{n,m} = \alpha_{n,m} - (3n-m)/(4q) < 0$, $\omega_{II}^2 = 2w(0)\mu > 0$. Рассмотрим

$$\hat{U}_{II}(z_1, z_2, t) := t^{-\frac{n-m}{2q}} \left(\hat{\mathcal{H}}(z_1, z_2, t) - t^{-1}\frac{\hat{\alpha}_{n,m}}{2} z_1 z_2\right),$$

в качестве кандидата на функцию Ляпунова. Производная $\hat{U}_{II}(z_1, z_2, t)$ по t вдоль траекторий системы удовлетворяет равенству:

$$\frac{d\hat{U}_{II}}{dt} = t^{-1} \left(\hat{\alpha}_{n,m} \hat{W}_{II} + \mathcal{O}(z_1^3)\mathcal{O}(t^{-\frac{3n-m}{2q}})\right)(1 + \mathcal{O}(t^{-\frac{1}{2q}})) + \mathcal{O}(|\mathbf{z}|)\mathcal{O}(t^{-\frac{n-m+N+1}{2q}})$$

при $|\mathbf{z}| \to 0$ и $t \to \infty$, где

$$\hat{W}_{II}(z_1, z_2, t) = \frac{1}{2}\left(z_2^2 + t^{-\frac{3n-m}{2q}}\omega_{II}^2 z_1^2\right).$$

Легко видеть, что существуют $\rho_1 > 0$ и $t_1 > 0$ такие, что

$$t^{-\frac{3n-m}{2q}}\hat{B}_-|\mathbf{z}|^2 \le \frac{1}{2}\hat{W}_{II}(z_1, z_2, t) \le \hat{U}_{II}(z_1, z_2, t) \le \frac{3}{2}\hat{W}_{II}(z_1, z_2, t) \le \hat{B}_+|\mathbf{z}|^2,$$
$$\frac{d\hat{U}_{II}}{dt} \le -t^{-1}\hat{B}_0\hat{W}_{II}(z_1, z_2, t) + \hat{B}_1|\mathbf{z}|t^{-\frac{n-m+N+1}{2q}}$$

для всех $|\mathbf{z}| \le \rho_1$ и $t \ge t_1$ с $\hat{B}_- = \min\{1, \omega_{II}^2\}/4$, $\hat{B}_+ = \max\{1, \omega_{II}^2\}$, $\hat{B}_0 = |\hat{\alpha}_{n,m}|/2 > 0$ и единичной единицы $\hat{B}_1 > 0$. Следовательно, для любых $\kappa > 1$ и

$$0 < \varepsilon < \min\left\{1, \rho_1, \left(\frac{\hat{B}_-^2\hat{B}_0}{2\hat{B}_+\hat{B}_1}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}}, \left(\frac{\hat{B}_1}{\hat{B}_-\hat{B}_0}t_1^{-\frac{3n-m}{2q}}\right)^{\frac{1}{\kappa+1}}\right\}$$

существуют

$$\delta_\varepsilon = \varepsilon^{\kappa+1}, \quad t_\varepsilon = \varepsilon^{-\frac{2(\kappa+1)q}{3n-m}}\left(\frac{\hat{B}_1}{\hat{B}_0\hat{B}_-}\right)^{\frac{2q}{3n-m}}$$

такие, что

$$\frac{d\hat{U}_{II}}{dt} \le t^{-1}\left(-\hat{B}_0 + \frac{\hat{B}_1}{2\hat{B}_-\delta_\varepsilon}t_\varepsilon^{-\frac{3n-m}{2q}}\right)\hat{W}_{II}(z_1, z_2, t) \le 0 \tag{2.36}$$

для всех $\delta_\varepsilon \le |\mathbf{z}| \le \varepsilon$, $t \ge t_\varepsilon$ и $N \ge 5n - m + 2q - 1$. Справедливы цвета

$$\sup_{|\mathbf{z}| \le \delta_\varepsilon} \hat{U}_{II}(z_1, z_2, t) \le \hat{B}_+\delta_\varepsilon^2 < K_\varepsilon^{-\frac{3n-m}{2q}}\hat{B}_-\varepsilon^2 \le \inf_{|\mathbf{z}|=\varepsilon} \hat{U}_{II}(z_1, z_2, t)$$

при всех $t_\varepsilon \le t_s \le t \le K_\varepsilon$, где

$$K_\varepsilon = \varepsilon^{-\frac{4\kappa q}{3n-m}}\left(\frac{\hat{B}_-}{2\hat{B}_+}\right)^{\frac{2q}{3n-m}}$$

Из последних неравенств и оценки (2.36) следует, что любое решение системы (2.33) с начальными данными $|\mathbf{z}(t_s)| \le \delta_\varepsilon$, $t_\varepsilon \le t_s < K_\varepsilon$ не может выйти из окрестности $\{(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2 : |\mathbf{z}| \le \varepsilon\}$ при $t_s \le t \le K_\varepsilon$. Таким образом, асимптотический режим $\xi_{II}^N(t)$, $\eta_{II}^N(t)$ устойчив на конечном, но асимптотически большом интервале времени. $\square$

Случай III

Доказательство теоремы 23. Обратим внимание, что система (2.24) может быть записана в виде

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dt} &= \partial_{y_2}\mathcal{H}(y_1,y_2,t) - \Xi_{III}(t),\\ \frac{dy_2}{dt} &= -\partial_{y_1}\mathcal{H}(y_1,y_2,t) + \mathcal{P}(y_1,y_2,t) - \Theta_{III}(t),\end{aligned} \tag{2.37}$$

где функции $\mathcal{H}(y_1,y_2,t)$ и $\mathcal{P}(y_1,y_2,t)$ искусственными формулами (2.31) с $\xi^N_{III}(t)$, $\eta^N_{III}(t)$ вместо $\xi^N_{II}(t)$, $\eta^N_{II}(t)$. Замена переменных

$$y_1(t) = t^{-\frac{n}{q}} z_1(t), \quad y_2(t) = t^{-\frac{3n}{2q}} z_2(t) \tag{2.38}$$

преобразует систему (2.37) к виду

$$\begin{aligned}\frac{dz_1}{dt} &= \partial_{z_2}\hat{\mathcal{H}}(z_1,z_2,t) - \hat{\Xi}_{III}(t),\\ \frac{dz_2}{dt} &= -\partial_{z_1}\hat{\mathcal{H}}(z_1,z_2,t) + \hat{\mathcal{P}}(z_1,z_2,t) - \hat{\Theta}_{III}(t)\end{aligned} \tag{2.39}$$

с

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{H}} &\equiv t^{\frac{5n}{2q}}\mathcal{H}\Big(t^{-\frac{n}{q}}z_1, t^{-\frac{3n}{2q}}z_2, t\Big) + \frac{n}{q}t^{-1}z_1z_2\\ &= t^{-\frac{n}{2q}}\left(\frac{1}{2}(\omega^2_{III}z_1^2 + z_2^2) + w(0)\frac{z_1^3}{3}\right) + \mathcal{O}(|\mathbf{z}|^2)\mathcal{O}(t^{-\frac{n}{q}}),\\ \hat{\mathcal{P}} &\equiv t^{\frac{3n}{2q}}\mathcal{P}\left(t^{-\frac{n}{q}}z_1, t^{-\frac{3n}{2q}}z_2, t\right) + \frac{5n}{2q}t^{-1}z_2 = t^{-\frac{n+h}{q}}\beta_n z_2 + \mathcal{O}(|\mathbf{z}|)\mathcal{O}(t^{-\frac{n+h+1}{q}}),\\ \hat{\Xi}_{III} &\equiv t^{\frac{n}{q}}\Xi_{III}(t) = \mathcal{O}(t^{-\frac{N+1}{q}}),\\ \hat{\Theta}_{III} &\equiv t^{\frac{3n}{2q}}\Theta_{III}(t) = \mathcal{O}(t^{-\frac{n+2N+2}{2q}})\end{aligned}$$

при $|\mathbf{z}| \to 0$ и $t \to \infty$, где $\omega^2_{III} = \sqrt{\Delta_n} > 0$. Рассмотрим

$$U_{III}(z_1,z_2,t) = t^{\frac{n}{2q}}\hat{\mathcal{H}}(z_1,z_2,t) - t^{-\frac{n+2h}{2q}}\frac{\beta_n}{2}z_1z_2$$

в качестве кандидата на функцию Ляпунова для системы (2.39). Легко проверить, что

$$U_{III}(z_1,z_2,t) = W_{III}(z_1,z_2) + \mathcal{O}(|\mathbf{z}|^3) + \mathcal{O}(|\mathbf{z}|^2)\mathcal{O}(t^{-\frac{n}{2q}}), \quad |\mathbf{z}| \to 0, \quad t \to \infty,$$

где $W_{III}(z_1,z_2)=(\omega_{III}^2 z_1^2+z_2^2)/2$. Производная $U_{III}(z_1,z_2,t)$ по t вдоль траекторий системы определяется выражением

$$\frac{dU_{III}}{dt}=t^{-\frac{n+h}{q}}W_{III}\left(\beta_n+\mathcal{O}(|\mathbf{z}|)+\mathcal{O}(t^{-\frac{1}{q}})+\mathcal{O}(t^{-\frac{n}{2q}})\right)+\mathcal{O}(|\mathbf{z}|)\mathcal{O}(t^{-\frac{N+1}{q}})$$

при $|\mathbf{z}|\to 0$ и $t\to\infty$. Отсюда следует, что для любых $N\geq n+h$ и $\epsilon\in(0,1)$ существуют $\rho_0>0$ и $t_0>0$ такие, что

$$\begin{gathered}(1-\epsilon)W_{III}(z_1,z_2)\leq U_{III}(z_1,z_2,t)\leq(1+\epsilon)W_{III}(z_1,z_2),\\ \frac{dU_{III}}{dt}\leq -t^{-\frac{n+h}{q}}\left((1-\epsilon)|\beta_n|W_{III}-t^{-\frac{1}{q}}B_1\sqrt{W_{III}}\right),\quad \text{если}\quad \beta_n<0,\\ \frac{dU_{III}}{dt}\geq t^{-\frac{n+h}{q}}\left((1-\epsilon)\beta_n W_{III}-t^{-\frac{1}{q}}B_1\sqrt{W_{III}}\right),\quad \text{если}\quad \beta_n>0\end{gathered}\tag{2.40}$$

для всех $|\mathbf{z}|\leq\rho_0$ и $t\geq t_0$ с некоторой постоянной $B_1>0$.

Если $\beta_n<0$, то, повторяя рассуждения доказательств 17, мы получаем, что для любого $\varepsilon\in(0,\rho_0)$ существуют $\delta_\varepsilon>0$ и $t_\varepsilon\geq t_0$ такие, что любое решение $(z_1(t),z_2(t))$ системы (2.39) с начальными данными $|\mathbf{z}(t_s)|\leq\delta_\varepsilon$, $t_s\geq t_\varepsilon$ не может выйти из окрестности $\{(z_1,z_2)\in\mathbb{R}^2:|\mathbf{z}|\leq\varepsilon\}$ при $t>t_s$. Объединяя это с (2.38), получаем устойчивость асимптотического режима $\xi_{III}^N(t)$, $\eta_{III}^N(t)$ при $\xi_n=\nu_+$.

Пусть $\beta_n>\delta_{n+h,q}(3n/q)$. Отсюда следует, что для любого $\delta\in(0,\varepsilon)$, $\varepsilon=\rho_0/2$ существует $t_*=\max\{t_0,(B_1/(\epsilon(1-\epsilon)\delta))^q\}$ такое, что

$$\begin{aligned}\frac{dU_{III}}{dt}&\geq t^{-\frac{n+h}{q}}W_{III}(z_1,z_2)\left((1-\epsilon)\beta_n-t_*^{-\frac{1}{q}}\frac{B_1}{\delta}\right)\\ &\geq t^{-\frac{n+h}{q}}(1-\epsilon)^2\beta_n W_{III}(z_1,z_2)\geq t^{-\frac{n+h}{q}}\varsigma U_{III}\end{aligned}$$

для всех $\delta^2\leq W_{III}(z_1,z_2)\leq\varepsilon^2$ и $t\geq t_*$ с $\varsigma=(1-\epsilon)^2\beta_n/(1+\epsilon)$. Интегрируя последнее неравенство при $t\geq t_s\geq t_*$ с $W_{III}(z_1(t_s),z_2(t_s))=\delta^2$ и учитывая (2.38), получаем

$$|\mathbf{y}(t)|^2\geq\frac{(1-\epsilon)\delta^2}{(1+\epsilon)B_+}t^{-\frac{3n}{q}}\exp\left(\varsigma\int\limits_{t_s}^{t}\tau^{-\frac{n+h}{q}}\,d\tau\right).$$

Выбрав $\epsilon\in(0,1)$ достаточно малым, мы видим, что существует $t_e>t_s$ такое, что $|\mathbf{y}(t_e)|\geq\varepsilon$. $\square$

Доказательство теоремы 24. Подстановка

$$z_1(t) = t^{-\frac{N-h}{q}} u_1(t), \quad z_2(t) = t^{-\frac{N-h}{q}} u_2(t)$$

в (2.39) приводит к системе

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dt} &= \partial_{u_2} \tilde{\mathcal{H}}(u_1, u_2, t) - \tilde{\Xi}_{III}(t), \\ \frac{du_2}{dt} &= -\partial_{u_1} \tilde{\mathcal{H}}(u_1, u_2, t) + \tilde{\mathcal{P}}(u_1, u_2, t) - \tilde{\Theta}_{III}(t), \end{aligned} \tag{2.41}$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{H}}(u_1, u_2, t) &\equiv t^{\frac{2(N-h)}{q}} \hat{\mathcal{H}}\left(t^{-\frac{N-h}{q}} u_1, t^{-\frac{N-h}{q}} u_2, t\right) + \frac{N-h}{q} t^{-1} u_1 u_2 \\ &= t^{-\frac{n}{2q}} \left(W_{III}(z_1, z_2) + \mathcal{O}(|\mathbf{u}|^2)\mathcal{O}(t^{-\frac{n}{2q}}) + \mathcal{O}(|\mathbf{u}|^3)\mathcal{O}(t^{-\frac{N-h}{q}})\right), \\ \tilde{\mathcal{P}}(z_1, z_2, t) &\equiv t^{\frac{N-h}{q}} \hat{\mathcal{P}}\left(t^{-\frac{N-h}{q}} u_1, t^{-\frac{N-h}{q}} u_2, t\right) + \frac{2(N-h)}{q} t^{-1} u_2 \\ &= t^{-\frac{n+h}{q}} \left(\beta_n u_2 + \mathcal{O}(|\mathbf{u}|^2)\mathcal{O}(t^{-\frac{N-h}{q}}) + \mathcal{O}(|\mathbf{u}|)\mathcal{O}(t^{-\frac{1}{q}})\right), \\ \tilde{\Xi}_{III}(t) &\equiv t^{\frac{N-h}{q}} \hat{\Xi}_{III}(t) = \mathcal{O}(t^{-\frac{n+h+1}{q}}), \\ \tilde{\Theta}_{III}(t) &\equiv t^{\frac{N-h}{q}} \hat{\Theta}_{II}(t) = \mathcal{O}(t^{-\frac{2n+h+1}{q}}) \end{aligned}$$

при $|\mathbf{u}| \to 0$ и $t \to \infty$. Рассмотрим

$$\tilde{U}_{III}(u_1, u_2, t) = t^{\frac{n}{2q}} \tilde{\mathcal{H}}(u_1, u_2, t) - t^{-\frac{n+2h}{2q}} \frac{\beta_n}{2} u_1 u_2$$

в качестве кандидата на функцию Ляпунова для системы (2.41). Тогда имеем

$$\frac{d\tilde{U}_{III}}{dt} = t^{-\frac{n+h}{q}} W_{III} \left(\beta_n + \mathcal{O}(|\mathbf{u}|)\mathcal{O}(t^{-\frac{N-h}{q}}) + \mathcal{O}(t^{-\frac{1}{q}})\right) + \mathcal{O}(|\mathbf{u}|)\mathcal{O}(t^{-\frac{n+h+1}{q}})$$

при $|\mathbf{u}| \to 0$ и $t \to \infty$. Отсюда следует, что существуют $\rho_0 > 0$ и $t_0 > 0$ такие, что

$$B_-|\mathbf{z}|^2 \le \tilde{U}_{III}(z_1, z_2, t) \le B_+|\mathbf{z}|^2, \quad \frac{d\tilde{U}_{III}}{dt} \le t^{-\frac{n+h}{q}} \left(-B_0|\mathbf{u}|^2 + t^{-\frac{1}{q}} B_1 |\mathbf{u}|\right)$$

для всех $|\mathbf{u}| \le \rho_0$ и $t \ge t_0$ с действующими параметрами $B_- = \min\{1, \omega_{III}^2\}/4$, $B_+ = \max\{1, \omega_{III}^2\}$, $B_0 = |\beta_n| B_-/2$ и некоторая постоянная $B_1 > 0$. Повторяя рассуждения доказательств из выводов 17, получаем, что для любого $\varepsilon \in$

$(0,\rho_0)$ существуют $\delta_\varepsilon > 0$ и $t_\varepsilon \geq t_0$ такие, что любое решение $(u_1(t), u_2(t))$ системы (2.41) с начальными данными $|\mathbf{u}(t_s)| \leq \delta_\varepsilon$, $t_s \geq t_\varepsilon$ не может выйти из окрестности $\{(u_1,u_2) \in \mathbb{R}^2 : |\mathbf{u}| \leq \varepsilon\}$ при $t > t_s$. Следовательно, для любого $N \geq h$ существует решение $(\xi_{III}(t), \eta_{III}(t))$ системы (2.1) такое, что $\xi_{III}(t) = \xi^N_{III}(t) + \mathcal{O}(t^{-(N-h)/q})$, $\eta_{III}(t) = \eta^N_{III}(t) + \mathcal{O}(t^{-(N-h)/q})$ при $t \to \infty$.

Доказательство асимптотической устойчивости решения $(\xi_{III}(t), \eta_{III}(t))$ проводится так же, как в теореме 18. $\square$

Доказательство теоремы 25. Легко проверить, что замена переменных

$$y_1(t) = t^{-\frac{n}{q}} z_1(t), \quad y_2(t) = t^{-\frac{n}{q}} z_2(t)$$

преобразует систему (2.37) к виду (2.39) с

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{H}} \equiv & \, t^{\frac{2n}{q}} \mathcal{H}\left(t^{-\frac{n}{q}} z_1, t^{-\frac{n}{q}} z_2, t\right) + \frac{n}{q} t^{-1} z_1 z_2 \\
= & \, \frac{z_2^2}{2}\left(1 + t^{-\frac{n}{q}} \partial_{x_2} F_n(0,0)\right) + t^{-\frac{n}{q}}\left(\omega_{III}^2 \frac{z_1^2}{2} + w(0)\frac{z_1^3}{3}\right) + \mathcal{O}(|\mathbf{z}|^2)\mathcal{O}(t^{-\frac{n+1}{q}}), \\
\hat{\mathcal{P}} = & \, t^{\frac{n}{q}} \mathcal{P}\left(t^{-\frac{n}{q}} z_1, t^{-\frac{n}{q}} z_2, t\right) + \frac{2n}{q} t^{-1} z_2 = t^{-1} z_2 \left(\hat{\beta}_n + \mathcal{O}(t^{-\frac{1}{q}})\right), \\
\hat{\Xi}_{III} \equiv & \, t^{\frac{n}{q}} \Xi_{III}(t) = \mathcal{O}(t^{-\frac{N+1}{q}}), \\
\hat{\Theta}_{III} \equiv & \, t^{\frac{n}{q}} \Theta_{III}(t) = \mathcal{O}(t^{-\frac{n+N+1}{q}})
\end{aligned}$$

при $|\mathbf{z}| \to 0$ и $t \to \infty$, где $\hat{\beta}_n = \beta_n - n/(2q) < 0$ и $\omega_{III}^2 = \sqrt{\Delta_n} > 0$. Рассмотрим

$$\hat{U}_{III}(z_1, z_2, t) := \hat{\mathcal{H}}(z_1, z_2, t) - t^{-1}\frac{\hat{\beta}_n}{2} z_1 z_2$$

в качестве кандидата на функцию Ляпунова. Производная $\hat{U}_{III}(z_1, z_2, t)$ по t вдоль траекторий системы удовлетворяет равенству:

$$\frac{d\hat{U}_{III}}{dt} = t^{-1}\left(\frac{\hat{\beta}_n}{2}\hat{W}_{III} + \mathcal{O}(z_1^3)\mathcal{O}(t^{-\frac{n}{q}})\right)(1 + \mathcal{O}(t^{-\frac{1}{q}})) + \mathcal{O}(|\mathbf{z}|)\mathcal{O}(t^{-\frac{N+1}{q}})$$

при $|\mathbf{z}| \to 0$ и $t \to \infty$, где

$$\hat{W}_{III}(z_1, z_2, t) = \frac{1}{2}\left(z_2^2 + t^{-\frac{n}{q}} \omega_{III}^2 z_1^2\right).$$

Легко видеть, что существуют $\rho_1 > 0$ и $t_1 > 0$ такие, что

$$t^{-\frac{n}{q}}\hat{B}_-|\mathbf{z}|^2 \le \frac{1}{2}\hat{W}_{III}(z_1,z_2,t) \le \hat{U}_{III}(z_1,z_2,t) \le \frac{3}{2}\hat{W}_{III}(z_1,z_2,t) \le \hat{B}_+|\mathbf{z}|^2,$$
$$\frac{d\hat{U}_{III}}{dt} \le -t^{-1}\hat{B}_0\hat{W}_{III}(z_1,z_2,t) + \hat{B}_1|\mathbf{z}|t^{-\frac{N+1}{q}}$$

для всех $|\mathbf{z}| \le \rho_1$ и $t \ge t_1$ с $\hat{B}_- = \min\{1,\omega_{III}^2\}/4$, $\hat{B}_+ = \max\{1,\omega_{III}^2\}$, $\hat{B}_0 = |\hat{\beta}_n|/2 > 0$ и некоторая константа $\hat{B}_1 > 0$. Следовательно, для любых $\kappa > 1$ и

$$0 < \varepsilon < \min\left\{1, \rho_1, \left(\frac{\hat{B}_-^2\hat{B}_0}{2\hat{B}_+\hat{B}_1}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}}, \left(\frac{\hat{B}_1}{\hat{B}_-\hat{B}_0}t_1^{-\frac{n}{q}}\right)^{\frac{1}{\kappa+1}}\right\}$$

существуют

$$\delta_\varepsilon = \varepsilon^{\kappa+1}, \quad t_\varepsilon = \varepsilon^{-\frac{(\kappa+1)q}{n}}\left(\frac{\hat{B}_1}{\hat{B}_0\hat{B}_-}\right)^{\frac{q}{n}}$$

такие, что

$$\frac{d\hat{U}_{III}}{dt} \le t^{-1}\left(-\hat{B}_0 + \frac{\hat{B}_1}{2\hat{B}_-\delta_\varepsilon}t_\varepsilon^{-\frac{n}{q}}\right)\hat{W}_{III}(z_1,z_2,t) \le 0 \tag{2.42}$$

для всех $\delta_\varepsilon \le |\mathbf{z}| \le \varepsilon$, $t \ge t_\varepsilon$ и $N \ge 2n+q-1$. Справедливы неравенства

$$\sup_{|\mathbf{z}|\le\delta_\varepsilon}\hat{U}_{III}(z_1,z_2,t) \le \hat{B}_+\delta_\varepsilon^2 < K_\varepsilon^{-\frac{n}{q}}\hat{B}_-\varepsilon^2 \le \inf_{|\mathbf{z}|=\varepsilon}\hat{U}_{III}(z_1,z_2,t)$$

при всех $t_\varepsilon \le t_s \le t \le K_\varepsilon$, где

$$K_\varepsilon = \varepsilon^{-\frac{2\kappa q}{n}}\left(\frac{\hat{B}_-}{2\hat{B}_+}\right)^{\frac{q}{n}}$$

Из последних неравенств и оценки (2.42) следует, что любое решение системы (2.39) с начальными данными $|\mathbf{z}(t_s)| \le \delta_\varepsilon$, $t_\varepsilon \le t_s < K_\varepsilon$ не может выйти из окрестности $\{(z_1,z_2)\in\mathbb{R}^2 : |\mathbf{z}| \le \varepsilon\}$ при $t_s \le t \le K_\varepsilon$. Таким образом, асимптотический режим $\xi_{III}^N(t)$, $\eta_{III}^N(t)$ устойчив на конечном, но асимптотически большом временном интервале. □

2.7. Выводы

Таким образом, исследовано влияние затухающих возмущений на автономные системы с бифуркацией центр-седло. Показано, что в зависимости от структуры и параметров возмущений качественное поведение возмущённых систем может существенно отличаться от поведения соответствующих предельных систем. В частности, при $\lambda > 0$ существуют два частных решения, стремящихся к неподвижным точкам предельной системы. Решение, соответствующее седлу, неустойчиво независимо от затухающих возмущений, в то время как другое решение может быть асимптотически устойчивым, нейтрально устойчивым или неустойчивым. В случае устойчивости существует семейство решений возмущённой системы с аналогичным долговременным поведением.

При прохождении параметра λ через бифуркационное значение центр и седло в предельной системе сливаются и исчезают. Показано, что затухающие возмущения могут нарушить такой переход. В частности, при $\lambda = 0$ возмущённая система может иметь пару различных частных решений, стремящихся к вырожденной неподвижной точке предельной системы. Эти решения в асимптотическом пределе представляют собой седло и центр. Решение типа седла всегда неустойчиво, тогда как второе решение, в зависимости от возмущений, может быть устойчивым, метастабильным или неустойчивым. В случае метастабильности траектории возмущённой системы достаточно долго остаются в окрестности частного решения, но в конечном итоге покидают её. Описаны условия, при которых такие решения не возникают, а бифуркация центр-седло сохраняется в возмущённой системе.

Примеры, представленные в разделах 2.4 и 2.5, иллюстрируют применение полученных результатов. Кроме того, условия устойчивости авторезонанса в системах с квадратично изменяющейся частотой возбуждения ранее не описывались.

Результаты главы опубликованы в [259]. Связанные результаты о неавтономных бифуркациях и асимптотических режимах в различных моделях опубликованы в [92], [249], [253], [254] и [94].

Глава 3

Устойчивость почти гамильтоновых систем с затухающими осциллирующими возмущениями

3.1. Введение

В настоящей главе исследуется влияние осциллирующих возмущений с асимптотически постоянной резонансной частотой на устойчивость гамильтоновых систем.

Структура главы следующая. В § 3.2 даётся постановка задачи и описывается класс затухающих возмущений. В § 3.3 приводятся основные результаты. В § 3.4 предлагаемая теория применяется к примерам неавтономных систем с осциллирующими и затухающими возмущениями. Обоснование результатов содержится в § 3.5. Предлагаемый метод анализа устойчивости и бифуркаций основан на замене переменных, упрощающей систему в главных членах асимптотики, и построении подходящих функций Ляпунова. Построение преобразования описано в § 3.5.1. Возможные асимптотические режимы в системе, зависящие от структуры упрощённых уравнений, описаны в § 3.5.2. Бифуркации, связанные с изменением устойчивости равновесия, обсуждаются в § 3.5.3 и § 3.5.4. Глава завершается краткими выводами.

3.2. Постановка задачи

Рассмотрим неавтономную систему двух дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_1}{dt} = \partial_{x_2} H(x_1, x_2, t), \quad \frac{dx_2}{dt} = -\partial_{x_1} H(x_1, x_2, t) + F(x_1, x_2, t), \quad t > 0. \qquad (3.1)$$

Предполагается, что функции $H(x_1,x_2,t)$ и $F(x_1,x_2,t)$ бесконечно дифференцируемы и для любого компакта $D\subset\mathbb{R}^2$ имеют место пределы

$$\lim_{t\to\infty} H(x_1,x_2,t)=H_0(x_1,x_2),\quad \lim_{t\to\infty} F(x_1,x_2,t)=0$$

для всех $(x_1,x_2)\in D$. Предельная автономная система

$$\frac{dx_1}{dt}=\partial_{x_2}H_0(x_1,x_2),\quad \frac{dx_2}{dt}=-\partial_{x_1}H_0(x_1,x_2) \tag{3.2}$$

Предполагается, что существует изолированная неподвижная точка $(0,0)$ типа центр. Без ограничения общности будем предполагать, что

$$H_0(x_1,x_2)=\frac{|\mathbf{x}|^2}{2}+\mathcal{O}(|\mathbf{x}|^3),\quad |\mathbf{x}|=\sqrt{x_1^2+x_2^2}\to 0, \tag{3.3}$$

и существуют $r_0>0$ и $E_0>0$ такие, что линии уровня $\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 : H_0(x_1,x_2)=E\}$, лежащие в $D_0=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 : |\mathbf{x}|<r_0\}$ при $E\in(0,E_0]$, определяют семейство замкнутых кривых на фазовом пространстве (x_1,x_2). Предполагается, что D_0 не содержит неподвижных точек предельной системы, отличных от $(0,0)$. Каждой замкнутой кривой соответствует периодическое решение $(x_1^0(t,E),x_2^0(t,E))$ системы (3.2) с периодом $T(E)=2\pi/\omega(E)$, где $\omega(E)\neq 0$ для всех $E\in[0,E_0]$ и $\omega(E)=1+\mathcal{O}(E)$ при $E\to 0$. Значение $E=0$ соответствует неподвижной точке $(0,0)$.

Возмущения предельной системы описываются функциями со степенной асимптотикой:

$$H(x_1,x_2,t)\sim H_0(x_1,x_2)+\sum_{k=1}^{\infty} t^{-\frac{k}{q}}H_k(x_1,x_2,S(t)), \tag{3.4}$$

$$F(x_1,x_2,t)\sim \sum_{k=1}^{\infty} t^{-\frac{k}{q}}F_k(x_1,x_2,S(t)) \tag{3.5}$$

при $t\to\infty$ для всех $(x_1,x_2)\in D_0$, где $q\in\mathbb{Z}_+=\{1,2,\dots\}$, коэффициенты $H_k(x_1,x_2,S)$, $F_k(x_1,x_2,S)$ являются 2π-периодическими относительно S и

$$S(t)=\sum_{k=0}^{q-1} s_k t^{1-\frac{k}{q}}+s_q\log t,\quad s_k=\mathrm{const},\quad s_0>0.$$

Также предполагается, что возмущения сохраняют неподвижную точку $(0,0)$:

$$\partial_{x_1}H(0,0,t)\equiv 0,\quad \partial_{x_2}H(0,0,t)\equiv 0,\quad F(0,0,t)\equiv 0,$$
$$H_k(x_1,x_2,S)=\mathcal{O}(|\mathbf{x}|^2),\quad F_k(x_1,x_2,S)=\mathcal{O}(|\mathbf{x}|),\quad |\mathbf{x}|\to 0,\quad \forall\, k\geq 1, S\in\mathbb{R},$$

и удовлетворяют условию резонанса:

$$s_0=\varkappa\omega(0) \tag{3.6}$$

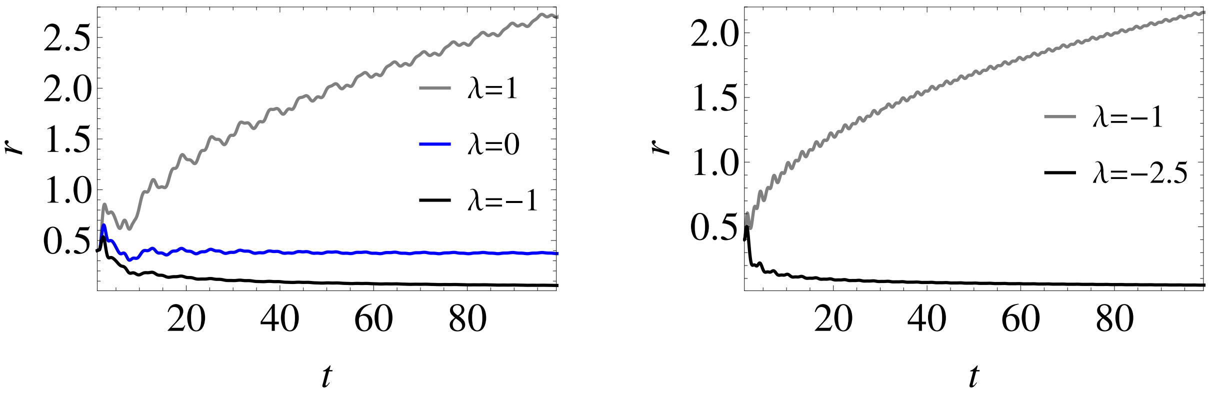
с некоторым положительным целым числом $\varkappa\neq 0$.

Простейший пример даётся уравнением

$$\frac{d^2x}{dt^2}+x=t^{-1}\Big(a\cos(s_0t+s_1\log t)x+\lambda\frac{dx}{dt}\Big),\quad a,\lambda\in\mathbb{R}. \tag{3.7}$$

Уравнение (3.7) в переменных $x_1=x$, $x_2=\dot{x}$ принимает вид (3.1) с $q=1$, $H=(|\mathbf{x}|^2-at^{-1}x^2\cos S(t))/2$ и $F=\lambda t^{-1}x_2$. Легко проверить, что невозмущённое уравнение с $a=\lambda=0$ имеет 2π-периодическое общее решение $x(t;E,\varphi)=\sqrt{2E}\cos(t+\varphi)$ с $\omega(E)\equiv 1$. Численный анализ уравнения (3.7) показывает, что затухающие возмущения могут существенно изменить поведение решений (см. рис. 3.1). В этом случае условия устойчивости тривиального решения зависят от значения параметра $\varkappa$ в (3.6). Действительно, если $\varkappa=1$, устойчивость определяется знаком коэффициента λ при затухающем диссипативном члене, как и в случае $a=0$. Однако, если $\varkappa=2$, устойчивость тривиального решения изменяется при переходе параметра λ через некоторое критическое значение λ_a. В этом случае смещение границы устойчивости происходит из-за наличия неавтономной версии параметрического резонанса [138, 139]. Более сложные примеры рассматриваются в разделе 3.4.

В общем случае поведение решений неавтономных систем вида (3.1) зависит от нелинейных членов уравнений. Целью данной главы является описание условий устойчивости системы (3.1) и выявление роли затухающих осциллирующих возмущений в соответствующих локальных бифуркациях, связанных с изменением устойчивости по Ляпунову тривиального решения $\mathbf{x}(t)\equiv 0$.



(а) $\varkappa = 1$ (б) $\varkappa = 2$

Рис. 3.1. Эволюция $r(t) \equiv |\mathbf{x}(t)|$ для решений (3.7) при $x_1(1) = 0,4$, $x_2(1) = 0$, $a = 4$ и $s_1 = 1$.

3.3. Основные результаты

Пусть $(x_1^0(t, E), x_2^0(t, E))$ — $T(E)$-периодическое решение системы (3.2) такое, что $H_0(x_1^0(t), x_2^0(t)) \equiv E$, $x_1^0(0, E) > 0$, $x_2^0(0, E) = 0$ для всех $E \in (0, E_0]$. Определим $\mathcal{D}_0 := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : H_0(x_1, x_2) \leq E_0\} \cap D_0$. Тогда справедлива

Теорема 26. *Пусть система* (3.1) *удовлетворяет условиям* (3.3), (3.4), (3.5), (3.6). *Тогда для любого* $N \in \mathbb{Z}_+$ *и* $\varepsilon \in (0, 1)$ *найдутся* $l \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$, $t_0 > 0$ *и цепочка обратимых преобразований* $(x_1, x_2) \to (E, \varphi) \to (\mathcal{E}, \theta) \to (v, \psi)$,

$$x_1(t) = x_1^0\left(\frac{\varphi(t)}{\omega(E(t))}, E(t)\right), \qquad x_2(t) = x_2^0\left(\frac{\varphi(t)}{\omega(E(t))}, E(t)\right), \tag{3.8}$$

$$E(t) = t^{-\frac{l}{q}}\mathcal{E}(t), \qquad \varphi(t) = \varkappa^{-1}S(t) + \theta(t), \tag{3.9}$$

$$v(t) = V_N(\mathcal{E}(t), \theta(t), t), \qquad \psi(t) = \Psi_N(\mathcal{E}(t), \theta(t), t), \tag{3.10}$$

где

$$\begin{aligned} V_N(\mathcal{E}, \theta, t) &= \mathcal{E} + \sum_{k=2}^{N} t^{-\frac{k}{2q}} v_k\big(\mathcal{E}, \theta, S(t)\big), \\ \Psi_N(\mathcal{E}, \theta, t) &= \theta + \sum_{k=2}^{N} t^{-\frac{k}{2q}} \psi_k\big(\mathcal{E}, \theta, S(t)\big), \end{aligned} \tag{3.11}$$

$v_k(\mathcal{E}, \theta, S)$, $\psi_k(\mathcal{E}, \theta, S)$ — *2π-периодические по θ и $2\pi\varkappa$-периодические по S,*

$$|V_N(\mathcal{E}, \theta, t) - \mathcal{E}| \leq \varepsilon\mathcal{E}, \quad |\Psi_N(\mathcal{E}, \theta, t) - \theta| \leq \varepsilon$$

при всех $\mathcal{E} \in [0, \mathcal{E}_0]$, $\theta \in \mathbb{R}$, $t \geq t_0$ *с* $\mathcal{E}_0 = E_0 t_0^{l/q}$, *такие, что для всех* $(x_1, x_2) \in \mathcal{D}_0$ *и* $t \geq t_0$ *система* (3.1) *приводится к виду*

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= \sum_{k=2}^{N} t^{-\frac{k}{2q}} \Lambda_k(v, \psi) + \tilde{\Lambda}_N(v, \psi, t), \\ \frac{d\psi}{dt} &= \sum_{k=2}^{N} t^{-\frac{k}{2q}} \Omega_k(v, \psi) + \tilde{\Omega}_N(v, \psi, t), \end{aligned} \tag{3.12}$$

где $\Lambda_k(v, \psi) = \mathcal{O}(v)$, $\Omega_k(v, \psi) = \mathcal{O}(1)$ *при* $v \to 0$ *равномерно для всех* $\psi \in \mathbb{R}$, *а функции* $\tilde{\Lambda}_N(v, \psi, t)$ *и* $\tilde{\Omega}_N(v, \psi, t)$ *определены для всех* $v \in [0, \Delta_0]$, $\psi \in \mathbb{R}$, $t \geq t_*$ *с* $\Delta_0 = (1 - \varepsilon)\mathcal{E}_0$, *являются* 2π*-периодическими по* φ *и удовлетворяют оценкам*

$$\tilde{\Lambda}_N(v, \psi, t) = \mathcal{O}(t^{-\frac{N+1}{2q}}), \quad \tilde{\Omega}_N(v, \psi, t) = \mathcal{O}(t^{-\frac{N+1}{2q}})$$

при $t \to \infty$ *равномерно для всех* $v \in [0, \Delta_0]$ *и* $\psi \in \mathbb{R}$.

Доказательство теоремы 26 содержится в § 3.5.1.

Легко видеть, что устойчивость тривиального решения $v(t) \equiv 0$ системы (3.12) обеспечивает устойчивость неподвижной точки $(0, 0)$ в системе (3.1). Однако, если $v(t) \equiv 0$ неустойчиво и $l > 0$, то из-за коэффициента затухания в (3.9) могут потребоваться дополнительные оценки или предположения, чтобы гарантировать неустойчивость равновесия в исходных переменных (x_1, x_2).

Пусть $2 \leq n, m \leq 2q$ — наименьшие целые числа, такие, что $\Lambda_n(v, \psi) \not\equiv 0$ и $\Omega_m(v, \psi) \not\equiv 0$. Выберем $N \geq n$, тогда система (3.12) принимает вид:

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{k=n}^{N} t^{-\frac{k}{2q}} \Lambda_k(v, \psi) + \tilde{\Lambda}_N(v, \psi, t), \quad \frac{d\psi}{dt} = t^{-\frac{m}{2q}} \Omega_m(v, \psi) + \tilde{\Omega}_m(v, \psi, t), \tag{3.13}$$

где

$$\tilde{\Omega}_m(v, \psi, t) \equiv \sum_{k=m+1}^{N} t^{-\frac{k}{2q}} \Omega_k(v, \psi) + \tilde{\Omega}_N(v, \psi, t).$$

Предположим, что

$$\Omega_m(v, \psi) = \omega_{m0}(\psi) + \omega_{m1}(\psi)\sqrt{v} + \mathcal{O}(v)$$

при $v \to 0$ для всех $\psi \in \mathbb{R}$, где $\omega_{m0}(\psi) \not\equiv 0$ и $\omega_{m1}(\psi)$ — 2π-периодические функции. Рассмотрим два различных случая:

$$\exists\, \psi_* \in \mathbb{R}: \quad \omega_{m0}(\psi_*) = 0, \quad \vartheta_m := \omega'_{m0}(\psi_*) < 0; \tag{3.14}$$

$$\exists\, \Delta_* \in (0, \Delta_0]: \quad \Omega_m(v, \psi) \neq 0 \quad \forall\, v \in [0, \Delta_*], \quad \psi \in \mathbb{R}. \tag{3.15}$$

Справедливы следующие утверждения:

Лемма 1. *Пусть предположение* (3.14) *выполнено. Тогда система* (3.13) *имеет частное решение* $v(t) \equiv 0$, $\psi(t) \equiv \hat{\psi}(t)$ *такое, что* $\hat{\psi}(t) = \psi_* + \mathcal{O}(t^{-\kappa})$ *при* $t \to \infty$, *где* $\kappa = \text{const} > 0$.

Лемма 2. *Пусть предположение* (3.15) *выполнено. Тогда* $|\psi(t)| \to \infty$ *при* $t \to \infty$ *для решений* (3.13) *с* $v(t) \in [0, \Delta_*]$ *при* $t \geq t_0$.

Доказательство лемм 1 и 2 содержится в § 3.5.2.

Таким образом, система (3.13) допускает по крайней мере два асимптотических режима с $v(t)$ вблизи нуля. Один класс решений имеет разность фаз $\psi(t)$, стремящуюся к константе на бесконечности, а другой — неограниченно растущую разность фаз: $|\psi(t)| \to \infty$ при $t \to \infty$. Промежуточная ситуация с ограниченной $\psi(t)$ не рассматривается. Тип решений зависит от свойств функции $\Omega_m(v, \psi)$.

Случай (3.14) соответствует фазовому захвату , тогда как случай (3.15) связан с фазовым дрейфом (см., например, [109, 122, 144, 209]). В обоих случаях устойчивость решения $v(t) \equiv 0$ и равновесия $(0, 0)$ системы (3.1) зависит от структуры первого уравнения в (3.13). Далее условия устойчивости обсуждаются отдельно для каждого асимптотического режима.

Прежде чем сформулировать основные результаты, введем ещё два предположения о структуре упрощённой системы. (3.13):

$$\begin{aligned}
&\Lambda_j(v, \psi) \equiv 0, \quad j < n, \quad \Omega_i(v, \psi) \equiv 0, \quad i < m, \\
&\Lambda_n(v, \psi) \equiv v\Big(\lambda_n(\psi) + \widetilde{\lambda}_n(v, \psi) + \delta_{n,2q}\frac{l}{q}\Big),
\end{aligned} \tag{3.16}$$

и

$$\begin{aligned}
&\Lambda_j(v,\psi)\equiv 0, \quad j<n, \quad \Omega_i(v,\psi)\equiv 0, \quad i<m,\\
&\Lambda_z(v,\psi)\equiv v^{\frac{\sigma+1}{2}}\Big(\lambda_{z,\sigma}(\psi)+\widetilde{\lambda}_{z,\sigma}(v,\psi)\Big)+v\delta_{z,2q}\frac{l}{q}, \quad n\leq z<n+d,\\
&\Lambda_{n+d}(v,\psi)\equiv v\Big(\lambda_{n+d}(\psi)+\widetilde{\lambda}_{n+d}(v,\psi)+\delta_{n+d,2q}\frac{l}{q}\Big),
\end{aligned} \tag{3.17}$$

где $\lambda_i(\psi)$, $\widetilde{\lambda}_i(v,\psi)$, $\lambda_{z,\sigma}(\psi)$, $\widetilde{\lambda}_{z,\sigma}(v,\psi)$ — 2π-периодические функции относительно ψ, d и σ — целые числа, такие, что $\sigma\geq 2$, $d\geq 1$,

$$\widetilde{\lambda}_n(v,\psi)=\mathcal{O}(v^{\frac12}), \quad \widetilde{\lambda}_{z,\sigma}(v,\psi)=\mathcal{O}(v^{\frac12}), \quad \widetilde{\lambda}_{n+d}(v,\psi)=\mathcal{O}(v^{\frac12})$$

при $v\to 0$ равномерно для всех $\psi\in\mathbb{R}$. Параметр $\sigma\geq 2$ отвечает за нелинейное поведение возмущений вблизи точки равновесия $(0,0)$.

Сначала обсудим устойчивость равновесия $(0,0)$ системы (3.1) при выполнении предположения (3.14). В этом случае устойчивость равновесия определяется свойствами частных решений $(0,\hat{\psi}(t))$ системы (3.13).

Теорема 27. *Пусть система* (3.1) *удовлетворяет* (3.3), (3.4), (3.5), (3.6), *и* $2\leq n,m\leq 2q$ *— целые числа, такие, что выполняются предположения* (3.14), (3.16).

- *Если* $n,m<2q$ *и* $\lambda_n(\psi_*)<0$, *то равновесие* $(0,0)$ *экспоненциально устойчиво.*

- *Если либо* $n<m=2q$, $\lambda_n(\psi_*)<0$, *либо* $m\leq n=2q$, $\lambda_n(\psi_*)+l/q<0$, *то равновесие* $(0,0)$ *полиномиально устойчиво.*

- *Если* $\lambda_n(\psi_*)+\widetilde{\lambda}_n(v,\psi)>0$ *для всех* $v\in[0,\Delta_0]$, *то равновесие* $(0,0)$ *неустойчиво.*

Теперь рассмотрим случай, когда $\Lambda_n(v,\psi)$ нелинейно относительно v. Обозначим $\nu=d/(q(\sigma-1))>0$. Тогда справедлива следующая

Теорема 28. *Пусть система* (3.1) *удовлетворяет* (3.3), (3.4), (3.5), (3.6), *и* $2 \le n, m \le 2q$, $\sigma \ge 2$, $d \ge 1$ — *целые числа, такие, что выполняются предположения* (3.14), (3.17).

- *Если* $n + d \le 2q$, $\lambda_{n+d}(\psi_*) + \widetilde{\lambda}_{n+d}(v, \psi_*) > 0$ *и* $\lambda_{n,\sigma}(\psi_*) + \widetilde{\lambda}_{n,\sigma}(v, \psi_*) > 0$ *для всех* $v \in [0, \Delta_0]$, *то равновесие* $(0,0)$ *неустойчиво.*

- *Если* $m \le n+d = 2q$ *и либо* $\lambda_{n+d}(\psi_*)+\nu+l/q < 0$ *либо* $\lambda_{n+d}(\psi_*)+\nu+l/q > 0$, $\lambda_{n,\sigma}(\psi_*) < 0$, *то равновесие* $(0,0)$ *полиномиально устойчиво.*

- *Если* $m \le n + d < 2q$ *и*

  - $\lambda_{n+d}(\psi_*) < 0$, *то равновесие* $(0,0)$ *экспоненциально устойчиво;*

  - $\lambda_{n+d}(\psi_*) > 0$, $\lambda_{n,\sigma}(\psi_*) < 0$, *то равновесие* $(0,0)$ *полиномиально устойчиво.*

- *Если* $n+d < m = 2q$ *и либо* $\lambda_{n+d}(\psi_*) < 0$, *либо* $\lambda_{n+d}(\psi_*) > 0$, $\lambda_{n,\sigma}(\psi_*) < 0$, *то равновесие* $(0,0)$ *полиномиально устойчиво.*

- *Если* $n + d < m < 2q$ *и*

  - $\lambda_{n+d}(\psi_*) < 0$, *то равновесие* $(0,0)$ *экспоненциально устойчиво;*

  - $\lambda_{n+d}(\psi_*) > 0$, $\lambda_{n,\sigma}(\psi_*) < 0$, *то равновесие* $(0,0)$ *полиномиально устойчиво.*

Теорема 29. *Пусть система* (3.1) *удовлетворяет условиям* (3.3), (3.4), (3.5), (3.6), *и* $2 \le n, m \le 2q$, $\sigma \ge 2$, $d \ge 1$ — *целые числа, такие, что выполняются предположения* (3.14), (3.17), $\omega(E) \not\equiv \mathrm{const}$ *и* $m \le 2q < n + d$. *Если* $\lambda_{2q,\sigma}(\psi_*) < 0$, *то равновесие* $(0,0)$ *полиномиально устойчиво.*

Доказательство теорем 27, 28, 29 содержится в § 3.5.3.

Рассмотрим теперь систему (3.1) при выполнении предположения (3.15). В этом случае устойчивость равновесия $(0,0)$ связана со свойствами однопараметрического семейства решений системы (3.13), для которых $v(t) \equiv 0$ и $|\psi(t)| \to \infty$ при $t \to \infty$.

Теорема 30. *Пусть система* (3.1) *удовлетворяет* (3.3), (3.4), (3.5), (3.6) *и* $2 \le n, m \le 2q$ *— целые числа, такие, что выполняются предположения* (3.15), (3.16).

- *Если $n < 2q$ и $\lambda_n(\psi) < 0$ для всех $\psi \in \mathbb{R}$, то равновесие $(0,0)$ экспоненциально устойчиво.*

- *Если $n = 2q$ и $\lambda_n(\psi) + l/q < 0$ для всех $\psi \in \mathbb{R}$, то равновесие $(0,0)$ полиномиально устойчиво*

- *Если $\lambda_n(\psi) > 0$, $\widetilde{\lambda}_n(v,\psi) \ge 0$ для всех $v \in [0,\Delta_0]$ и $\psi \in \mathbb{R}$, то равновесие $(0,0)$ неустойчиво.*

Рассмотрим случай, когда $\lambda_n(\psi)$ меняет знак. Определим

$$\gamma_{n,m}(\psi) \equiv \frac{\lambda_n(\psi)}{|\omega_m(\psi)|}, \qquad \widehat{\gamma}_{n,m} := \langle \gamma_{n,m}(\psi) \rangle_\psi, \qquad \widetilde{\gamma}_{n,m}(\psi) \equiv \gamma_{n,m}(\psi) - \widehat{\gamma}_{n,m},$$
$$\chi_m(\psi) \equiv \frac{1}{|\omega_m(\psi)|}, \qquad \widehat{\chi}_m := \langle \chi_m(\psi) \rangle_\psi, \qquad \widetilde{\chi}_m(\psi) \equiv \chi_m(\psi) - \widehat{\chi}_m,$$

$$Z_{n,m}(\psi) \equiv \int\limits_0^\psi \widetilde{\gamma}_{n,m}(s)\, ds, \quad X_m(\psi) \equiv \int\limits_0^\psi \widetilde{\chi}_m(s)\, ds,$$

$$Z^+_{n,m} := \max_{\psi \in [0,2\pi)} |Z_{n,m}(\psi)|, \quad X^+_m := \max_{\psi \in [0,2\pi)} |X_m(\psi)|, \quad \omega^-_m := \min_{\psi \in [0,2\pi)} |\omega_m(\psi)| > 0,$$

$\Gamma_{01} := \{(n,m) \in \mathbb{Z}^2 : 2 \le m < n = 2q\}$, $\Gamma_{10} := \{(n,m) \in \mathbb{Z}^2 : 2 \le n < m = 2q\}$, $\Gamma_{11} := \{(n,m) \in \mathbb{Z}^2 : 2 \le n < 2q, 2 \le m < 2q\} \cup \{(2q,2q)\}$. Тогда справедливо следующее утверждение:

Теорема 31. *Пусть система* (3.1) *удовлетворяет* (3.3), (3.4), (3.5), (3.6), *и* $2 \le n, m \le 2q$ *— целые числа, такие, что выполняются предположения* (3.15), (3.16).

- *Если либо* $\widehat{\gamma}_{n,m} < 0$, $(n,m) \in \Gamma_{11}$, *либо* $\widehat{\gamma}_{n,m} + Z^+_{n,m}(m-n)/(q\omega^-_m) < 0$, $(m,n) \in \Gamma_{10}$, *то равновесие* $(0,0)$ *экспоненциально устойчиво*

- *Если* $\widehat{\gamma}_{n,m} + \widehat{\chi}_m l/q < 0$ *и* $(n,m) \in \Gamma_{01}$, *то равновесие* $(0,0)$ *полиномиально устойчиво.*

- *Если* $\widehat{\gamma}_{n,m} > 0$ *и* $\widetilde{\lambda}_n(v,\psi) \geq 0$ *для всех* $v \in [0,\Delta_0]$ *и* $\psi \in \mathbb{R}$, *то равновесие* $(0,0)$ *неустойчиво.*

Замечание 2. *Из доказательства теоремы 31 следует, что если* $(n,m) \in \Gamma_{01}$, $\widehat{\gamma}_{n,m} + |\omega_m(\psi)|^{-1} l/q > 0$ *для всех* $\psi \in \mathbb{R}$ *и* $\omega(E) \not\equiv \text{const}$ $(l \neq 0)$, *то равновесие* $(0,0)$ *неустойчиво с весом* $t^{l/2q}$.

Теперь рассмотрим случай, когда выполняется предположение (3.17). Напомним, что $\nu = d/(q(\sigma-1)) > 0$.

Теорема 32. *Пусть система* (3.1) *удовлетворяет* (3.3), (3.4), (3.5), (3.6), *и* $2 \leq n,m \leq 2q$, $\sigma \geq 2$, $d \geq 1$ *— целые числа, такие, что выполняются предположения* (3.15), (3.17).

- *Если* $n+d < 2q$, $\lambda_{n+d}(\psi) < 0$ *для всех* $\psi \in \mathbb{R}$, *то равновесие* $(0,0)$ *экспоненциально устойчиво.*

- *Если* $n+d = 2q$ *и либо* $\lambda_{n+d}(\psi) + \nu + l/q < 0$, *либо* $\lambda_{n+d}(\psi) + l/q < 0$, $\lambda_{n,\sigma}(\psi) < 0$ *для всех* $\psi \in \mathbb{R}$, *то равновесие* $(0,0)$ *полиномиально устойчиво.*

- *Если* $n+d \leq 2q$, $\lambda_{n+d}(\psi) > 0$, $\lambda_{n,\sigma}(\psi) > 0$, $\widetilde{\lambda}_{n+d}(v,\psi) \geq 0$, $\widetilde{\lambda}_{n,\sigma}(v,\psi) \geq 0$ *для всех* $v \in [0,\Delta_0]$, $\psi \in \mathbb{R}$, *то равновесие* $(0,0)$ *неустойчиво.*

Теорема 33. *Пусть система* (3.1) *удовлетворяет* (3.3), (3.4), (3.5), (3.6), *и* $2 \leq n,m \leq 2q$, $\sigma \geq 2$, $d \geq 1$ *— целые числа, такие, что* $n+d \leq 2q$ *и выполняются предположения* (3.15), (3.17).

- *Если либо* $\widehat{\gamma}_{n+d,m} < 0$, $(n+d,m) \in \Gamma_{11}$, *либо* $\widehat{\gamma}_{n+d,m} + Z^+_{n+d,m}(m-n-d)/(q\omega^-_m) < 0$, $(n+d,m) \in \Gamma_{10}$, *то равновесие* $(0,0)$ *экспоненциально устойчиво.*

- *Если* $\widehat{\gamma}_{n+d,m} + \widehat{\chi}_m(\nu + l/q) < 0$ *и* $(n+d,m) \in \Gamma_{01}$, *то равновесие* $(0,0)$ *полиномиально устойчиво.*

Заметим, что теоремы 32 и 33 не дают никакой информации об устойчивости, если $\widehat{\gamma}_{n+d,m} > 0$, $\widehat{\gamma}_{n,\sigma,m} := \langle \gamma_{n,\sigma}(\psi)|\omega_m(\psi)|^{-1}\rangle_\psi < 0$ или $\lambda_{n+d}(\psi) > 0$, $\lambda_{n,\sigma}(\psi) < 0$. Оказывается, в этих случаях полиномиальная устойчивость может иметь место.

Теорема 34. *Пусть система* (3.1) *удовлетворяет условиям* (3.3), (3.4), (3.5), (3.6), *и* $2 \le n,m \le 2q$, $\sigma \ge 2$, $d \ge 1$ — *целые числа, такие, что выполняются предположения* (3.15), (3.17). *Если* $m < n+d \le 2q$, $\widehat{\gamma}_{n+d,m} > 0$ *и* $\widehat{\gamma}_{n,\sigma,m} < 0$, *то равновесие* $(0,0)$ *полиномиально устойчиво.*

Теорема 35. *Пусть система* (3.1) *удовлетворяет условиям* (3.3), (3.4), (3.5), (3.6), *и* $2 \le n,m \le 2q$, $\sigma \ge 2$, $d \ge 1$ — *целые числа, такие, что выполняются предположения* (3.15), (3.17). *Если* $n+d < m$, $\lambda_{n+d}(\psi) > 0$ *и* $\lambda_{n,\sigma}(\psi) < 0$ *для всех* $\psi \in \mathbb{R}$, *то равновесие* $(0,0)$ *полиномиально устойчиво.*

Теорема 36. *Пусть система* (3.1) *удовлетворяет условиям* (3.3), (3.4), (3.5), (3.6), *и* $2 \le n,m \le 2q$, $\sigma \ge 2$, $d \ge 1$ — *целые числа, такие, что выполняются предположения* (3.15), (3.17). *Если* $\omega'(E) \not\equiv 0$, $n+d > 2q$, $\widehat{\gamma}_{n,\sigma,m} < 0$, *то равновесие* $(0,0)$ *полиномиально устойчиво.*

Доказательство теорем 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36 содержится в § 3.5.4.

3.4. Примеры

Рассмотрим предельную систему (3.2) с $H_0(x_1,x_2) \equiv |\mathbf{x}|^2/2 - hx_1^4/4$ и $h \ge 0$. В этом случае равновесие $(0,0)$ является центром, а линии уровня

$H_0(x_1, x_2) \equiv E$ с $E \in (0, (4h)^{-1})$, лежащие в окрестности равновесия, соответствуют $T(E)$-периодическим решениям таким, что $\omega(E) = 1 - 3hE/4 + \mathcal{O}(E^2)$ при $E \to 0$.

3.4.1. Пример 1

Рассмотрим возмущённую систему в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= \partial_{x_2} H_0(x_1, x_2), \\
\frac{dx_2}{dt} &= -\partial_{x_1} H_0(x_1, x_2) + t^{-\frac{1}{2}}\big(a(S(t))x_1 + b(S(t))x_2\big)
\end{aligned} \tag{3.18}$$

при $t \geq 1$, где $S(t) \equiv t + s_1 t^{1/2} + s_2 \log t$, $a(S) \equiv a_0 + a_1 \cos S$ и $b(S) \equiv b_0 + b_1 \cos S$. Система (3.18) имеет вид (3.1) с $q = 2$ и $\varkappa = 1$. Легко проверить, что замена переменных, описанная в разделе 3.5.1, с $l = 2$, $N = 4$, $v_3 \equiv \psi_3 \equiv 0$,

$$\begin{aligned}
v_2 \equiv &-\frac{\mathcal{E}}{6}\Big(3c_0 \cos(2S + 2\theta + \delta_0) + 3c_1 \cos(S + 2\theta + \delta_1) + c_1 \cos(3S + 2\theta + \delta_1) \\
&+ 6b_1 \sin S\Big), \\
\psi_2 \equiv &\frac{1}{12}\Big(3c_0 \sin(2S + 2\theta + \delta_0) + 3c_1 \sin(S + 2\theta + \delta_1) + c_1 \sin(3S + 2\theta + \delta_1) \\
&+ 6a_1 \sin S\Big), \\
v_4 \equiv &\frac{\mathcal{E}}{144}\Big(48(a_0a_1 + b_0b_1)\cos S - 24(a_1b_0 - a_0b_1 - 3b_1s_1)\sin S \\
&+ 3(4b_1^2 - a_1^2 + 5a_1b_1)\sin(4S + 2\theta) + 12(a_1^2 - 2b_1^2)\cos 2S \\
&- 36(a_0a_1 + b_0b_1 + a_1s_1)\cos(S + 2\theta) + 36(a_1b_0 + a_0b_1 + b_1s_1)\sin(S + 2\theta) \\
&- 4(5a_0a_1 - 9b_0b_1 - a_1s_1)\cos(3S + 2\theta) \\
&+ 4(11a_0b_1 + 3a_1b_0 - b_1s_1)\sin(3S + 2\theta) \\
&- 12(2a_1^2 + 3a_0^2 - 2b_1^2)\cos(2S + 2\theta) + 12(3a_0b_0 + 4a_1b_1)\sin(2S + 2\theta)\Big),
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\psi_4 \equiv &(a_1 b_0 - a_0 b_1)\frac{\cos S}{12} - \Big(a_1 s_1 - \frac{7}{6}(a_0 a_1 + b_0 b_1)\Big)\frac{\sin S}{4} + c_1^2 \frac{\sin 2S}{24}\\
&+ \Big(a_0^2 + \frac{2}{3}a_1^2\Big)\frac{\sin(2S+2\theta)}{8} + (3a_0 b_0 + 2a_1 b_1)\frac{\cos(2S+2\theta)}{24}\\
&+ \big(a_1 b_0 + b_1(2a_0 + s_1)\big)\frac{\cos(S+2\theta)}{8} + a_1(3a_0 + s_1)\frac{\sin(S+2\theta)}{8}\\
&+ a_1 b_1 \frac{\cos(2S+4\theta)}{16} + (a_1^2 - b_1^2)\frac{\sin(2S+4\theta)}{32} + a_1(b_1 + a_1)\frac{\sin(4S+2\theta)}{96}\\
&+ a_1 b_1 \frac{\cos(6S+4\theta)}{144} + (a_0 a_1 - b_0 b_1)\frac{\sin(3S+4\theta)}{16} + (a_1^2 - b_1^2)\frac{\sin(6S+4\theta)}{288}\\
&+ \Big(a_1 b_0 + \frac{b_1}{3}(2a_0 - s_1)\Big)\frac{\cos(3S+2\theta)}{24} + a_1(5a_0 - s_1)\frac{\sin(3S+2\theta)}{72}\\
&+ (a_1 b_0 + a_0 b_1)\frac{\cos(3S+4\theta)}{16} + \Big(a_0 b_0 + \frac{2}{3}a_1 b_1\Big)\frac{\cos(4S+4\theta)}{16}\\
&+ (a_1 b_0 + a_0 b_1)\frac{\cos(5S+4\theta)}{48} + (a_0 a_1 - b_0 b_1)\frac{\sin(5S+4\theta)}{48}\\
&+ (a_0 a_1 - b_0 b_1)\frac{\sin(3S+4\theta)}{16} + \Big((a_0^2 - b_0^2) + \frac{2}{3}(a_1^2 - b_1^2)\Big)\frac{\sin(4S+4\theta)}{32}
\end{aligned}
$$

превращает систему (3.18) в следующую:

$$
\begin{aligned}
\frac{dv}{dt} &= t^{-\frac{1}{2}}\Lambda_2(v,\psi) + t^{-1}\Lambda_4(v,\psi) + \tilde{\Lambda}_4(v,\psi,t),\\
\frac{d\psi}{dt} &= t^{-\frac{1}{2}}\Omega_2(v,\psi) + t^{-1}\Omega_4(v,\psi) + \tilde{\Omega}_4(v,\psi,t),
\end{aligned} \tag{3.19}
$$

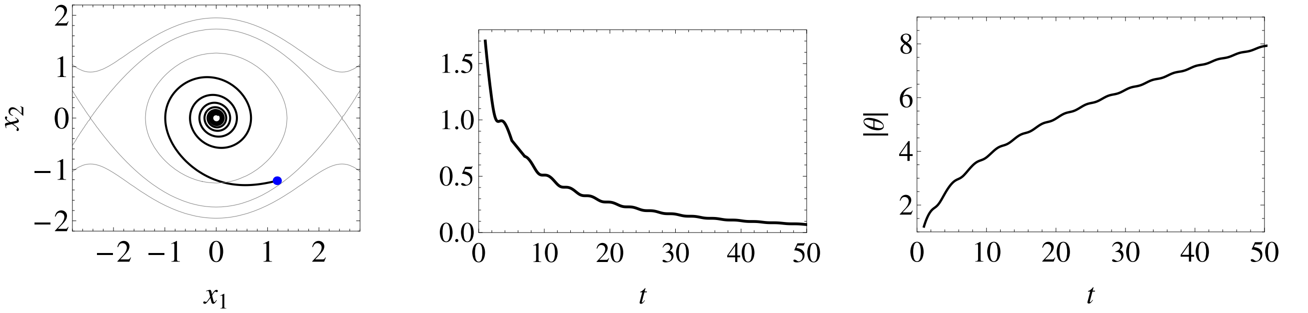
где

$$
\begin{aligned}
&\Lambda_2 \equiv b_0 v, \quad \Lambda_4 \equiv \frac{v}{4}\Big(4 - a_1 c_1 \sin(2\psi + \delta_1)\Big), \quad \Omega_2 \equiv -\frac{1}{2}(s_1 + a_0),\\
&\Omega_4 \equiv -s_2 - \frac{1}{24}\Big(3c_0^2 + 2c_1^2 + 3a_1 c_1 \cos(2\psi + \delta_1)\Big) - \frac{3h}{4}v,\\
&c_0 = \sqrt{a_0^2 + b_0^2}, \quad c_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}, \quad \delta_0 = \arccos\frac{a_0}{c_0}, \quad \delta_1 = \arccos\frac{a_1}{c_1},
\end{aligned}
$$

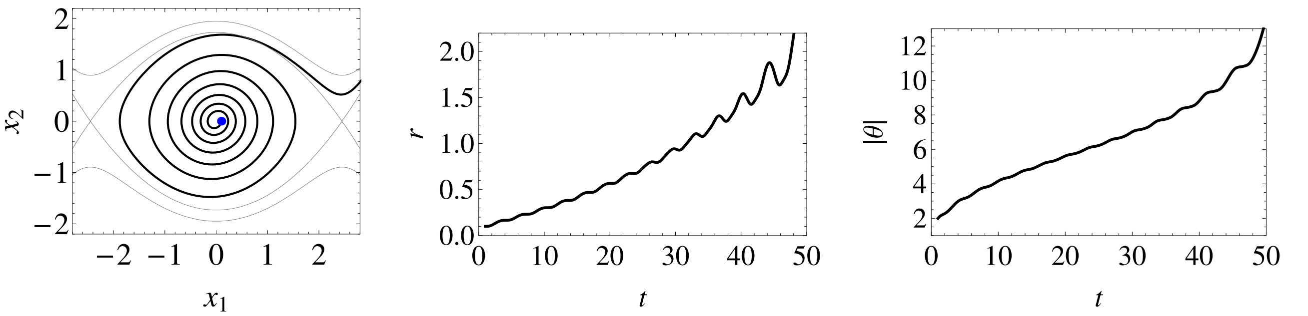
$\tilde{\Lambda}_4 = \mathcal{O}(t^{-3/2})$, $\tilde{\Omega}_4 = \mathcal{O}(t^{-3/2})$ при $t \to \infty$ для всех $v \in [0, \Delta_0]$ и $\psi \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим несколько возможных случаев.

(I) Пусть $s_1 + a_0 \neq 0$. Если $b_0 \neq 0$, то система (3.19) удовлетворяет уравнениям (3.15) и (3.16) при $n = m = 2 < 2q$, $\lambda_2(\psi) \equiv b_0$. В этом случае возникает дрейф фаз: $|\psi(t)| \to \infty$ при $t \to \infty$, и применима теорема 30. Следовательно, равновесие $(0, 0)$ экспоненциально устойчиво, если $b_0 < 0$, и неустойчиво, если $b_0 > 0$ (см. рис. 3.2). Если $b_0 = 0$, то система (3.19) удовлетворяет условиям теоремы 31 при $n = 4 = 2q$, $m = 2$ и $\widehat{\gamma}_{4,2} = 0$. Из замечания 2 следует, что положение равновесия $(0, 0)$ системы (3.18) по крайней мере неустойчиво с весом $t^{1/2}$.



(а) $b_0 = -0.5$



(б) $b_0 = 0.5$

Рис. 3.2. Эволюция $(x_1(t), x_2(t))$, $r(t)$, $|\theta(t)|$ для решений (3.18) при $h = 1/6$, $a_0 = a_1 = b_1 = s_2 = 0$, $s_1 = 1$, где $x_1(t) = r(t)\cos(\theta(t) + S(t))$, $x_2(t) = -r(t)\sin(\theta(t) + S(t))$. Точки соответствуют начальным данным $(x_1(1), x_2(1))$. Серые сплошные кривые соответствуют линиям уровня $H_0(x_1, x_2)$.

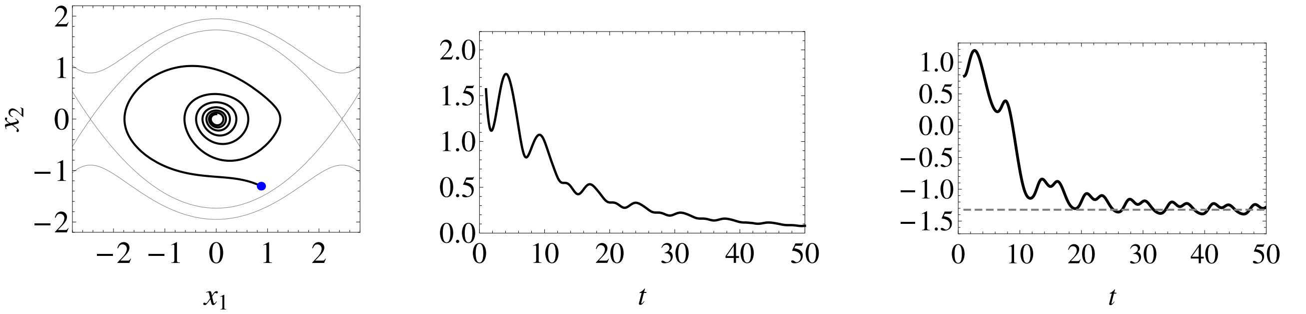
(II) Пусть $s_1 + a_0 = 0$, $a_1 > 0$ и

$$-\frac{1}{24}\big(3a_1c_1 + 3c_0^2 + 2c_1^2\big) < s_2 < \frac{1}{24}\big(3a_1c_1 - 3c_0^2 - 2c_1^2\big). \qquad (3.20)$$

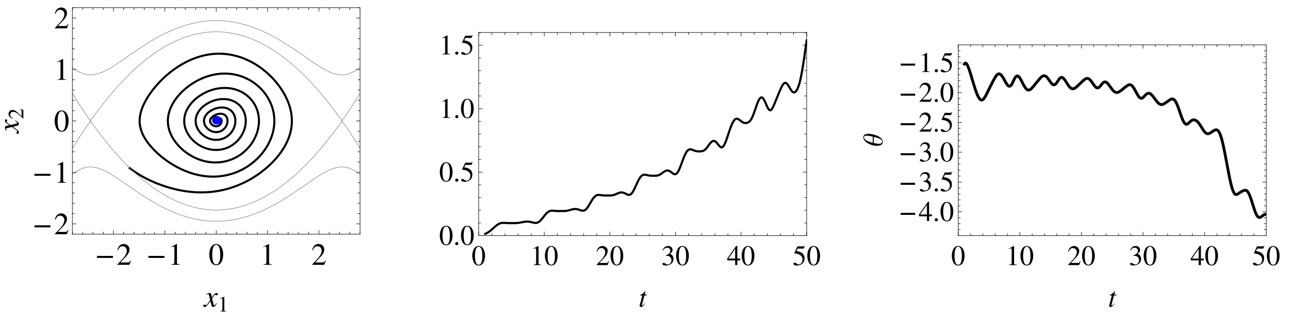
В этом случае $\Omega_2 \equiv 0$ и Ω_4 удовлетворяют (3.14) с

$$\psi_* = -\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{24s_2 + 3c_0^2 + 2c_1^2}{3a_1c_1}\right) - \frac{\delta_1}{2} + \pi j, \quad j \in \mathbb{Z},$$
$$\vartheta_4 = \frac{a_1c_1}{4}\sin(2\psi_* + \delta_1) < 0.$$

Если $b_0 \neq 0$, система (3.19) удовлетворяет условиям теоремы 27 с $n = 2$, $m = 4 = 2q$, $\lambda_2(\psi_*) \equiv b_0$. При этом происходит фазовый захват и устойчивость равновесия $(0,0)$ зависит от знака b_0 (см. рис. 3.3). Если $b_0 = 0$, система (3.19) удовлетворяет условиям теоремы 27 с $n = m = 4 = 2q$ и $\lambda_4(\psi_*) = -\vartheta_4 > 0$. Следовательно, равновесие $(0,0)$ неустойчиво. Заметим, что если $h = 0$, то $\omega(E) \equiv 1$, $l = 0$ и $v(t) \sim t^{|\vartheta_4|}$ при $t \to \infty$ (см. рис. 3.4).



(а) $b_0 = -0.6$



(б) $b_0 = 0.6$

Рис. 3.3. Эволюция $(x_1(t), x_2(t))$, $r(t)$, $\theta(t)$ для решений (3.18) при $h = 1/6$, $a_0 = a_1 = 0.8$, $b_1 = 0.6$, $s_1 = -0.8$, $s_2 = -1/6$, где $x_1(t) = r(t)\cos(\theta(t)+S(t))$, $x_2(t) = -r(t)\sin(\theta(t)+S(t))$. Точки соответствуют начальным данным $(x_1(1), x_2(1))$. Серые сплошные кривые соответствуют линиям уровня $H_0(x_1,x_2)$. Серая пунктирная кривая соответствует $\theta = \psi_*$, где $\psi_* \approx -1,322$.

(III) Пусть $s_1 + a_0 = 0$, $a_1 > 0$ и предположение (3.20) не выполняется, так что $|24 s_2 + 3c_0^2 + 2c_1^2| > 3a_1 c_1$. Тогда из теоремы 30 следует, что устойчивость положения равновесия $(0,0)$ определяется знаком b_0 (см. рис. 3.5).

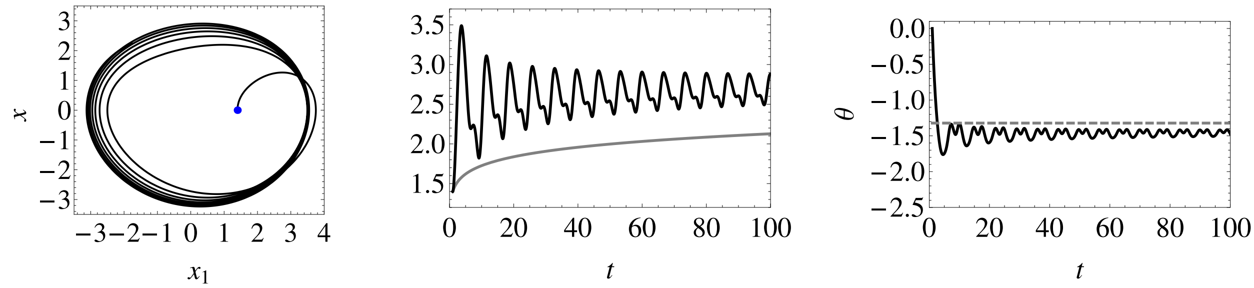


Рис. 3.4. Эволюция $(x_1(t), x_2(t))$, $r(t)$, $\theta(t)$ для решений (3.18) при $h = 0$, $a_0 = 1$, $a_1 = 0.8$, $b_0 = 0$, $b_1 = 0.6$, $s_1 = -1$, $s_2 = -1/6$, где $x_1(t) = r(t)\cos(\theta(t) + S(t))$, $x_2(t) = -r(t)\sin(\theta(t) + S(t))$. Точка соответствует начальным данным $(x_1(1), x_2(1))$. Серая сплошная кривая соответствует $r = r(1)t^{|\vartheta_4|/2}$. Серая пунктирная кривая соответствует $\theta = \psi_*$, где $\psi_* \approx -1,322$.

3.4.2. Пример 2

Рассмотрим аналогичную неавтономную систему, но с другой фазой возмущения:

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= \partial_{x_2} H_0(x_1, x_2),\\
\frac{dx_2}{dt} &= -\partial_{x_1} H_0(x_1, x_2) + t^{-\frac{1}{2}}\Big(a(S(t))x_1 + b(S(t))x_2\Big), \quad t \geq 1,
\end{aligned} \tag{3.21}$$

$S(t) \equiv 2t + s_1 t^{1/2} + s_2 \log t$, $a(S) \equiv a_0 + a_1 \cos S$, $b(S) \equiv b_0 + b_1 \cos S$. Эта система имеет вид (3.1) с $q = 2$ и $\varkappa = 2$. При преобразовании, описанном в разделе 3.5.1 с $l = 1$, $N = 2$,

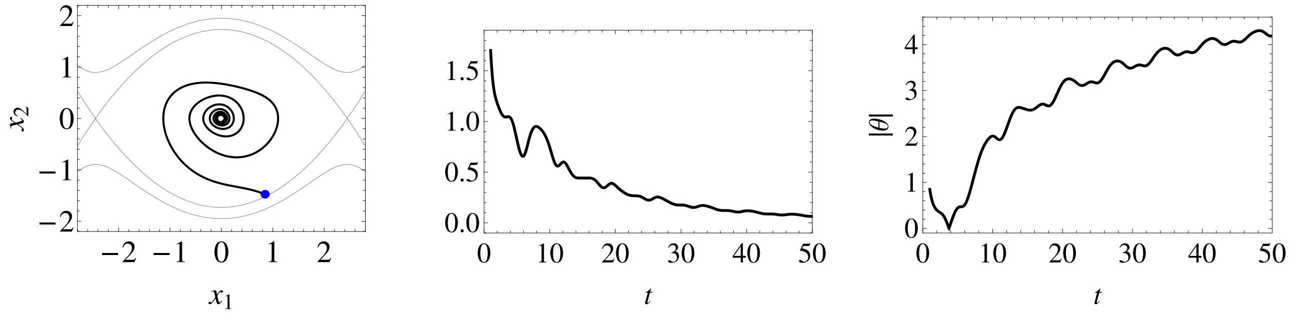
$$\begin{aligned}
v_2 &= -\frac{\mathcal{E}}{8}\Big(4c_0\cos(S + 2\theta + \delta_0) + c_1\cos(2S + 2\theta + \delta_1) + 4b_1 \sin S\Big),\\
\psi_2 &= \frac{1}{16}\Big(4c_0\sin(S + 2\theta + \delta_0) + c_1\sin(2S + 2\theta + \delta_1) + 4a_1 \sin S\Big),
\end{aligned}$$

система (3.21) приводится к следующей:

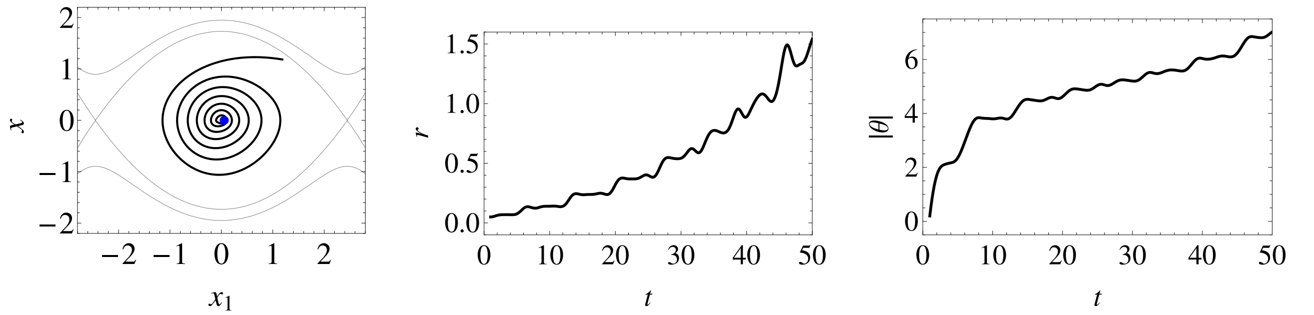
$$\frac{dv}{dt} = t^{-\frac{1}{2}}\Lambda_2(v, \psi) + \tilde{\Lambda}_2(v, \psi, t), \quad \frac{d\psi}{dt} = t^{-\frac{1}{2}}\Omega_2(v, \psi) + \tilde{\Omega}_2(v, \psi, t),$$

где

$$\begin{aligned}
\Lambda_2(v, \psi) &\equiv \Big(b_0 - \frac{c_1}{2}\sin(2\psi + \delta_1)\Big)v,\\
\Omega_2(v, \psi) &\equiv -\frac{1}{4}\Big(2a_0 + s_1 + c_1\cos(2\psi + \delta_1) + 3hv\Big),
\end{aligned}$$



(а) $b_0 = -0.6$



(б) $b_0 = 0.6$

Рис. 3.5. Эволюция $(x_1(t), x_2(t))$, $r(t)$, $|\theta(t)|$ для решений (3.18) при $h = 1/6$, $a_0 = a_1 = 0.8$, $b_1 = 0.6$, $s_1 = -0.8$, $s_2 = 1$, где $x_1(t) = r(t)\cos(\theta(t) + S(t))$, $x_2(t) = -r(t)\sin(\theta(t) + S(t))$. Точки соответствуют начальным данным $(x_1(1), x_2(1))$. Серые сплошные кривые соответствуют линиям уровня $H_0(x_1, x_2)$.

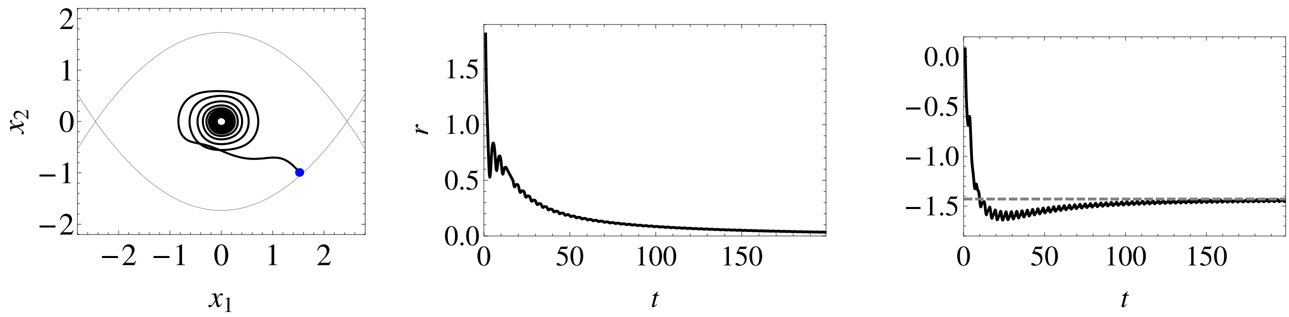
и $\tilde{\Lambda}_2 = \mathcal{O}(t^{-1})$, $\tilde{\Omega}_2 = \mathcal{O}(t^{-1})$ при $t \to \infty$ равномерно для всех $v \in [0, \Delta_0]$, $\psi \in \mathbb{R}$.

Если $-c_1 - 2a_0 < s_1 < c_1 - 2a_0$, то Ω_2 удовлетворяет (3.14) с

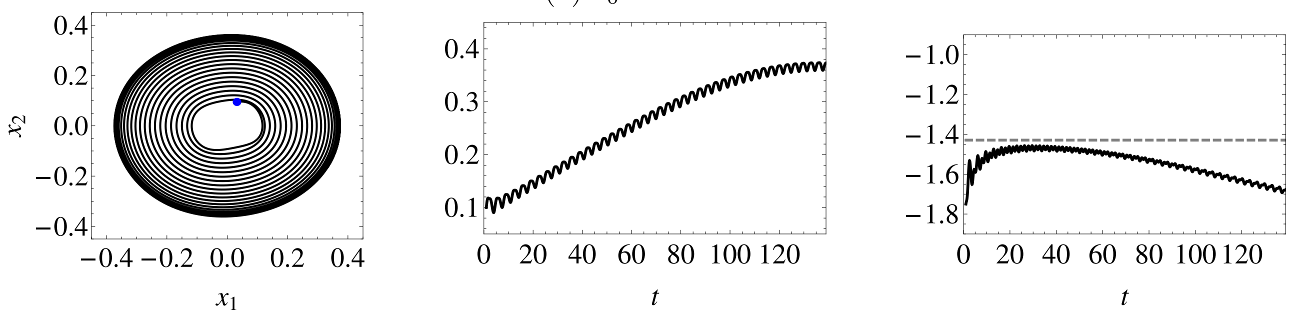
$$\psi_* = -\frac{1}{2}\arccos\Big(-\frac{2a_0 + s_1}{c_1}\Big) - \frac{\delta_1}{2} + \pi j, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad \vartheta_2 = \frac{c_1}{2}\sin(2\psi_* + \delta_1) < 0.$$

В этом случае $\lambda_2(\psi_*) = b_0 - \vartheta_2$. Следовательно, из теоремы 27 следует, что равновесие $(0,0)$ экспоненциально устойчиво, если $b_0 - \vartheta_2 < 0$, и неустойчиво, если $b_0 - \vartheta_2 > 0$. (см. рис. 3.6).

Если $s_1 < -c_1 - 2a_0$ или $s_1 > c_1 - 2a_0$, то система (3.4.2) удовлетворяет условиям теоремы 31 с $n = m = 2 < 2q$, $\widehat{\gamma}_{2,2} = b_0\widehat{\chi}_2$ и $\widehat{\chi}_2 := \langle|\Omega_2(0,\psi)|^{-1}\rangle_\psi > 0$. Следовательно, устойчивость равновесия $(0,0)$ определяется знаком b_0 (см. рис. 3.7).



(а) $b_0 = -0.6$



(б) $b_0 = -0.2$

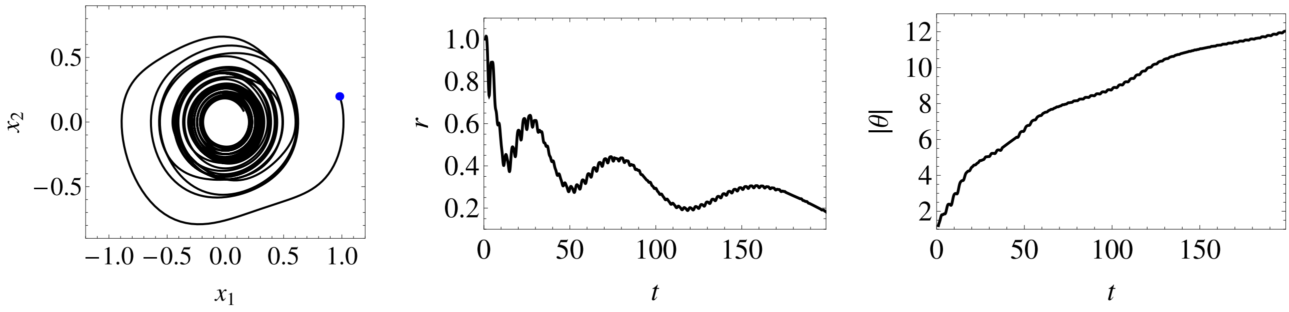
Рис. 3.6. Эволюция $(x_1(t), x_2(t))$, $r(t)$, $\theta(t)$ для решений (3.21) при $h = 1/6$, $a_0 = a_1 = 0.8$, $b_1 = 0.6$, $s_1 = -1$, $s_2 = 0$, где $x_1(t) = r(t)\cos(\theta(t) + S(t)/2)$, $x_2(t) = -r(t)\sin(\theta(t) + S(t)/2)$. Точки соответствуют начальным данным $(x_1(1), x_2(1))$. Серые сплошные кривые соответствуют линиям уровня $H_0(x_1, x_2)$. Серые пунктирные кривые соответствуют $\theta = \psi_*$, где $\psi_* \approx -1,4289$.

3.4.3. Пример 3

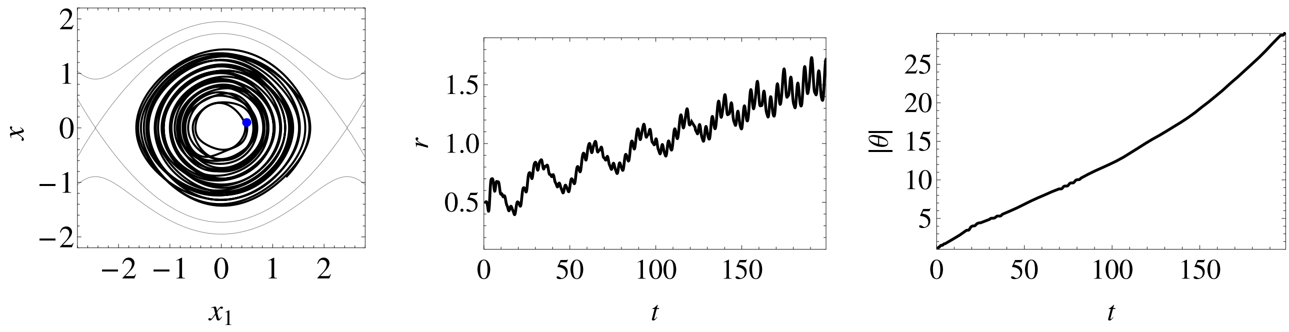
Наконец, рассмотрим немного более сложную систему:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \partial_{x_2} H_0(x_1, x_2), \\ \frac{dx_2}{dt} &= -\partial_{x_1} H_0(x_1, x_2) + t^{-\frac{1}{4}} z(S(t)) x_1^2 x_2 + t^{-\frac{1}{2}} a(S(t)) x_1 + t^{-1} b(S(t)) x_2 \end{aligned} \tag{3.22}$$

при $t \geq 1$ с $S(t) \equiv t + s_2 t^{\frac{1}{2}} + s_4 \log t$, $z(S) \equiv z_0 + z_1 \cos S$, $a(S) \equiv a_0 + a_1 \cos S$ и $b(S) \equiv b_0 + b_1 \cos S$. Ясно, что система (3.22) имеет вид (3.1) с $q = 4$ и $\varkappa = 1$. Преобразование, описанное в разделе 3.5.1 с $l = 2$, $N = 8$ и и $v_k \equiv \psi_k \equiv 0$ при



(а) $b_0 = -0.1$



(б) $b_0 = 0.1$

Рис. 3.7. Эволюция $(x_1(t), x_2(t))$, $r(t)$, $|\theta(t)|$ для решений (3.21) при $h = 1/6$, $a_0 = a_1 = 0.8$, $b_1 = 0.6$, $s_1 = s_2 = 0$, где $x_1(t) = r(t)\cos(\theta(t) + S(t)/2)$, $x_2(t) = -r(t)\sin(\theta(t) + S(t)/2)$. Точки соответствуют начальным данным $(x_1(1), x_2(1))$. Серые сплошные кривые соответствуют линиям уровня $H_0(x_1, x_2)$.

$k \in \{2, 3, 5, 7\}$,

$$
\begin{aligned}
v_4 \equiv& -\frac{\mathcal{E}}{6}\Big(3a_0\cos(2S + 2\theta) + 3a_1\cos(S + 2\theta) + a_1\cos(3S + 2\theta)\Big),\\
\psi_4 \equiv& \frac{1}{12}\Big(6a_1\sin S + 3a_0\sin(2S + 2\theta) + 3a_1\sin(S + 2\theta) + a_1\sin(3S + 2\theta)\Big),\\
v_6 \equiv& \frac{\mathcal{E}^2}{2}\Big(\frac{z_0}{4}\sin(4S + 4\theta) - z_1\sin S + \frac{z_1}{6}\sin(3S + 4\theta) + \frac{z_1}{10}\sin(5S + 4\theta)\Big),\\
\psi_6 \equiv& \frac{\mathcal{E}}{4}\Big(\frac{z_0}{4}(8\cos^4(S + \theta) - 3) + \frac{z_1}{12}(4\cos(3S + 2\theta) + \cos(3S + 4\theta))\\
& + \frac{z_1}{10}\cos(5S + 4\theta) + z_1\cos(S + 2\theta)\Big),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
v_8 \equiv & \frac{\mathcal{E}}{12}\Big(4a_0a_1\cos S + a_1^2\cos 2S - 9a_0a_1\cos(S+2\theta) - 3a_1s_2\cos(S+2\theta)\\
& - b_1\sin S + 6b_1\sin(S+2\theta) - \frac{a_1^2}{4}\cos(4S+2\theta)\\
& - 3a_0^2\cos(2S+2\theta) - 2a_1^2\cos(2S+2\theta) - \frac{5}{3}a_0a_1\cos(3S+2\theta)\\
& + 6b_0\sin(2S+2\theta) + 2b_1\sin(3S+2\theta) + \frac{a_1s_2}{3}\cos(3S+2\theta)\Big)\\
& - \frac{h\mathcal{E}^2}{16}\Big(11a_1\cos(S-2\theta) + 5a_0\cos(2S+2\theta) + a_1\cos(3S+2\theta)\\
& - a_0\cos(4S+4\theta) - \frac{2a_1}{5}\cos(5S+4\theta) - \frac{2a_1}{3}\cos(3S+4\theta)\Big),\\
\psi_8 \equiv & \frac{b_0}{4}\cos(2S+2\theta) + \frac{b_1}{4}\cos(S+2\theta) + \frac{b_1}{12}\cos(3S+2\theta) + \frac{7a_0a_1}{24}\sin S\\
& + \frac{3a_0a_1}{8}\sin(S+2\theta) + \frac{a_1^2}{24}\sin(2S) + \frac{a_1s_2}{8}\sin(S+2\theta)\\
& + \frac{a_1^2}{32}\sin(2S+4\theta) + \frac{5a_0a_1}{72}\sin(3S+2\theta) - \frac{a_1s_2}{72}\sin(3S+2\theta)\\
& + \frac{a_0a_1}{16}\sin(3S+4\theta) + \frac{a_0^2}{21}\sin(4S+4\theta) + \frac{a_1^2}{48}\sin(4S+4\theta)\\
& + \frac{a_0^2}{8}\sin(2S+2\theta) + \frac{a_0a_1}{48}\sin(5S+4\theta)\\
& - \frac{a_1s_2}{4}\sin S + \frac{a_1^2}{12}\sin(2S+2\theta) + \frac{a_1^2}{288}\sin(6S+4\theta) + \frac{a_1^2}{96}\sin(4S+2\theta)\\
& + \frac{h\mathcal{E}}{8}\Big(3a_1\sin S + 7a_1\sin(S+2\theta) + 4a_0\sin(2S+2\theta) + a_1\sin(3S+2\theta)\\
& - \frac{a_1}{6}\sin(3S+4\theta) - \frac{a_0}{4}\sin(4S+4\theta) - \frac{a_1}{10}\sin(5S+4\theta)\Big),
\end{aligned}
$$

приводит систему (3.22) к виду

$$
\frac{dv}{dt} = \sum_{k=4}^{8} t^{-\frac{k}{8}}\Lambda_k(v,\psi) + \tilde\Lambda_8(v,\psi,t), \quad \frac{d\psi}{dt} = \sum_{k=4}^{8} t^{-\frac{k}{8}}\Omega_k(v,\psi) + \tilde\Omega_8(v,\psi,t), \quad (3.23)
$$

где $\Lambda_4 \equiv \Lambda_5 \equiv \Lambda_7 \equiv \Omega_5 \equiv \Omega_7 \equiv 0$,

$$
\Lambda_6 \equiv \frac{z_0}{2}v^2, \quad \Lambda_8 \equiv \frac{v}{4}\Big(2 + 4b_0 - a_1^2\sin 2\psi\Big), \quad \Omega_4 \equiv -\frac{1}{2}(s_2 + a_0) - \frac{3h}{4}v,
$$

$$
\Omega_6 \equiv -\frac{375h^3}{256}v^3, \quad \Omega_8 \equiv -s_4 - \frac{1}{24}\Big(3a_0^2 + 2a_1^2 + 3a_1^2\cos 2\psi\Big) - \frac{3a_0h}{8}v - \frac{375h^3}{256}v^3,
$$

и $\tilde\Lambda_8 = \mathcal{O}(t^{-5/4})$, $\tilde\Omega_8 = \mathcal{O}(t^{-5/4})$ при $t \to \infty$ равномерно для всех $v \in [0, \Delta_0]$, $\psi \in \mathbb{R}$. Мы видим, что система (3.23) удовлетворяет (3.17) при $n = 6$, $d = 2$, $\sigma = 3$, $\lambda_{n,\sigma}(\psi) \equiv z_0/2$, $\lambda_{n+d}(\psi) \equiv (2 + 4b_0 - a_1^2\sin 2\psi)/2$.

Рассмотрим несколько возможных случаев.

(I) Пусть $s_2 + a_0 \neq 0$. Тогда условие (3.15) выполняется при $m = 4$, и в системе (3.1) возникает режим дрейфа фазы. Если $2+4b_0-a_1^2 > 0$ и $z_0 > 0$, то из теоремы 32 следует, что равновесие $(0,0)$ неустойчиво (см. рис. 3.8). Применяя теорему 33 с $(n+d,m) \in \Gamma_{01}$, заключаем, что если $b_0 + 5/4 < 0$, то равновесие $(0,0)$ полиномиально устойчиво (см. рис. 3.9, а). Если $b_0 + 1/2 > 0$ и $z_0 < 0$, то полиномиальная устойчивость с асимптотической оценкой $x^2(t) + y^2(t) \sim 2R_* t^{-\nu - l/q}$ при $t \to \infty$ следует из теоремы 34, где $\nu = d/(q(\sigma-1)) = 1/4$, а параметр R_* определяется величиной (3.51) (см. рис. 3.9, б).

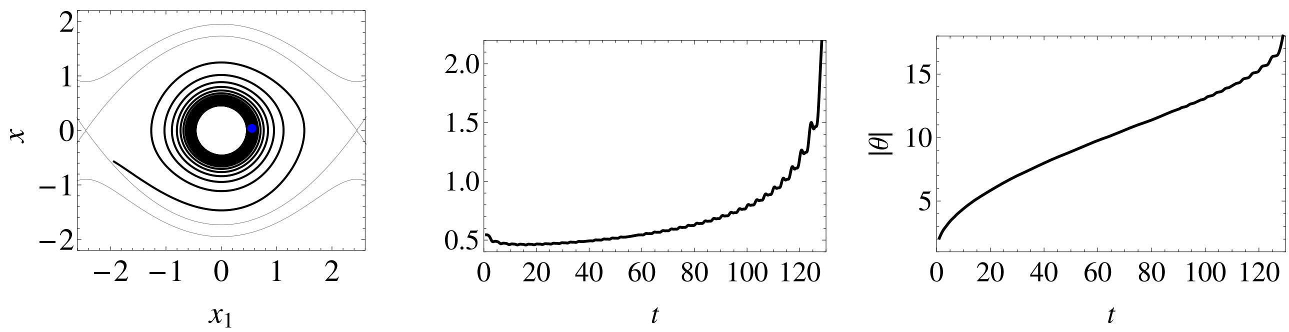


Рис. 3.8. Эволюция $(x_1(t), x_2(t))$, $r(t)$, $|\theta(t)|$ для решений (3.22) при $h = 1/6$, $b_0 = -1/4$, $z_0 = 0.6$, $s_2 = 1$, $a_0 = a_1 = b_1 = z_1 = s_4 = 0$, где $x_1(t) = r(t)\cos(\theta(t) + S(t))$, $x_2(t) = -r(t)\sin(\theta(t)+S(t))$. Точка соответствует начальным данным $(x_1(1), x_2(1))$. Серые сплошные кривые соответствуют линиям уровня $H_0(x_1, x_2)$.

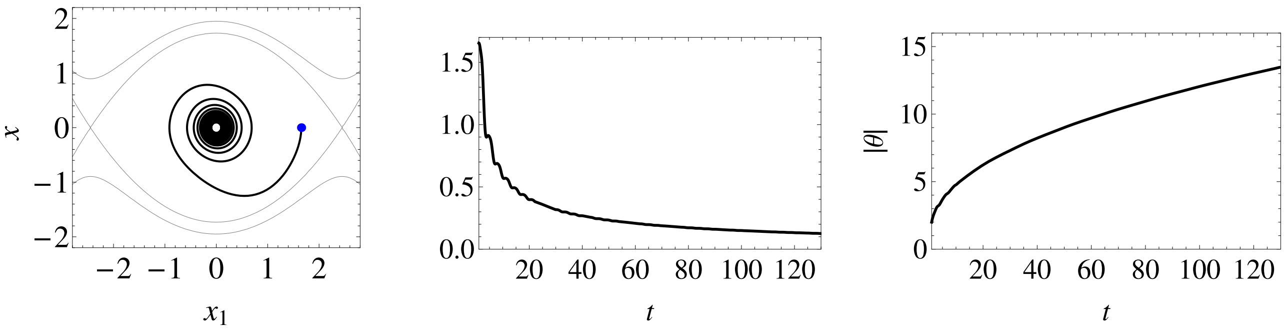
(II) Пусть $s_2 + a_0 = 0$, $a_1 > 0$ и $h = 0$. В этом случае $\omega(E) \equiv 1$, $l = 0$ и $m = 8$. Если

$$-\frac{5a_1^2 + 3a_0^2}{24} < s_4 < \frac{a_1^2 - 3a_0^2}{24} \tag{3.24}$$

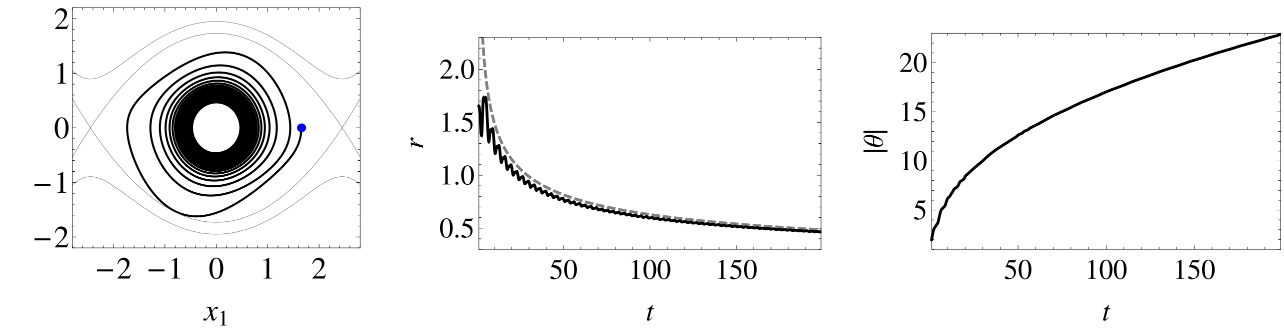
тогда Ω_8 удовлетворяет условию (3.14) с

$$\psi_* = -\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{24s_4 + 3a_0^2 + 2a_1^2}{3a_1^2}\right) + \pi j, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad \vartheta_8 = \frac{a_1^2}{4}\sin 2\psi_* < 0.$$

Следовательно, если либо $b_0 - \vartheta_8 + 5/4 < 0$, либо $b_0 - \vartheta_8 + 5/4 > 0$, $z_0 < 0$, то, применяя теорему 28 при $n + d = m = 2q$, получаем полиномиальную устойчивость равновесия $(0,0)$ в системе (3.1) (см. рис. 3.10, а). Если $b_0 - \vartheta_8 + 1/2 > 0$ и $z_0 > 0$, то равновесие неустойчиво (см. рис. 3.10, б).



(а) $b_0 = -1.4$, $z_0 = 0.6$

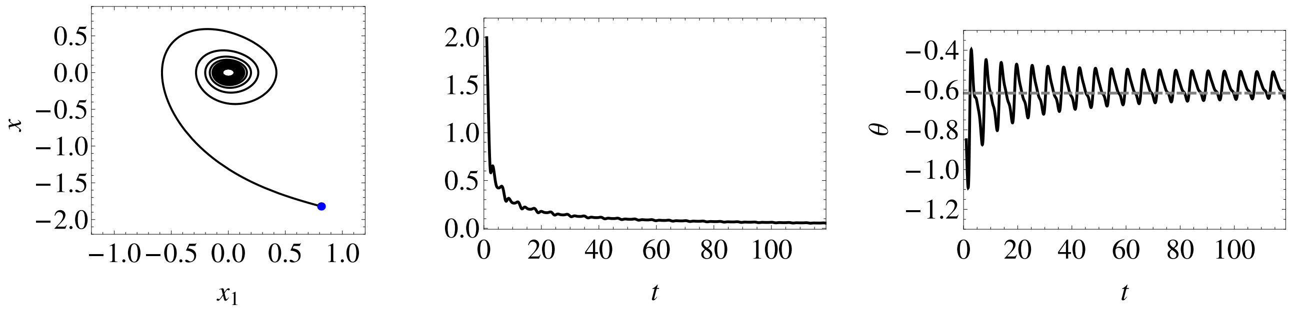


(б) $b_0 = 1$, $z_0 = -0.6$

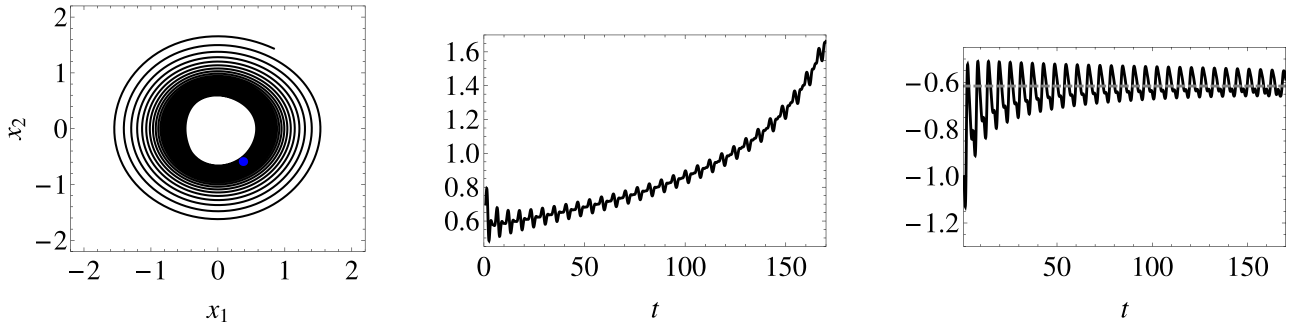
Рис. 3.9. Эволюция $(x_1(t), x_2(t))$, $r(t)$, $|\theta(t)|$ для решений (3.22) при $h = 1/6$, $s_2 = 1$, $a_0 = a_1 = b_1 = z_1 = s_4 = 0$, где $x_1(t) = r(t)\cos(\theta(t) + S(t))$, $x_2(t) = -r(t)\sin(\theta(t) + S(t))$. Точки соответствуют начальным данным $(x_1(1), x_2(1))$. Серые сплошные кривые соответствуют линиям уровня $H_0(x_1, x_2)$. Серая пунктирная кривая соответствует $r = 2R_* t^{-\nu - l/q}$.

(III) Пусть $s_2 + a_0 = 0$, $h = 0$ и предположение (3.24) не выполняется, так что $|24s_4 + 3a_0^2 + 2a_1^2| > 3a_1^2$, тогда Ω_8 удовлетворяет (3.15). Из теоремы 32 следует, что положение равновесия $(0, 0)$ системы (3.1) неустойчиво, если $2 + 4b_0 - a_1^2 > 0$ и $z_0 > 0$ (см. рис. 3.11, а). Применяя теорему 33, получаем экспоненциальную устойчивость, если $\widehat{\gamma}_{8,8} = (b_0 + 1/2)\widehat{\chi}_8 < 0$, где $\widehat{\chi}_8 := \langle |\Omega_8(0, \psi)|^{-1} \rangle_\psi > 0$ (см. рис. 3.11, б).

3.5. Обоснование результатов



(a) $b_0 = -1.5$, $z_0 = 0$



(б) $b_0 = -0.2$, $z_0 = 0.2$

Рис. 3.10. Эволюция $(x_1(t), x_2(t))$, $r(t)$, $\theta(t)$ для решений (3.22) при $h = 0$, $a_0 = -1$, $a_1 = 1$, $s_2 = 1$, $s_4 = -1/4$, $b_1 = 0$, $\vartheta_8 \approx -0.235$, где $x_1(t) = r(t)\cos(\theta(t) + S(t))$, $x_2(t) = -r(t)\sin(\theta(t) + S(t))$. Точки соответствуют начальным данным $(x_1(1), x_2(1))$. Серые пунктирные кривые соответствуют $\theta = \psi_*$, где $\psi_* \approx -0.615$.

3.5.1. Замена переменных

Доказательство теоремы 26. Определим 2π-периодические функции

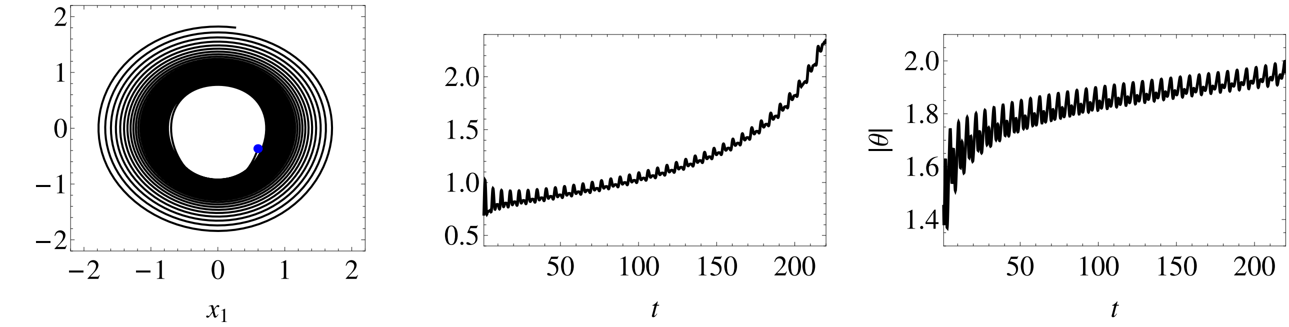
$$X_1(\varphi, E) = x_1^0\left(\frac{\varphi}{\omega(E)}, E\right), \quad X_2(\varphi, E) = x_1^0\left(\frac{\varphi}{\omega(E)}, E\right),$$

удовлетворяющие системе:

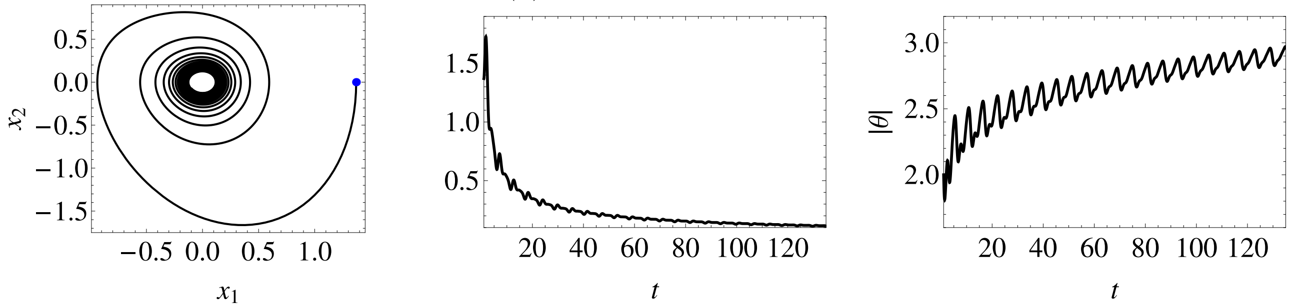
$$\omega(E)\frac{\partial X_1}{\partial \varphi} = \partial_{X_2} H_0(X_1, X_2), \quad \omega(E)\frac{\partial X_2}{\partial \varphi} = -\partial_{X_1} H_0(X_1, X_2).$$

Эти функции используются для перезаписи системы (3.1) в переменных действия-угла (E, φ): $x_1(t) = X_1(\varphi(t), E(t))$, $x_2(t) = X_2(\varphi(t), E(t))$. Таким образом, замена ресурсов (3.8) приводит систему (3.1) к виду.

$$\frac{dE}{dt} = f(E, \varphi, t), \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega(E) + g(E, \varphi, t), \tag{3.25}$$



(а) $b_0 = 0$, $z_0 = 0.1$



(б) $b_0 = -1$, $z_0 = 0$

Рис. 3.11. Эволюция $(x_1(t), x_2(t))$, $r(t)$, $|\theta(t)|$ для решений (3.22) при $h = 0$, $a_0 = -1$, $a_1 = 1$, $s_2 = 1$, $s_4 = 0$, где $x_1(t) = r(t)\cos(\theta(t) + S(t))$, $x_2(t) = -r(t)\sin(\theta(t) + S(t))$. Точки соответствуют начальным данным $(x_1(1), x_2(1))$.

где

$$
\begin{aligned}
f &\equiv -\,\omega(E)\left(\partial_\varphi H\big(X_1, X_2, t\big) - F\big(X_1, X_2, t\big)\partial_\varphi X_1\right),\\
g &\equiv \omega(E)\left(\partial_E H\big(X_1, X_2, t\big) - 1 - F\big(X_1, X_2, t\big)\partial_E X_1\right)
\end{aligned}
$$

являются 2π-периодическими функциями относительно φ. Поскольку $(0,0)$ — точка равновесия системы (3.1), то $E = 0$ — неподвижная точка первого уравнения системы (3.25): $f(0,\varphi,t) \equiv 0$ для всех $\varphi \in \mathbb{R}$ и $t > 0$. Более того, из (3.4) и (3.5) следует, что

$$
f(E,\varphi,t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} t^{-\frac{k}{q}} f_k\big(E,\varphi,S(t)\big), \quad g(E,\varphi,t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} t^{-\frac{k}{q}} g_k\big(E,\varphi,S(t)\big)
$$

при $t \to \infty$, где

$$
\begin{aligned}
f_k &\equiv -\,\omega(E)\left(\partial_\varphi H_k\big(X_1, X_2, S\big) - F_k\big(X_1, X_2, S\big)\partial_\varphi X_1\right),\\
g_k &\equiv \omega(E)\left(\partial_E H_k\big(X_1, X_2, \big) - F_k\big(X_1, X_2, S\big)\partial_E X_1\right)
\end{aligned}
$$

являются 2π-периодическими функциями относительно φ и S. Так как $X_1 = \sqrt{2E}\cos\varphi + \mathcal{O}(E^{3/2})$, $X_2 = -\sqrt{2E}\sin\varphi + \mathcal{O}(E^{3/2})$, то

$$f_k(E,\varphi,S) = \sum_{j=2}^{\infty} E^{\frac{j}{2}} f_{k,j}(\varphi,S), \quad g_k(E,\varphi,S) = \sum_{j=0}^{\infty} E^{\frac{j}{2}} g_{k,j}(\varphi,S), \quad E \to 0$$

равномерно для всех $(\varphi,S) \in \mathbb{R}^2$. Из тождества $H_0(X_1(\varphi,E),X_2(\varphi,E)) \equiv E$ следует, что

$$\begin{vmatrix} \partial_\varphi X_1 & \partial_E X_1 \\ \partial_\varphi X_2 & \partial_E X_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{\omega(E)} \neq 0.$$

Последнее неравенство гарантирует обратимость преобразования (3.8) для всех $E \in [0,E_0]$ и $\varphi \in \mathbb{R}$.

Для исследования влияния колебательных возмущений на устойчивость неподвижной точки $E=0$ рассмотрим замену переменных (3.9) при $t \geq 1$, где l — некоторое целое число. Примем $l=0$, если $\omega(E) \equiv \mathrm{const}$, и $l \geq 1$, если $\omega(E) \not\equiv \mathrm{const}$. Легко проверить, что в новых переменных $(\mathcal{E},\theta)$ система (3.25) принимает вид:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \mathcal{F}(\mathcal{E},\theta,t) + t^{-1}\frac{l}{q}\mathcal{E}, \quad \frac{d\theta}{dt} = \mathcal{G}(\mathcal{E},\theta,t), \tag{3.26}$$

где

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\mathcal{E},\theta,t) &\equiv t^{\frac{l}{q}} f\big(t^{-\frac{l}{q}}\mathcal{E}, \theta + \varkappa^{-1}S(t), t\big),\\
\mathcal{G}(\mathcal{E},\theta,t) &\equiv \omega\big(t^{-\frac{l}{q}}\mathcal{E}\big) - \varkappa^{-1}S'(t) + g\big(t^{-\frac{l}{q}}\mathcal{E}, \theta + \varkappa^{-1}S(t), t\big).
\end{aligned}$$

Правые части (3.26) имеют следующую асимптотику:

$$\mathcal{F}(\mathcal{E},\theta,t) \sim \sum_{k=2}^{\infty} t^{-\frac{k}{2q}} \mathcal{F}_k\big(\mathcal{E},\theta,S(t)\big), \quad \mathcal{G}(\mathcal{E},\theta,t) \sim \sum_{k=2}^{\infty} t^{-\frac{k}{2q}} \mathcal{G}_k\big(\mathcal{E},\theta,S(t)\big)$$

при $t \to \infty$ для всех $0 \leq \mathcal{E} \leq \mathrm{const}$, $\theta \in \mathbb{R}$, где коэффициенты $\mathcal{F}_k\big(\mathcal{E},\theta,S\big)$ и $\mathcal{G}_k\big(\mathcal{E},\theta,S\big)$ являются 2π-периодическими относительно θ и $2\pi\varkappa$-периодическими относительно S. В частности, если $l=1$, имеем

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}_k = & \sum_{\substack{2i+j=k\\ i\geq 1,\, j\geq 0}} f_{i,j+2}\big(\theta+\varkappa^{-1}S,S\big)\mathcal{E}^{1+\frac{j}{2}},\\
\mathcal{G}_k = & \frac{\omega^{(k/2)}(0)}{(k/2)!}\mathcal{E}^{\frac{k}{2}}-\varkappa^{-1}\Big(1-\frac{k}{2q}+\delta_{k,2q}\Big)s_{k/2}+\sum_{\substack{2i+j=k\\ i\geq 1,\, j\geq 0}} g_{i,j}\big(\theta+\varkappa^{-1}S,S\big)\mathcal{E}^{\frac{j}{2}},
\end{aligned}
$$

где предполагается, что $s_j=0$ при $j>q$, $\omega^{(k/2)}(0)=0$ при нечётных k, а $\delta_{k,q}$ — символ Кронекера. Поскольку $S(t)$ меняется быстро по сравнению с возможными изменениями $\mathcal{E}$ и θ на бесконечности, мы усредняем систему (3.26) по S, чтобы получить упрощённые уравнения, дающие первое приближение к решениям.

Рассмотрим почти тождественное преобразование переменных $\mathcal{E}$ и θ в виде (3.11). Коэффициенты $v_k(\mathcal{E},\theta,S)$ и $\psi_k(\mathcal{E},\theta,S)$ выбраны таким образом, чтобы правые части уравнений (3.12) для новых переменных $v(t)\equiv V_N(\mathcal{E}(t),\varphi(t),t)$ и $\psi(t)\equiv \Psi_N(\mathcal{E}(t),\theta(t),t)$ не зависели от S, по крайней мере, в первых членах асимптотики. Для нахождения подходящих коэффициентов v_k, ψ_k и вывода функций Λ_k, Ω_k вычисляем полную производную $V_N(\mathcal{E},\theta,t)$ и $\Psi_M(\mathcal{E},\theta,t)$ по t вдоль траекторий системы (3.26):

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} V_N\\ \Psi_N\end{pmatrix} = & \Big(\big(\mathcal{F}(\mathcal{E},\theta,t)+t^{-1}\frac{l}{q}\mathcal{E}\big)\partial_{\mathcal{E}}+\mathcal{G}(\mathcal{E},\theta,t)\partial_\theta+\partial_t\Big)\begin{pmatrix} V_N\\ \Psi_N\end{pmatrix}\\
= & \sum_{k=2}^{\infty} t^{-\frac{k}{2q}}\left[\begin{pmatrix}\mathcal{F}_k+\delta_{k,2q}\frac{l}{q}\mathcal{E}\\ \mathcal{G}_k\end{pmatrix}+s_0\partial_S\begin{pmatrix} v_k\\ \psi_k\end{pmatrix}-\frac{k-2q}{2q}\begin{pmatrix} v_{k-2q}\\ \psi_{k-2q}\end{pmatrix}\right]\\
& +\sum_{k=4}^{\infty} t^{-\frac{k}{2q}}\sum_{i+j=k}\Big(\big(\mathcal{F}_j+\delta_{j,2q}\frac{l}{q}\mathcal{E}\big)\partial_{\mathcal{E}}+\mathcal{G}_j\partial_\theta\\
& \qquad +s_{j/2}\Big(1-\frac{j}{2q}+\delta_{j,2q}\Big)\partial_S\Big)\begin{pmatrix} v_i\\ \psi_i\end{pmatrix},
\end{aligned}
\tag{3.27}
$$

где предполагается, что $v_i\equiv\psi_i\equiv 0$, $\mathcal{F}_k\equiv\mathcal{G}_k\equiv 0$ при $i,k<2$, $i>N$. Подставляя (3.11) в правую часть (3.12) и сопоставляя результат с (3.27), получаем цепочку дифференциальных уравнений:

$$s_0\partial_S\begin{pmatrix}v_k\\ \psi_k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Lambda_k(\mathcal{E},\theta)-\mathcal{F}_k(\mathcal{E},\theta,S)-\delta_{k,2q}\dfrac{l}{q}\mathcal{E}+\hat{\mathcal{F}}_k(\mathcal{E},\theta,S)\\ \Omega_k(\mathcal{E},\theta)-\mathcal{G}_k(\mathcal{E},\theta,S)+\hat{\mathcal{G}}_k(\mathcal{E},\theta,S)\end{pmatrix},\tag{3.28}$$

$k\geq 2$, где функции $\hat{\mathcal{F}}_k$, $\hat{\mathcal{G}}_k$ выражаются через $\{v_i,\psi_i,\Lambda_i,\Omega_i\}_{i=2}^{k-1}$. В частности, $\hat{\mathcal{F}}_2\equiv\hat{\mathcal{G}}_2\equiv\hat{\mathcal{F}}_3\equiv\hat{\mathcal{G}}_3\equiv 0$,

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\hat{\mathcal{F}}_4\\ \hat{\mathcal{G}}_4\end{pmatrix}\equiv&\Big(v_2\partial_{\mathcal{E}}+\psi_2\partial_\theta\Big)\begin{pmatrix}\Lambda_2\\ \Omega_2\end{pmatrix}+\frac{2-q}{q}\begin{pmatrix}v_{4-2q}\\ \psi_{4-2q}\end{pmatrix}\\ &-\Big(\big(\mathcal{F}_2+\delta_{1,q}\frac{l}{q}\mathcal{E}\big)\partial_{\mathcal{E}}+\mathcal{G}_2\partial_\theta+s_1\big(1-\frac{1}{q}+\delta_{1,q}\big)\partial_S\Big)\begin{pmatrix}v_2\\ \psi_2\end{pmatrix},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\hat{\mathcal{F}}_5\\ \hat{\mathcal{G}}_5\end{pmatrix}\equiv&\sum_{i+j=5}\Big(v_i\partial_{\mathcal{E}}+\psi_i\partial_\theta\Big)\begin{pmatrix}\Lambda_j\\ \Omega_j\end{pmatrix}+\frac{5-2q}{2q}\begin{pmatrix}v_{5-2q}\\ \psi_{5-2q}\end{pmatrix}\\ &-\sum_{i+j=5}\Big(\big(\mathcal{F}_j+\delta_{j,2q}\frac{l}{q}\mathcal{E}\big)\partial_{\mathcal{E}}+\mathcal{G}_j\partial_\theta+s_{j/2}\big(1-\frac{j}{2q}+\delta_{j,2q}\big)\partial_S\Big)\begin{pmatrix}v_i\\ \psi_i\end{pmatrix},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\hat{\mathcal{F}}_k\\ \hat{\mathcal{G}}_k\end{pmatrix}\equiv&\sum_{\substack{z+a_1+\ldots+ia_i+b_1+\ldots+jb_j=k\\ a_1+\ldots+a_i+b_1+\ldots+b_j\geq 1}}C_{ij}^{ab}v_1^{a_1}\cdots v_i^{a_i}\psi_1^{b_1}\cdots\psi_j^{b_j}\partial_{\mathcal{E}}^{a_1+\ldots+a_i}\partial_\theta^{b_1+\ldots+b_j}\begin{pmatrix}\Lambda_z\\ \Omega_z\end{pmatrix}\\ &+\frac{k-2q}{2q}\begin{pmatrix}v_{k-2q}\\ \psi_{k-2q}\end{pmatrix}\\ &-\sum_{i+j=k}\Big(\big(\mathcal{F}_j+\delta_{j,2q}\frac{l}{q}\mathcal{E}\big)\partial_{\mathcal{E}}+\mathcal{G}_j\partial_\theta+s_{j/2}\big(1-\frac{j}{2q}+\delta_{j,2q}\big)\partial_S\Big)\begin{pmatrix}v_i\\ \psi_i\end{pmatrix},\end{aligned}$$

где $C_{ij}^{ab}=\mathrm{const}$. Определим

$$\begin{aligned}\Lambda_k(v,\psi)&=\langle\mathcal{F}_k(v,\psi,S)-\hat{\mathcal{F}}_k(v,\psi,S)\rangle_{\varkappa S}+\delta_{k,2q}\frac{l}{q}v,\\ \Omega_k(v,\psi)&=\langle\mathcal{G}_k(v,\psi,S)-\hat{\mathcal{G}}_k(v,\psi,S)\rangle_{\varkappa S},\end{aligned}\tag{3.29}$$

где

$$\langle Z(v,\psi,S)\rangle_{\varkappa S} \stackrel{def}{=} \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} Z(v,\psi,\varkappa S)\,dS = \frac{1}{2\pi\varkappa}\int\limits_0^{2\pi\varkappa} Z(v,\psi,s)\,ds.$$

Из (3.29) следует, что функции $\Lambda_k(v,\psi)$ и $\Omega_k(v,\psi)$ являются 2π-периодическими по ψ, причём $\Lambda_k(v,\psi) = \mathcal{O}(v)$ и $\Omega_k(v,\psi) = \mathcal{O}(1)$ при $v \to 0$ равномерно для всех $\psi \in \mathbb{R}$. Следовательно, для любого $k \geq 2$ правая часть (3.28) является $2\pi\varkappa$-периодической по S с нулевым средним. Интегрирование (3.28) даёт

$$\begin{pmatrix} v_k(\mathcal{E},\theta,S) \\ \psi_k(\mathcal{E},\theta,S) \end{pmatrix} = -\frac{1}{s_0}\int\limits_0^S \begin{pmatrix} \{\mathcal{F}_k(\mathcal{E},\theta,s) - \hat{\mathcal{F}}_k(\mathcal{E},\theta,s)\}_{\varkappa s} \\ \{\mathcal{G}_k(\mathcal{E},\theta,s) - \hat{\mathcal{G}}_k(\mathcal{E},\theta,s)\}_{\varkappa s} \end{pmatrix} ds + \begin{pmatrix} \tilde{v}_k(\mathcal{E},\theta) \\ \tilde{\psi}_k(\mathcal{E},\theta) \end{pmatrix},$$

где $\{Z\}_{\varkappa s} := Z - \langle Z\rangle_{\varkappa s}$, и функции $\tilde{v}_k, \tilde{\psi}_k$ выбраны таким образом, что $\langle v_k\rangle_{\varkappa S} = \langle \psi_k\rangle_{\varkappa S} = 0$. Легко проверить, что функции $v_k(\mathcal{E},\theta,S)$ и $\psi_k(\mathcal{E},\theta,S)$ являются гладкими и периодическими относительно θ и S, причём $v_k(0,\theta,S) \equiv 0$.

Из (3.11) следует, что для всех $\varepsilon \in (0,1)$ существует $t_0 > 1$ такое, что

$$|V_N(\mathcal{E},\theta,t) - \mathcal{E}| \leq \varepsilon\mathcal{E}, \quad |\Psi_N(\mathcal{E},\theta,t) - \theta| \leq \varepsilon, \quad |\mathrm{det}\mathbf{J}_N(\mathcal{E},\theta,t) - 1| \leq \varepsilon \tag{3.30}$$

для всех $\theta \in \mathbb{R}$, $t \geq t_0$ и $\mathcal{E} \in [0,\mathcal{E}_0]$ с некоторыми $\mathcal{E}_0 = \mathrm{const}$, где

$$\mathbf{J}_N(\mathcal{E},\theta,t) := \begin{pmatrix} \partial_{\mathcal{E}} V_N(\mathcal{E},\theta,t) & \partial_\theta V_N(\mathcal{E},\theta,t) \\ \partial_{\mathcal{E}} \Psi_N(\mathcal{E},\theta,t) & \partial_\theta \Psi_N(\mathcal{E},\theta,t) \end{pmatrix}.$$

Следовательно, отображение $(\mathcal{E},\theta) \mapsto (v,\psi)$ обратимо для всех $t \geq t_0$, $\psi \in \mathbb{R}$ и $v \in [0,\Delta_0]$ с $\Delta_0 = (1-\epsilon)\mathcal{E}_0$. Выберем $\mathcal{E}_0 = E_0 t_0^{l/q}$, тогда для всех $t \geq t_0$ преобразование, описанное (3.9), справедливо для всех $0 \leq \mathcal{E} \leq \mathcal{E}_0$ и $\theta \in \mathbb{R}$.

Обозначим через $\mathcal{E} = \mathfrak{E}(v,\psi,t)$, $\theta = \mathfrak{T}(v,\psi,t)$ — обратное преобразование к (3.10). Тогда остатки $\tilde{\Lambda}_N(v,\psi,t)$ и $\tilde{\Omega}_N(v,\psi,t)$ имеют следующий вид:

$$\begin{pmatrix} \tilde{\Lambda}_N(v,\psi,t) \\ \tilde{\Omega}_N(v,\psi,t) \end{pmatrix} \equiv -\sum_{k=2}^N t^{-\frac{k}{2q}} \begin{pmatrix} \Lambda_k(v,\psi) \\ \Omega_k(v,\psi) \end{pmatrix} + \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} V_N(\mathcal{E},\theta,t) \\ \Psi_N(\mathcal{E},\theta,t) \end{pmatrix}\Bigg|_{\substack{\mathcal{E}=\mathfrak{E}(v,\psi,t) \\ \theta=\mathfrak{T}(v,\psi,t)}}.$$

Отсюда следует, что $\tilde{\Lambda}_N(0,\psi,t) \equiv 0$ и $\tilde{\Lambda}_N(v,\psi,t) = \mathcal{O}(t^{-(N+1)/2q})$, $\tilde{\Omega}_N(v,\psi,t) = \mathcal{O}(t^{-(N+1)/2q})$ при $t \to \infty$ равномерно для всех $\psi \in \mathbb{R}$ и $0 \leq v \leq \Delta_0$. $\square$

Замечание 3. *Пусть* $l = 1$ *и* $m_1, m_2 \geq 2$ *— наименьшие натуральные числа, такие что* $\Omega_{m_1}(v,\psi) \not\equiv 0$, $\Omega_j(v,\psi) \equiv 0$ *для* $m_1 < j < m_2$ *и* $\Omega_{m_2}(v,\psi) \not\equiv 0$. *Если* $\Omega_{m_1}(0,\psi) \equiv 0$ *и* $\Omega_{m_2}(0,\psi) \not\equiv 0$, *то в* (3.9) *выберем* $l = 1 + m_2 - m_1$. *Тогда в новых переменных* $\Omega_{m_0}(0,\psi) \not\equiv 0$, *где* $m_0 \geq 2$ *— наименьшее натуральное число, такое что* $\Omega_{m_0}(v,\psi) \not\equiv 0$ *в* (3.12)

3.5.2. Асимптотические режимы

Доказательство леммы 1. Рассмотрим второе уравнение системы (3.13) при $v \equiv 0$. Легко проверить, что ψ_* — устойчивое равновесие соответствующего редуцированного уравнения: $d\psi/dt = t^{-m/2q}\Omega_m(0,\psi)$. Покажем, что это решение устойчиво относительно возмущения $\tilde\Omega_m(0,\psi,t)$. Замена переменной $\psi(t) = \psi_* + \phi(t)$ приводит к следующему уравнению:

$$\frac{d\phi}{dt} = t^{-\frac{m}{2q}}\Omega_m(0,\psi_*+\phi) + \tilde\Omega_m(0,\psi_*+\phi,t). \tag{3.31}$$

Рассмотрим $\ell = |\phi|$ как функцию Ляпунова для (3.31). Её полная производная задаётся формулой

$$\frac{d\ell}{dt} = t^{-\frac{m}{2q}}\omega_m(\psi_*+\phi)\mathrm{sgn}(\phi) + \tilde\Omega_m(0,\psi_*+\phi,t)\mathrm{sgn}(\phi).$$

Легко проверить, что существуют $\delta_1 > 0$, $t_1 \geq t_0$ и $M_1 > 0$, такие, что $\omega(\psi_* + \phi)\mathrm{sgn}(\phi) \leq -|\vartheta_m||\phi|/2$ и $|\tilde\Omega_m(0,\psi_*+\phi,t)\mathrm{sgn}(\phi)| \leq M_1 t^{-(m+1)/2q}$ для всех $|\phi| \leq \delta_1$ и $t \geq t_1$. Следовательно, $d\ell/dt \leq t^{-m/2q}(-|\vartheta_m|\ell/2 + M_1 t^{-1/2q})$ при $t \geq t_1$. Интегрируя последнее неравенство в случае $m = 2q$, получаем:

$$0 \leq \ell(\phi(t)) \leq \ell(\phi(t_1))\Big(\frac{t}{t_1}\Big)^{-\frac{|\vartheta_m|}{2}} + M_1 t^{-\frac{|\vartheta_m|}{2}}\int\limits_{t_1}^{t} \tau^{\frac{q|\vartheta_m|-1}{2q}-1}\,d\tau$$

с $|\phi(t_1)| \leq \delta_1$. Мы видим, что $\phi(t) = \mathcal{O}(t^{-1/2q})$ при $t \to \infty$, если $q|\vartheta_m| > 1$, $\phi(t) = \mathcal{O}(t^{-|\vartheta_m|/2})$, если $q|\vartheta_m| < 1$, и $\phi(t) = \mathcal{O}(t^{-|\vartheta_m|/2}\log t)$, если $q|\vartheta_m| = 1$. Аналогичные оценки справедливы и в случае $m < 2q$. Следовательно, существует решение $\hat\phi(t)$ уравнения (3.31) такое, что $\hat\phi(t) = o(1)$ при $t \to \infty$. $\square$

Доказательство леммы 2. Так как $\Omega_m(v,\psi)\neq 0$, то отсюда следует, что $\Omega_m^-\le |\Omega_m(v,\psi)|\le\Omega_m^+$ для всех $v\in[0,\Delta_*]$ и $\psi\in\mathbb{R}$ с $\Omega_m^\pm=\mathrm{const}>0$. Тогда существует $t_1\ge t_0$ такое, что $\dot\psi\ge t^{-m/2q}\Omega_m^-/2$ при $t\ge t_1$ для всех $v\in[0,\Delta_*]$, $\psi\in\mathbb{R}$, если $\Omega_m(v,\psi)>0$, или $\dot\psi\le -t^{-m/2q}\Omega_m^-/2$, если $\Omega_m(v,\psi)<0$. Интегрируя последние неравенства, получаем $|\psi(t)|\to\infty$ при $t\to\infty$. $\square$

3.5.3. Устойчивость в режиме фазового захвата

Доказательство теоремы 27. Мы выбираем $N=n$ и (3.13) принимает вид:

$$\frac{dv}{dt}=t^{-\frac{n}{2q}}\Lambda_n(v,\psi)+\tilde\Lambda_n(v,\psi,t),\quad \frac{d\psi}{dt}=t^{-\frac{m}{2q}}\Omega_m(v,\psi)+\tilde\Omega_m(v,\psi,t).\qquad(3.32)$$

Из леммы 1 следует, что система (3.32) имеет частное решение $v(t)\equiv 0$, $\psi(t)\equiv\hat\psi(t)$ такое, что $\hat\psi(t)=\psi_*+o(1)$ при $t\to\infty$. Подстановка $v(t)=[u(t)]^2$, $\psi(t)=\hat\psi(t)+\phi(t)$ в (3.32) даёт следующую систему с равновесием в точке $(0,0)$:

$$\begin{aligned}2u\frac{du}{dt}=&t^{-\frac{n}{2q}}\Lambda_n(u^2,\hat\psi(t)+\phi)+\tilde\Lambda_n(u^2,\hat\psi(t)+\phi,t),\\ \frac{d\phi}{dt}=&t^{-\frac{m}{2q}}\Big(\Omega_m(u^2,\hat\psi(t)+\phi)-\Omega_m(0,\hat\psi(t))\Big)\\ &+\tilde\Omega_m(u^2,\hat\psi(t)+\phi,t)-\tilde\Omega_m(0,\hat\psi(t),t).\end{aligned}\qquad(3.33)$$

Легко проверить, что собственные значения $a_1(t)$ и $a_2(t)$ линеаризованной системы

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}u\\ \phi\end{pmatrix}=\mathbf{A}(t)\begin{pmatrix}u\\ \phi\end{pmatrix},\quad \mathbf{A}(t)=(1+o(1))\begin{pmatrix}\frac{1}{2}t^{-\frac{n}{2q}}\Big(\lambda_n(\psi_*)+\delta_{n,2q}\frac{l}{q}\Big) & 0\\ t^{-\frac{m}{2q}}\omega_{m1}(\psi_*) & t^{-\frac{m}{2q}}\vartheta_m\end{pmatrix}$$

при $t\to\infty$ имеют следующую асимптотику: $a_1(t)=2^{-1}t^{-n/2q}(\lambda_n(\psi_*)+\delta_{n,2q}l/q+o(1))$, $a_2(t)=t^{-m/2q}(\vartheta_m+o(1))$ при $t\to\infty$. Поскольку $a_{1,2}(t)\to 0$ при $t\to\infty$, линейный анализ устойчивости не работает (см., например, § 1.5). Мы исследуем устойчивость с помощью построения подходящих функций Ляпунова и Четаева.

Сначала рассмотрим случай $\lambda_n(\psi_*)+\widetilde\lambda_n(v,\psi_*)>0$ для всех $v\in[0,\Delta_0]$. Легко доказать, что неподвижная точка $(0,0)$ системы (3.33) неустойчива, взяв

$J(u)=u^2$ в качестве кандидата на функцию Четаева. Производная J вдоль траекторий системы (3.33) определяется выражением

$$\frac{dJ}{dt}=t^{-\frac{n}{2q}}u^2\Big(\lambda_n(\psi_*)+\widetilde{\lambda}_n(u^2,\psi_*)+\delta_{n,2q}\frac{l}{q}+\mathcal{O}(\phi)+\mathcal{O}(t^{-\frac{1}{2q}})+\mathcal{O}(t^{-\kappa})\Big)$$

при $t\to\infty$ и $\phi\to 0$ для всех $u\in[0,\Delta_0^{1/2}]$. Следовательно, для всех $\epsilon\in(0,1)$ существуют $\phi_1>0$ и $t_1\geq t_0$, такие, что

$$\frac{dJ}{dt}\geq t^{-\frac{n}{2q}}J\Big((1-\epsilon)\lambda_n^*+\delta_{n,2q}\frac{l}{q}\Big)>0$$

для всех $u\in(0,\Delta_0^{1/2}]$, $|\phi|\leq\phi_1$ и $t\geq t_1$, где $\lambda_n^*:=\min_{v\in[0,\Delta_0]}(\lambda_n(\psi_*)+\widetilde{\lambda}_n(v,\psi_*))>0$. Интегрируя последнее неравенство по $[t_1,t]$, получаем

$$\begin{aligned} &u^2(t)\geq u^2(t_1)\exp\left((1-\epsilon)\lambda_n^*\Big(t^{1-\frac{n}{2q}}-t_1^{1-\frac{n}{2q}}\Big)\frac{2q}{2q-n}\right), && n<2q,\\ &u^2(t)\geq u^2(t_1)\Big(\frac{t}{t_1}\Big)^{(1-\epsilon)\lambda_n^*+\frac{l}{q}}, && n=2q. \end{aligned} \tag{3.34}$$

Следовательно, существует $\varepsilon\in(0,\Delta_0^{1/2}]$ такое, что для всех $\delta_1\in(0,\varepsilon)$ решение $(u(t),\phi(t))$ с начальными данными $|u(t_1)|\leq\delta_1$, $|\phi(t_1)|\leq\phi_1$ покидает ε-окрестность $(0,0)$: $|u(t_*)|\geq\varepsilon$ при некотором $t_*>t_1$. Из (3.34), (3.30) и (3.9) следует, что тривиальное решение также неустойчиво относительно исходных переменных (x_1,x_2). Действительно, если $n=2q$, то имеем

$$E(t)\geq\left(\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}\right)E(t_1)\Big(\frac{t}{t_1}\Big)^{(1-\epsilon)\lambda_n^*},\quad t\geq t_1.$$

Обратим внимание, что условия, гарантирующие устойчивость неподвижной точки $(0,0)$, зависят от значений n и m.

1. Рассмотрим сначала случай $n=m$. Пусть $\lambda_n^*:=\lambda_n(\psi_*)+\delta_{n,2q}l/q<0$. Если $\omega_{m1}(\psi_*)=0$, устойчивость можно доказать с помощью функции Ляпунова вида $L_0(u,\phi)=u^2+\phi^2\lambda_n^*(2\vartheta_m)^{-1}$. Производная $L_0(u,\phi)$ по t вдоль траекторий (3.33) определяется выражением

$$\frac{dL_0}{dt}=\lambda_n^*t^{-\frac{n}{2q}}(u^2+\phi^2)\Big(1+\mathcal{O}(w)+\mathcal{O}(t^{-\frac{1}{2q}})+\mathcal{O}(t^{-\kappa})\Big)$$

при $w=\sqrt{u^2+\phi^2}\to 0$ и $t\to\infty$. При этом асимптотические оценки $\mathcal{O}(t^{-1/2q})$ и $\mathcal{O}(w)$ равномерны по $(u,\phi,t)\in I(w_*,t_*)$, где $\mathcal{I}(w_*,t_*):=\{(u,\phi,t)\in\mathbb{R}^3: w\le w_*, t\ge t_*\}$ и w_*, t_* — некоторые положительные константы. Легко проверить, что существуют $w_1>0$ и $t_1\ge t_0$, такие, что

$$A_0w^2\le L_0(u,\phi)\le B_0w^2,\quad \frac{dL_0}{dt}\le -\frac{|\lambda_n^*|}{2}t^{-\frac{n}{2q}}w^2\le -\gamma_0 t^{-\frac{n}{2q}}L_0\le 0$$

для всех $(u,\phi,t)\in\mathcal{I}(w_1,t_1)$, где $\gamma_0=|\lambda_n^*|(2B_0)^{-1}>0$, $A_0=\min\{1,\lambda_n^*(2\vartheta_m)^{-1}\}$ и $B_0=\max\{1,\lambda_n^*(2\vartheta_m)^{-1}\}$. Следовательно, неподвижная точка $(0,0)$ системы (3.33) устойчива. Более того, интегрируя последнее неравенство по $[t_1,t]$, получаем

$$\begin{aligned}
&u^2(t)+\phi^2(t)\le C_0\exp\left(-\frac{2q\gamma_0}{2q-n}t^{1-\frac{n}{2q}}\right), && n=m<2q,\\
&u^2(t)+\phi^2(t)\le C_0t^{-\gamma_0}, && n=m=2q,
\end{aligned}$$

где C_0 — положительная константа, зависящая от $u(t_1)$, $\phi(t_1)$ и t_1. Следовательно, траектории, начинающиеся в окрестности положения равновесия, стремятся к нему при $t\to\infty$. В частности, если $n<2q$, положение равновесия системы (3.33) и частное решение $v(t)\equiv 0$, $\psi(t)\equiv\hat\psi(t)$ системы (3.13) экспоненциально устойчивы. При $n=2q$ устойчивость полиномиальна. Учитывая (3.8), (3.9) и (3.30), получаем соответствующие результаты об устойчивости положения равновесия $(0,0)$ системы (3.1).

Если $\omega_{m1}(\psi_*)\ne 0$, то функция Ляпунова строится в виде $L_1(u,\phi)=u^2+\alpha_1(\phi-\beta_1u)^2$, где $\alpha_1=\lambda_n^*(4\vartheta_m\beta_1^2)^{-1}>0$, $\beta_1=2\omega_{m1}(\psi_*)(2\vartheta_m+\lambda_n^*)^{-1}\ne 0$. Её производная определяется выражением

$$\frac{dL_1}{dt}=\frac{\lambda_n^*}{2}t^{-\frac{n}{2q}}(u^2+\beta_1^{-2}\phi^2)\Big(1+\mathcal{O}(w)+\mathcal{O}(t^{-\frac{1}{2q}})+\mathcal{O}(t^{-\kappa})\Big)$$

при $w\to 0$ и $t\to\infty$. Существуют $w_1>0$ и $t_1\ge t_0$, такие, что

$$\begin{aligned}
&A_1\big(u^2+\beta_1^{-2}\phi^2\big)\le L_1(u,\phi)\le B_1\big(u^2+\beta_1^{-2}\phi^2\big),\\
&\frac{dL_1}{dt}\le -\frac{|\lambda_n^*|}{4}t^{-\frac{n}{2q}}\big(u^2+\beta_1^{-2}\phi^2\big)\le -\gamma_1t^{-\frac{n}{2q}}L_1
\end{aligned}$$

для всех $(u,\phi,t)\in\mathcal{I}(w_1,t_1)$, где $A_1=\lambda_n^*(4c_1)^{-1}$, $B_1=c_1(2\vartheta_m)^{-1}$, $c_1=\lambda_n^*+4\vartheta_m$, $\gamma_1=\lambda_n^*\vartheta_m(2c_1)^{-1}>0$. Следовательно, как и в предыдущем случае, неподвижная точка системы (3.1) асимптотически устойчива.

2. Рассмотрим случай $m<n\le 2q$. Докажем устойчивость равновесия при $\lambda_n^*<0$. Рассмотрим $L_2(u,\phi,t)=t^{(n-m)/(2q)}u^{2p}+\alpha_2(\phi+\beta_2 u)^{2p}$ как функцию Ляпунова. Здесь $p\ge 1$ — целое число такое, что $\lambda_{np}^*:=\lambda_n^*+(n-m)/(2pq)<0$, $\alpha_2:=\lambda_{np}^*(2\vartheta_m)^{-1}>0$, $\beta_2:=\omega_{m1}(\psi_*)\vartheta_m^{-1}$. Производная $L_2(u,\phi,t)$ вдоль траекторий системы (3.33) определяется выражением

$$\begin{aligned}\frac{dL_2}{dt}=&pt^{-\frac{m}{2q}}\Big(\lambda_n^*u^{2p}+\lambda_{np}^*(\phi+\beta_2u)^{2p}+\frac{n-m}{2pq}u^{2p}t^{\frac{n}{2q}-1}+\mathcal{O}(w^{2p+1})\Big)\\&\times\big(1+\mathcal{O}(t^{-\frac{1}{2q}})+\mathcal{O}(t^{-\kappa})\big)\end{aligned}$$

при $w\to 0$ и $t\to\infty$. Легко проверить, что справедливы следующие неравенства:

$$\begin{aligned}&A_2w^{2p}\le L_2(u,\phi,t)\le t^{\frac{n-m}{2q}}B_2\Big(u^{2p}+(\phi+\beta_2u)^{2p}\Big),\\&\frac{dL_2}{dt}\le-\frac{p|\lambda_{np}^*|}{2}t^{-\frac{m}{2q}}\Big(u^{2p}+(\phi+\beta_2u)^{2p}\Big)\le-p\gamma_2t^{-\frac{n}{2q}}L_2\le 0\end{aligned}\qquad(3.35)$$

для всех $(u,\phi,t)\in\mathcal{I}(w_2,t_2)$ с некоторыми константами $w_2>0$ и $t_2\ge t_0$, где $\gamma_2=|\lambda_{np}^*|(2B_2)^{-1}>0$, $A_2=4^{1-p}\min\{1,\alpha_2\}/(1+\alpha_2(\beta_2^2/2)^p)$, $B_2=\max\{1,\alpha_2\}$. Следовательно, равновесие $(0,0)$ устойчиво. Кроме того, интегрируя (3.35), получаем следующие оценки:

$$\begin{aligned}&u^2(t)+\phi^2(t)\le C_2\exp\left(-\frac{2q\gamma_2}{2q-n}t^{1-\frac{n}{2q}}\right), && n<2q,\\&u^2(t)+\phi^2(t)\le C_2t^{-\gamma_2}, && n=2q,\end{aligned}$$

при начальных данных $u^2(t_2)+\phi^2(t_2)<w_2^2$ и $C_2=\mathrm{const}>0$. Следовательно, если $m<n<2q$ и $\lambda_n(\psi_*)<0$, равновесие системы (3.1) экспоненциально устойчиво; если $m<n=2q$ и $\lambda_n(\psi_*)+l/(2q)<0$, равновесие полиномиально устойчиво.

3. Наконец, рассмотрим случай $n<m\le 2q$. Пусть $\lambda_n(\psi_*)<0$ и $p\ge 1$ — целое число, такое, что $\vartheta_{mp}^*:=\vartheta_m+(m-n)/(4pq)<0$. Мы используем

$L_3(u,\phi,t) = t^{(m-n)/(2q)}\phi^{2p} + \alpha_3 u^{2p} + \beta_3 u\phi^{2p-1} + c_3\phi^{2p}$ с $\alpha_3 := 2\vartheta^*_{mp}(\lambda_n(\psi_*))^{-1} > 0$, $\beta_3 := 4p\omega_{m1}(\psi_*)(\lambda_n(\psi_*))^{-1}$, $c_3 = \text{const} > 0$ в качестве кандидата на функцию Ляпунова. Производная L_3 по t вдоль траекторий системы (3.33) определяется выражением

$$\begin{aligned}\frac{dL_3}{dt} =& 2pt^{-\frac{n}{2q}}\Big(\vartheta^*_{mp}u^{2p} + \vartheta_m\phi^{2p} + \frac{m-n}{4pq}t^{\frac{m}{2q}-1}\phi^{2p} + \mathcal{O}(w^{2p+1})\Big)\\ &\times (1 + \mathcal{O}(t^{-\frac{1}{2q}}) + \mathcal{O}(t^{-\kappa}))\end{aligned}$$

при $w \to 0$ и $t \to \infty$. Следовательно, существуют $w_3 > 0$, $t_3 \geq t_0$ и $c_3 > 0$, такие, что

$$\begin{aligned}&A_3 w^{2p} \leq L_3(u,\phi,t) \leq B_3 t^{\frac{m-n}{2q}}(u^{2p} + \phi^{2p}),\\ &\frac{dL_3}{dt} \leq -p|\vartheta^*_{mp}|t^{-\frac{n}{2q}}(u^{2p} + \phi^{2p}) \leq -p\gamma_3 t^{-\frac{m}{2q}} L_3\end{aligned}$$

для всех $(u,\phi,t) \in \mathcal{I}(w_3,t_3)$, где $A_3 = 2^{-p}\min\{1,\alpha_3\}$, $B_3 = 2\max\{1,\alpha_3\}$, $\gamma_3 = |\vartheta^*_{mp}|B_3^{-1} > 0$. Следовательно, решение $v(t) \equiv 0$, $u(t) \equiv 0$ устойчиво. Более того, интегрирование последнего неравенства по $[t_3, t]$ даёт

$$\begin{aligned}&u^2(t) + \phi^2(t) \leq C_3 \exp\Big(-\frac{2q\gamma_3}{2q-m}t^{1-\frac{m}{2q}}\Big), && m < 2q,\\ &u^2(t) + \phi^2(t) \leq C_3 t^{-\gamma_3}, && m = 2q,\end{aligned}$$

где C_3 — положительная константа, зависящая от начальных условий: $u(t_3)$, $\phi(t_3)$ и t_3. Следовательно, если $n < m < 2q$ и $\lambda_n(\psi_*) < 0$, положение равновесия $(0,0)$ системы (3.1) экспоненциально устойчиво; если $n < m = 2q$ и $\lambda_n(\psi_*) < 0$, положение равновесия полиномиально устойчиво. □

Замечание 4. *Заметим, что устойчивость положения равновесия* $(0,0)$ *системы* (3.1) *не обоснована, если* $m \leq n = 2q$, $0 < \lambda_n(\psi_*) + l/q < l/q$ *и* $\omega(E) \not\equiv \text{const}$ $(l \neq 0)$. *Из доказательства теоремы 27 следует, что частное решение* $v(t) \equiv 0$, $\psi(t) \equiv \hat\psi(t)$ *системы* (3.33) *неустойчиво, и* $E(t)t^{l/q} \geq \Delta_0$ *при некотором* $t \geq t_*$ *для сколь угодно малых начальных данных. Однако такая оценка не может гарантировать неустойчивость положения равновесия в* *исходных координатах. В этом случае можно сказать, что равновесие* $(0,0)$ *системы* (3.1) *неустойчиво с весом* $t^{l/2q}$.

Доказательство теоремы 28. Выберем $N=n+d$; тогда система (3.13) примет вид:

$$\frac{dv}{dt}=\sum_{k=n}^{n+d}t^{-\frac{k}{2q}}\Lambda_k(v,\psi)+\tilde\Lambda_{n+d}(v,\psi,t),\quad \frac{d\psi}{dt}=t^{-\frac{m}{2q}}\Omega_m(v,\psi)+\tilde\Omega_m(v,\psi,t). \tag{3.36}$$

Покажем, что решение $(0,\hat\psi(t))$ системы (3.36) неустойчиво, если $\lambda_{n+d}(\psi_*)+\widetilde\lambda_{n+d}(v,\psi_*)>0$, $\lambda_{n,\sigma}(\psi_*)+\widetilde\lambda_{n,\sigma}(v,\psi_*)>0$ для всех $v\in[0,\Delta_0]$. Доказательство аналогично доказательству теоремы 27. Подстановка $v(t)=[u(t)]^2$ и $\psi(t)=\hat\psi(t)+\phi(t)$ в (3.36) даёт следующую систему с равновесием в точке $(0,0)$:

$$\begin{aligned}2u\frac{du}{dt}=&\sum_{k=n}^{n+d}t^{-\frac{k}{2q}}\Lambda_k(u^2,\hat\psi(t)+\phi)+\tilde\Lambda_{n+d}(u^2,\hat\psi(t)+\phi,t),\\ \frac{d\phi}{dt}=&t^{-\frac{m}{2q}}\Big(\Omega_m(u^2,\hat\psi(t)+\phi)-\Omega_m(0,\hat\psi(t))\Big)\\ &+\tilde\Omega_m(u^2,\hat\psi(t)+\phi,t)-\tilde\Omega_m(0,\hat\psi(t),t).\end{aligned} \tag{3.37}$$

Рассмотрим $J(u)=u^2$ как потенциальную функцию Четаева. Производная J вдоль траекторий системы (3.37) определяется выражением

$$\begin{aligned}\frac{dJ}{dt}=&t^{-\frac{n}{2q}}u^{\sigma+1}\Big(\lambda_{n,\sigma}(\psi_*)+\widetilde\lambda_{n,\sigma}(u^2,\psi_*)+\delta_{n,2q}\frac{l}{q}+\mathcal{O}(\phi)+\mathcal{O}(t^{-\frac{1}{2q}})+\mathcal{O}(t^{-\kappa})\Big)\\ &+t^{-\frac{n+d}{2q}}u^2\Big(\lambda_{n+d}(\psi_*)+\widetilde\lambda_{n+d}(u^2,\psi_*)+\delta_{n+d,2q}\frac{l}{q}+\mathcal{O}(\phi)+\mathcal{O}(t^{-\frac{1}{2q}})+\mathcal{O}(t^{-\kappa})\Big)\end{aligned}$$

при $t\to\infty$ и $\phi\to 0$ для всех $u\in[0,\Delta_0^{1/2}]$. Следовательно, для всех $\epsilon\in(0,1)$ существуют $\phi_1>0$ и $t_1\ge t_0$, такие, что

$$\frac{dJ}{dt}\ge t^{-\frac{n+d}{2q}}J\Big((1-\epsilon)\lambda^*_{n+d}+\delta_{n+d,2q}\frac{l}{q}\Big)>0$$

для всех $u\in(0,\Delta_0^{1/2}]$, $|\phi|\le\phi_1$ и $t\ge t_1$, где $\lambda^*_{n+d}=\min_{v\in[0,\Delta_0]}(\lambda_{n+d}(\psi_*)+\widetilde\lambda_{n+d}(v,\psi_*))>0$. Интегрируя последнее неравенство по $[t_1,t]$, получаем

$$\begin{aligned}&u^2(t)\ge u^2(t_1)\exp\left((1-\epsilon)\lambda^*_{n+d}\Big(t^{1-\frac{n+d}{2q}}-t_1^{1-\frac{n+d}{2q}}\Big)\frac{2q}{2q-n-d}\right), && n+d<2q,\\ &u^2(t)\ge u^2(t_1)\Big(\frac{t}{t_1}\Big)^{(1-\epsilon)\lambda^*_{n+d}+\frac{l}{q}}, && n+d=2q.\end{aligned}$$

Следовательно, для всех $\delta \in (0, \Delta_0^{1/2})$ решение $(u(t), \phi(t))$ системы (3.36) с начальными данными $|u(t_1)| \le \delta$, $|\phi(t_1)| \le \phi_1$ удовлетворяет условию $[u(t)]^2 \ge \Delta_0$ при некотором $t > t_1$. Из (3.34), (3.30) и (3.9) следует, что неподвижная точка $(0,0)$ системы (3.1) неустойчива.

Для доказательства устойчивости рассмотрим поведение траекторий вблизи частного решения $v(t) \equiv 0$, $\psi(t) \equiv \hat\psi(t)$ системы (3.36). Замена переменных $v(t) = t^{-\nu}[\xi(t)]^2$, $\psi(t) = \hat\psi(t) + \eta(t)$ даёт

$$\frac{d\xi}{dt} = t^{-\frac{n+d}{2q}} Q_{n+d}(\xi,\eta) + \tilde Q_{n+d}(\xi,\eta,t), \quad \frac{d\eta}{dt} = t^{-\frac{m}{2q}} P_m(\eta) + \tilde P_m(\xi,\eta,t), \tag{3.38}$$

где

$$\begin{gathered} Q_{n+d}(\xi,\eta) \equiv \frac{\xi}{2}\Big(\lambda_{n+d}(\psi_*+\eta) + \delta_{n+d,2q}\Big(\nu + \frac{l}{q}\Big) + \lambda_{n,\sigma}(\psi_*+\eta)\xi^{\sigma-1}\Big), \\ P_m(\eta) \equiv \Omega_m(0,\psi_*+\eta) - \Omega_m(0,\psi_*) = \vartheta_m \eta + \mathcal{O}(\eta^2), \quad \eta \to 0. \end{gathered}$$

Функции $\tilde Q_{n+d}(\xi,\eta,t)$, $\tilde P_m(\xi,\eta,t)$ удовлетворяют следующим оценкам:

$$\begin{gathered} |\tilde Q_{n+d}(\xi,\eta,t)| \le K t^{-\frac{n+d}{2q}} \rho\big(t^{-\frac{1}{2q}} + t^{-\kappa} + t^{-\frac{\nu}{2}}\big), \\ |\tilde P_m(\xi,\eta,t)| \le K t^{-\frac{m}{2q}} \rho\big(t^{-\frac{1}{2q}} + t^{-\kappa} + t^{-\frac{\nu}{2}}\big) \end{gathered}$$

для всех $(\xi,\eta,t) \in \mathcal{J}(\rho_*, t_*) := \{(\xi,\eta,t) \in \mathbb{R}^3 : \rho = \sqrt{\xi^2+\eta^2} \le \rho_*, t \ge t_*\}$ с некоторыми константами $t_* \ge t_0$, $\rho_* > 0$ и $K > 0$.

Разделим оставшуюся часть доказательства на три части.

1. Сначала рассмотрим случай $n+d = m \le 2q$. Пусть $\lambda^*_{n\nu} := \lambda_{n+d}(\psi_*) + \delta_{n+d,2q}(\nu + l/q) < 0$. Используя функцию Ляпунова $W_1(\xi,\eta) = \xi^2 + \eta^2 (2\vartheta_m)^{-1}\lambda^*_{n\nu}$, можно показать, что положение равновесия $(0,0)$ системы (3.38) устойчиво. Производная функции $W_1(\xi,\eta)$ удовлетворяет равенству

$$\frac{dW_1}{dt} = \lambda^*_{n\nu} t^{-\frac{n}{2q}} \rho^2 \Big(1 + \mathcal{O}(\rho) + \mathcal{O}(t^{-\frac{1}{2q}})\Big)$$

при $\rho \to 0$ и $t \to \infty$. Отсюда, как и в доказательстве теоремы 27, следует, что существуют $\rho_1 < \rho_*$ и $t_1 \ge t_*$, такие, что решение $(\xi(t), \eta(t))$ системы (3.38) с начальными данными $\xi^2(t_1)+\eta^2(t_1)\le\rho_1^2$ удовлетворяет следующим неравенствам:

$$
\begin{aligned}
\xi^2(t)+\eta^2(t)\le & K_1\exp\Big(-\frac{2q\gamma_1}{2q-m}t^{1-\frac{m}{2q}}\Big), && n+d=m<2q,\\
\xi^2(t)+\eta^2(t)\le & K_1 t^{-\gamma_1}, && n+d=m=2q,
\end{aligned}
$$

при $t\ge t_1$, где $\gamma_1=|\lambda^*_{n\nu}\vartheta_m|/(|\lambda^*_{n\nu}|+2|\vartheta_m|)$, K_1 — положительный параметр, зависящий от $\xi(t_1)$, $\eta(t_1)$, t_1. Следовательно, неподвижная точка $(0,0)$ системы (3.1) экспоненциально устойчива, если $m<2q$, $\lambda_{n+d}(\psi_*)<0$, и полиномиально устойчива, если $m=2q$, $\lambda_{n+d}(\psi_*)+\nu+l/q<0$.

Если $\lambda_{n+d}(\psi_*)+\delta_{n+d,2q}(\nu+l/q)>0$ и $\lambda_{n,\sigma}(\psi_*)<0$, уравнение $Q_{n+d}(\xi,0)=0$ имеет решение $\xi_*:=(\lambda^*_{n\nu}/|\lambda_{n,\sigma}(\psi_*)|)^{1/(\sigma-1)}>0$ такое, что $\partial_\xi Q_{n+d}(\xi_*,0)=-(\sigma-1)\lambda^*_{n\nu}/2<0$. Замена переменной $\xi(t)=\xi_*+\zeta(t)$ преобразует систему (3.38) в

$$
\begin{aligned}
&\frac{d\zeta}{dt}=t^{-\frac{n+d}{2q}}Q_{n+d}(\xi_*+\zeta,\eta)+\tilde Q_{n+d}(\xi_*+\zeta,\eta,t),\\
&\frac{d\eta}{dt}=t^{-\frac{m}{2q}}P_m(\eta)+\tilde P_m(\xi_*+\zeta,\eta,t).
\end{aligned}\tag{3.39}
$$

Легко проверить, что невозмущённая система

$$
\frac{d\zeta}{dt}=t^{-\frac{n+d}{2q}}Q_{n+d}(\xi_*+\zeta,\eta),\quad \frac{d\eta}{dt}=t^{-\frac{m}{2q}}P_m(\eta)\tag{3.40}
$$

имеет устойчивое тривиальное решение $\zeta(t)\equiv0$, $\eta(t)\equiv0$. Покажем, что это решение устойчиво относительно возмущений $\tilde Q_{n+d}$ и $\tilde P_m$. Рассмотрим $\ell(\zeta,\eta)=(\zeta^2+\eta^2)/2$ в качестве кандидата на функцию Ляпунова. Её производная вдоль траекторий системы (3.39) определяется выражением

$$
\begin{aligned}
\frac{d\ell}{dt}=&t^{-\frac{m}{2q}}\Big(\zeta Q_{n+d}(\xi_*+\zeta,\eta)+\eta P_m(\eta)\Big)\\
&+\zeta\tilde Q_{n+d}(\xi_*+\zeta,\eta,t)+\eta\tilde P_m(\xi_*+\zeta,\eta,t).
\end{aligned}\tag{3.41}
$$

Существует $\varrho_1>0$ такое, что $\zeta Q_{n+d}(\xi_*+\zeta,\eta)+\eta P_m(\eta)\le-\gamma_1^*\varrho^2/2$ и $\zeta\tilde Q_{n+d}+\eta\tilde P_m\le 2K\varrho t^{-\varsigma-m/2q}$ для всех (ζ,η,t): $\varrho:=\sqrt{\zeta^2+\eta^2}\le\varrho_1$ и $t\ge t_*$, где $\gamma_1^*=\min\{|\partial_\xi Q_{n+d}(\xi_*,0)|,|\vartheta_m|\}>0$, $\varsigma=\min\{1/(2q),\kappa,\nu/2\}$. Следовательно, для всех

$\varepsilon \in (0, \varrho_1)$ существуют $\delta > 0$ и $t_1 = t_* + ((8K/(\delta\gamma_1^*))^{1/\varsigma}$, такие, что

$$\frac{d\ell}{dt} \le -t^{-\frac{m}{2q}} \frac{\varrho^2}{2}\Big(\gamma_1^* - \frac{4K}{\delta t_1^\varsigma}\Big) \le -t^{-\frac{m}{2q}} \frac{\gamma_1^* \varrho^2}{4} < 0$$

для всех (ζ, η): $\delta \le \varrho \le \varepsilon$ и $t \ge t_1$. Это означает, что любое решение $\zeta(t)$, $\eta(t)$ с начальными данными $\zeta^2(\tau_1) + \eta^2(\tau_1) \le \delta^2$ с $\tau_1 \ge t_1$ не может покинуть окрестность $\{(\zeta, \eta) : \varrho \le \varepsilon\}$ при $t > \tau_1$. Кроме того, из (3.41) следует, что $d\ell/dt \le t^{-m/2q}(-\gamma_1^*\ell + 2K\varrho_1 t^{-\varsigma})$ при $\varrho \le \varrho_1$ и $t \ge t_*$. Интегрируя последнее неравенство в случае $m = 2q$, получаем

$$0 \le \ell(\zeta(t), \eta(t)) \le \ell(\zeta(t_*), \eta(t_*)) t^{-\gamma_1^*} + 2K\varrho_1 t^{-\gamma_1^*} \int\limits_{t_*}^{t} \tau^{\gamma_1^* - \varsigma - 1}\, d\tau, \quad t \ge t_*.$$

Следовательно, $\ell(\zeta(t), \eta(t)) = \mathcal{O}(t^{-\gamma_1^*}) + \mathcal{O}(t^{-\varsigma})$ при $t \to \infty$ для решений, стартующих из области $\{(\zeta, \eta) : \varrho < \varrho_1\}$. Аналогичная оценка справедлива и в случае $m < 2q$. Возвращаясь к переменным (v, ψ), видим, что $v(t) = \mathcal{O}(t^{-\nu})$ и $\psi(t) = \psi_*(t) + \mathcal{O}(t^{-\gamma_1^*/2}) + \mathcal{O}(t^{-\varsigma/2})$ при $t \to \infty$. Таким образом, неподвижная точка $(0, 0)$ системы (3.1) полиномиально устойчива.

2. Рассмотрим случай $m < n + d \le 2q$. Покажем, что при $\lambda_{n\nu}^* < 0$ тривиальное решение $\xi(t) \equiv 0$, $\eta(t) \equiv 0$ системы (3.38) устойчиво. Рассмотрим $W_2(\xi, \eta, t) = t^{(n+d-m)/2q}\xi^{2p} + b_2\eta^{2p}$ как функцию Ляпунова, где $p \ge 1$ — целое число, такое что $\lambda_{n\nu p}^* := \lambda_{n\nu}^* + \delta_{n+d,2q}(n+d-m)(2pq)^{-1} < 0$ и $b_2 := \lambda_{n\nu p}^*(2\vartheta_m)^{-1} > 0$. Производная $W_2(\xi, \eta, t)$ вдоль траекторий системы (3.38) определяется выражением

$$\begin{aligned} \frac{dW_2}{dt} &= pt^{-\frac{m}{2q}}\Big(\lambda_{n\nu}^*\xi^{2p} + \lambda_{n\nu p}^*\eta^{2p} + \frac{n+d-m}{2qp}\xi^{2p} t^{\frac{n+d}{2q}-1} + \mathcal{O}(\rho^{2p+1})\Big) \\ &\quad \times (1 + \mathcal{O}(t^{-\varsigma})), \quad \rho \to 0, \quad t \to \infty. \end{aligned}$$

Следовательно, существуют $0 < \rho_2 \le \rho_*$ и $t_2 \ge t_*$, такие, что

$$\begin{aligned} & A_2\rho^{2p} \le W_2(\xi, \eta, t) \le B_2 t^{\frac{n+d-m}{2q}}(\xi^{2p} + \eta^{2p}), \\ & \frac{dW_2}{dt} \le -\frac{p\lambda_{n\nu p}^*}{2} t^{-\frac{m}{2q}}(\xi^{2p} + \eta^{2p}) \le -p\gamma_2 t^{-\frac{n+d}{2q}} W_2 \end{aligned}$$

для всех $(\xi,\eta,t)\in\mathcal{J}(\rho_2,t_2)$, где $A_2=2^{1-p}\min\{1,b_2\}$, $B_2=\max\{1,b_2\}$, $\gamma_2=\lambda^*_{n\nu p}(2B_2)^{-1}>0$. Интегрируя последнее неравенство, получаем следующие оценки:

$$\xi^2(t)+\eta^2(t)\le K_2\exp\Big(-\frac{2q\gamma_2}{2q-n-d}t^{1-\frac{n+d}{2q}}\Big),\qquad m<n+d<2q,$$
$$\xi^2(t)+\eta^2(t)\le K_2 t^{-\gamma_2},\qquad m<n+d=2q,$$

при $t\ge t_2$, где K_2 — положительная константа, зависящая от $\xi(t_2)$, $\eta(t_2)$ и t_2. Таким образом, положение равновесия $(0,0)$ системы (3.1) экспоненциально устойчиво, если $m<n+d<2q$, $\lambda_{n+d}(\psi_*)<0$, и полиномиально устойчиво, если $m<n+d=2q$, $\lambda_{n+d}(\psi_*)+\nu+l/q<0$.

Если $\lambda^*_{n\nu}>0$ и $\lambda_{n,\sigma}(\psi_*)<0$, то устойчивость частного решения $(0,\hat\psi(t))$ системы (3.36) следует из поведения траекторий системы (3.38) в окрестности точки $(\xi_*,0)$. Построим функцию Ляпунова для (3.39) в виде $\ell_2(\zeta,\eta,t)=t^{(n+d-m)/2q}\zeta^{2p}+\eta^{2p}$, где $p\ge1$ — целое число, такое что $Q^*_{np}:=\partial_\xi Q_{n+d}(\xi_*,0)+(n+d-m)/(4pq)<0$. Легко проверить, что существует $\varrho_2>0$, такое что

$$\begin{aligned}\frac{d\ell_2}{dt}=&2pt^{-\frac{m}{2q}}\Big(\zeta^{2p-1}Q_{n+d}(\xi_*+\zeta,\eta)+\eta^{2p-1}P_m(\eta)+\frac{n+d-m}{4qp}t^{\frac{n+d}{2q}-1}\zeta^{2p}\Big)\\&+2p\Big(t^{\frac{n+d-m}{2q}}\zeta^{2p-1}\tilde Q_{n+d}(\xi_*+\zeta,\eta,t)+\eta^{2p-1}\tilde P_m(\xi_*+\zeta,\eta,t)\Big)\\&\le-pt^{-\frac{m}{2q}}\varrho^{2p-1}\Big(\gamma_2^*\varrho-4Kt^{-\varsigma}\Big)\end{aligned}$$

при $\varrho\le\varrho_2$ и $t\ge t_*$, где $\gamma_2^*=\min\{|Q^*_{np}|,|\vartheta_m|\}$. Следовательно, для всех $\varepsilon\in(0,\varrho_2)$ существуют $\delta>0$ и $t_2=t_*+((8K/(\delta\gamma_2^*))^{1/\varsigma}$ такие, что

$$\frac{d\ell_2}{dt}\le-pt^{-\frac{m}{2q}}\varrho^{2p}\Big(\gamma_2^*-\frac{4K}{\delta t_2^\varsigma}\Big)\le-t^{-\frac{m}{2q}}p\varrho^{2p}\frac{\gamma_2^*}{2}<0$$

для всех (ζ,η): $\delta\le\varrho\le\varepsilon$ и $t\ge t_2$. Это означает, что тривиальное решение (3.40) устойчиво при возмущениях $\tilde Q_{n+d}$ и $\tilde P_m$. В частности, любое решение $\zeta(t)$, $\eta(t)$ системы (3.39) с начальными данными $\zeta^2(\tau_1)+\eta^2(\tau_1)\le\varrho_2^2/4$ при $\tau_1\ge t_1$ не может покинуть область $\{(\zeta,\eta):\varrho<\varrho_2\}$ для всех $t>\tau_1$. Возвращаясь к переменным v и ψ, мы видим, что частное решение $(0,\psi(t))$ системы (3.36) устойчиво и $v(t)=\mathcal{O}(t^{-\nu})$ при $t\to\infty$. Следовательно, неподвижная точка $(0,0)$ системы (3.1) полиномиально устойчива.

3. Наконец, рассмотрим случай $n+d<m\le 2q$. Пусть $\lambda_{n+d}(\psi_*)<0$. В этом случае мы используем $W_3(\xi,\eta,t)=a_3\xi^{2p}+t^{(m-n-d)/2q}\eta^{2p}$ в качестве функции Ляпунова, где $p\ge 1$ — целое число, такое, что $\vartheta^*_{mp}:=\vartheta_m+(m-n-d)/(4pq)<0$ и $a_3:=\vartheta^*_{mp}(\lambda_{n+d}(\psi_*))^{-1}>0$. Производная $W_3(\xi,\eta,t)$ вдоль траекторий системы (3.38) удовлетворяет условию

$$\begin{aligned}\frac{dW_3}{dt}=&-2pt^{-\frac{n+d}{2q}}\Big(\vartheta^*_{mp}\xi^{2p}+\vartheta_m\eta^{2p}+\frac{m-n-d}{4pq}t^{\frac{m}{2q}-1}\eta^{2p}+\mathcal{O}(\rho^{2p+1})\Big)\\&\times(1+\mathcal{O}(t^{-\varsigma}))\end{aligned}$$

при $\rho\to 0$ и $t\to\infty$. Следовательно, существуют $\rho_3\le\rho_*$ и $t_3\ge t_*$, такие, что

$$\begin{gathered}A_3\rho^{2p}\le W_3(\xi,\eta,t)\le B_3t^{\frac{m-n-d}{2q}}(\xi^{2p}+\eta^{2p}),\\ \frac{dW_3}{dt}\le -p\vartheta^*_{mp}t^{-\frac{n+d}{2q}}(\xi^{2p}+\eta^{2p})\le -p\gamma_3t^{-\frac{m}{2q}}W_3\end{gathered}$$

для всех $(\xi,\eta,t)\in\mathcal{J}(\rho_3,t_3)$, где $A_3=2^{1-p}\min\{1,a_3\}$, $B_3=\max\{1,a_3\}$, $\gamma_3=\vartheta^*_{mp}B_3^{-1}>0$. Следовательно, равновесие $(0,0)$ устойчиво. Интегрируя последнее неравенство, получаем

$$\begin{aligned}&\xi^2(t)+\eta^2(t)\le K_3\exp\Big(-\frac{2q\gamma_3}{2q-m}t^{1-\frac{m}{2q}}\Big), && n+d<m<2q,\\ &\xi^2(t)+\eta^2(t)\le K_3t^{-\gamma_3}, && n+d<m=2q\end{aligned}$$

при $t\ge t_3$, где K_3 — положительная константа, зависящая от $\xi(t_3)$, $\eta(t_3)$ и t_3. Таким образом, положение равновесия $(0,0)$ системы (3.1) экспоненциально устойчиво, если $n+d<m<2q$, и полиномиально устойчиво, если $n+d<m=2q$.

Покажем, что условия $\lambda_{n+d}(\psi_*)>0$, $\lambda_{n,\sigma}(\psi_*)<0$ обеспечивают устойчивость полинома. Рассмотрим $\ell_3(\zeta,\eta)=\zeta^{2p}+t^{(m-n-d)/2q}\eta^{2p}$ в качестве кандидата на функцию Ляпунова для системы (3.39). Здесь p — положительное целое число, такое что $\vartheta^*_{mp}<0$. Легко показать, что существует $\varrho_3>0$, такое, что производная удовлетворяет условию

$$\frac{d\ell_3}{dt} = 2pt^{-\frac{n+d}{2q}}\Big(\zeta^{2p-1}Q_{n+d} + \eta^{2p-1}P_m + \frac{m-n-d}{4pq}t^{\frac{m}{2q}-1}\eta^{2p} \\ + \zeta^{2p-1}\tilde{Q}_{n+d} + t^{\frac{m}{2q}}\eta^{2p-1}\tilde{P}_m\Big) \le -pt^{-\frac{n+d}{2q}}\varrho^{2p-1}(\gamma_3^*\varrho - 4Kt^{-\varsigma})$$

при $\varrho \le \varrho_3$ и $t \ge t_*$ с $\gamma_3^* = \min\{|\partial_\xi Q_{n+d}(\xi_*)|, |\vartheta^*_{mp}|\} > 0$. Следовательно, для всех $\varepsilon \in (0, \varrho_3)$ существуют $\delta > 0$ и $t_3 = t_* + (8K/(\delta\gamma_3^*))^{1/\varsigma}$ такие, что $d\ell_3/dt \le -t^{-(n+d)/2q}p\varrho^{2p}\gamma_3^*/2 < 0$ для всех $\delta \le \varrho \le \varepsilon$ и $t \ge t_3$. Следовательно, любое решение $\zeta(t)$, $\eta(t)$, начинающееся с $\{(\zeta,\eta) : \varrho \le \delta\}$ при $\tau_3 \ge t_3$, не может покинуть окрестность $\{(\zeta,\eta) : \varrho \le \varepsilon\}$ при $t > \tau_3$. Таким образом, положение равновесия $(0,0)$ системы (3.1) полиномиально устойчиво. $\square$

Доказательство теоремы 29. Возьмём $N = 2q$ в (3.11); тогда (3.13) принимает следующий вид:

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{k=n}^{2q} t^{-\frac{k}{2q}}\Lambda_k(v,\psi) + \tilde{\Lambda}_{2q}(v,\psi,t), \quad \frac{d\psi}{dt} = t^{-\frac{m}{2q}}\Omega_m(v,\psi) + \tilde{\Omega}_m(v,\psi,t), \quad (3.42)$$

где $\Lambda_{2q}(v,\psi) = lv/q + \mathcal{O}(v^{(\sigma+1)/2})$ при $v \to 0$. Поскольку $\omega(E) \not\equiv \mathrm{const}$, имеем $l \ge 1$. Замена переменных $v(t) = t^{-\mu}[\xi(t)]^2$, $\psi(t) = \hat{\psi}(t) + \eta(t)$ с $\mu = (2q - n)/(q(\sigma-1)) \ge 0$ преобразует систему (3.42) в

$$\frac{d\xi}{dt} = t^{-1}Q_{2q}(\xi,\eta) + \tilde{Q}_{2q}(\xi,\eta,t), \quad \frac{d\eta}{dt} = t^{-\frac{m}{2q}}P_m(\eta) + \tilde{P}_m(\xi,\eta,t), \quad (3.43)$$

где $Q_{2q}(\xi,\eta) = ((\mu + l/q)\xi + \lambda_{n,\sigma}(\psi_* + \eta)\xi^\sigma)/2$, $P_m(\eta) = \Omega_m(0,\psi_*+\eta) - \Omega_m(0,\psi_*)$, и остатки удовлетворяют оценкам: $|\tilde{Q}_{2q}(\xi,\eta,t)| \le Kt^{-1}\varrho(t^{-1/2q} + t^{-\kappa} + t^{-\mu/2})$, $|\tilde{P}_m(\xi,\eta,t)| \le Kt^{-m/2q}\varrho(t^{-1/2q} + t^{-\kappa} + t^{-\mu/2})$ при $t \ge t_*$ и $\varrho := \sqrt{\xi^2+\eta^2} \le \varrho_*$ с некоторыми константами $\varrho_* > 0$, $t_* \ge t_0$, $K > 0$. Видим, что уравнение $Q_{2q}(\xi) = 0$ имеет положительный корень $\xi_* := ((\mu + l/q)/|\lambda_{n,\sigma}(\psi_*)|)^{1/(\sigma-1)}$ такой, что $\partial_\xi Q_{2q}(\xi_*, 0) = -(\sigma-1)(\mu + l/q)/2 < 0$. Покажем, что решения системы (3.43), стартующие вблизи точки $(\xi_*, 0)$, остаются вблизи неё. Замена переменной $\xi(t) = \xi_* + \zeta(t)$ даёт

$$\begin{aligned}\frac{d\zeta}{dt} &= t^{-1}Q_{2q}(\xi_* + \zeta, \eta) + \tilde{Q}_{2q}(\xi_* + \zeta, \eta, t),\\ \frac{d\eta}{dt} &= t^{-\frac{m}{2q}}P_m(\eta) + \tilde{P}_m(\xi_* + \zeta, \eta, t).\end{aligned} \tag{3.44}$$

Предположим, что p — целое число, такое что $Q^*_{2qp} := \partial_\xi Q_{2q}(\xi_*, 0) + (2q - m)/(4pq) < 0$. Мы используем $\ell(\zeta, \eta, t) = t^{1-m/2q}\zeta^{2p} + \eta^{2p}$ в качестве кандидата на функцию Ляпунова для системы (3.44). Нетрудно видеть, что существует $\varrho_0 \le \varrho_*$, такое что

$$\begin{aligned}\frac{d\ell}{dt} =& 2pt^{-\frac{m}{2q}}\Big(\zeta^{2p-1}Q_{2q} + \frac{2q-m}{4pq}\zeta^{2p}t^{\frac{m}{2q}-1} + \eta^{2p-1}P_m + \zeta^{2p-1}t\tilde{Q}_{2q} + \eta^{2p-1}t^{\frac{m}{2q}}\tilde{P}_m\Big)\\ &\le -pt^{-\frac{m}{2q}}\varrho^{2p-1}(\gamma_0^*\varrho - 4Kt^{-\varsigma})\end{aligned}$$

при $\varrho \le \varrho_0$ и $t \ge t_*$, где $\gamma^*_0 = \min\{|Q^*_{2qp}|, |\vartheta_m|\} > 0$, $\varsigma = \min\{1/(2q), \kappa, \mu/2\}$. Следовательно, для всех $\varepsilon \in (0, \varrho_0)$ существуют $\delta > 0$ и $t_4 = t_* + (8K/(\delta\gamma^*_0))^{1/\varsigma}$ такие, что $d\ell/dt \le -pt^{-m/2q}\varrho^{2p}\gamma^*_0/2 < 0$ для всех $\delta \le \varrho \le \varepsilon$ и $t \ge t_4$. Следовательно, любое решение $\zeta(t)$, $\eta(t)$, стартующее из $\{(\zeta, \eta) : \varrho \le \delta\}$ при $\tau_4 \ge t_4$, не может покинуть окрестность $\{(\zeta, \eta) : \varrho \le \varepsilon\}$ при $t > \tau_4$. Таким образом, возвращаясь к системе (3.1), мы видим, что положение равновесия $(0, 0)$ полиномиально устойчиво. □

3.5.4. Устойчивость в режиме фазового дрейфа

Доказательство теоремы 30. Выберем $N = n$ и рассматриваем первое уравнение в (3.32). Легко проверить, что

$$\frac{dv}{dt} = t^{-\frac{n}{2q}}v\Big(\lambda_n(\psi) + \widetilde{\lambda}_n(v, \psi) + \delta_{n,2q}\frac{l}{q} + \mathcal{O}(t^{-\frac{1}{2q}})\Big)$$

при $t \to \infty$ для всех $v \in [0, \Delta_0]$ и $\psi \in \mathbb{R}$. Пусть $\lambda_n(\psi) + \delta_{n,2q}l/q < 0$. Тогда для всех $\epsilon \in (0, 1)$ существуют $0 < \Delta_1 \le \Delta_0$ и $t_1 \ge t_0$, такие, что

$$\frac{dv}{dt} \le -t^{-\frac{n}{2q}}v(1-\epsilon)\mu^*_n < 0 \tag{3.45}$$

для всех $v \in (0, \Delta_1]$, $t \geq t_1$ и $\psi \in \mathbb{R}$ с

$$\mu_n^* := \min_{\psi \in \mathbb{R}} \left| \lambda_n(\psi) + \delta_{n,2q} \frac{l}{q} \right| > 0.$$

Интегрируя (3.45) по $[t_1, t]$, получаем

$$\begin{aligned} &0 \leq v(t) \leq C_1 \exp\left(-(1-\epsilon) \frac{2q\mu_n^*}{2q-n} t^{1-\frac{n}{2q}} \right), && n < 2q, \\ &0 \leq v(t) \leq C_1 t^{-(1-\epsilon)\mu_n^*}, && n = 2q, \end{aligned}$$

где $C_1 > 0$ — положительная константа, зависящая от $v(t_1)$ и t_1. Следовательно, решение $v(t) \equiv 0$ устойчиво при всех ψ. Причём устойчивость экспоненциальная, если $n < 2q$, и полиномиальная, если $n = 2q$.

Пусть $\lambda_n(\psi) > 0$ и $\widetilde{\lambda}_n(v, \psi) \geq 0$ для всех $v \in [0, \Delta_0]$, $\psi \in \mathbb{R}$. Обозначим $\mu_n := \min_{\psi \in \mathbb{R}} \lambda_n(\psi) > 0$. Тогда для всех $\epsilon \in (0, 1)$ существует $t_2 \geq t_0$ такое, что

$$\frac{dv}{dt} \geq t^{-\frac{n}{2q}} v \Big((1-\epsilon)\mu_n + \delta_{n,2q} \frac{l}{q} \Big) > 0 \tag{3.46}$$

для всех $v \in (0, \Delta_0]$, $t \geq t_2$ и $\psi \in \mathbb{R}$. Интегрируя (3.46), получаем следующие оценки при $t \geq t_2$:

$$\begin{aligned} &v(t) \geq v(t_2) \exp\left((1-\epsilon)\mu_n \Big(t^{1-\frac{n}{2q}} - t_2^{1-\frac{n}{2q}} \Big) \frac{2q}{2q-n} \right), && n < 2q, \\ &v(t) \geq v(t_2) \left(\frac{t}{t_2} \right)^{(1-\epsilon)\mu_n + \frac{l}{q}}, && n = 2q. \end{aligned}$$

Следовательно, $\forall \, \delta \in (0, \Delta_0)$ решение $v(t)$ с начальными данными $v(t_2) = \delta$ достигает Δ_0 при некотором $t_2^* > t_2$. Учитывая (3.34), (3.30) и (3.9), получаем неустойчивость положения равновесия $(0, 0)$ в системе (3.1). □

Замечание 5. *Заметим, что устойчивость равновесия* $(0, 0)$ *системы* (3.1) *не обоснована, когда* $n = 2q$, $0 < \lambda_n(\psi) + l/q < l/q$ *для всех* $\psi \in \mathbb{R}$ *и* $\omega(E) \not\equiv \mathrm{const}$ $(l \neq 0)$. *Рассуждая также, как и в теореме 30, получаем, что тривиальное решение* $v(t) \equiv 0$ *неустойчиво в системе* (3.32)*. В этом случае можно сказать, что равновесие* $(0, 0)$ *неустойчиво с весом* $t^{l/2q}$ *в исходных переменных* (x_1, x_2)*.*

Доказательство теоремы 31. Возьмём $N = n$ в системе (3.13). Рассмотрим сначала случай $m < n \le 2q$. Пусть $\widehat{\gamma}_{n,m} > 0$ и $\widetilde{\lambda}_n(v,\psi) \ge 0$ для всех $v \in [0,\Delta_0]$ и $\psi \in \mathbb{R}$. Используем

$$W_1(v,\psi,t) = v - t^{-\frac{n-m}{2q}} v\Big(Z^+_{n,m} + \operatorname{sgn}(\omega_m(\psi)) Z_{n,m}(\psi)\Big)$$

как кандидат на функцию Четаева для системы (3.32). Легко проверить, что

$$\frac{dW_1}{dt} = t^{-\frac{n}{2q}} v\Big(\widehat{\gamma}_{n,m}|\omega_m(\psi)| + \widetilde{\lambda}_n(v,\psi) + \delta_{n,2q}\frac{l}{q} + \mathcal{O}(t^{-\frac{1}{2q}})\Big)$$

при $t \to \infty$ для всех $v \in [0,\Delta_0]$, $\psi \in \mathbb{R}$. Следовательно, для всех $\epsilon \in (0,1)$ существует $t_1 \ge t_0$ такое, что $v/2 \le W_1(v,\psi,t) \le v$ и

$$\frac{dW_1}{dt} \ \ge \ t^{-\frac{n}{2q}}\Big((1-\epsilon)\widehat{\gamma}_{n,m}\omega^-_m + \delta_{n,2q}\frac{l}{q}\Big) W_1 > 0 \tag{3.47}$$

для всех $v \in (0,\Delta_0]$, $t \ge t_1$ и $\psi \in \mathbb{R}$. Интегрируя (3.47) по $[t_1,t]$, получаем

$$\begin{aligned} v(t) &\ge W_1(v(t),\psi(t),t) \ge v(t_1)\exp\Big((1-\epsilon)\widehat{\gamma}_{n,m}\omega^-_m\frac{2q}{2q-n}t^{1-\frac{n}{2q}}\Big), && m<n<2q,\\ v(t) &\ge W_1(v(t),\psi(t),t) \ge v(t_1)\Big(\frac{t}{t_1}\Big)^{(1-\epsilon)\widehat{\gamma}_{n,m}\omega^-_m + l/q}, && m<n=2q. \end{aligned}$$

Эти неравенства обосновывают неустойчивость решения $v(t) \equiv 0$ для всех $\psi \in \mathbb{R}$.

Пусть $\widehat{\gamma}_{n,m} + \delta_{n,2q}\widehat{\chi}_m l/q < 0$. Рассмотрим

$$W_2(v,\psi,t) = v - t^{-\frac{n-m}{2q}} v\Big(Z^+_{n,m} + X^+_m + \operatorname{sgn}(\omega_m(\psi))\big(Z_{n,m}(\psi) + X_m(\psi)\big)\Big)$$

в качестве кандидата на функцию Ляпунова для системы (3.32). Полная производная $W_2(v,\psi,t)$ по t удовлетворяет условию:

$$\frac{dW_2}{dt} = t^{-\frac{n}{2q}}|\omega_m(\psi)| v\Big(\widehat{\gamma}_{n,m} + \delta_{n,2q}\widehat{\chi}_m\frac{l}{q} + \mathcal{O}(v^{\frac{1}{2}}) + \mathcal{O}(t^{-\frac{1}{2q}})\Big)$$

при $v \to 0$, $t \to \infty$ для всех $\psi \in \mathbb{R}$. Следовательно, для всех $\epsilon \in (0,1)$ существуют $0 < \Delta_2 \le \Delta_0$ и $t_2 \ge t_0$, такие, что $v/2 \le W_2(v,\psi,t) \le v$ и

$$\frac{dW_2}{dt} \le t^{-\frac{n}{2q}}(1-\epsilon)\omega^-_m\Big(\widehat{\gamma}_{n,m} + \delta_{n,2q}\widehat{\chi}_m\frac{l}{q}\Big) W_2 < 0 \tag{3.48}$$

для всех $v \in (0, \Delta_2]$, $t \geq t_2$ и $\psi \in \mathbb{R}$. Интегрирование (3.48) по $[t_2, t]$ даёт

$$v(t) \leq C_2 \exp\Big(-(1-\epsilon)\omega_m^- |\widehat{\gamma}_{n,m}| \frac{2q}{2q-n} t^{1-\frac{n}{2q}} \Big), \qquad m < n < 2q,$$
$$v(t) \leq C_2 \exp\Big(-(1-\epsilon)\omega_m^- \Big|\widehat{\gamma}_{n,m} + \widehat{\chi}_m \frac{l}{q}\Big| \log t \Big), \qquad m < n = 2q,$$

где $C_2 > 0$ — константа, зависящая от $v(t_2)$ и t_2. Следовательно, решение $v(t) \equiv 0$ экспоненциально устойчиво для всех $\psi \in \mathbb{R}$, если $m < n < 2q$ и $\widehat{\gamma}_{n,m} < 0$. Если $m < n = 2q$ и $\widehat{\gamma}_{n,m} + \widehat{\chi}_m l/q < 0$, решение полиномиально устойчиво.

Теперь пусть $n \leq m \leq 2q$. В этом случае мы используем $W_3(v,\psi,t) = v\exp(t^{(m-n)/2q}(Z_{n,m}^+ - Z_{n,m}(\psi)))$ в качестве функции Ляпунова. Поскольку $0 \leq Z_{n,m}^+ - Z_{n,m}(\psi) \leq 2Z_{n,m}^+$, то имеем $W_3(v,\psi,t) \geq v$ для всех $v > 0$, $t \geq t_0$ и $\psi \in \mathbb{R}$. Полная производная $W_3(v,\psi,t)$ по t определяется выражением

$$\frac{dW_3}{dt} = t^{-\frac{n}{2q}} W_3 \Big(\widehat{\gamma}_{n,m} |\omega_m(\psi)| + \frac{m-n}{2q} \big(Z_{n,m}^+ - Z_{n,m}(\psi) \big) t^{-1+\frac{m}{2q}} + \widetilde{\lambda}_n(v,\psi) + \mathcal{O}(t^{-\frac{1}{2q}}) \Big)$$

при $v \to 0$, $t \to \infty$ для всех $\psi \in \mathbb{R}$. Если $\widehat{\gamma}_{n,m}^* := \widehat{\gamma}_{n,m}\omega_m^- + \delta_{m,2q} Z_{m,n}^+ (m-n)/q < 0$, то для всех $\epsilon \in (0,1)$ существуют $0 < \Delta_3 \leq \Delta_0$ и $t_3 \geq t_0$, такие, что

$$\frac{dW_3}{dt} \leq -t^{-\frac{n}{2q}} (1-\epsilon) |\widehat{\gamma}_{n,m}^*| W_3 < 0$$

для всех $v \in (0, \Delta_3]$, $t \geq t_3$ и $\psi \in \mathbb{R}$. Рассуждая, как и выше, видим, что решение $v(t) \equiv 0$ экспоненциально устойчиво, если $\widehat{\gamma}_{n,m} < 0$ и $n \leq m < 2q$ или $n = m = 2q$. Если $n < m = 2q$, то условие $\widehat{\gamma}_{n,m}\omega_m^- + \delta_{m,2q} Z_{n,m}^+ (m-n)/q < 0$ гарантирует экспоненциальную устойчивость. Аналогично, если $\widehat{\gamma}_{n,m} > 0$ и $\widetilde{\lambda}_n(v,\psi) \geq 0$ для всех $v \in [0, \Delta_0]$ и $\psi \in \mathbb{R}$, то

$$\frac{dW_3}{dt} \geq t^{-\frac{n}{2q}} (1-\epsilon) \widehat{\gamma}_{n,m} \omega_m^- W_3 > 0$$

для всех $v \in (0, \Delta_0]$, $t \geq t_3$ и $\psi \in \mathbb{R}$. В этом случае решение $v(t) \equiv 0$ неустойчиво для всех $\psi \in \mathbb{R}$.

Учитывая (3.34), (3.30) и (3.9), получаем соответствующие утверждения об устойчивости равновесия $(0,0)$ в системе (3.1). $\square$

Доказательство теоремы 32. Возьмём $N = n+d$ в системе (3.36). Подставив $v(t) = t^{-\nu}[R(t)]^2$, получим

$$\frac{dR}{dt} = t^{-\frac{n+d}{2q}} A_{n+d}(R,\psi) + \tilde{A}_{n+d}(R,\psi,t), \quad \frac{d\psi}{dt} = t^{-\frac{m}{2q}}\omega_m(\psi) + \tilde{B}_m(R,\psi,t), \quad (3.49)$$

где $A_{n+d}(R,\psi) = R(\lambda_{n+d}(\psi) + \delta_{n+d,2q}(\nu + l/q) + \lambda_{n,\sigma}(\psi)R^{\sigma-1})/2$, и

$$|\tilde{A}_{n+d}(R,\psi,t)| \le Kt^{-\frac{n+d}{2q}} R\big(t^{-\frac{1}{2q}} + t^{-\frac{\nu}{2}}\big), \quad |\tilde{B}_m(R,\psi,t)| \le Kt^{-\frac{m}{2q}} R\big(t^{-\frac{1}{2q}} + t^{-\frac{\nu}{2}}\big)$$

для всех $R \in [0, R_*]$, $t \ge t_*$, $\psi \in \mathbb{R}$ с некоторыми константами $R_* > 0$, $t_* \ge t_0$ и $K > 0$. Заметим, что правые части системы (3.49) имеют тот же вид, что и (3.32), только n и l/q заменены на $n+d$ и $\nu + l/q$ соответственно. Поэтому, повторяя доказательство теоремы 30, можно показать, что равновесие $(0,0)$ системы (3.1) экспоненциально устойчиво, если $n + d < 2q$, $\lambda_{n+d}(\psi) < 0$ для всех $\psi \in \mathbb{R}$ и полиномиально устойчиво, если $n+d = 2q$, $\lambda_{n+d}(\psi) + \nu + l/q < 0$ для всех $\psi \in \mathbb{R}$.

Пусть $\lambda_{n+d}(\psi) + \delta_{n+d,2q} l/q < 0$ и $\lambda_{n,\sigma}(\psi) < 0$ для всех $\psi \in \mathbb{R}$. Легко проверить, что существуют $0 < \Delta_1 \le \Delta_0$ и $t_1 \ge t_0$, такие, что для всех $v \in (0, \Delta_1]$, $t \ge t_1$ и $\psi \in \mathbb{R}$ выполняются следующие неравенства:

$$\frac{dv}{dt} \le -t^{-\frac{n+d}{2q}} \frac{v}{2}\Big(\mu_{n,\sigma} v^{\frac{\sigma-1}{2}} t^{\frac{d}{2q}} + \mu^*_{n+d}\Big) \le -t^{-\frac{n+d}{2q}} \mu^*_{n+d}\frac{v}{2} < 0, \quad (3.50)$$

где $\mu_{n,\sigma} := \min_{\psi\in\mathbb{R}} |\lambda_{n,\sigma}(\psi)| > 0$ и $\mu^*_{n+d} := \min_{\psi\in\mathbb{R}} |\lambda_{n+d}(\psi) + \delta_{n+d,2q} l/q| > 0$. Интегрируя (3.50) по $[t_1, t]$, получаем

$$\begin{aligned} &0 \le v(t) \le C_1 \exp\Big(- \frac{q\mu^*_{n+d}}{2q - n - d} t^{1-\frac{n+d}{2q}}\Big), && n + d < 2q, \\ &0 \le v(t) \le C_1 t^{-\frac{\mu^*_{n+d}}{2}}, && n + d = 2q, \end{aligned}$$

где $C_1 > 0$ — положительная константа, зависящая от $v(t_1)$ и t_1. Следовательно, решение $v(t) \equiv 0$ системы (3.36) устойчиво при всех $\psi \in \mathbb{R}$. Причём устойчивость экспоненциальная, если $n + d < 2q$, и полиномиальная, если $n + d = 2q$.

Пусть $\lambda_{n+d}(\psi) > 0$, $\lambda_{n,\sigma}(\psi) > 0$, $\widetilde{\lambda}_{n+d}(v,\psi) \ge 0$, $\widetilde{\lambda}_{n,\sigma}(v,\psi) \ge 0$ для всех

$v \in [0, \Delta_0]$, $\psi \in \mathbb{R}$. Тогда существует $t_2 \geq t_0$ такое, что

$$\frac{dv}{dt} \geq t^{-\frac{n+d}{2q}} \frac{v}{2} \left(\mu_{n,\sigma} v^{\frac{\sigma-1}{2}} t^{\frac{d}{2q}} + \mu_{n+d} + 2\delta_{n+d,2q} \frac{l}{q} \right) \geq t^{-\frac{n+d}{2q}} \Big(\frac{\mu_{n+d}}{2} + \delta_{n+d,2q} \frac{l}{q} \Big) v > 0$$

для всех $v \in (0, \Delta_0]$, $t \geq t_2$ и $\psi \in \mathbb{R}$, при этом $\mu_{n+d} := \min_{\psi\in\mathbb{R}} \lambda_{n+d}(\psi)$. Интегрируя последнее неравенство, получаем следующие оценки при $t \geq t_2$:

$$\begin{aligned} & v(t) \geq v(t_2) \exp\left(\mu_{n+d} \Big(t^{1-\frac{n+d}{2q}} - t_2^{1-\frac{n+d}{2q}} \Big) \frac{q}{2q-n-d} \right), && n+d < 2q, \\ & v(t) \geq v(t_2) \Big(\frac{t}{t_2} \Big)^{\frac{\mu_{n+d}}{2} + \frac{l}{q}}, && n+d = 2q. \end{aligned}$$

Следовательно, $\forall\, \delta \in (0, \Delta_0)$ решение $v(t)$ с начальными данными $v(t_2) = \delta$ превышает значение Δ_0 при некотором $t_2^* > t_2$. Учитывая (3.34), (3.30) и (3.9), получаем неустойчивость положения равновесия $(0,0)$ в системе (3.1). $\square$

Доказательство теоремы 33. Аналогично доказательству теоремы 31 для системы (3.49). $\square$

Доказательство теоремы 34. Рассмотрим систему (3.49) и определим функции $\widehat{A}_{n+d,m}(R) \equiv \langle A_{n+d}(R,\psi) |\omega_m(\psi)|^{-1} \rangle_\psi$ и $\widetilde{A}_{n+d,m}(R,\psi) \equiv A_{n+d}(R,\psi)|\omega_m(\psi)|^{-1} - \widehat{A}_{n+d,m}(R)$ при $R \in [0, R_*]$, $\psi \in \mathbb{R}$. Заметим, что уравнение $\widehat{A}_{n+d,m}(R) = 0$ имеет положительный корень $R = R_*$, где

$$R_* = \left(\frac{\widehat{\gamma}_{n+d,m} + \delta_{n+d,2q}\big(\nu + l/q\big)}{|\widehat{\gamma}_{n,\sigma,m}|} \right)^{\frac{1}{\sigma-1}} \tag{3.51}$$

такой, что $a_* := \partial_R \widehat{A}_{n+d,m}(R_*) = -(\sigma-1)\big(\widehat{\gamma}_{n+d,m} + \delta_{n+d,2q}(\nu + l/q)\big) < 0$. Замена

$$R(t) = R_* + \zeta(t) + \operatorname{sgn}\big(\omega_m\big(\psi(t)\big)\big) t^{-\frac{n+d-m}{2q}} \int\limits_0^{\psi(t)} \widetilde{A}_{n+d,m}(R_*, s)\, ds$$

преобразует (3.49) к виду

$$\frac{d\zeta}{dt} = t^{-\frac{n+d}{2q}} \mathcal{A}_{n+d}(\zeta,\psi) + \tilde{\mathcal{A}}_{n+d}(\zeta,\psi,t), \quad \frac{d\psi}{dt} = t^{-\frac{m}{2q}} \omega_m(\psi) + \tilde{\mathcal{B}}_m(\zeta,\psi,t), \tag{3.52}$$

где $\mathcal{A}_{n+d}(\zeta,\psi)=|\omega_m(\psi)|\big(a_*+\partial_R\widetilde{A}_{n+d,m}(R_*,\psi)\big)\zeta+\mathcal{O}(\zeta^2)$ при $\zeta\to 0$ и

$$|\tilde{\mathcal{A}}_{n+d}(\zeta,\psi,t)|\le K_1t^{-\frac{n+d}{2q}}\Big(t^{-\frac{1}{2q}}+t^{-\frac{\nu}{2}}\Big),\quad |\tilde{\mathcal{B}}_m(\zeta,\psi,t)|\le K_1t^{-\frac{m}{2q}}\Big(t^{-\frac{1}{2q}}+t^{-\frac{\nu}{2}}\Big)$$

для всех $|\zeta|\le\zeta_1$, $t\ge t_1$, $\psi\in\mathbb{R}$ с некоторыми константами $\zeta_1>0$, $t_1\ge t_*$ и $K_1>0$. Легко проверить, что редуцированное уравнение

$$\frac{d\zeta}{dt}=t^{-\frac{n+d}{2q}}\left(|\omega_m(\psi)|a_*\zeta+\mathcal{O}(\zeta^2)\right)$$

имеет устойчивое тривиальное решение $\zeta(t)\equiv 0$ для всех $\psi\in\mathbb{R}$. Покажем, что это решение устойчиво относительно возмущений

$$t^{-\frac{n+d}{2q}}|\omega_m(\psi)|\partial_R\widetilde{A}_{n+d,m}(R_*,\psi)\zeta,\quad \tilde{A}_{n+d}(R,\zeta,t).$$

Рассмотрим $\ell_1(\zeta,\psi,t)=\zeta^2-t^{-(n+d-m)/2q}2\zeta^2(\Xi(\psi)+\Xi^+)$, где

$$\Xi(\psi)\equiv\operatorname{sgn}(\omega_m(\psi))\int\limits_0^{\psi}\partial_R\widetilde{A}_{n+d,m}(R_*,s)\,ds,\quad \Xi^+:=\max_{\psi\in\mathbb{R}}|\Xi(\psi)|,$$

в качестве кандидата на функцию Ляпунова для системы (3.52). Тогда существуют $\zeta_2\le\zeta_1$ и $t_2\ge t_1$, такие, что для всех $\varepsilon\in(0,\zeta_2]$ имеем

$$\frac{\zeta^2}{2}\le\ell_1(\zeta,\psi,t)\le\zeta^2,\quad \frac{d\ell_1}{dt}\le t^{-\frac{n+d}{2q}}\zeta^2\Big(-|a_*|+4K_2\varepsilon^{-1}t^{-\varsigma}\Big)\le -t^{-\frac{n+d}{2q}}\frac{|a_*|}{2}\ell_1$$

для всех $\varepsilon/4<|\zeta|<\varepsilon$, $t\ge\tau_2$ и $\psi\in\mathbb{R}$, где $\tau_2=t_2+(8K_2\varepsilon^{-1}|a_*|^{-1})^{1/\varsigma}$, $\varsigma=\min\{\nu,q^{-1}\}/2$, $K_2=\mathrm{const}>0$. Это означает, что любое решение $\zeta(t)$, $\psi(t)$ системы (3.52) с начальными данными $|\zeta(\tau_2)|\le\varepsilon/4$, $\psi(\tau_2)\in\mathbb{R}$ не может покинуть область $\{|\zeta|<\varepsilon\}$ для всех $t>\tau_2$. Возвращаясь к переменной v, видим, что решение $v(t)\equiv 0$ полиномиально устойчиво: $v(t)=\mathcal{O}(t^{-\nu})$ при $t\to\infty$. □

Доказательство теоремы 35. Рассмотрим систему (3.49). Легко видеть, что уравнение $A_{n+d}(R,\psi)=0$ имеет нетривиальное решение

$$R_*(\psi)\equiv\left(\frac{\lambda_{n+d}(\psi)}{|\lambda_{n,\sigma}(\psi)|}\right)^{\frac{1}{\sigma-1}}$$

такое, что $A_*(\psi) \equiv \partial_R A_{n+d}(R_*(\psi), \psi) = -(\sigma-1)\lambda_{n+d}(\psi)/2 < 0$ при всех $\psi \in \mathbb{R}$. Замена $R(t) = R_*(\psi(t)) + \zeta(t)$ преобразует (3.49) к виду

$$\frac{d\zeta}{dt} - t^{-\frac{n+d}{2q}} A_{n+d}(R_*(\psi)+\zeta, \psi) = \tilde{A}_{n+d}(R_*(\psi)+\zeta, \psi, t) - \partial R_*(\psi)\frac{d\psi}{dt},$$
$$\frac{d\psi}{dt} = t^{-\frac{m}{2q}}\omega_m(\psi) + \tilde{B}_m(R_*(\psi)+\zeta, \psi, t). \qquad (3.53)$$

Заметим, что первое уравнение системы (3.53) с заменой правой части на ноль имеет устойчивое решение $\zeta(t) \equiv 0$ для всех $\psi \in \mathbb{R}$. Покажем, что это решение устойчиво в возмущённой системе. Рассмотрим $\ell(\zeta) = \zeta^2/2$ как кандидат на функцию Ляпунова для системы (3.53). Тогда существуют $\zeta_1 > 0$ и $t_1 \geq t_*$ такие, что для всех $\varepsilon \in (0, \zeta_1]$ имеем $d\ell/dt \leq t^{-(n+d)/2q}\zeta^2(-A_*^- + 4K_1\varepsilon^{-1}t^{-\varsigma})/2 \leq -t^{-(n+d)/2q}A_*^-\ell/2 < 0$ для всех $\varepsilon/4 < |\zeta| < \varepsilon$, $\psi \in \mathbb{R}$ и $t \geq \tau_1$, где $\tau_1 = t_1 + (8K_1\varepsilon^{-1}/A_*^-)^{1/\varsigma}$, $A_*^- = \min_{\psi\in\mathbb{R}}|A_*(\psi)|$, $\varsigma = \min\{\nu, q^{-1}\}/2$, $K_1 = \mathrm{const} > 0$. Следовательно, любое решение $\zeta(t)$, $\psi(t)$ с начальными данными $|\zeta(\tau_1)| \leq \varepsilon/4$, $\psi(\tau_1) \in \mathbb{R}$ не может выйти из области $\{|\zeta| < \varepsilon\}$ при $t > \tau_1$. Возвращаясь к переменным (v, ψ), видим, что $v(t) = \mathcal{O}(t^{-\nu})$ при $t \to \infty$. Таким образом, неподвижная точка $(0,0)$ системы (3.1) полиномиально устойчива. $\square$

Доказательство теоремы 36. Выбираем $N = 2q$, и система (3.13) принимает вид (3.42) с $\Lambda_{2q}(v, \psi) = lv/q + \mathcal{O}(v^{(\sigma+1)/2})$ при $v \to 0$. Поскольку $\omega'(E) \not\equiv 0$, имеем $l \geq 1$. Замена переменной $v(t) = t^{-\mu}[R(t)]^2$ на $\mu = (2q-n)/(q(\sigma-1)) \geq 0$ преобразует систему (3.42) в

$$\frac{dR}{dt} = t^{-1}A_{2q}(R, \psi) + \tilde{A}_{2q}(R, \psi, t), \quad \frac{d\psi}{dt} = t^{-\frac{m}{2q}}\omega_m(\psi) + \tilde{B}_m(R, \psi, t), \qquad (3.54)$$

где $A_{2q}(R, \psi) \equiv ((\mu + l/q)R + \lambda_{n,\sigma}(\psi)R^\sigma)/2$, $|\tilde{A}_{2q}(R, \psi, t)| \leq t^{-1}KR(t^{-1/2q} + t^{-\mu/2})$, $|\tilde{B}_m(R, \psi, t)| \leq t^{-m/2q}KR(t^{-1/2q} + t^{-\mu/2})$ для всех $R \in [0, R_*]$, $t \geq t_*$, $\psi \in \mathbb{R}$ с некоторыми константами $R_* > 0$, $t_* \geq t_0$ и $K > 0$.

Легко проверить, что уравнение $\widehat{A}_{2q,m}(R) := \langle A_{2q}(R, \psi)/|\omega_m(\psi)|\rangle_\psi = 0$ имеет положительный корень $R_* := ((\mu + l/q)|\langle\gamma_{n,\sigma}/|\omega_m|\rangle_\psi|^{-1})^{1/(\sigma-1)}$ такой, что $a_* := \partial\widehat{A}_{2q,m}(R_*) = -(\sigma-1)(\nu + l/q) < 0$. Следовательно, рассуждая, как и в доказательстве теоремы 34, получаем следующее: для любого $\varepsilon > 0$ существуют $\delta_1 > 0$ и $t_1 \geq t_*$, такие, что решения уравнения (3.54) с начальными данными $|R(t_1) - R_*| \leq \delta_1$, $\psi(t_1) \in \mathbb{R}$ удовлетворяют условию $|R(t) - R_*| < \varepsilon$ при $t \geq t_1$. Таким образом, $v(t) = \mathcal{O}(t^{-\mu})$ при $t \to \infty$. Возвращение к исходным переменным (x_1, x_2) завершает доказательство теоремы. $\square$

3.6. Выводы

Показано, что затухающие осциллирующие возмущения могут приводить к появлению двух различных асимптотических режимов: фазового захвата и фазового дрейфа. Структура фазового уравнения определяет то, какой из режимов реализуется в системе. В обоих случаях устойчивость равновесия в возмущённой системе зависит от уравнения для переменной действия. Описаны условия, при которых неподвижная точка становится асимптотически устойчивой или теряет устойчивость. В некоторых случаях обоснована лишь слабая неустойчивость с весом (см., например, замечание 2). В этих случаях требуется дополнительный детальный анализ долговременных асимптотик решений.

Результаты главы опубликованы в [258]. Связанные результаты о влиянии осциллирующих возмущений, не сохраняющих равновесие предельной системы, опубликованы в [268]. Поведение вдали от резонанса исследовалось в [256]. Асимптотический анализ возмущённых уравнений содержится в [264].

Глава 4

Нелинейный резонанс в системах с затухающими возмущениями

4.1. Введение

В настоящей главе продолжается исследование влияния осциллирующих возмущений с асимптотически постоянной частотой на нелинейные системы. При этом, в отличие от предыдущей главы, посвящённой поведению траекторий в окрестности равновесия, здесь рассматриваются решения вдали от равновесия и резонансные эффекты, при которых в возмущённой системе появляются устойчивые состояния, близкие к периодическим. Аналогичные эффекты в задачах с малым параметром обычно связывают с нелинейным резонансом и считаются хорошо изученными [152], [31], [285], [277]. Явления типа нелинейного резонанса в системах с затухающими возмущениями, по-видимому, ранее не обсуждались.

Глава организована следующим образом. § 4.2 содержит постановку задачи и мотивирующий пример. Основные результаты представлены в разделе § 4.3. В § 4.4 предлагаемая теория применяется к примерам асимптотически автономных систем. Обоснование основных результатов содержится в разделе § 4.5. Сначала в § 4.5.1 строится почти тождественное преобразование, усредняющее систему по первым асимптотическим членам. В § 4.5.2 анализируется укороченная система, полученная из полной системы отбрасыванием остаточных членов, и описываются возможные асимптотические режимы. В § 4.5.3 обсуждается сохранение этих режимов в полной системе путём построения функций Ляпунова. Глава завершается кратким обсуждением полученных результатов.

4.2. Постановка задачи

Рассмотрим систему двух дифференциальных уравнений

$$\frac{dr}{dt} = f(r, \varphi, S(t), t), \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega(r) + g(r, \varphi, S(t), t), \tag{4.1}$$

где функции $\omega(r) > 0$, $f(r, \varphi, S, t)$ и $g(r, \varphi, S, t)$ бесконечно дифференцируемы, определены для всех $|r| \le \mathcal{R} = \text{const}$, $(\varphi, S) \in \mathbb{R}^2$, $t > 0$ и являются 2π-периодическими по φ и S. Функции $f(r, \varphi, S, t)$ и $g(r, \varphi, S, t)$ играют роль возмущений автономной системы

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = 0, \quad \frac{d\hat{\varphi}}{dt} = \omega(\hat{r}), \tag{4.2}$$

описывающей неизохронные колебания на плоскости $(x, y) = (\hat{r}\cos\hat{\varphi}, -\hat{r}\sin\hat{\varphi})$ с постоянной амплитудой $\hat{r}(t) \equiv r_0$, $|r_0| < \mathcal{R}$ и собственной частотой $\omega(r_0)$. Решения $r(t)$ и $\varphi(t)$ системы (4.1) соответствуют амплитуде и фазе возмущённых колебаний.

Предполагается, что частота возмущений является асимптотически постоянной: $S'(t) \sim s_0$ при $t \to \infty$ с $s_0 = \text{const} > 0$, а интенсивность убывает со временем: для каждого фиксированного r и φ

$$f(r, \varphi, S(t), t) \to 0, \quad g(r, \varphi, S(t), t) \to 0, \quad t \to \infty.$$

В этом случае возмущённая система (4.1) асимптотически автономна с предельной системой (4.2). В главе исследуется резонансное влияние возмущений $f(r, \varphi, S(t), t)$ и $g(r, \varphi, S(t), t)$ на динамику системы вдали от равновесия и описание возможных асимптотических режимов решений.

Уточним рассматриваемый класс возмущений. Предположим, что

$$\begin{aligned} f(r, \varphi, S, t) &\sim \sum_{j=1}^{\infty} t^{-\frac{j}{q}} f_j(r, \varphi, S), \\ g(r, \varphi, S, t) &\sim \sum_{j=1}^{\infty} t^{-\frac{j}{q}} g_j(r, \varphi, S), \quad t \to \infty, \end{aligned} \tag{4.3}$$

для всех $|r| < \mathcal{R}$ и $(\varphi, S) \in \mathbb{R}^2$, где коэффициенты $f_j(r,\varphi,S)$ и $g_j(r,\varphi,S)$ являются 2π-периодическими по φ и S, и $q \in \mathbb{Z}_+ = \{1,2,\dots\}$. Фаза возмущений рассматривается в виде

$$S(t) = \sum_{j=0}^{q-1} s_j t^{1-\frac{j}{q}} + s_q \log t, \tag{4.4}$$

где $s_j = \mathrm{const}$. Более того, предполагается, что существуют $0 < |a| < \mathcal{R}$ и взаимно простые целые числа $\kappa, \varkappa \in \mathbb{Z}_+$, такие, что выполняется условие резонанса:

$$\kappa s_0 = \varkappa \omega(a), \quad \eta := \omega'(a) \neq 0. \tag{4.5}$$

Ряды в (4.3) являются асимптотическими при $t \to \infty$, и для любого $N \geq 1$ справедливы следующие оценки: $f(r,\varphi,S,t) - \sum_{j=0}^{N-1} t^{-j/q} f_j(r,\varphi,S) = \mathcal{O}(t^{-N/q})$ и $g(r,\varphi,S,t) - \sum_{j=0}^{N-1} t^{-j/q} g_j(r,\varphi,S) = \mathcal{O}(t^{-N/q})$ при $t \to \infty$ равномерно для всех $|r| \leq \mathcal{R}$ и $(\varphi, S) \in \mathbb{R}^2$.

Рассмотрим пример

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -x_1 + \vartheta x_1^3 + t^{-\frac{1}{2}} Z(x_1, x_2, S(t)), \tag{4.6}$$

где $Z(x_1,x_2,S) \equiv \alpha(S)x_1 + \beta(S)x_2$, $\alpha(S) \equiv \alpha_0 + \alpha_1 \sin S$, $\beta(S) \equiv \beta_0 + \beta_1 \sin S$, $S(t) \equiv 3t/2$ с параметрами $\alpha_i, \beta_i, \in \mathbb{R}$ и $\vartheta > 0$. Покажем, что эта система соответствует (4.1). Предельная система $d\hat{x}_1/dt = \hat{x}_2$, $d\hat{x}_2/dt = -U'(\hat{x}_1)$ с $U(x) \equiv x^2/2 - \vartheta x^4/4$ имеет устойчивое равновесие в точке $(0,0)$, а линии уровня $\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : U(x_1) + x_2^2/2 = r^2/2\}$ для всех $0 < |r| < (2\vartheta)^{-1/2}$ соответствуют $T(r)$-периодическим решениям

$$\begin{gathered}
\hat{x}_1^0(t,r) \equiv r \,\mathrm{sn}\left(\frac{t}{\sqrt{k_r^2+1}}, k_r\right) \sqrt{k_r^2+1}, \\
\hat{x}_2^0(t,r) \equiv r \,\mathrm{cn}\left(\frac{t}{\sqrt{k_r^2+1}}, k_r\right) \mathrm{dn}\left(\frac{t}{\sqrt{k_r^2+1}}, k_r\right), \\
T(r) \equiv 4K(k_r)\sqrt{k_r^2+1}, \quad \omega(r) \equiv \frac{2\pi}{T(r)},
\end{gathered} \tag{4.7}$$

где $\mathrm{sn}(u,k)$, $\mathrm{cn}(u,k)$, $\mathrm{dn}(u,k)$ — эллиптические функции Якоби, $K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода, а $k_r \in (0,1)$ — корень уравнения $(k_r + k_r^{-1})^{-2} = \vartheta r^2/2$. Определим вспомогательные 2π-периодические функции.

$$X_1(\varphi,r) \equiv \hat{x}_1^0\left(\frac{\varphi}{\omega(r)}, r\right), \quad X_2(\varphi,r) \equiv \hat{x}_2^0\left(\frac{\varphi}{\omega(r)}, r\right).$$

Легко проверить, что $\omega(r)\partial_\varphi X_1 = X_2$, $\omega(r)\partial_\varphi X_2 = -U(X_1)$, $U(X_1) + X_2^2/2 = r^2/2$ и

$$\det\frac{\partial(X_1,X_2)}{\partial(\varphi,r)} \equiv \begin{vmatrix} \partial_\varphi X_1 & \partial_r X_1 \\ \partial_\varphi X_2 & \partial_r X_2 \end{vmatrix} \equiv \frac{r}{\omega(r)}.$$

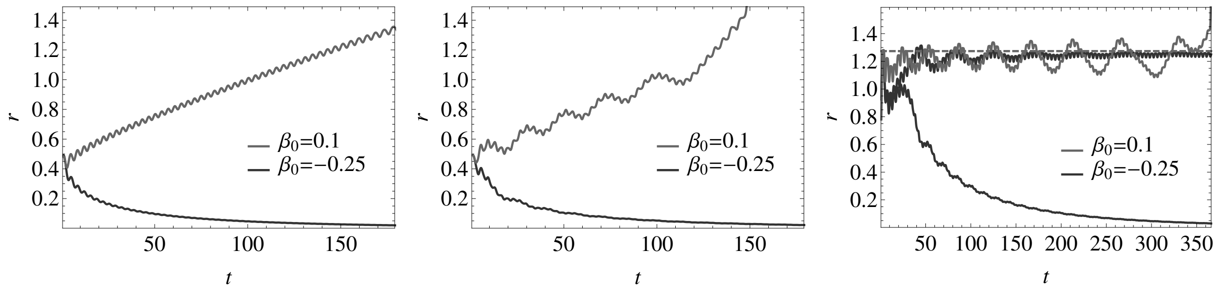
Таким образом, система (4.6) в переменных (r,φ) принимает вид (4.1) с $q=2$, $s_0 = 3/2$, $s_i = 0$,

$$f(r,\varphi,S,t) \equiv t^{-\frac{1}{2}} f_1(r,\varphi,S), \quad g(r,\varphi,S,t) \equiv t^{-\frac{1}{2}} g_1(r,\varphi,S), \tag{4.8}$$

где

$$\begin{aligned} f_1(r,\varphi,S) &\equiv r^{-1} X_2(\varphi,r) Z(X_1(\varphi,r), X_2(\varphi,r), S), \\ g_1(r,\varphi,S) &\equiv -r^{-1}\omega(r)\partial_r X_1(\varphi,r) Z(X_1(\varphi,r), X_2(\varphi,r), S). \end{aligned}$$

Заметим, что $0 < \omega(r) < 1$ для всех $0 < |r| < (2\vartheta)^{-1/2}$. Следовательно, существуют κ, $\varkappa \in \mathbb{Z}_+$ и $0 < |r| < (2\vartheta)^{-1/2}$, такие, что выполняется условие (4.5). Если $Z(x_1,x_2,S) \equiv 0$, то $r(t) \equiv r_0$ и $\varphi(t) \equiv \omega(r_0)t + \phi_0$ с произвольными константами r_0 и ϕ_0. При отсутствии осцилляционной части возмущения ($\alpha_1 = \beta_1 = 0$) амплитуда решений может стремиться к нулю или к бесконечности в зависимости от знака β_0 (см. рис. 4.1, а). При некоторых условиях на параметры это поведение может сохраняться в системе с осциллирующими возмущениями (см. рис. 4.1, б) или нарушаться с появлением новых притягивающих состояний (см. рис. 4.1, в). Цель главы — определить условия, гарантирующие существование и устойчивость таких состояний в системах вида (4.1) с возмущениями, удовлетворяющими (4.3) и (4.4).



(а) $\alpha_1 = 0$ (б) $\alpha_1 = 0.4$ (в) $\alpha_1 = 0.6$

Рис. 4.1. Эволюция $r(t) = \sqrt{2U(x_1(t)) + x_2^2(t)}$ для решений системы (4.6) при $\vartheta = 1/4$, $\alpha_0 = 0.5$, $\beta_1 = 0$ и различных значениях параметров α_1, β_0. Пунктирная кривая соответствует $r(t) \equiv 1.27$.

4.3. Основные результаты

Пусть $a \in \mathbb{R}$, $0 < |a| < \mathcal{R}$ — параметр, удовлетворяющий условию резонанса (4.5). Определим

$$\mathfrak{D}_{\epsilon,\tau} := \{(R, \Psi) \in \mathbb{R}^2 : \quad |R + a\tau^{\frac{1}{2q}}| \le \mathcal{R}\tau^{\frac{1}{2q}} - \epsilon\}$$

с некоторыми $\epsilon \in [0, \mathcal{R})$ и $\tau \ge 1$. Пусть угловые скобки обозначают усреднение функции $F(S)$ по S за период $2\pi\varkappa$,

$$\langle F(S) \rangle_{\varkappa S} \equiv \frac{1}{2\pi\varkappa} \int\limits_0^{2\pi\varkappa} F(S)\, dS.$$

Тогда справедлива

Теорема 37. *Пусть система* (4.1) *удовлетворяет условиям* (4.3), (4.4) *и* (4.5). *Тогда для любых* $N \in \mathbb{Z}_+$ *и* $\epsilon \in (0, \mathcal{R})$ *найдутся* $t_0 \ge 1$ *и цепочка обратимых преобразований* $(r, \varphi) \mapsto (R, \Psi) \mapsto (\rho, \psi)$,

$$r(t) = a + t^{-\frac{1}{2q}} R(t), \qquad \varphi(t) = \frac{\kappa}{\varkappa} S(t) + \Psi(t), \tag{4.9}$$

$$R(t) = \rho(t) + \tilde{u}_N(\rho(t), \psi(t), t), \qquad \Psi(t) = \psi(t) + \tilde{v}_N(\rho(t), \psi(t), t), \tag{4.10}$$

где $\tilde{u}_N(\rho, \psi, t)$, $\tilde{v}_N(\rho, \psi, t)$ *удовлетворяют неравенствам*

$$|\tilde{u}_N(\rho, \psi, t)| \le \epsilon, \quad |\tilde{v}_N(\rho, \psi, t)| \le \epsilon, \quad (\rho, \psi) \in \mathfrak{D}_{\epsilon,t_0}, \quad t \ge t_0, \tag{4.11}$$

такие, что для всех $0<|r|<\mathcal{R}$ *и* $\varphi\in\mathbb{R}$ *система* (4.1) *приводится к виду*

$$\frac{d\rho}{dt}=\Lambda_N(\rho,\psi,S(t),t),\quad \frac{d\psi}{dt}=\Omega_N(\rho,\psi,S(t),t), \tag{4.12}$$

с функциями

$$\begin{gathered}\Lambda_N(\rho,\psi,S,t)\equiv\hat\Lambda_N(\rho,\psi,t)+\tilde\Lambda_N(\rho,\psi,S,t),\\ \Omega_N(\rho,\psi,S,t)\equiv\hat\Omega_N(\rho,\psi,t)+\tilde\Omega_N(\rho,\psi,S,t),\end{gathered}$$

определёнными для всех $(\rho,\psi)\in\mathfrak{D}_{\epsilon,t_0}$, $t\ge t_0$ *и* $S\in\mathbb{R}$, *такими, что*

$$\hat\Lambda_N(\rho,\psi,t)\equiv\sum_{k=1}^N t^{-\frac{k}{2q}}\Lambda_k(\rho,\psi),\qquad \hat\Omega_N(\rho,\psi,t)\equiv\sum_{k=1}^N t^{-\frac{k}{2q}}\Omega_k(\rho,\psi), \tag{4.13}$$

$$\tilde\Lambda_N(\rho,\psi,S,t)=\mathcal{O}(t^{-\frac{N+1}{2q}}),\qquad \tilde\Omega_N(\rho,\psi,S,t)=\mathcal{O}(t^{-\frac{N+1}{2q}}) \tag{4.14}$$

при $t\to\infty$ *равномерно для всех* $(\rho,\psi)\in\mathfrak{D}_{\epsilon,t_0}$ *и* $S\in\mathbb{R}$, *где* $\Lambda_k(\rho,\psi)$ *и* $\Omega_k(\rho,\psi)$ *являются* 2π*-периодическими по* ψ *и являются многочленами по* ρ *степени* $k-1$ *и* k *соответственно. В частности,* $\Lambda_1(\rho,\psi)\equiv\langle f_1(a,\kappa S/\varkappa+\psi,S)\rangle_{\varkappa S}$ *и* $\Omega_1(\rho,\psi)\equiv\eta\rho$.

Доказательство содержится в § 4.5.1.

Заметим, что если $(\rho(t),\psi(t))\in\mathfrak{D}_{\epsilon,t_0}$ для всех $t\ge t_0$, то ввиду (4.9), (4.10) и (4.11) имеем $|r(t)|\le\mathcal{R}$ при $t\ge t_0$.

Теорема 37 описывает усредняющее преобразование, которое упрощает систему в главных членах асимптотики при $t\to\infty$. Более того, после этой процедуры некоторые члены в суммах (4.13) могут исчезнуть, поскольку имеют нулевое среднее. Пусть $n\in[1,2q]$ и $m\in[2,2q]$ — целые числа, такие, что

$$\begin{aligned}&\Lambda_i(\rho,\psi)\equiv 0,\quad i<n, && \Lambda_n(\rho,\psi)\not\equiv 0,\\ &\Omega_j(\rho,\psi)\equiv 0,\quad 1<j<m, && \Omega_m(\rho,\psi)\not\equiv 0.\end{aligned} \tag{4.15}$$

Предлагаемый метод основан на изучении усеченной системы

$$\frac{d\varrho}{dt}=\hat\Lambda_N(\varrho,\phi,t),\quad \frac{d\phi}{dt}=\hat\Omega_N(\varrho,\phi,t), \tag{4.16}$$

полученной из (4.12) путём отбрасывания остаточных членов $\tilde{\Lambda}_N$ и $\tilde{\Omega}_N$. Систему (4.16) можно рассматривать как модельную систему, описывающую среднюю динамику остаточной амплитуды и фазового сдвига. Сначала исследуются решения системы (4.16). Затем доказывается, что траектории полной системы (4.12) ведут себя аналогично.

Поведение решений асимптотически автономной системы (4.16) зависит от свойств соответствующей "предельной" системы

$$t^{\frac{n}{2q}}\frac{d\hat{\varrho}}{dt} = \Lambda_n(\hat{\varrho},\hat{\phi}), \quad t^{\frac{1}{2q}}\frac{d\hat{\phi}}{dt} = \eta\hat{\varrho}. \tag{4.17}$$

В частности, наличие и устойчивость неподвижных точек в системе (4.17) играют решающую роль. Учитывая это, рассмотрим следующее предположение:

$$\exists\,\psi_0 \in \mathbb{R}: \quad \Lambda_n(0,\psi_0) = 0, \quad \nu_n := \partial_\psi \Lambda_n(0,\psi_0) \neq 0, \tag{4.18}$$

и определим параметр $\lambda_n := \partial_\rho \Lambda_n(0,\psi_0)$. В этом случае система (4.17) имеет равновесие $(0,\psi_0)$, и справедлива

Лемма 3. *Пусть выполняются предположения* (4.15) *и* (4.18).

- *Если* $\nu_n\eta > 0$ *или* $\nu_n\eta < 0$, $\lambda_n > 0$, $n \leq q$, *то равновесие* $(0,\psi_0)$ *системы* (4.17) *неустойчиво.*
- *Если* $\nu_n\eta < 0$ *и* $\lambda_n < 0$, *то равновесие* $(0,\psi_0)$ *системы* (4.17) *устойчиво.*

Заметим, что при $\nu_n\eta > 0$ точка $(0,\psi_0)$ является равновесием типа седло. В этом случае аналогичная динамика наблюдается во всей системе. Однако при $\nu_n\eta < 0$ неподвижная точка может быть как устойчивой, так и неустойчивой, в зависимости от знака дивергенции векторного поля, вычисляемого в точке равновесия. Покажем, что при аналогичном условии существует решение системы

(4.16), стремящееся к точке $(0,\psi_0)$ при $t\to\infty$. Обозначим

$$d_{n,m}:=\begin{cases}\lambda_n, & n<m,\\ \lambda_n+\omega_m, & n=m,\\ \omega_m, & n>m,\end{cases}$$

где $\omega_m:=\partial_\varphi\Omega_m(0,\psi_0)$. Тогда справедлива следующая лемма:

Лемма 4. *Пусть предположения* (4.15) *и* (4.18) *выполняются при* $\nu_n\eta<0$ *и* $d_{n,m}<0$. *Тогда для любого* $N\geq\max\{m,n\}$ *система* (4.16) *имеет частное решение* $\varrho_*(t)$, $\phi_*(t)$, *удовлетворяющее асимптотическим формулам*

$$\varrho_*(t)=\varrho_{*,M}(t)+\mathcal{O}(t^{-\frac{M+m-1}{2q}}),\quad \phi_*(t)=\phi_{*,M}(t)+\mathcal{O}(t^{-\frac{M+1}{2q}})\tag{4.19}$$

при $t\to\infty$ *для всех целых* $M\geq1$, *где*

$$\varrho_{*,M}(t)\equiv\sum_{k=1}^{M}t^{-\frac{k+m-2}{2q}},\quad \phi_{*,M}(t)\equiv\psi_0+\sum_{k=1}^{M}t^{-\frac{k}{2q}}\phi_k,\tag{4.20}$$

и ϱ_k, ϕ_k *— некоторые константы. Более того, решение* $\varrho_*(t)$, $\phi_*(t)$ *асимптотически устойчиво.*

Можно показать, что динамика, описываемая решением $\varrho_*(t)$, $\phi_*(t)$ укороченной системы, сохраняется и в системе (4.12). Справедлива

Теорема 38. *Пусть система* (4.1) *удовлетворяет* (4.3), (4.4), (4.5), *и предположения* (4.15) *и* (4.18) *выполняются при* $\nu_n\eta<0$ *и* $d_{n,m}<0$. *Тогда существует* $N_0\in\mathbb{Z}_+$ *такое, что для любых* $N\geq N_0$ *и* $\varepsilon>0$ *существуют* $\delta_\varepsilon>0$ *и* $t_\varepsilon\geq t_0$ *такие, что для всех* $t_*\geq t_\varepsilon$ *любое решение* $r(t)$, $\varphi(t)$ *системы* (4.12) *с начальными данными* $r(t_*)=r_*$, $\varphi(t_*)=\varphi_*$, $|r_*-a-t_*^{-1/(2q)}\varrho_*(t_*)|+|\varphi_*-\kappa S(t_*)/\varkappa-\phi_*(t_*)|\leq\delta_\varepsilon$, *удовлетворяет неравенству:*

$$\left|r(t)-a-t^{-\frac{1}{2q}}\varrho_*(t)\right|+\left|\varphi(t)-\frac{\kappa}{\varkappa}S(t)-\phi_*(t)\right|<\varepsilon\tag{4.21}$$

при всех $t>t_*$.

Заметим, что в противном случае, когда $\nu_n\eta < 0$ и $d_{n,m} > 0$, асимптотический режим, описанный в лемме 4, оказывается неустойчивым. Пусть $\ell = \min\{m, n\}$. Тогда справедлива

Теорема 39. *Пусть система* (4.1) *удовлетворяет условиям* (4.3), (4.4), (4.5), *и предположения* (4.15) *и* (4.18) *выполняются при* $\nu_n\eta < 0$, $d_{n,m} > 0$ *и* $\ell + n - 1 < 2q$. *Тогда существуют* $N_0 \in \mathbb{Z}_+$, $M_0 \in \mathbb{Z}_+$, $\varepsilon > 0$ *такие, что для любого* $\delta \in (0, \varepsilon)$, $N \geq N_0$, $M \geq M_0$ *найдется* $t_\delta \geq t_0$ *такое, что решение* $r(t)$, $\varphi(t)$ *системы* (4.12) *с начальными данными* $r(t_*) = r_*$, $\varphi(t_*) = \varphi_*$, $|(r_* - a)t_*^{1/(2q)} - \varrho_{*,M}(t_*)| + |\varphi_* - \kappa S(t_*)/\varkappa - \phi_{*,M}(t_*)| \leq \delta$ *при любом* $t_* \geq t_\delta$ *удовлетворяет неравенству:*

$$\left|(r(t_{\delta,\varepsilon}) - a)t_{\delta,\varepsilon}^{\frac{1}{2q}} - \varrho_{*,M}(t_{\delta,\varepsilon})\right| + \left|\varphi(t_{\delta,\varepsilon}) - \frac{\kappa}{\varkappa}S(t_{\delta,\varepsilon}) - \phi_{*,M}(t_{\delta,\varepsilon})\right| \geq \varepsilon \qquad (4.22)$$

при некотором $t_{\delta,\varepsilon} > t_*$.

Заметим, что если $d_{n,m} = 0$, существование и устойчивость режима фазового захвата не гарантируются теоремой 38. В этом случае рассмотрим следующее предположение:

$$\begin{aligned} & d_{n,m} = 0, \\ & \exists\, h \in (\ell, 2q]: \quad \partial_\rho \Lambda_k(\rho, \psi) + \partial_\psi \Omega_k(\rho, \psi) \equiv 0, \quad k \leq h - 1, \\ & d_h := \partial_\rho \Lambda_h(0, \psi_0) + \partial_\psi \Omega_h(0, \psi_0) \neq 0. \end{aligned} \qquad (4.23)$$

Тогда справедлива

Лемма 5. *Пусть выполнены предположения* (4.15), (4.18) *и* (4.23) *при* $\nu_n\eta < 0$ *и* $d_h < 0$. *Тогда для любого* $N \geq \max\{m, n, h\}$ *система* (4.16) *имеет устойчивое частное решение* $\varrho_*(t)$, $\phi_*(t)$ *с асимптотическим разложением* (4.19). *Более того, решение* $\varrho_*(t)$, $\phi_*(t)$ *асимптотически устойчиво, если* $h + n - 1 < 2q$.

Как и в предыдущем случае, режим фазового захвата в системе (4.1), соответствующий решению $\varrho_*(t)$, $\phi_*(t)$ модельной системы (4.16), оказывается устойчивым при $d_h < 0$ и неустойчивым при $d_h > 0$. Справедливы

Теорема 40. *Пусть система* (4.1) *удовлетворяет* (4.3), (4.4), (4.5), *и предположения* (4.15), (4.18) *и* (4.23) *выполняются при* $\nu_n\eta < 0$ *и* $d_h < 0$. *Тогда существует* $N_0 \in \mathbb{Z}_+$ *такое, что для любых* $N \geq N_0$ *и* $\varepsilon > 0$ *найдутся* $\delta_\varepsilon > 0$ *и* $t_\varepsilon \geq t_0$ *такие, что для всех* $t_* \geq t_\varepsilon$ *любое решение* $r(t)$, $\varphi(t)$ *системы* (4.12) *с начальными данными* $r(t_*) = r_*$, $\varphi(t_*) = \varphi_*$, $|r_* - a - t_*^{-1/(2q)}\varrho_*(t_*)| + |\varphi_* - \kappa S(t_*)/\varkappa - \phi_*(t_*)| \leq \delta_\varepsilon$, *удовлетворяет неравенству* (4.21) *для всех* $t > t_*$.

Теорема 41. *Пусть система* (4.1) *удовлетворяет* (4.3), (4.4), (4.5), *и предположения* (4.15), (4.18) *и* (4.23) *выполняются при* $\nu_n\eta < 0$, $d_h > 0$ *и* $h + n - 1 < 2q$. *Тогда существуют* $N_0 \in \mathbb{Z}_+$, $M_0 \in \mathbb{Z}_+$ $\varepsilon > 0$ *такие, что для любых* $\delta \in (0,\varepsilon)$, $N \geq N_0$, $M \geq M_0$ *найдется* $t_\delta \geq t_0$ *такое, что решение* $r(t)$, $\varphi(t)$ *системы* (4.12) *с начальными данными* $r(t_*) = r_*$, $\varphi(t_*) = \varphi_*$, $|(r_* - a)t_*^{1/(2q)} - \varrho_{*,M}(t_*)| + |\varphi_* - \kappa S(t_*)/\varkappa - \phi_{*,M}(t_*)| \leq \delta$ *при любом* $t_* \geq t_\delta$ *удовлетворяет неравенству* (4.22) *при некотором* $t_{\delta,\varepsilon} > t_*$.

Таким образом, в условиях теорем 38 и 40 следует, что в системе (4.1) существует устойчивый режим фазового захвата с $r(t) \approx a$ и $\varphi(t) \approx \kappa S(t)/\varkappa + \psi_0$ при $t \to \infty$.

Рассмотрим, наконец, случай, когда вместо (4.18) выполняется следующее предположение:

$$\Lambda_n(\rho,\psi) \neq 0 \quad \forall\,(\rho,\psi) \in \mathfrak{D}_{t_0,\epsilon}. \tag{4.24}$$

Тогда справедлива

Теорема 42. *Пусть выполнены предположения* (4.15) *и* (4.24). *Тогда существует* $t_1 \geq t_0$ *такое, что* $|\rho(t)|$, $|\psi(t)|$ *для решений системы* (4.12) *с начальными* $(\rho(t_1),\psi(t_1)) \in \mathfrak{D}_{\epsilon,t_0}$ *возрастают при* $t > t_1$, *пока не достигнут границы* $\mathfrak{D}_{\epsilon,t_0}$ *за конечное время.*

При этом $\varphi(t)$ для решений системы (4.1) может существенно отличаться от фазы $\kappa S(t)/\varkappa$, и решения с $r(t) \approx a$ не возникают.

4.4. Примеры

В настоящем разделе показывается, как предложенная теория может быть применена к примерам осциллирующих систем с затухающими возмущениями. В частности, получены условия для параметров возмущений, гарантирующие существование устойчивого режима фазового захвата с резонансной амплитудой. Результаты проиллюстрированы численным моделированием. В последнем примере анализируется возмущённый осциллятор Дуффинга, обсуждаемый в разделе 4.2.

4.4.1. Пример 1

Рассмотрим систему

$$\frac{dr}{dt} = t^{-\frac{1}{2}} f_1(r, \varphi, S(t)), \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega(r) + t^{-\frac{1}{2}} g_1(r, \varphi, S(t)) \tag{4.25}$$

где $f_1 \equiv \beta(S) r \sin^2\varphi - \mu(S)\sin\varphi$, $g_1 \equiv \beta(S)\sin\varphi\cos\varphi - r^{-1}\mu(S)\cos\varphi$, $\omega(r) \equiv 1 - \vartheta r^2$, $\beta(S) \equiv \beta_0 + \beta_1 \sin S$, $\mu(S) \equiv \mu_0 + \mu_1 \sin S$, $S(t) \equiv s_0 t + s_1\sqrt{t}$ с постоянными параметрами s_k, $\theta > 0$, β_k и μ_k. Заметим, что система (4.25) имеет вид (4.1) с $q = 2$, $\mathcal{R} = \theta^{-1/2}$, $f(r, \varphi, S(t), t) \equiv t^{-1/2} f_1(r, \varphi, S(t))$ и $g(r, \varphi, S(t), t) \equiv t^{-1/2} g_1(r, \varphi, S(t))$. Отметим также, что в декартовых координатах $x_1 = r\cos\varphi$, $x_2 = -r\sin\varphi$ эта система принимает вид

$$\frac{dx_1}{dt} = (1 - \vartheta|\mathbf{x}|^2)x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -(1 - \vartheta|\mathbf{x}|^2)x_1 + t^{-\frac{1}{2}} Z(x_1, x_2, S(t)),$$

где $Z(x_1, x_2, S) \equiv \mu(S) + \beta(S)x_2$.

1. Пусть $s_0 = 1/2$. Тогда существуют $\kappa = \varkappa = 1$, $a = (2\vartheta)^{-1/2}$, такие, что условие резонанса (4.5) выполняется при $\eta = -\sqrt{2\vartheta} < 0$. Легко проверить, что замена переменных, описанная в теореме 37 при $N = 2$, преобразует систему к виду

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= t^{-\frac{1}{4}} \Lambda_1(\rho, \psi) + t^{-\frac{1}{2}} \Lambda_2(\rho, \psi) + \tilde{\Lambda}_2(\rho, \psi, S(t), t), \\ \frac{d\psi}{dt} &= t^{-\frac{1}{4}} \Omega_1(\rho, \psi) + t^{-\frac{1}{2}} \Omega_2(\rho, \psi) + \tilde{\Omega}_2(\rho, \psi, S(t), t), \end{aligned} \tag{4.26}$$

где

$$
\Lambda_1(\rho,\psi)\equiv\frac{1}{2}\left(\frac{\beta_0}{\sqrt{2\vartheta}}-\mu_1\cos\psi\right),\qquad \Lambda_2(\rho,\psi)\equiv\frac{\beta_0\rho}{2},
$$
$$
\Omega_1(\rho,\psi)\equiv-\sqrt{2\vartheta}\rho,\qquad \Omega_2(\rho,\psi)\equiv\frac{1}{2}\left(-2\vartheta\rho^2-s_1+\mu_1\sqrt{2\vartheta}\sin\psi\right),
$$

и $\tilde\Lambda_2(\rho,\psi,S,t)=\mathcal{O}(t^{-1})$, $\tilde\Omega_2(\rho,\psi,S,t)=\mathcal{O}(t^{-1})$ при $t\to\infty$ равномерно для всех $|\rho|<\infty$, $(\psi,S)\in\mathbb{R}^2$. Легко видеть, что предположение (4.15) справедливо при $n=1$ и $m=2$.

Если $\mu_1\neq0$ и $|\beta_0/\mu_1|<\sqrt{2\vartheta}$, то предположение (4.18) выполняется с

$$
\psi_0=\pm\theta_0+2\pi k,\quad k\in\mathbb{Z},\quad \nu_1=\pm\frac{\mu_1}{2}\sin\theta_0,\quad \theta_0=\arccos\left(\frac{\beta_0}{\sqrt{2\vartheta}\mu_1}\right).
$$

Из леммы 3 следует, что если $\pm\mu_1<0$, то состояния равновесия $(0,\pm\theta_0(\mathrm{mod}2\pi))$ в соответствующей предельной системе неустойчивы. Следовательно, соответствующий режим не реализуется в полной системе.

Заметим, что $d_{n,m}=\partial_\rho\Lambda_1(0,\psi_0)=0$. Однако предположение (4.23) выполняется при $h=2$ и $d_h=\beta_0$. Из Леммы 5 и Теоремы 40 следует, что если $\pm\mu_1>0$ и $-|\mu_1|\sqrt{2\vartheta}<\beta_0<0$, то в системе (4.25) реализуется устойчивый режим фазового захвата с $r(t)\approx a$ и $\varphi(t)\approx S(t)\pm\theta_0(\mathrm{mod}2\pi)$. Из Теоремы 41 следует, что если $\pm\mu_1>0$ и $0<\beta_0<|\mu_1|\sqrt{2\vartheta}$, то этот режим неустойчив.

Если $\mu_1\neq0$, $|\beta_0/\mu_1|>\sqrt{2\vartheta}$ или $\mu_1=0$, $\beta_0\neq0$, то предположение (4.24) выполняется. Из теоремы 42 следует, что в этом случае асимптотический режим с $r(t)\approx a$ не реализуется (см. рис. 4.2).

2. Пусть $s_0=1$. Тогда существуют $\kappa=1$, $\varkappa=2$, $a=(2\vartheta)^{-1/2}$, такие, что условие (4.5) выполняется при $\eta=-\sqrt{2\vartheta}<0$. В этом случае преобразование, построенное в теореме 37 при $N=2$, приводит систему (4.25) к (4.26) при

$$
\Lambda_1(\rho,\psi)\equiv\frac{1}{\sqrt{8\vartheta}}\left(\beta_0+\frac{\beta_1}{2}\sin2\psi\right),\qquad \Lambda_2(\rho,\psi)\equiv\frac{\rho}{2}\left(\beta_0+\frac{\beta_1}{2}\sin2\psi\right),
$$
$$
\Omega_1(\rho,\psi)\equiv-\sqrt{2\vartheta}\rho,\qquad \Omega_2(\rho,\psi)\equiv\frac{1}{4}\left(-4\vartheta\rho^2-s_1+\beta_1\cos2\psi\right),
$$

и $\tilde\Lambda_2(\rho,\psi,S,t)=\mathcal{O}(t^{-1})$, $\tilde\Omega_2(\rho,\psi,S,t)=\mathcal{O}(t^{-1})$ при $t\to\infty$ равномерно для всех

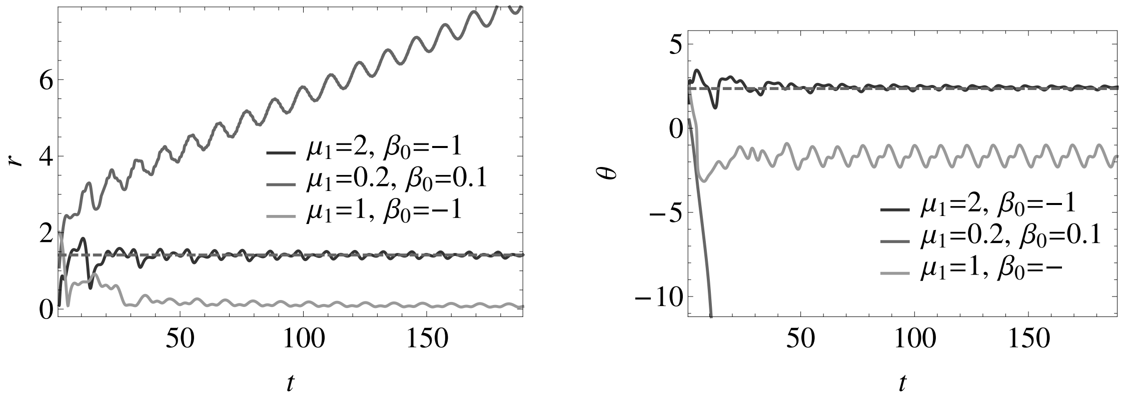


Рис. 4.2. Эволюция $r(t)$ и $\theta(t) \equiv \varphi(t) - S(t)$ для решений системы (4.25) с $s_0 = 1/2$, $s_1 = 1$, $\vartheta = 1/4$, $\beta_1 = 1/2$, $\mu_0 = -1/2$ при различных значениях параметров β_0 и μ_1. Пунктирные кривые соответствуют $r(t) \equiv a$ и $\theta(t) \equiv \theta_0$, где $a = \sqrt{2}$ и $\theta_0 = 3\pi/4$.

$|\rho| < \infty$, $(\psi, S) \in \mathbb{R}^2$. Видно, что предположение (4.15) выполняется при $n = 1$ и $m = 2$.

Если $\beta_1 \neq 0$, $|\beta_0/\beta_1| < 1/2$, то система удовлетворяет (4.18) с

$$\psi_0 = (-1)^k\theta_0 + \frac{\pi k}{2}, \quad \nu_1 = (-1)^k \frac{\beta_1}{\sqrt{8\vartheta}} \cos 2\theta_0, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \theta_0 = \frac{1}{2}\arcsin\left(-\frac{2\beta_0}{\beta_1}\right).$$

Из леммы 3 следует, что если $(-1)^k\beta_1 < 0$, то состояния равновесия $(0, (-1)^k\theta_0 + \pi k/2)$, $k \in \mathbb{Z}$ в предельной системе и соответствующий режим в полной системе неустойчивы. Поскольку $d_{n,m} = \partial_\rho\Lambda_1(0, \psi_0) = 0$ и $\partial_\rho\Lambda_2(0, \psi_0) + \partial_\psi\Omega_2(0, \psi_0) = \beta_0$, то предположение (4.23) выполняется при $h = 2$ и $d_h = \beta_0$. Если $(-1)^k\beta_1 > 0$ и $-|\beta_1|/2 < \beta_0 < 0$, то из леммы 5 и теоремы 40 следует, что в системе возникает устойчивый фазовый захват, при котором $r(t) \approx a$ и $\varphi(t) \approx S(t)/2 + \psi_0$. Из теоремы 41 следует, что если $(-1)^k\beta_1 > 0$ и $0 < \beta_0 < |\beta_1|/2$, то этот режим неустойчив.

Если $\beta_1 \neq 0$, $|\beta_0/\beta_1| > 1/2$ или $\beta_1 = 0$, $\beta_0 \neq 0$, то из теоремы 42 следует, что асимптотический режим с $r(t) \approx a$ не реализуется (см. рис. 4.3).

3. Наконец, пусть $s_0 = 1/4$. Тогда существуют $\kappa = 2$, $\varkappa = 1$ и $a = (2\vartheta)^{-1/2}$, такие, что условие резонанса выполняется при $\eta = -\sqrt{2\vartheta} < 0$. Заметим, что преобразование, описанное в теореме 37 при $N = 1$, приводит систему (4.25) к

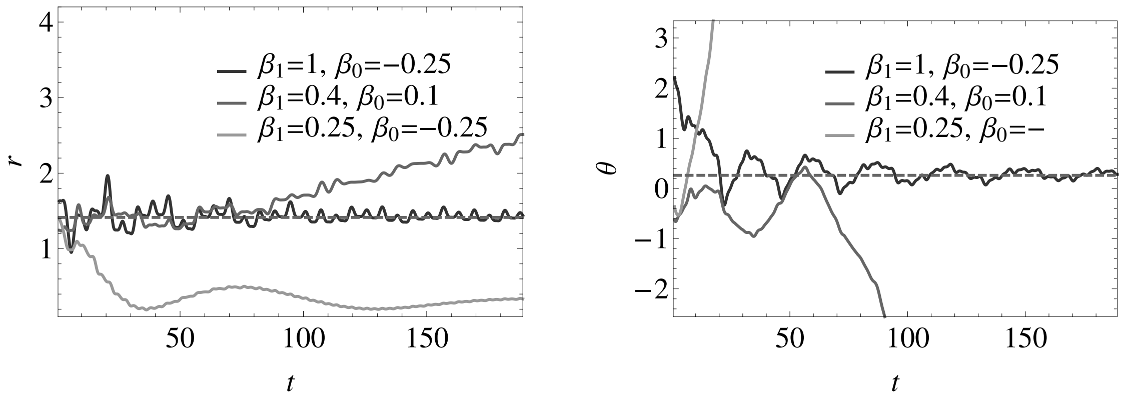


Рис. 4.3. Эволюция $r(t)$ и $\theta(t) \equiv \varphi(t) - S(t)/2$ для решений системы (4.25) с $s_0 = 1$, $s_1 = \vartheta = \mu_1 = 1/4$, $\mu_0 = 0$ при различных значениях параметров β_0 и β_1. Пунктирные кривые соответствуют $r(t) \equiv a$ и $\theta(t) \equiv \theta_0$, где $a = \sqrt{2}$ и $\theta_0 = \pi/12$.

виду

$$\frac{d\rho}{dt} = t^{-\frac{1}{4}}\Lambda_1(\rho,\psi) + \tilde{\Lambda}_1(\rho,\psi,S(t),t), \qquad \frac{d\psi}{dt} = t^{-\frac{1}{4}}\Omega_1(\rho,\psi) + \tilde{\Omega}_1(\rho,\psi,S(t),t),$$

с $\Lambda_1(\rho,\psi) \equiv a\beta_0/2$, $\Omega_1(\rho,\psi) \equiv -\sqrt{2\vartheta}\rho$ и $\tilde{\Lambda}_1(\rho,\psi,S,t) = \mathcal{O}(t^{-1})$, $\tilde{\Omega}_1(\rho,\psi,S,t) = \mathcal{O}(t^{-1})$ при $t \to \infty$ равномерно для всех $|\rho| < \infty$, $(\psi, S) \in \mathbb{R}^2$. Из теоремы 42 следует, что при $\beta_0 \neq 0$ асимптотический режим с $r(t) \approx a$ не реализуется. В этом случае поведение системы (4.25) качественно не зависит от колебательной части возмущений.

4.4.2. Пример 2

Рассмотрим следующую систему:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= t^{-\frac{1}{2}} f_1(r,\varphi,S(t)) + t^{-1} f_2(r,\varphi,S(t)), \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \omega(r) + t^{-\frac{1}{2}} g_1(r,\varphi,S(t)) + t^{-1} g_2(r,\varphi,S(t)) \end{aligned} \tag{4.27}$$

где

$$f_1(r,\varphi,S) \equiv -\alpha(S) r^3 \sin\varphi \cos^3\varphi, \qquad f_2(r,\varphi,S) \equiv \beta(S) r \sin^2\varphi,$$

$$g_1(r,\varphi,S) \equiv -\alpha(S) r^2 \cos^4\varphi, \qquad g_2(r,\varphi,S) \equiv \frac{\beta(S)}{2}\sin 2\varphi,$$

$$\alpha(S) \equiv \alpha_0 + \alpha_1 \sin S, \qquad \beta(S) \equiv \beta_0 + \beta_1 \sin S,$$
$$\omega(r) \equiv 1 - \vartheta r^2, \qquad S(t) \equiv s_0 t + s_1 t^{\frac{1}{2}} + s_2 \log t$$

с постоянными параметрами s_k, $\vartheta > 0$, α_k, β_k, $\alpha_1 \neq 0$ Легко видеть, что система (4.27) имеет вид (4.1) с $q = 2$, $\mathcal{R} = \vartheta^{-1/2}$, $f(r,\varphi,S,t) \equiv t^{-1/2} f_1(r,\varphi,S) + t^{-1} f_2(r,\varphi,S)$ и $g(r,\varphi,S(t),t) \equiv t^{-1/2} g_1(r,\varphi,S) + t^{-1} g_2(r,\varphi,S)$. В декартовых координатах $x_1 = r\cos\varphi$, $x_2 = -r\sin\varphi$ эта система принимает вид

$$\frac{dx_1}{dt} = (1 - \vartheta|\mathbf{x}|^2)x_2, \quad \frac{dy}{dt} = -(1 - \vartheta|\mathbf{x}|^2)x_1 + t^{-\frac{1}{2}}\alpha(S(t))x_1^3 + t^{-1}\beta(S(t))x_2.$$

Пусть $s_0 = 1/2$. Тогда существуют $\kappa = 1$, $\varkappa = 2$, $a = (3/(4\vartheta))^{1/2}$, такие, что условие резонанса (4.5) выполняется при $\eta = -2\vartheta a < 0$. Легко проверить, что замена переменных, описанная в теореме 37 при $N = 4$, преобразует систему к виду

$$\begin{aligned}\frac{d\rho}{dt} &= \sum_{i=1}^{4} t^{-\frac{i}{4}}\Lambda_i(\rho,\psi) + \tilde{\Lambda}_4(\rho,\psi,S(t),t),\\ \frac{d\psi}{dt} &= \sum_{i=1}^{4} t^{-\frac{i}{4}}\Omega_i(\rho,\psi) + \tilde{\Omega}_4(\rho,\psi,S(t),t),\end{aligned} \tag{4.28}$$

где

$$\begin{aligned}\Lambda_1 \equiv &-\frac{a^3\alpha_1}{8}\cos 2\psi,\\ \Lambda_2 \equiv &-\frac{3a^2\alpha_1\rho}{8}\cos 2\psi,\\ \Lambda_3 \equiv &\frac{a}{32}\big(16\beta_0 - \alpha_1(12a^4\alpha_0 + 12\rho^2 + 5a^6\alpha_0\vartheta)\cos 2\psi\\ &+8\beta_1 \sin 2\psi + 3a^4\alpha_1^2 \sin 4\psi\big),\\ \Lambda_4 \equiv &-\frac{\rho}{64}(\alpha_1(111a^4\alpha_0 + 8\rho^2 + 336a^6\alpha_0\vartheta + 432a^8\alpha_0\vartheta^2)\cos 2\psi\\ &- 2(8 + 16\beta_0 + 8\beta_1\sin 2\psi + 3a^4\alpha_1^2(5 + 16a^2\vartheta)\sin 4\psi)),\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\Omega_1 \equiv & -\sqrt{2\vartheta}\rho, \\
\Omega_2 \equiv & \frac{1}{8}\left(-3a^2\alpha_0 - 2s_1 - 8\rho^2\vartheta + 4a^2\alpha_1\cos\psi\sin\psi\right), \\
\Omega_3 \equiv & \frac{a\rho}{4}(-3\alpha_0 + 2\alpha_1\sin 2\psi), \\
\Omega_4 \equiv & \frac{1}{3456}(-54(a^4(57\alpha_0^2 + 8\alpha_1^2) + 24\alpha_0\rho^2 + 32s_2) - 3a^6(3537\alpha_0^2 + 437\alpha_1^2)\vartheta \\
& - 16a^8(918\alpha_0^2 + 139\alpha_1^2)\vartheta^2 + 864\beta_1\cos 2\psi \\
& + 54\alpha_1(3a^4\alpha_1(3 + 8a^2\vartheta)\cos 4\psi \\
& + (16\rho^2 + a^4\alpha_0(67 + a^2\vartheta(173 + 216a^2\vartheta)))\sin 2\psi))
\end{aligned}
$$

и $\tilde\Lambda_4(\rho,\psi,S,t) = \mathcal{O}(t^{-5/4})$, $\tilde\Omega_4(\rho,\psi,S,t) = \mathcal{O}(t^{-5/4})$ при $t\to\infty$ равномерно для всех $|\rho|<\infty$, $(\psi,S)\in\mathbb{R}^2$. Легко видеть, что предположение (4.15) выполняется при $n=1$ и $m=2$.

Заметим, что система (4.28) удовлетворяет (4.18) с

$$\psi_0 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, \quad \nu_1 = (-1)^k\frac{a^3\alpha_1}{4}, \quad k\in\mathbb{Z}.$$

Поскольку $\eta<0$, из леммы 3 следует, что если $(-1)^k\alpha_1<0$, то равновесие $(0,\pi/4+\pi k/2)$ неустойчиво в предельной системе при всех $k\in\mathbb{Z}$. Следовательно, соответствующие резонансные режимы в полной системе не реализуются. Более того, мы видим, что $d_{n,m} = \partial_\rho\Lambda_1(0,\psi_0) = 0$, $\partial_\rho\Lambda_i(0,\psi_0) + \partial_\psi\Omega_i(0,\psi_0) = 0$ при $1\le i\le 3$, и предположение (4.23) выполняется при $h=4$ и

$$d_h = \frac{1 + 2\beta_0 + (-1)^{k+1}\beta_1}{4}$$

Таким образом, если $(-1)^k\alpha_1>0$ и $(-1)^k\beta_1 > 1+2\beta_0$, то из Леммы 5 и Теоремы 40 следует, что в системе происходит устойчивая фазовый захват такой, что $r(t)\approx a$ и $\varphi(t)\approx S(t)/2+\psi_0$ (см. Рис. 4.4).

4.4.3. Пример 3

Наконец, снова рассмотрим уравнение (4.6). В разделе 4.2 было показано, что эта система соответствует системе (4.1) с $q=2$, $s_0=3/2$ и функциями $\omega(r)$,

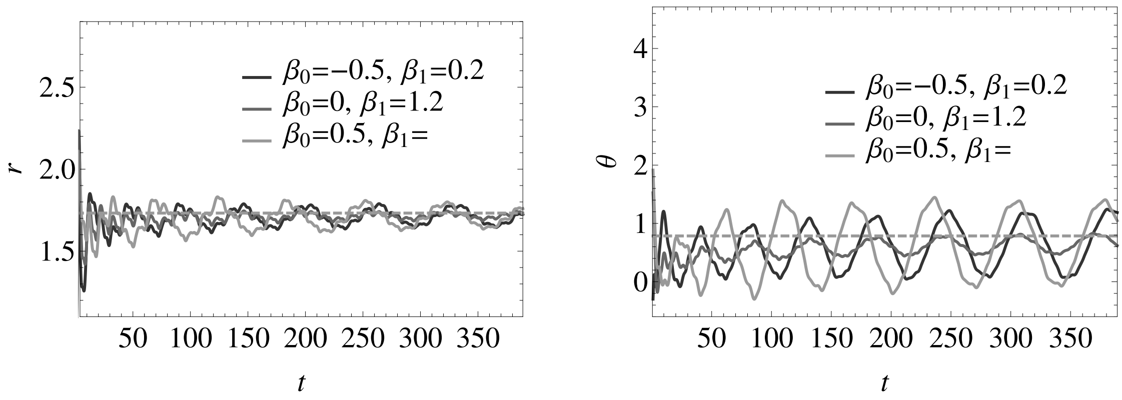


Рис. 4.4. Эволюция $r(t)$ и $\theta(t) \equiv \varphi(t) - S(t)/2$ для решений системы (4.27) при $s_0 = 1/2$, $s_1 = 1$, $s_2 = 0$, $\theta = 1/4$, $\alpha_0 = 0.1$, $\alpha_1 = 0.15$ при различных значениях параметров β_0 и β_1. Пунктирные кривые соответствуют $r(t) \equiv a$ и $\theta(t) \equiv \pi/4$, где $a = \sqrt{3}$.

$f(r, \varphi, S, t)$, $g(r, \varphi, S, t)$, определяемыми уравнениями (4.7) и (4.8). Отметим, что $0 < \omega(r) < 1$ для всех $0 < |r| < (2\vartheta)^{-1/2}$ и $\omega(r) = 1 - 3\vartheta r^2/8 - 35\vartheta^2 r^4/256 + \mathcal{O}(\vartheta^4)$ при $\vartheta \to 0$. Следовательно, существуют κ, $\varkappa \in \mathbb{Z}_+$ и $0 < a < (2\vartheta)^{-1/2}$ такие, что условие (4.5) выполняется при $\eta < 0$.

Пусть $\kappa = 1$ и $\varkappa = 2$. Тогда преобразования (4.9), (4.10) при $N = 2$ приведут систему к (4.26) при

$$\begin{aligned} &\Lambda_1 = \frac{a}{4}(2\beta_0 + \delta_1 \sin(2\psi - \sigma)) + \mathcal{O}(\vartheta), \quad && \Lambda_2 \equiv \frac{\rho}{4}\left(2\beta_0 + \delta_1 \sin(2\psi - \sigma) + \mathcal{O}(\vartheta)\right), \\ &\Omega_1 \equiv \eta\rho, && \Omega_2 \equiv \frac{1}{4}(-2\alpha_0 + \delta_1 \cos(2\psi - \sigma)) + \mathcal{O}(\vartheta), \end{aligned}$$

при $\vartheta \to 0$ и $\tilde{\Lambda}_2(\rho, \psi, S, t) = \mathcal{O}(t^{-1})$, $\tilde{\Omega}_2(\rho, \psi, S, t) = \mathcal{O}(t^{-1})$ при $t \to \infty$ равномерно для всех $|\rho| < \infty$, $(\psi, S) \in \mathbb{R}^2$, где $\delta_1 = \sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2}$ и $\sigma = \arcsin(\alpha_1/\delta_1)$. Мы видим, что предположение (4.15) выполняется при $n = 1$ и $m = 2$.

Если $\delta_1 \neq 0$ и $|\beta_0| < \delta_1/2$, то система удовлетворяет (4.18) с

$$\psi_0 = (-1)^j \theta_0 + \frac{\sigma + \pi j}{2} + \mathcal{O}(\vartheta), \quad \nu_1 = (-1)^j \frac{a\delta_1}{2} \cos 2\theta_0 + \mathcal{O}(\vartheta), \quad j \in \mathbb{Z},$$
$$\theta_0 = \frac{1}{2} \arcsin\left(-\frac{2\beta_0}{\delta_1}\right).$$

Из Леммы 3 следует, что состояния равновесия $(0, (\sigma + \pi)/2 - \theta_0 + \pi j)$, $j \in \mathbb{Z}$ в предельной системе и соответствующий режим в полной системе неустойчивы. Поскольку $d_{n,m} = \partial_\rho \Lambda_1(0, \psi_0) = 0$ и $\partial_\rho \Lambda_2(0, \psi_0) + \partial_\psi \Omega_2(0, \psi_0) = \beta_0$, то мы видим, что предположение (4.23) выполняется при $h = 2$ и $d_h = \beta_0 + \mathcal{O}(\vartheta)$ при $\vartheta \to 0$. Если $-\delta_1/2 < \beta_0 < 0$, то из леммы 5 и теоремы 40 следует, что в системе возникает устойчивая фазовая синхронизация, при которой $r(t) \approx a$ и $\varphi(t) \approx S(t)/2 + \theta_0 + \sigma/2 + \pi j$, $j \in \mathbb{Z}$. Из теоремы 41 следует, что если $0 < \beta_0 < \delta_1/2$, то этот режим неустойчив.

Из теоремы 42 следует, что если $\delta_1 = 0$, $\beta_0 \neq 0$ или $\delta_1 \neq 0$, $|\beta_0| > \delta_1/2$, то асимптотический режим с $r(t) \approx a$ не реализуется.

Обратим внимание, что корень уравнения $\omega(a) = \kappa s_0/\varkappa$ можно найти численно. В частности, если $\vartheta = 1/4$, то $a \approx 1,27$ (см. рис. 4.5 и рис. 4.1, в).

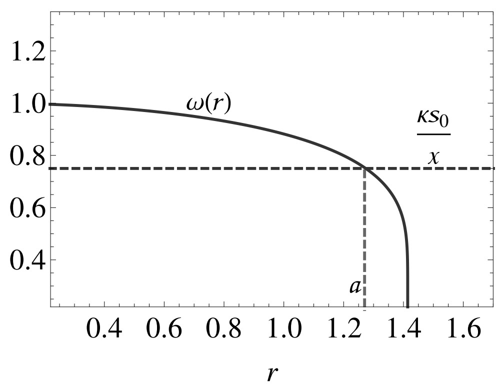


Рис. 4.5. Нахождение a, когда $\vartheta = 1/4$, $\kappa = 1$ и $\varkappa = 2$.

4.5. Обоснование результатов

4.5.1. Замена переменных

Доказательство теоремы 37. Подстановка (4.9) в (4.1) даёт следующую систему:

$$\frac{dR}{dt} = F(R, \Psi, S(t), t), \quad \frac{d\Psi}{dt} = G(R, \Psi, S(t), t), \tag{4.29}$$

где

$$
\begin{aligned}
&F(R,\Psi,S,t) = t^{\frac{1}{2q}} f\left(a + t^{-\frac{1}{2q}}R, \frac{\kappa}{\varkappa}S + \Psi, S, t\right) + t^{-1}\frac{R}{2q},\\
&G(R,\Psi,S,t) = \omega\left(a + t^{-\frac{1}{2q}}R\right) - \frac{\kappa}{\varkappa}S'(t) + g\left(a + t^{-\frac{1}{2q}}R, \frac{\kappa}{\varkappa}S + \Psi, S, t\right).
\end{aligned}
$$

Из (4.3), (4.4) и (4.5) следует, что функции $F(R,\Psi,S,t)$ и $G(R,\Psi,S,t)$ удовлетворяют следующим асимптотическим формулам:

$$
\begin{aligned}
F(R,\Psi,S,t) &= \sum_{k=1}^{M} t^{-\frac{k}{2q}} F_k(R,\Psi,S) + \mathcal{O}(t^{-\frac{M+1}{2q}}),\\
G(R,\Psi,S,t) &= \sum_{k=1}^{M} t^{-\frac{k}{2q}} G_k(R,\Psi,S) + \mathcal{O}(t^{-\frac{M+1}{2q}}), \quad t\to\infty
\end{aligned}
\tag{4.30}
$$

равномерно для всех $|R| < \infty$, $(\Psi, S) \in \mathbb{R}^2$ и для всех целых $M \geq 1$, где коэффициенты

$$
\begin{aligned}
&F_k \equiv \sum_{\substack{i+2j=k+1\\ i\geq 0, j\geq 1}} \partial_r^i f_j\left(a, \frac{\kappa}{\varkappa}S + \Psi, S\right)\frac{R^i}{i!} + \delta_{k,2q}\frac{R}{2q},\\
&G_k \equiv \partial_r^k\omega(a)\frac{R^k}{k!} - \frac{\kappa}{\varkappa}s_{k/2}\left(1 - \frac{k}{2q} + \delta_{k,2q}\right) + \sum_{\substack{i+2j=k\\ i\geq 0, j\geq 1}} \partial_r^i g_j\left(a, \frac{\kappa}{\varkappa}S + \Psi, S\right)\frac{R^i}{i!}
\end{aligned}
\tag{4.31}
$$

являются 2π-периодическими по Ψ и $2\pi\varkappa$-периодическими по S. Здесь $\delta_{k,2q}$ — символ Кронекера. Положим $s_j = 0$ для $j > q$ и $s_{k/2} = 0$ для нечётных k. Заметим, что $F_1(R,\Psi,S) \equiv f_1(a, \kappa S/\varkappa + \Psi, S)$ и $G_1(R,\Psi,S) \equiv \eta R$.

Легко увидеть, что система (4.29) асимптотически автономна с предельной системой

$$
\frac{d\hat{R}}{dt} = 0, \quad \frac{d\hat{\Psi}}{dt} = 0, \quad \frac{d\hat{S}}{dt} = s_0.
$$

Следовательно, фазу $S(t)$ можно рассматривать как аналог быстрой переменной при $t \to \infty$ по сравнению с решениями $R(t)$, $\Psi(t)$ системы (4.29). Это можно использовать для упрощения системы, усреднив уравнения по переменной $S(t)$.

Преобразование ищется в следующем виде:

$$U_N(R,\Psi,S,t) = R + \sum_{k=1}^{N} t^{-\frac{k}{2q}} u_k(R,\Psi,S),$$
$$V_N(R,\Psi,S,t) = \Psi + \sum_{k=1}^{N} t^{-\frac{k}{2q}} v_k(R,\Psi,S) \tag{4.32}$$

с некоторым целым числом $N \geq 1$. Коэффициенты $u_k(R,\Psi,S)$, $v_k(R,\Psi,S)$ предполагаются периодическими по Ψ и S и выбираются такими, что система в новых переменных

$$\rho(t) \equiv U_N(R(t),\Psi(t),S(t),t), \quad \psi(t) \equiv V_N(R(t),\Psi(t),S(t),t) \tag{4.33}$$

принимает вид (4.12), где правые части явно не зависят от $S(t)$, по крайней мере, в первых N членах асимптотики при $t \to \infty$. Дифференцируя (4.32) по t и учитывая (4.4), (4.29) и (4.30), получаем

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} U_N \\ V_N \end{pmatrix} &\equiv \left(\frac{dR}{dt}\partial_R + \frac{d\Psi}{dt}\partial_\Psi + \frac{dS}{dt}\partial_S + \partial_t\right)\begin{pmatrix} U_N \\ V_N \end{pmatrix} \\
=& \sum_{k=1}^{\infty} t^{-\frac{k}{2q}} \left\{ \begin{pmatrix} F_k \\ G_k \end{pmatrix} + s_0 \partial_S \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix} \right\} + \sum_{k=2}^{\infty} t^{-\frac{k}{2q}} \sum_{j=1}^{k-1} \delta_{j,2q} \frac{2q-k}{2q} \begin{pmatrix} u_{k-j} \\ v_{k-j} \end{pmatrix} \\
&+ \sum_{k=2}^{\infty} t^{-\frac{k}{2q}} \sum_{j=1}^{k-1} \left\{ F_j \partial_R + G_j \partial_\Psi + s_{j/2}\left(1 - \frac{j}{2q} + \delta_{j,2q}\right)\partial_S \right\} \begin{pmatrix} u_{k-j} \\ v_{k-j} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{4.34}$$

при $t \to \infty$, где предполагается, что $u_k(R,\Psi,S) \equiv v_k(R,\Psi,S) \equiv 0$ при $k \leq 0$ и $k > N$. Сравнение коэффициентов при степенях $t^{-1/2q}$ в (4.12) и (4.34) даёт

$$s_0 \partial_S \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda_k(R,\Psi) - F_k(R,\Psi,S) + \tilde F_k(R,\Psi,S) \\ \Omega_k(R,\Psi) - G_k(R,\Psi,S) + \tilde G_k(R,\Psi,S) \end{pmatrix}, \quad 1 \leq k \leq N, \tag{4.35}$$

где функции $\tilde F_k$, $\tilde G_k$ выражаются через $\{u_j, v_j, \Lambda_j, \Omega_j\}_{j=1}^{k-1}$ по следующим формулам: $\tilde F_1 \equiv \tilde G_1 \equiv 0$,

$$\begin{pmatrix} \tilde F_2 \\ \tilde G_2 \end{pmatrix} \equiv (u_1\partial_R + v_1\partial_\Psi)\begin{pmatrix} \Lambda_1 \\ \Omega_1 \end{pmatrix} - (F_1\partial_R + G_1\partial_\Psi)\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix},$$

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix}\tilde F_3\\ \tilde G_3\end{pmatrix} \equiv & \sum_{i+j=3}(u_i\partial_R+v_i\partial_\Psi)\begin{pmatrix}\Lambda_j\\ \Omega_j\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\left(u_1^2\partial_R^2+2u_1v_1\partial_R\partial_\Psi+v_1^2\partial_\Psi^2\right)\begin{pmatrix}\Lambda_1\\ \Omega_1\end{pmatrix}\\
& -\sum_{j=1}^{2}\left\{F_j\partial_R+G_j\partial_\Psi+s_{j/2}\left(1-\frac{j}{2q}+\delta_{j,2q}\right)\partial_S\right\}\begin{pmatrix}u_{3-j}\\ v_{3-j}\end{pmatrix}\\
& -\delta_{2,2q}\frac{2q-3}{2q}\begin{pmatrix}u_1\\ v_1\end{pmatrix},\\
\begin{pmatrix}\tilde F_k\\ \tilde G_k\end{pmatrix} \equiv & \sum_{\substack{m_1+\cdots im_i\\ +n_1+\cdots ln_l+j=k}} C_{i,l,m_1,\dots,m_i,n_1,\dots,n_l}u_1^{m_1}\cdots u_i^{m_i}v_1^{n_1}\cdots v_l^{n_l}\partial_R^{|\mathbf{m}|}\partial_\Psi^{|\mathbf{n}|}\begin{pmatrix}\Lambda_j\\ \Omega_j\end{pmatrix}\\
& -\sum_{j=1}^{k-1}\left\{F_j\partial_R+G_j\partial_\Psi+s_{j/2}\left(1-\frac{j}{2q}+\delta_{j,2q}\right)\partial_S\right\}\begin{pmatrix}u_{k-j}\\ v_{k-j}\end{pmatrix}\\
& -\sum_{j=1}^{k-1}\delta_{j,2q}\frac{2q-k}{2q}\begin{pmatrix}u_{k-j}\\ v_{k-j}\end{pmatrix},
\end{aligned}
\tag{4.36}
$$

где $|\mathbf{m}| = m_1+\cdots+m_i$, $|\mathbf{n}| = n_1+\cdots+n_l$ с некоторыми постоянными параметрами $C_{i,l,m_1,\dots,m_i,n_1,\dots,n_l}$. Чтобы избежать появления секулярных членов в (4.32) и гарантировать существование периодических решений системы (4.35), положим

$$
\begin{aligned}
\Lambda_k(R,\Psi) &\equiv \langle F_k(R,\Psi,S)-\tilde F_k(R,\Psi,S)\rangle_{\varkappa S},\\
\Omega_k(R,\Psi) &\equiv \langle G_k(R,\Psi,S)-\tilde G_k(R,\Psi,S)\rangle_{\varkappa S}.
\end{aligned}
\tag{4.37}
$$

В частности, $\Lambda_1(R,\Psi)\equiv\langle f_1(a,\kappa S/\varkappa+\Psi,S)\rangle_{\varkappa S}$ и $\Omega_1(R,\Psi)\equiv\eta R$. Следовательно, система (4.35) разрешима в классе функций, $2\pi\varkappa$-периодических по S с нулевым средним. Видно, что функции $u_k(R,\Psi,S)$, $v_k(R,\Psi,S)$, $\Lambda_k(R,\Psi)$, $\Omega_k(R,\Psi)$ являются 2π-периодическими по Ψ. Более того, принимая во внимание (4.31), (4.36) и (4.37), можно показать по индукции, что $u_k(R,\Psi,S)$, $\Lambda_k(R,\Psi)$ являются многочленами от R степени $k-1$, а $v_k(R,\Psi,S)$, $\Omega_k(R,\Psi)$ являются многочленами от R степени k. Это вместе с (4.32) означает, что для любого $\epsilon\in(0,\mathcal{R})$

найдется $t_0 \geq 1$ такое, что

$$|U_N - R| \leq \epsilon, \quad |V_N - \Psi| \leq \epsilon, \quad |\det \mathbf{J}_N - 1| \leq \epsilon \tag{4.38}$$

для всех $(R, \Psi) \in \mathfrak{D}_{0,t_0}$, $t \geq t_0$ и $S \in \mathbb{R}$, где

$$\mathbf{J}_N(R,\Psi,S,t) := \begin{pmatrix} \partial_R V_N(R,\Psi,S,t) & \partial_\Psi V_N(R,\Psi,S,t) \\ \partial_R \Psi_N(R,\Psi,S,t) & \partial_\Psi \Psi_N(R,\Psi,S,t) \end{pmatrix}.$$

Таким образом, замена (4.33) обратима. Обозначим через $R = u(\rho,\psi,t)$, $\Psi = v(\rho,\psi,t)$ обратное преобразование, определённое для всех $(\rho,\psi) \in \mathfrak{D}_{\epsilon,t_0} \subset \mathfrak{D}_{0,t_0}$ и $t \geq t_0$. Тогда,

$$\begin{pmatrix} \tilde\Lambda_N(\rho,\psi,S,t) \\ \tilde\Omega_N(\rho,\psi,S,t) \end{pmatrix} \equiv (\partial_t + F\partial_R + G\partial_\Psi) \begin{pmatrix} U_N \\ V_N \end{pmatrix}\Bigg|_{\substack{R=u(\rho,\psi,t)\\ \Psi=v(\rho,\psi,t)}} - \sum_{k=1}^N t^{-\frac{k}{2q}} \begin{pmatrix} \Lambda_k(\rho,\psi) \\ \Omega_k(\rho,\psi) \end{pmatrix}.$$

Объединяя это с (4.34), получаем (4.14). Из (4.38) следует, что $|\rho - u(\rho,\psi,t)| \leq \epsilon$ и $|\psi - v(\rho,\psi,t)| \leq \epsilon$ для всех $(\rho,\psi) \in \mathfrak{D}_{\epsilon,t_0}$ и $t \geq t_0$. Определим $\tilde u_N(\rho,\psi,t) \equiv u(\rho,\psi,t) - \rho$, $\tilde v_N(\rho,\psi,t) \equiv v(\rho,\psi,t) - \psi$. Таким образом, имеем (4.11). □

4.5.2. Анализ модельной системы

Доказательство леммы 3. Подстановка $\hat\varrho(t) = u(t)$, $\hat\phi(t) = \psi_0 + v(t)$ в (4.17) даёт следующую систему с равновесием в точке $(0,0)$:

$$\frac{du}{dt} = t^{-\frac{n}{2q}} \Lambda_n(u, \psi_0 + v), \quad \frac{dv}{dt} = t^{-\frac{1}{2q}} \eta u. \tag{4.39}$$

Рассмотрим линеаризованную систему

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \mathbf{M}(t)\mathbf{z}, \quad \mathbf{M}(t) \equiv \begin{pmatrix} t^{-\frac{n}{2q}}\lambda_n & t^{-\frac{n}{2q}}\nu_n \\ t^{-\frac{1}{2q}}\eta & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Корни характеристического уравнения $|\mathbf{M}(t) - \mu\mathbf{I}| = 0$ имеют вид

$$\mu_\pm(t) = \frac{t^{-\frac{n}{2q}}}{2}\left(\lambda_n \pm \sqrt{4\nu_n \eta t^{\frac{n-1}{2q}} + \lambda_n^2}\right).$$

При $\nu_n\eta > 0$ собственные значения $\mu_+(t)$ и $\mu_-(t)$ являются действительными числами разных знаков. Это означает, что равновесие имеет тип седло, а неподвижная точка $(0,\psi_0)$ системы (4.17) неустойчива.

Покажем, что в противном случае, когда $\nu_n\eta < 0$, устойчивость равновесия зависит от знака $\lambda_n \neq 0$. Рассмотрим сначала случай $n = 1$. Используем

$$L_1(u,v) \equiv \frac{1}{2}\left(|\eta|u^2 + |\nu_1|v^2\right) + \chi_1 uv \tag{4.40}$$

как кандидат на функцию Ляпунова для системы (4.39), где $\chi_1 \in \mathbb{R}$ — параметр, такой что

$$\operatorname{sgn}\chi_1 = \operatorname{sgn}(\nu_1\lambda_1), \quad |\chi_1| = \frac{1}{2}\min\left\{|\eta|, |\nu_1|, \frac{2|\lambda_1\eta\nu_1|}{\lambda_1^2 + 2|\eta\nu_1|}\right\}. \tag{4.41}$$

Легко проверить, что существует $\Delta_0 > 0$ такое, что

$$L_-\Delta^2 \le L_1(u,v) \le L_+\Delta^2 \tag{4.42}$$

для всех $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, таких, что $\Delta = \sqrt{u^2+v^2} \le \Delta_0$, где $L_- = \min\{|\eta| - |\chi_1|, |\nu_1| - |\chi_1|\}/4 > 0$ и $L_+ = \max\{|\eta| + |\chi_1|, |\nu_1| + |\chi_1|\}$. Производная $L_1(u,v)$ по t вдоль траекторий системы удовлетворяет условию

$$\frac{dL_1}{dt} := \left(\partial_t + \frac{du}{dt}\partial_u + \frac{dv}{dt}\partial_v\right)L_1 = t^{-\frac{1}{2q}}\left(\mathcal{W}(u,v) + \mathcal{O}(\Delta^3)\right), \quad \Delta \to 0,$$

где

$$\mathcal{W}(u,v) \equiv (\lambda_1 - (\operatorname{sgn}\lambda_1)|\chi_1|)|\eta|u^2 + (\operatorname{sgn}\lambda_1)|\chi_1\nu_1|v^2 + \chi_1\lambda_1 uv.$$

Используя неравенство Юнга, получаем

$$\chi_1|\lambda_1|uv \ge -\frac{|\chi_1|}{2|\nu_1|}\left(\lambda_1^2u^2 + \nu_1^2v^2\right) \tag{4.43}$$

для всех $(u,v) \in \mathbb{R}^2$. Легко проверить, что

$$\mathcal{W}(u,v) \ge |\lambda_1\eta|\left(1 - \frac{|\chi_1|(\lambda_1^2 + 2|\eta\nu_1|)}{2|\lambda_1\eta\nu_1|}\right)u^2 + \frac{|\chi_1\nu_1|}{2}v^2, \qquad \text{если} \quad \lambda_1 > 0,$$

$$\mathcal{W}(u,v) \le -|\lambda_1\eta|\left(1 - \frac{|\chi_1|(\lambda_1^2 + 2|\eta\nu_1|)}{2|\lambda_1\eta\nu_1|}\right)u^2 - \frac{|\chi_1\nu_1|}{2}v^2, \qquad \text{если} \quad \lambda_1 < 0.$$

Объединяя это с (4.41) и (4.43), мы видим, что существует $0 < \Delta_1 \le \Delta_0$ такое, что

$$
\begin{aligned}
&\frac{dL_1}{dt} \ge t^{-\frac{1}{2q}} \left\{ A_1 u^2 + B_1 v^2 - C_1 \Delta^3 \right\}, && \text{если} \quad \lambda_1 > 0,\\
&\frac{dL_1}{dt} \le -t^{-\frac{1}{2q}} \left\{ A_1 u^2 + B_1 v^2 - C_1 \Delta^3 \right\}, && \text{если} \quad \lambda_1 < 0
\end{aligned}
\tag{4.44}
$$

для всех $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ таких, что $\Delta \le \Delta_1$ с положительными параметрами

$$
A_1 = \frac{|\lambda_1 \eta|}{2}, \quad B_1 = \frac{|\chi_1 \nu_1|}{2} \tag{4.45}
$$

и некоторый $C_1 > 0$. Следовательно, существует $0 < \tilde{\Delta}_1 \le \min\{\tilde{\gamma}_1/(2C_1), \Delta_1\}$ такой, что $A_1 u^2 + B_1 v^2 \ge \tilde{\gamma}_1 \Delta^2$ и $C_1 \Delta^3 \le \tilde{\gamma}_1 \Delta^2/2$ для всех $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ таких, что $\Delta \le \tilde{\Delta}_1$, где $\tilde{\gamma}_1 = \min\{A_1, B_1\}$. Объединяя это с (4.42) и (4.44), мы видим, что существует $0 < \Delta_2 \le \tilde{\Delta}_1$ такое, что

$$
\frac{dL_1}{dt} \ge \gamma_1 t^{-\frac{1}{2q}} L_1 \ge 0, \qquad \text{если} \quad \lambda_1 > 0, \tag{4.46}
$$

$$
\frac{dL_1}{dt} \le -\gamma_1 t^{-\frac{1}{2q}} L_1 \le 0, \qquad \text{если} \quad \lambda_1 < 0 \tag{4.47}
$$

для всех $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ таких, что $\Delta \le \Delta_2$ с $\gamma_1 = \tilde{\gamma}_1/(2L_+) > 0$.

Если $\lambda_1 > 0$, то, интегрируя (4.46) по t, получаем неравенство

$$
\log L_1(u(t), v(t)) \ge \log L_1(u(t_0), v(t_0)) + \frac{2q\gamma_1}{2q-1} \left(t^{1-\frac{1}{2q}} - t_0^{1-\frac{1}{2q}} \right), \quad t \ge t_0.
$$

Принимая во внимание (4.42), мы видим, что существует $\epsilon \in (0, \Delta_2)$ такой, что для любого $\delta \in (0, \epsilon)$ решение $(u(t), v(t))$ уравнения (4.39) с начальными данными $\sqrt{u^2(t_0) + v^2(t_0)} = \delta$ покидает окрестность $\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : \Delta \le \epsilon\}$ при $t \ge t_1$, где

$$
t_1^{1-\frac{1}{2q}} = t_0^{1-\frac{1}{2q}} + \left(\frac{2q-1}{2q\gamma_1} \right) \log \left(\frac{L_+ \epsilon^2}{L_- \delta^2} \right).
$$

Следовательно, равновесие $(0, 0)$ в системе (4.39) и неподвижная точка $(0, \psi_0)$ в системе (4.17) неустойчивы.

Если $\lambda_1 < 0$, то из (4.47) следует, что для любого $\epsilon \in (0, \Delta_1)$ найдется $\delta \in (0, \epsilon)$ такое, что решение $(u(t), v(t))$ уравнения (4.39) с начальными данными $\sqrt{u^2(t_0) + v^2(t_0)} \le \delta$ не может выйти из окрестности $\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : \Delta \le \epsilon\}$.

Следовательно, точка равновесия $(0,0)$ системы (4.39) и неподвижная точка $(0,\psi_0)$ системы (4.17) устойчивы. Более того, интегрируя (4.47), получаем неравенство

$$L_1(u(t),v(t)) \le L_1(u(t_0),v(t_0)) \exp\left\{-\frac{2q\gamma_1}{2q-1}\left(t^{1-\frac{1}{2q}} - t_0^{1-\frac{1}{2q}}\right)\right\}, \quad t \ge t_0.$$

Объединяя это с (4.42), получаем асимптотическую устойчивость равновесия.

Пусть $n \ge 2$. Рассмотрим

$$L_n \equiv t^{\frac{n-1}{2q}} \frac{|\eta|}{2} u^2 + (\operatorname{sgn}\nu_n) \int\limits_0^v \Lambda_n(u,\psi_0+w)\,dw + t^{-\frac{n-1}{2q}} \left(\frac{\lambda_n^2 v^2}{2|\eta|} + \lambda_n (\operatorname{sgn}\eta) uv\right)$$

в качестве кандидата на функцию Ляпунова. Обратим внимание, что существуют $\Delta_0 > 0$ и $t_1 \ge t_0$, такие, что

$$\frac{1}{4}\left(|\eta|u^2 + |\nu_n|v^2\right) \le L_n(u,v,t) \le t^{\frac{n-1}{2q}}\left(|\eta|u^2 + |\nu_n|v^2\right)$$

для всех $(u,v,t) \in \mathbb{R}^3$, таких, что $\Delta \le \Delta_0$ и $t \ge t_1$. Напомним, что $\operatorname{sgn}\nu_n = -\operatorname{sgn}\eta$. Производная $L_n(u,v,t)$ по t вдоль траекторий системы (4.39) удовлетворяет условию

$$\frac{dL_n}{dt} = \lambda_n t^{-\frac{n}{2q}}\left(|\eta|u^2 + |\nu_n|v^2 + \mathcal{O}(\Delta^3) + \mathcal{O}(\Delta^2)\mathcal{O}(t^{-\frac{1}{2q}})\right)$$

при $\Delta \to 0$ и $t \to \infty$. Следовательно, существуют $0 < \Delta_1 \le \Delta_0$ и $t_2 \ge t_1$, такие, что

$$\begin{aligned} &\frac{dL_n}{dt} \ge \gamma_n t^{-\frac{n}{2q}}\left(|\eta|u^2 + |\nu_n|v^2\right) \ge \gamma_n t^{-\frac{2n-1}{2q}} L_n \ge 0, && \text{если} \quad \lambda_n > 0,\\ &\frac{dL_n}{dt} \le -\gamma_n t^{-\frac{n}{2q}}\left(|\eta|u^2 + |\nu_n|v^2\right) \le -\gamma_n t^{-\frac{2n-1}{2q}} L_n \le 0, && \text{если} \quad \lambda_n < 0 \end{aligned} \tag{4.48}$$

для всех $(u,v,t) \in \mathbb{R}^3$, таких, что $\Delta \le \Delta_1$ и $t \ge t_2$, причём $\gamma_n = |\lambda_n|/2 > 0$. Интегрируя (4.48), получаем следующие неравенства:

$$\begin{aligned} &|\eta|u^2(t) + |\nu_n|v^2(t) \ge C t^{-\frac{n-1}{2q}} \exp\left\{\frac{2q\gamma_n}{2q-2n+1}\left(t^{1-\frac{2n-1}{2q}} - t_2^{1-\frac{2n-1}{2q}}\right)\right\}, \quad \lambda_n > 0,\\ &|\eta|u^2(t) + |\nu_n|v^2(t) \le 4C \exp\left\{-\frac{2q\gamma_n}{2q-2n+1}\left(t^{1-\frac{2n-1}{2q}} - t_2^{1-\frac{2n-1}{2q}}\right)\right\}, \quad \lambda_n < 0 \end{aligned}$$

с положительным параметром $C = L_n(u(t_2), v(t_2), t_2) > 0$. Таким образом, если $\lambda_n > 0$ и $n \le q$, равновесие $(0, \psi_0)$ системы (4.17) неустойчиво. Если $n \le q$ и $\lambda_n < 0$, равновесие асимптотически устойчиво. Наконец, если $n > q$ и $\lambda_n < 0$, равновесие (не асимптотически) устойчиво. □

Доказательство леммы 4. Подставляя ряды (4.19) в (4.16) и приравнивая члены при одинаковых степенях t, получаем цепочку линейных уравнений для коэффициентов ϱ_k, ϕ_k

$$\begin{pmatrix} \eta & 0 \\ \lambda_n & \nu_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varrho_k \\ \phi_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{F}_k \\ \mathfrak{G}_k \end{pmatrix}, \tag{4.49}$$

где $\mathfrak{F}_k$, $\mathfrak{G}_k$ выражаются через $\varrho_1, \phi_1, \dots, \varrho_{k-1}, \phi_{k-1}$. Например,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}_1 &= -\,\Omega_m(0, \psi_0), \\
\mathfrak{G}_1 &= -\,\Lambda_{n+1}(0, \psi_0), \\
\mathfrak{F}_2 &= -\,\Omega_{m+1}(0, \psi_0) - (\varrho_1 \partial_\rho + \phi_1 \partial_\psi)\, \Omega_m(0, \psi_0), \\
\mathfrak{G}_2 &= -\,\Lambda_{n+2}(0, \psi_0) - \sum_{i+j=2} (\varrho_i \partial_\rho + \phi_i \partial_\psi)\, \Lambda_{n+j}(0, \psi_0) \\
&\quad - \frac{1}{2} \left(\varrho_1^2 \partial_\rho^2 + 2\varrho_1 \phi_1 \partial_\rho \partial_\psi + \phi_1^2 \partial_\psi^2\right) \Lambda_n(0, \psi_0).
\end{aligned}$$

Поскольку $\nu_n \eta \ne 0$, то видим, что система (4.49) разрешима.

Для доказательства существования решения системы (4.16) с такой асимптотикой рассмотрим функции $\tilde{\varrho}_{*,M}(t) \equiv \varrho_{*,n+M+1}(t)$ и $\tilde{\phi}_{*,M}(t) \equiv \phi_{*,n+M+1}(t)$ с некоторым $M \in \mathbb{Z}_+$. Из (4.20) следует, что

$$\tilde{\varrho}_{*,M}(t) \equiv \sum_{k=1}^{n+M+1} t^{-\frac{k+m-2}{2q}} \varrho_k, \quad \tilde{\phi}_{*,M}(t) \equiv \psi_0 + \sum_{k=1}^{n+M+1} t^{-\frac{k}{2q}} \phi_k. \tag{4.50}$$

По построению мы имеем

$$\begin{aligned}
Z_\varrho(t) &\equiv \tilde{\varrho}'_{*,M}(t) - \hat{\Lambda}_N(\tilde{\varrho}_{*,M}(t), \tilde{\phi}_{*,M}(t), t) = \mathcal{O}\left(t^{-\frac{2n+M+2}{2q}}\right), \\
Z_\phi(t) &\equiv \tilde{\phi}'_{*,M}(t) - \hat{\Omega}_N(\tilde{\varrho}_{*,M}(t), \tilde{\phi}_{*,M}(t), t) = \mathcal{O}\left(t^{-\frac{n+m+M+1}{2q}}\right), \quad t \to \infty.
\end{aligned} \tag{4.51}$$

Подставляя

$$\varrho(t) = \tilde{\varrho}_{*,M}(t) + t^{-\frac{M}{2q}} u(t), \quad \phi(t) = \tilde{\phi}_{*,M}(t) + t^{-\frac{M}{2q}} v(t) \tag{4.52}$$

в (4.16), мы получаем возмущённую систему, близкую к гамильтоновой,

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -\partial_v \mathcal{H}_M(u, v, t) + \xi_M(t), \\ \frac{dv}{dt} &= \partial_u \mathcal{H}_M(u, v, t) + \Upsilon_M(u, v, t) + \zeta_M(t), \end{aligned} \tag{4.53}$$

с функциями

$$\mathcal{H}_M(u, v, t) \equiv \int\limits_0^u \mathcal{G}_M(w, 0, t)\, dw - \int\limits_0^v \mathcal{F}_M(u, w, t)\, dw,$$

$$\Upsilon_M(u, v, t) \equiv \int\limits_0^v \left(\partial_u \mathcal{F}(u, w, t) + \partial_v \mathcal{G}(u, w, t) \right)\, dw$$

и возмущениями $\xi_M(t) \equiv -t^{M/(2q)} Z_\varrho(t)$, $\zeta_M(t) \equiv -t^{M/(2q)} Z_\phi(t)$, где

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_M \equiv\, & t^{\frac{M}{2q}} \Big(\hat{\Lambda}_N(\tilde{\varrho}_{*,M}(t) + t^{-\frac{M}{2q}} u, \tilde{\phi}_{*,M}(t) + t^{-\frac{M}{2q}} v, t) - \hat{\Lambda}_N(\tilde{\varrho}_{*,M}(t), \tilde{\phi}_{*,M}(t), t) \Big) \\ & + \frac{M}{2q} t^{-1} u, \\ \mathcal{G}_M \equiv\, & t^{\frac{M}{2q}} \Big(\hat{\Omega}_N(\tilde{\varrho}_{*,M}(t) + t^{-\frac{M}{2q}} u, \tilde{\phi}_{*,M}(t) + t^{-\frac{M}{2q}} v, t) - \hat{\Omega}_N(\tilde{\varrho}_{*,M}(t), \tilde{\phi}_{*,M}(t), t) \Big) \\ & + \frac{M}{2q} t^{-1} v. \end{aligned}$$

Из (4.15), (4.18) и (4.51) следует, что

$$\begin{aligned} & \mathcal{H}_M(u, v, t) = \left\{ t^{-\frac{1}{2q}} \frac{\eta u^2}{2} - t^{-\frac{n}{2q}} \left(\lambda_n u v + \frac{\nu_n v^2}{2} \right) \right\} \left(1 + \mathcal{O}(t^{-\frac{1}{2q}}) \right), \\ & \Upsilon_M(u, v, t) = v \left(\lambda_n t^{-\frac{n}{2q}} + \omega_m t^{-\frac{m}{2q}} \right) \left(1 + \mathcal{O}(t^{-\frac{1}{2q}}) \right), \\ & \xi_M(t) = \mathcal{O}(t^{-\frac{2n+2}{2q}}), \quad \zeta_M(t) = \mathcal{O}(t^{-\frac{n+m+1}{2q}}) \end{aligned} \tag{4.54}$$

при $\Delta = \sqrt{u^2 + v^2} \to 0$ и $t \to \infty$. Наша цель — показать, что существует решение системы (4.53), такое что $u(t) = \mathcal{O}(1)$ и $v(t) = \mathcal{O}(1)$ при $t \to \infty$. Это обеспечит существование решения системы (4.16) с асимптотическим разложением

(4.19). Предлагаемый метод основан на анализе устойчивости и построении подходящих функций Ляпунова. Отметим, что аналогичный подход к обоснованию асимптотики использовался в [39].

Заметим, что если $\xi_M(t) \equiv \zeta_M(t) \equiv 0$, то система (4.53) имеет положение равновесия $(0,0)$. Докажем устойчивость системы, близкой к гамильтоновой, относительно затухающих во времени возмущений $\xi_M(t)$ и $\zeta_M(t)$.

Рассмотрим сначала случай $1 \le n < m$. Если $n = 1$ и $m > 1$, мы используем $\mathcal{L}_M(u,v,t) \equiv L_1(u,v)$, определяемую (4.40) и (4.41), в качестве кандидата на функцию Ляпунова для системы (4.53). Если $m > n > 1$, мы используем

$$\mathcal{L}_M(u,v,t) \equiv (\operatorname{sgn}\eta) t^{\frac{n}{2q}} \mathcal{H}_M(u,v,t) + t^{-\frac{n-1}{2q}} \lambda_n \mathcal{K}(u,v),$$

с $\mathcal{K}(u,v) \equiv \lambda_n v^2/2|\eta| + (\operatorname{sgn}\eta) uv$. Из (4.54) следует, что

$$\mathcal{L}_M = t^{\frac{n-1}{2q}} \frac{|\eta| u^2}{2} + \frac{|\nu_n| v^2}{2} - (\operatorname{sgn}\eta)\lambda_n uv + \mathcal{O}(\Delta^2)\mathcal{O}(t^{-\frac{1}{2q}}), \quad \Delta \to 0, \quad t \to \infty.$$

Следовательно, существуют $\Delta_1 > 0$ и $t_1 \ge t_0$ такие, что

$$L_-\Delta^2 \le \mathcal{L}_M(u,v,t) \le t^{\frac{n-1}{2q}} L_+ \Delta^2 \tag{4.55}$$

для всех $(u,v,t) \in \mathbb{R}^3$, таких, что $\Delta \le \Delta_1$ и $t \ge t_1$, с некоторым $L_\pm = \mathrm{const} > 0$. Производная $\mathcal{L}_M(u,v,t)$ по t вдоль траекторий системы определяется выражением

$$\frac{d\mathcal{L}_M}{dt} \equiv \mathcal{D}_{M,1}(u,v,t) + \mathcal{D}_{M,2}(u,v,t), \tag{4.56}$$

где $\mathcal{D}_{M,1} \equiv (\partial_t - \partial_u \mathcal{H}_M \partial_u + (\partial_v \mathcal{H}_M + \Upsilon_M)\partial_v)\,\mathcal{L}_M$, $\mathcal{D}_{M,2} \equiv (\xi_M \partial_u + \zeta_M \partial_v)\,\mathcal{L}_M$. Легко проверить, что

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{M,1}(u,v,t) &\le -t^{-\frac{1}{2q}} \left(A_1 u^2 + B_1 v^2 + \mathcal{O}(\Delta^2)\mathcal{O}(t^{-\frac{1}{2q}})\right), && 1 = n < m,\\
\mathcal{D}_{M,1}(u,v,t) &= -t^{-\frac{n}{2q}} |\lambda_n| \left(|\eta| u^2 + |\nu_n| v^2 + \mathcal{O}(\Delta^2)\mathcal{O}(t^{-\frac{1}{2q}})\right), && 1 < n < m,
\end{aligned}$$

и $\mathcal{D}_{M,2}(u,v,t) = \mathcal{O}(\Delta)\mathcal{O}(t^{-\frac{n+3}{2q}})$ при $\Delta \to 0$ и $t \to \infty$, где положительные параметры A_1 и B_1 определены формулой (4.45). Следовательно, существуют

$\Delta_2 \le \Delta_1$ и $t_2 \ge t_1$, такие, что

$$\mathcal{D}_{M,1}(u,v,t) \le -t^{-\frac{n}{2q}}\gamma_n\Delta^2, \quad \mathcal{D}_{M,2}(u,v,t) \le t^{-\frac{n+1}{2q}}C\Delta$$

для всех $(u,v,t) \in \mathbb{R}^3$, таких, что $\Delta \le \Delta_2$ и $t \ge t_2$, где $C = \mathrm{const} > 0$, $\gamma_1 = \min\{A_1, B_1\}/2$ и $\gamma_n = |\lambda_n| \min\{|\eta|, |\nu_n|\}/2$. Следовательно, для любого $\epsilon \in (0, \Delta_2)$ существуют

$$\delta_\epsilon = \frac{2C}{\gamma_n} t_\epsilon^{-\frac{1}{2q}}, \quad t_\epsilon = \max\left\{t_2, \left(\frac{4C}{\gamma_n \epsilon}\right)^{2q}\right\}$$

такие, что

$$\frac{d\mathcal{L}_M}{dt} \le t^{-\frac{n}{2q}}\left(-\gamma_n + C\delta_\epsilon^{-1} t_\epsilon^{-\frac{1}{2q}}\right)\Delta^2 \le 0$$

для всех $(u,v,t) \in \mathbb{R}^3$ таких, что $\delta_\epsilon \le \Delta \le \epsilon$ и $t \ge t_\epsilon$. Объединяя это с (4.55), мы видим, что любое решение системы (4.53) с начальными данными $\sqrt{u^2(t_\epsilon) + v^2(t_\epsilon)} \le \delta$, где $\delta = \max\{\delta_\epsilon, \epsilon\sqrt{L_-/L_+}\}$, не может выйти из окрестности $\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : \Delta \le \epsilon\}$ при $t \ge t_\epsilon$. Из (4.52) следует, что при всех $M \in \mathbb{Z}_+$ траектории системы (4.16), стартующие вблизи $(0, \psi_0)$, удовлетворяют оценкам $\varrho(t) = \tilde{\varrho}_{*,M}(t) + \mathcal{O}(t^{-\frac{M}{2q}})$, $\phi(t) = \tilde{\phi}_{*,M}(t) + \mathcal{O}(t^{-\frac{M}{2q}})$ при $t \to \infty$. Таким образом, существует решение $\varrho_*(t)$, $\phi_*(t)$ системы (4.16) с асимптотикой (4.19).

Теперь пусть $n \ge m$. Используя

$$\mathcal{L}_M(u,v,t) \equiv \begin{cases} (\operatorname{sgn}\eta) t^{\frac{n}{2q}} \mathcal{H}_M(u,v,t) + t^{-\frac{n-1}{2q}}(\lambda_n + \omega_n)\mathcal{K}(u,v), & n = m, \\ (\operatorname{sgn}\eta) t^{\frac{n}{2q}} \mathcal{H}_M(u,v,t) + t^{-\frac{m-1}{2q}}\omega_m \mathcal{K}(u,v), & n > m, \end{cases}$$

в качестве кандидата на функцию Ляпунова для системы (4.53), получаем (4.55) и (4.56), где

$$\mathcal{D}_{M,1}(u,v,t) = \begin{cases} -t^{-\frac{n}{2q}}|\lambda_n + \omega_n| \left(|\eta| u^2 + |\nu_n| v^2 + \mathcal{O}(\Delta^2)\mathcal{O}(t^{-\frac{1}{2q}})\right), & n = m, \\ -t^{-\frac{m}{2q}}|\omega_m| \left(|\eta| u^2 + |\nu_n| v^2 + \mathcal{O}(\Delta^2)\mathcal{O}(t^{-\frac{1}{2q}})\right), & n > m, \end{cases}$$

$$\mathcal{D}_{M,2}(u,v,t) = \begin{cases} \mathcal{O}(\Delta)\mathcal{O}(t^{-\frac{n+1}{2q}}), & n = m, \\ \mathcal{O}(\Delta)\mathcal{O}(t^{-\frac{m+1}{2q}}), & n > m, \end{cases}$$

при $\Delta \to 0$ и $t \to \infty$. Затем, повторяя приведённые выше рассуждения, доказывается существование решения с асимптотикой (4.19).

Для доказательства устойчивости построенного решения $\varrho_*(t)$, $\phi_*(t)$, рассмотрим замену (4.52) на $\varrho_*(t)$, $\phi_*(t)$ вместо $\tilde\varrho_{*,M}(t)$, $\tilde\phi_{*,M}(t)$ и с некоторым $M \in \mathbb{Z}_+$. В этом случае получаем систему (4.53) с

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}_M &\equiv t^{\frac{M}{2q}} \Big(\hat\Lambda_N(\varrho_*(t) + t^{-\frac{M}{2q}} u, \phi_*(t) + t^{-\frac{M}{2q}} v, t) - \hat\Lambda_N(\varrho_*(t), \phi_*(t), t)\Big) + \frac{M}{2q} t^{-1} u,\\
\mathcal{G}_M &\equiv t^{\frac{M}{2q}} \Big(\hat\Omega_N(\varrho_*(t) + t^{-\frac{M}{2q}} u, \phi_*(t) + t^{-\frac{M}{2q}} v, t) - \hat\Omega_N(\varrho_*(t), \phi_*(t), t)\Big) + \frac{M}{2q} t^{-1} v,
\end{aligned}
$$

и $\xi_M(t) \equiv \zeta_M(t) \equiv 0$. Тогда, повторяя приведённые выше рассуждения и используя построенные функции Ляпунова, получаем $d\mathcal{L}_M/dt \le -t^{-\frac{2n-1}{2q}} D_n \mathcal{L}_M$ для всех $(u, v, t) \in \mathbb{R}^3$ таких, что $\Delta \le \Delta_3$, $t \ge t_3$ при некоторых $\Delta_3 \le \Delta_1$, $t_3 \ge t_1$ и $D_n = \gamma_n / L_+ > 0$. Интегрируя это неравенство и учитывая (4.55), получаем асимптотическую устойчивость решения $\varrho_*(t)$, $\phi_*(t)$, если $n \le q$ и (неасимптотическую) устойчивость, если $n > q$. $\square$

Доказательство леммы 5. Асимптотические ряды строятся так же, как и в доказательстве леммы 4. Рассмотрим функции $\tilde\varrho_{*,M}(t)$, $\tilde\phi_{*,M}(t)$, определяемые формулой (4.50). Подставляя

$$
\varrho(t) = \tilde\varrho_{*,M}(t) + t^{-\frac{M-h}{2q}} u(t), \quad \phi(t) = \tilde\phi_{*,M}(t) + t^{-\frac{M-h}{2q}} v(t) \tag{4.57}
$$

при $M > h$ в уравнения (4.16), получаем возмущённую систему (4.53), где $\mathcal{H}_M(u, v, t)$ и $\Upsilon_M(u, v, t)$ определяются формулой (4.54) с

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}_M \equiv & t^{\frac{M-h}{2q}} \Big(\hat\Lambda_N(\tilde\varrho_{*,M}(t) + t^{-\frac{M-h}{2q}} u, \tilde\phi_{*,M}(t) + t^{-\frac{M-h}{2q}} v, t) - \hat\Lambda_N(\tilde\varrho_{*,M}(t), \tilde\phi_{*,M}(t), t)\Big)\\
& + \frac{M-h}{2q} t^{-1} u,\\
\mathcal{G}_M \equiv & t^{\frac{M-h}{2q}} \Big(\hat\Omega_N(\tilde\varrho_{*,M}(t) + t^{-\frac{M-h}{2q}} u, \tilde\phi_{*,M}(t) + t^{-\frac{M-h}{2q}} v, t) - \hat\Omega_N(\tilde\varrho_{*,M}(t), \tilde\phi_{*,M}(t), t)\Big)\\
& + \frac{M-h}{2q} t^{-1} v,
\end{aligned}
$$

а возмущения имеют следующий вид: $\xi_M(t) \equiv -t^{(M-h)/(2q)} Z_\varrho(t)$ и $\zeta_M(t) \equiv -t^{(M-h)/(2q)} Z_\phi(t)$ с функциями $Z_\varrho(t)$ и $Z_\phi(t)$, определяемыми формулой (4.51).

Отсюда легко следует, что

$$\mathcal{H}_M=\left\{t^{-\frac{1}{2q}}\frac{\eta u^2}{2}-t^{-\frac{n}{2q}}\left(\lambda_n uv+\frac{\nu_n v^2}{2}\right)\right\}(1+\mathcal{O}(t^{-\frac{1}{2q}})),$$
$$\Upsilon_M=t^{-\frac{h}{2q}}d_h v(1+\mathcal{O}(t^{-\frac{1}{2q}})),\quad \xi_M(t)=\mathcal{O}(t^{-\frac{h+2n+2}{2q}}),\quad \zeta_M(t)=\mathcal{O}(t^{-\frac{h+n+m+1}{2q}})$$

при $\Delta=\sqrt{u^2+v^2}\to 0$ и $t\to\infty$. Обратим внимание, что $\partial_u\mathcal{H}_M(0,0,t)\equiv\partial_v\mathcal{H}_M(0,0,t)\equiv\Upsilon_M(0,0,t)\equiv 0$. Докажем устойчивость системы относительно неисчезающих возмущений $\xi_M(t)$ и $\zeta_M(t)$ (см. [190, гл. 9]).

Рассмотрим кандидата на функцию Ляпунова в следующем виде:

$$\mathcal{L}_M(u,v,t)\equiv\begin{cases}(\operatorname{sgn}\eta)t^{\frac{1}{2q}}\mathcal{H}_M(u,v,t)+t^{-\frac{h-1}{2q}}\frac{d_h(\operatorname{sgn}\eta)}{2}uv, & h>n=1,\\ (\operatorname{sgn}\eta)t^{\frac{n}{2q}}\mathcal{H}_M(u,v,t)+t^{-\frac{h-1}{2q}}d_h(\operatorname{sgn}\eta)uv, & h>n>1,\\ (\operatorname{sgn}\eta)t^{\frac{n}{2q}}\mathcal{H}_M(u,v,t)+t^{-\frac{h-1}{2q}}d_h\left\{(\operatorname{sgn}\eta)uv+\frac{\lambda_n v^2}{2|\eta|}\right\}, & h\le n.\end{cases}$$

Мы видим, что существуют $\Delta_1>0$ и $t_1\ge t_0$, такие, что оценка (4.55) справедлива для всех $(u,v,t)\in\mathbb{R}^3$, таких, что $\Delta\le\Delta_1$ и $t\ge t_1$ с некоторым $L_\pm=\text{const}>0$. Производная $\mathcal{L}_M(u,v,t)$ по t вдоль траекторий системы определяется выражением (4.56), где $\mathcal{D}_{M,1}\equiv(\partial_t-\partial_v\mathcal{H}_M\partial_u+(\partial_u\mathcal{H}_M+\Upsilon_M)\partial_v)\,\mathcal{L}_M$ и $\mathcal{D}_{M,2}\equiv(\xi_M\partial_u+\zeta_M\partial_v)\,\mathcal{L}_M$. Легко проверить, что

$$\mathcal{D}_{M,1}=\begin{cases}t^{-\frac{h}{2q}}\frac{d_n}{2}(|\eta|u^2+|\nu_1|v^2)(1+\mathcal{O}(t^{-\frac{1}{q}})), & n=1,\\ t^{-\frac{h}{2q}}d_n(|\eta|u^2+|\nu_1|v^2)(1+\mathcal{O}(t^{-\frac{1}{q}})), & n\ne 1\end{cases}$$

и $\mathcal{D}_{M,2}(u,v,t)=\mathcal{O}(t^{-\frac{h+n+3}{2q}})\mathcal{O}(\Delta)$ при $\Delta\to 0$ и $t\to\infty$. Следовательно, существуют $\Delta_2\le\Delta_1$ и $t_2\ge t_1$, такие, что $\mathcal{D}_{M,1}(u,v,t)\le -t^{-\frac{h}{2q}}\gamma_h\Delta^2$ и $\mathcal{D}_{M,2}(u,v,t)\le t^{-\frac{h+1}{2q}}C\Delta$ для всех $(u,v,t)\in\mathbb{R}^3$, таких, что $\Delta\le\Delta_2$ и $t\ge t_2$, где $C=\text{const}>0$, и $\gamma_h=|d_h|/4>0$. Следовательно, для любого $\epsilon\in(0,\Delta_2)$ существуют

$$\delta_\epsilon=\frac{2C}{\gamma_h}t_\epsilon^{-\frac{1}{2q}},\quad t_\epsilon=\max\left\{t_2,\left(\frac{4C}{\gamma_h\epsilon}\right)^{2q}\right\}$$

такие, что

$$\frac{d\mathcal{L}_M}{dt}\le t^{-\frac{h}{2q}}\left(-\gamma_h+C\delta_\epsilon^{-1}t_\epsilon^{-\frac{1}{2q}}\right)\Delta^2\le 0$$

для всех $\delta_\epsilon \le \Delta \le \epsilon$ и $t \ge t_\epsilon$. Учитывая (4.55), видим, что решения системы (4.53) с начальными данными $\sqrt{u^2(t_\epsilon)+v^2(t_\epsilon)} \le \delta$ и $\delta = \max\{\delta_\epsilon, \epsilon\sqrt{L_-/L_+}\}$ не могут выйти из окрестности $\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 : \Delta \le \epsilon\}$ при $t \ge t_\epsilon$. Таким образом, при любом $M > h$ решения системы (4.16), стартующие вблизи точки $(0,\psi_0)$, удовлетворяют оценкам $\varrho(t) = \tilde{\varrho}_{*,M}(t) + \mathcal{O}(t^{-\frac{M-h}{2q}})$, $\phi(t) = \tilde{\phi}_{*,M}(t) + \mathcal{O}(t^{-\frac{M-h}{2q}})$ при $t\to\infty$. Это гарантирует существование частного решения $\varrho_*(t)$, $\phi_*(t)$ системы (4.16) с асимптотическим разложением (4.19).

Для доказательства устойчивости построенного решения $\varrho_*(t)$, $\phi_*(t)$, рассмотрим замену (4.57) на $\varrho_*(t)$, $\phi_*(t)$ вместо $\tilde{\varrho}_{*,M}(t)$, $\tilde{\phi}_{*,M}(t)$ и некоторое целое число $M > h$. В этом случае получим систему (4.53) с

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}_M \equiv{}& t^{\frac{M-h}{2q}}\Big(\hat{\Lambda}_N(\varrho_*(t) + t^{-\frac{M-h}{2q}}u, \phi_*(t) + t^{-\frac{M-h}{2q}}v, t) - \hat{\Lambda}_N(\varrho_*(t), \phi_*(t), t)\Big)\\
&+ \frac{M-h}{2q}t^{-1}u,\\
\mathcal{G}_M \equiv{}& t^{\frac{M-h}{2q}}\Big(\hat{\Omega}_N(\varrho_*(t) + t^{-\frac{M-h}{2q}}u, \phi_*(t) + t^{-\frac{M-h}{2q}}v, t) - \hat{\Omega}_N(\varrho_*(t), \phi_*(t), t)\Big)\\
&+ \frac{M-h}{2q}t^{-1}v,
\end{aligned}
$$

и $\xi_M(t) \equiv \zeta_M(t) \equiv 0$. Затем, повторяя рассуждения, приведённые выше, и используя построенные функции Ляпунова $\mathcal{L}_M(u,v,t)$, получаем неравенство $d\mathcal{L}_M/dt \le -t^{-\frac{h+n-1}{2q}} D_h \mathcal{L}_M$ для всех $(u,v,t)\in\mathbb{R}^3$ таких, что $\Delta \le \Delta_3$, $t \ge t_3$ при некоторых $\Delta_3 \le \Delta_1$, $t_3 \ge t_1$ и $D_h = \gamma_h/L_+ > 0$. Интегрируя неравенство по t и учитывая (4.55), получаем асимптотическую устойчивость решения $\varrho_*(t)$, $\phi_*(t)$, если $h+n \le 2q+1$, и (неасимптотическую) устойчивость, если $h+n > 2q+1$. $\square$

4.5.3. Анализ полной системы

Доказательство теоремы 38. Пусть $\varrho_*(t)$, $\phi_*(t)$ — решение системы (4.16) с асимптотикой (4.19). Подставляя $\rho(t) = \varrho_*(t) + u(t)$, $\psi(t) = \phi_*(t) + v(t)$ в (4.12), получаем возмущённую близкую к гамильтоновой систему относительно новых переменных (u,v)

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt}&=-\partial_v\mathcal{H}(u,v,t)+\mathcal{P}_N(u,v,t),\\ \frac{dv}{dt}&=\partial_u\mathcal{H}(u,v,t)+\Upsilon(u,v,t)+\mathcal{Q}_N(u,v,t),\end{aligned}\tag{4.58}$$

с гамильтонианом

$$\mathcal{H}(u,v,t)\equiv\int\limits_0^u\mathcal{G}(w,0,t)\,dw-\int\limits_0^v\mathcal{F}(u,w,t)\,dw,$$

и возмущениями

$$\begin{aligned}\Upsilon(u,v,t)&\equiv\int\limits_0^v\left(\partial_u\mathcal{F}(u,w,t)+\partial_v\mathcal{G}(u,w,t)\right)\,dw,\\ \mathcal{F}(u,v,t)&\equiv\hat\Lambda_N(\varrho_*(t)+u,\phi_*(t)+v,t)-\hat\Lambda_N(\varrho_*(t),\phi_*(t),t),\\ \mathcal{G}(u,v,t)&\equiv\hat\Omega_N(\varrho_*(t)+u,\phi_*(t)+v,t)-\hat\Omega_N(\varrho_*(t),\phi_*(t),t),\\ \mathcal{P}_N(u,v,t)&\equiv\tilde\Lambda_N(\varrho_*(t)+u,\phi_*(t)+v,S(t),t),\\ \mathcal{Q}_N(u,v,t)&\equiv\tilde\Omega_N(\varrho_*(t)+u,\phi_*(t)+v,S(t),t).\end{aligned}$$

Из (4.14), (4.18) и (4.19) следует, что

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(u,v,t)&=\left\{t^{-\frac{1}{2q}}\frac{\eta u^2}{2}-t^{-\frac{n}{2q}}\left(\lambda_n uv+\frac{\nu_n v^2}{2}\right)\right\}\left(1+\mathcal{O}(\Delta)+\mathcal{O}(t^{-\frac{1}{2q}})\right),\\ \Upsilon(u,v,t)&=v\left(\lambda_n t^{-\frac{n}{2q}}+\omega_m t^{-\frac{m}{2q}}\right)\left(1+\mathcal{O}(\Delta)+\mathcal{O}(t^{-\frac{1}{2q}})\right),\\ \mathcal{P}_N(u,v,t)&=\mathcal{O}(t^{-\frac{N+1}{2q}}),\\ \mathcal{Q}_N(u,v,t)&=\mathcal{O}(t^{-\frac{N+1}{2q}})\end{aligned}\tag{4.59}$$

при $\Delta=\sqrt{u^2+v^2}\to 0$ и $t\to\infty$. Заметим, что $\partial_u\mathcal{H}(0,0,t)\equiv\partial_v\mathcal{H}(0,0,t)\equiv\Upsilon(0,0,t)\equiv 0$, а функции $\mathcal{P}_N(u,v,t)$ и $\mathcal{Q}_N(u,v,t)$ не сохраняют равновесие $(0,0)$ и могут рассматриваться как внешние возмущения. Докажем устойчивость равновесия в возмущённой системе.

Рассмотрим функцию Ляпунова в виде

$$\mathcal{L}(u,v,t)\equiv\begin{cases}(\operatorname{sgn}\eta)t^{\frac{1}{2q}}\mathcal{H}(u,v,t)+(\chi_1+\lambda_1\operatorname{sgn}\eta)uv, & n=1,\\ (\operatorname{sgn}\eta)t^{\frac{n}{2q}}\mathcal{H}(u,v,t)+t^{-\frac{n-1}{2q}}\lambda_n\mathcal{K}(u,v), & 1<n<m,\\ (\operatorname{sgn}\eta)t^{\frac{n}{2q}}\mathcal{H}(u,v,t)+t^{-\frac{n-1}{2q}}(\lambda_n+\omega_n)\mathcal{K}(u,v), & 1<n=m,\\ (\operatorname{sgn}\eta)t^{\frac{n}{2q}}\mathcal{H}(u,v,t)+t^{-\frac{m-1}{2q}}\omega_m\mathcal{K}(u,v), & n>m\geq 2,\end{cases}\tag{4.60}$$

с $\mathcal{K}(u,v)\equiv\lambda_n v^2/|2\eta|+(\operatorname{sgn}\eta)uv$ и параметром χ_1, определяемым формулой (4.41). Обратим внимание, что если $n>1$,

$$\mathcal{L}(u,v,t)=t^{\frac{n-1}{2q}}\frac{|\eta|u^2}{2}+\frac{|\nu_n|v^2}{2}-(\operatorname{sgn}\eta)\lambda_n uv+\mathcal{O}(\Delta^3)+\mathcal{O}(\Delta^2)\mathcal{O}(t^{-\frac{1}{2q}})$$

при $\Delta\to 0$ и $t\to\infty$. Следовательно, существуют $\Delta_1>0$ и $t_1\geq t_0$, такие, что $\mathcal{L}(u,v,t)$ удовлетворяет неравенствам (4.55) для всех $(u,v,t)\in\mathbb{R}^3$, таких, что $\Delta\leq\Delta_1$ и $t\geq t_1$ с некоторым $L_\pm=\text{const}>0$. Производная $\mathcal{L}(u,v,t)$ по t вдоль траекторий системы (4.58) определяется выражением

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt}\equiv\mathcal{D}_1(u,v,t)+\mathcal{D}_{2,N}(u,v,t),\tag{4.61}$$

где $\mathcal{D}_1\equiv\left(\partial_t-\partial_u\mathcal{H}\partial_u+(\partial_v\mathcal{H}+\Upsilon)\partial_v\right)\mathcal{L}$ и $\mathcal{D}_{2,N}\equiv\left(\mathcal{P}_N\partial_u+\mathcal{Q}_N\partial_v\right)\mathcal{L}$. Мы видим, что

$$\mathcal{D}_1=\begin{cases}-t^{-\frac{1}{2q}}\left((|\lambda_1|-|\chi_1|)|\eta|u^2+|\chi_1\nu_1|v^2+\chi_1|\lambda_1|uv+\mathcal{O}(\Delta^3)\right) & \\ +\mathcal{O}(\Delta^2)\mathcal{O}(t^{-\frac{1}{q}}), & n=1,\\ -t^{-\frac{n}{2q}}|\lambda_n|\left(|\eta|u^2+|\nu_n|v^2+\mathcal{O}(\Delta^3)\right)+\mathcal{O}(\Delta^2)\mathcal{O}(t^{-\frac{n+1}{2q}}), & 1<n<m,\\ -t^{-\frac{n}{2q}}|\lambda_n+\omega_n|\left(|\eta|u^2+|\nu_n|v^2+\mathcal{O}(\Delta^3)\right)+\mathcal{O}(\Delta^2)\mathcal{O}(t^{-\frac{n+1}{2q}}), & n=m,\\ -t^{-\frac{m}{2q}}|\omega_m|\left(|\eta|u^2+|\nu_n|v^2+\mathcal{O}(\Delta^3)\right)+\mathcal{O}(\Delta^2)\mathcal{O}(t^{-\frac{m+1}{2q}}), & n>m,\end{cases}$$

и $\mathcal{D}_{2,N}(u,v,t)=\mathcal{O}(\Delta)\mathcal{O}(t^{-\frac{N-n+2}{2q}})$ при $\Delta\to 0$ и $t\to\infty$. Следовательно, существуют $N_0=\min\{2n-1,n+m-1\}$, $\Delta_2\leq\Delta_1$ и $t_2\geq t_1$, такие, что

$$\mathcal{D}_1(u,v,t)\leq -t^{-\frac{\ell}{2q}}\gamma\Delta^2,\quad \mathcal{D}_{2,N}(u,v,t)\leq t^{-\frac{\ell+1}{2q}}C\Delta$$

для всех $N \geq N_0$ и $(u,v,t) \in \mathbb{R}^3$, таких, что $\Delta \leq \Delta_2$ и $t \geq t_2$, где $C = \text{const} > 0$ и $\ell = \min\{n,m\}$. Если $n = 1$, то $\gamma = \min\{A_1, B_1\}/2$, а если $n > 1$, то $\gamma = |d_{n,m}| \min\{|\eta|, |\nu_n|\}/2$. Положительные параметры A_1 и B_1 определяются формулой (4.45). Следовательно, для любого $\epsilon \in (0, \Delta_2)$ существуют

$$\delta_\epsilon = \frac{2C}{\gamma} t_\epsilon^{-\frac{1}{2q}}, \quad t_\epsilon = \max\left\{t_2, \left(\frac{4C}{\gamma\epsilon}\right)^{2q}\right\}$$

такие, что

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} \leq t^{-\frac{\ell}{2q}} \left(-\gamma + C\delta_\epsilon^{-1} t_\epsilon^{-\frac{1}{2q}}\right) \Delta^2 \leq 0$$

для всех $(u,v,t) \in \mathbb{R}^3$ таких, что $\delta_\epsilon \leq \Delta \leq \epsilon$ и $t \geq t_\epsilon$. Учитывая (4.55), видим, что при всех $t_* \geq t_\varepsilon$ любое решение системы (4.58) с начальными данными $\sqrt{u^2(t_*) + v^2(t_*)} \leq \tilde\delta_\epsilon$ и $\tilde\delta_\epsilon = \max\{\delta_\epsilon, \epsilon\sqrt{L_-/L_+}\}$ не может выйти из окрестности $\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : \Delta \leq \epsilon\}$ при $t \geq t_*$.

Таким образом, возвращаясь к исходным переменным и принимая во внимание теорему 37, получаем доказательство теоремы. $\square$

Доказательство теоремы 39. Рассмотрим функции $\varrho_{*,M}(t)$, $\phi_{*,M}(t)$, определяемые формулой (4.20). Подставляя $\rho(t) = \varrho_{*,M}(t) + u(t)$, $\psi(t) = \phi_{*,M}(t) + v(t)$ в (4.12), получаем следующую систему для новых переменных (u,v):

$$\begin{aligned}
\frac{du}{dt} &= -\partial_v H_M(u,v,t) + P_{M,N}(u,v,t), \\
\frac{dv}{dt} &= \partial_u H_M(u,v,t) + Y_M(u,v,t) + Q_{M,N}(u,v,t),
\end{aligned} \tag{4.62}$$

с функциями

$$H_M(u,v,t) \equiv \int\limits_0^u \mathcal{B}_M(w,0,t)\,dw - \int\limits_0^v \mathcal{A}_M(u,w,t)\,dw,$$

$$Y_M(u,v,t) \equiv \int\limits_0^v \left(\partial_u \mathcal{A}_M(u,w,t) + \partial_v \mathcal{B}_M(u,w,t)\right) dw,$$

$$\mathcal{A}_M(u,v,t) \equiv \hat\Lambda_N(\varrho_{*,M}(t) + u, \phi_{*,M}(t) + v, t) - \hat\Lambda_N(\varrho_{*,M}(t), \phi_{*,M}(t), t),$$

$$\mathcal{B}_M(u,v,t) \equiv \hat\Omega_N(\varrho_{*,M}(t) + u, \phi_{*,M}(t) + v, t) - \hat\Omega_N(\varrho_{*,M}(t), \phi_{*,M}(t), t),$$

$$P_{M,N}(u,v,t) \equiv \tilde{\Lambda}_N(\varrho_{*,M}(t)+u, \phi_{*,M}(t)+v, S(t), t) - Z_\varrho(t),$$
$$Q_{M,N}(u,v,t) \equiv \tilde{\Omega}_N(\varrho_{*,M}(t)+u, \phi_{*,M}(t)+v, S(t), t) - Z_\phi(t),$$

где

$$Z_\varrho(t) \equiv \varrho'_{*,M}(t) - \hat{\Lambda}_N(\varrho_{*,M}(t), \phi_{*,M}(t), t) = \mathcal{O}\left(t^{-\frac{n+M+1}{2q}}\right),$$
$$Z_\phi(t) \equiv \phi'_{*,M}(t) - \hat{\Omega}_N(\varrho_{*,M}(t), \phi_{*,M}(t), t) = \mathcal{O}\left(t^{-\frac{m+M}{2q}}\right), \quad t \to \infty.$$

Легко проверить, что

$$H_M(u,v,t) = \left\{t^{-\frac{1}{2q}}\frac{\eta u^2}{2} - t^{-\frac{n}{2q}}\left(\lambda_n uv + \frac{\nu_n v^2}{2}\right)\right\}\left(1+\mathcal{O}(\Delta)+\mathcal{O}(t^{-\frac{1}{2q}})\right),$$
$$Y_M(u,v,t) = v\left(\lambda_n t^{-\frac{n}{2q}} + \omega_m t^{-\frac{m}{2q}}\right)\left(1+\mathcal{O}(\Delta)+\mathcal{O}(t^{-\frac{1}{2q}})\right),$$
$$P_{M,N}(u,v,t) = \mathcal{O}(t^{-\frac{N+1}{2q}}) + \mathcal{O}(t^{-\frac{n+M+1}{2q}}),$$
$$Q_{M,N}(u,v,t) = \mathcal{O}(t^{-\frac{N+1}{2q}}) + \mathcal{O}(t^{-\frac{m+M}{2q}})$$

при $\Delta = \sqrt{u^2+v^2} \to 0$ и $t \to \infty$. Заметим, что если $P_{M,N} \equiv Q_{M,N} \equiv 0$, то система (4.62) имеет положение равновесия $(0,0)$. Функции $P_{M,N}(u,v,t)$ и $Q_{M,N}(u,v,t)$ не обращаются в нуль в положении равновесия и играют роль внешних возмущений системы. Докажем устойчивость возмущённой системы (4.62) методом функций Ляпунова.

Рассмотрим функцию Ляпунова $\mathcal{L}(u,v,t)$ в форме (4.60), где $H_M(u,v,t)$ вместо $\mathcal{H}(u,v,t)$. Заметим, что $\mathcal{L}(u,v,t)$ удовлетворяет условию (4.55) для всех $(u,v,t) \in \mathbb{R}^3$, таких, что $\Delta \le \Delta_1$ и $t \ge t_1$ с некоторыми $L_\pm = \text{const} > 0$, $\Delta_1 > 0$ и $t_1 \ge t_0$. Производная $\mathcal{L}(u,v,t)$ по t вдоль траекторий системы (4.62) определяется выражением

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} \equiv \mathcal{D}_{1,M}(u,v,t) + \mathcal{D}_{2,M,N}(u,v,t)$$

с $\mathcal{D}_{1,M} \equiv (\partial_t - \partial_v H_M \partial_u + (\partial_u H_M + Y_M)\partial_v)\,\mathcal{L}$, $\mathcal{D}_{2,M,N} \equiv (P_{M,N}\partial_u + Q_{M,N}\partial_v)\,\mathcal{L}$.

Справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{1,M}(u,v,t) &\geq t^{-\frac{1}{2q}}(A_1u^2+B_1v^2+\mathcal{O}(\Delta^3)+\mathcal{O}(t^{-\frac{1}{2q}})\mathcal{O}(\Delta^2)), && n=1,\\
\mathcal{D}_{1,M}(u,v,t) &= |d_{n,m}|t^{-\frac{\ell}{2q}}\left(|\eta|u^2+|\nu_n|v^2+\mathcal{O}(\Delta^3)+\mathcal{O}(\Delta^2)\mathcal{O}(t^{-\frac{1}{2q}})\right), && n>1,\\
\mathcal{D}_{2,M,N}(u,v,t) &= \mathcal{O}(\Delta)\mathcal{O}(t^{-\frac{M+2}{2q}})+\mathcal{O}(\Delta)\mathcal{O}(t^{-\frac{N-n+2}{2q}})
\end{aligned}$$

при $\Delta\to 0$ и $t\to\infty$, где $\ell=\min\{m,n\}$, а положительные параметры A_1, B_1 определяются формулой (4.45). Следовательно, существуют $N_0=n+\ell-1$, $M_0=\ell$, $C>0$, $t_2\geq t_1$ и $\varepsilon\in(0,\Delta_1/\sqrt{2})$, такие, что

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt}\geq t^{-\frac{\ell}{2q}}\left(\gamma\Delta^2\ -Ct^{-\frac{1}{2q}}\Delta\right)$$

для всех $N\geq N_0$ и $(u,v,t)\in\mathbb{R}^3$, таких, что $\Delta\leq\sqrt{2}\varepsilon$ и $t\geq t_2$, где $\gamma=\min\{A_1,B_1\}/2$, если $n=1$, и $\gamma=|d_{n,m}|\min\{|\eta|,|\nu_n|\}/2$, если $n>1$. Следовательно, для любого $\delta\in(0,\varepsilon)$ существует $t_\delta=\max\{t_2,(2C/|\delta d_{n,m}|)^{2q}\}$, такое, что

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt}\geq t^{-\frac{\ell}{2q}}\frac{\gamma}{2}\Delta^2\geq t^{-\frac{\ell+n-1}{2q}}\tilde{\gamma}\mathcal{L}$$

для всех $(u,v,t)\in\mathbb{R}^3$, таких, что $\delta\leq\Delta\leq\sqrt{2}\varepsilon$ и $t\geq t_\delta$, где $\tilde{\gamma}=\gamma/(2L_+)$. Напомним, что $\ell+n-1<2q$. Тогда, интегрируя последнее неравенство при $t\geq t_*$ при любом $t_*\geq t_\delta$ и взяв $u(t_*)$, $v(t_*)$, такие, что $\sqrt{u^2(t_*)+v^2(t_*)}=\delta$, получаем

$$u^2(t)+v^2(t)\geq\frac{\delta^2L_-}{L_+}t^{-\frac{n-1}{2q}}\exp\left\{\frac{2q\tilde{\gamma}}{2q-\ell-n+1}\left(t^{1-\frac{\ell+n-1}{2q}}-t_*^{1-\frac{\ell+n-1}{2q}}\right)\right\},\quad t\geq t_*.$$

Следовательно, существует $t_{\delta,\varepsilon}>t_*$ такое, что $u^2(t_{\delta,\varepsilon})+v^2(t_{\delta,\varepsilon})\geq 2\varepsilon^2$. Возвращаясь к переменным $r(t)$, $\varphi(t)$, получаем следующее неравенство:

$$\begin{gathered}
\left|(r(t_{\delta,\varepsilon})-a)t_{\delta,\varepsilon}^{\frac{1}{2q}}+\tilde{\varrho}_N(t_{\delta,\varepsilon})-\varrho_{*,M}(t_{\delta,\varepsilon})\right|^2\\
+\left|\varphi(t_{\delta,\varepsilon})-\frac{\kappa}{\varkappa}S(t_{\delta,\varepsilon})+\tilde{\phi}_N(t_{\delta,\varepsilon})-\phi_{*,M}(t_{\delta,\varepsilon})\right|^2\geq 2\varepsilon^2.
\end{gathered}$$

Выбирая $\epsilon=\varepsilon/\sqrt{2}$ в теореме 37 и учитывая (4.11), получаем результат теоремы.

$\square$

Доказательство теоремы 40. Подставляя $\rho(t) = \varrho_*(t)+u(t)$, $\psi(t) = \phi_*(t)+v(t)$ в (4.12), получаем систему (4.58). Из (4.14), (4.19) и (4.23) следует, что функции $\mathcal{H}(u,v,t)$, $\mathcal{P}_N(u,v,t)$ и $\mathcal{Q}_N(u,v,t)$ удовлетворяют (4.59), а функция $\Upsilon(u,v,t)$ удовлетворяет следующей оценке:

$$\Upsilon(u,v,t) = t^{-\frac{h}{2q}} d_h v \left(1 + \mathcal{O}(\Delta) + \mathcal{O}(t^{-\frac{1}{2q}})\right), \quad \Delta = \sqrt{u^2+v^2} \to 0, \quad t \to \infty.$$

Рассмотрим функцию Ляпунова в виде

$$\mathcal{L} \equiv \begin{cases} (\operatorname{sgn}\eta) t^{\frac{1}{2q}} \mathcal{H}(u,v,t) + t^{-\frac{h-1}{2q}} \frac{d_h(\operatorname{sgn}\eta)}{2} uv, & h > n = 1, \\ (\operatorname{sgn}\eta) t^{\frac{n}{2q}} \mathcal{H}(u,v,t) + t^{-\frac{h-1}{2q}} d_h(\operatorname{sgn}\eta) uv, & h > n > 1, \\ (\operatorname{sgn}\eta) t^{\frac{n}{2q}} \mathcal{H}(u,v,t) + t^{-\frac{h-1}{2q}} d_h \left\{(\operatorname{sgn}\eta) uv + \frac{\lambda_n v^2}{2|\eta|}\right\}, & h \le n. \end{cases} \tag{4.63}$$

Легко проверить, что существуют $\Delta_1 > 0$ и $t_1 \ge t_0$, такие, что $\mathcal{L}(u,v,t)$ удовлетворяет неравенствам (4.55) для всех $\Delta \le \Delta_1$ и $t \ge t_1$ с некоторым $L_\pm = \text{const} > 0$. Полная производная $\mathcal{L}(u,v,t)$ по t вдоль траекторий системы (4.58) определяется выражением (4.61), где

$$\mathcal{D}_1(u,v,t) = \begin{cases} t^{-\frac{h}{2q}} \frac{d_h}{2} (|\eta| u^2 + |\nu_1| v^2)(1 + \mathcal{O}(\Delta) + \mathcal{O}(t^{-\frac{1}{q}})), & n = 1, \\ t^{-\frac{h}{2q}} d_h (|\eta| u^2 + |\nu_1| v^2)(1 + \mathcal{O}(\Delta) + \mathcal{O}(t^{-\frac{1}{q}})), & n \ne 1 \end{cases}$$

и $\mathcal{D}_{2,N}(u,v,t) = \mathcal{O}(t^{-\frac{N-n+2}{2q}})\mathcal{O}(\Delta)$ при $\Delta \to 0$ и $t \to \infty$. Отсюда следует, что существуют $N_0 = n+h-1$, $\Delta_2 \le \Delta_1$ и $t_2 \ge t_1$, такие, что $\mathcal{D}_1(u,v,t) \le -t^{-\frac{h}{2q}}\gamma\Delta^2$, $\mathcal{D}_2(u,v,t) \le t^{-\frac{h+1}{2q}} C\Delta$ для всех $N \ge N_0$ и $(u,v,t) \in \mathbb{R}^3$, таких, что $\Delta \le \Delta_2$ и $t \ge t_2$, где $C = \text{const} > 0$, и $\gamma_h = |d_h|/4$. Повторяя шаги доказательства теоремы 38, мы видим, что для любого $\epsilon \in (0, \Delta_2)$ найдутся $0 < \delta_\epsilon < \epsilon$ и $t_\epsilon \ge t_2$ такие, что для всех $t_* \ge t_\epsilon$ любое решение системы (4.58) с начальными данными $\sqrt{u^2(t_*)+v^2(t_*)} \le \tilde{\delta}_\epsilon$ и $\tilde{\delta}_\epsilon = \max\{\delta_\epsilon, \epsilon\sqrt{L_-/L_+}\}$ не может выйти из окрестности $\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : \Delta \le \epsilon\}$ при $t \ge t_*$. Возвращаясь к исходным переменным, получаем результат теоремы. □

Доказательство теоремы 41. Подставляя $\varrho(t) = \varrho_{*,M}(t)+u(t)$, $\phi(t) = \phi_{*,M}(t)+$

$v(t)$ в (4.12), получаем систему (4.62). В этом случае

$$Y_M(u,v,t) = v\left(\lambda_n t^{-\frac{n}{2q}} + \omega_m t^{-\frac{m}{2q}}\right)\left(1 + \mathcal{O}(\Delta) + \mathcal{O}(t^{-\frac{1}{2q}})\right)$$

при $\Delta = \sqrt{u^2+v^2} \to 0$ и $t \to \infty$. Тогда, повторяя рассуждения теоремы 39 с функцией Ляпунова в виде (4.63), с функцией $H_M(u,v,t)$ вместо $\mathcal{H}(u,v,t)$, получаем доказательство настоящей теоремы. □

Доказательство теоремы 42. Для определённости, пусть $a > 0$. Определим $D_\pm = (\mathcal{R} \pm a)t_0^{1/(2q)} - \epsilon$. Из первого уравнения в (4.12) и предположения (4.24) следует, что существуют $t_1 \geq t_0$ и $C_1 > 0$, такие, что $|d\rho/dt| \geq t^{-\frac{n}{2q}} C_1$ для всех $(\rho,\psi) \in \mathfrak{D}_{\epsilon,t_0}$ и $t \geq t_1$. Интегрирование этого неравенства даёт $|\rho(t) - \rho(t_1)| \geq C(t) > 0$ при $t > t_1$, где

$$C(t) \equiv \begin{cases} \frac{2qC_1}{2q-n}\left(t^{1-\frac{n}{2q}} - t_1^{1-\frac{n}{2q}}\right), & n < 2q, \\ C_1\left(\log t - \log t_1\right), & n = 2q. \end{cases}$$

Тогда $|\rho(t)|$ при начальных данных $|\rho(t_1)| < D_-$ возрастает до тех пор, пока не достигнет границы $|\rho| = D_-$ за конечное время $t_e > t_1$. При этом для любых начальных данных $|\rho(t_1)| \leq D_-/4$ и $\psi(t_1) \in \mathbb{R}$ существует $t_2 \in [t_1, t_e)$ такое, что $|\rho(t)| \geq D_-/2$ при $t \in [t_2, t_e]$. Объединяя это со вторым уравнением в (4.12), мы видим, что существует $C_2 > 0$, такое, что $|d\psi/dt| \geq t^{-\frac{1}{2q}} C_2$ для всех $D_-/2 \leq |\rho| \leq D_-$, $\psi \in \mathbb{R}$ и $t \geq t_2$. Тогда, интегрируя, получаем

$$|\psi(t) - \psi(t_2)| \geq \frac{2qC_2}{2q-1}\left(t^{1-\frac{1}{2q}} - t_2^{1-\frac{1}{2q}}\right), \quad t \in [t_2, t_e].$$

Следовательно, $|\psi(t)|$ возрастает для всех $t \in [t_2, t_e]$. Аналогично, если $-D_+ < \rho(t_1) < -D_-$, можно показать, что $|\rho(t)|$ возрастает до тех пор, пока не достигнет границы $\rho = -D_+$ или $\rho = D_-$ за конечное время. □

4.6. Выводы

Таким образом, исследовано резонансное воздействие затухающих колебательных возмущений на неизохронные системы. В частности, выведена модельная неавтономная система (4.16), описывающая приближённую усреднённую динамику. Оказалось, что эта система подобна уравнениям маятникового типа с дополнительными членами, затухающими во времени. Действительно, укороченная предельная система (4.17) может быть записана в виде

$$\frac{d^2\hat{\phi}}{d\tau^2} - \tau^{-\frac{n-1}{2q}}\eta_n\Lambda_n\left(\eta^{-1}\frac{d\hat{\phi}}{d\tau}, \hat{\phi}\right) = 0,$$
$$\eta_n = \eta\left(\frac{2q}{2q-1}\right)^{\frac{n-1}{2q-1}}, \quad \tau = \left(\frac{2q}{2q-1}\right)t^{1-\frac{1}{2q}},$$

где $\Lambda_n(\rho,\psi)$ является 2π-периодической функцией по ψ. В этом случае дополнительные члены в модельной системе зависят от возмущений колебательной системы. Отметим, что аналогичные, но автономные уравнения возникают в теории нелинейного резонанса при рассмотрении возмущений с малым параметром [31, 152]. Исследование структуры модельной системы привело к условиям, гарантирующим существование режима фазового захвата с резонансной амплитудой. Нарушение этих условий может привести к значительному рассогласованию фаз и отсутствию соответствующего резонансного режима. Предлагаемый метод основан на долговременном асимптотическом анализе модельной системы и доказательстве устойчивости соответствующих решений в полной системе с использованием техники функций Ляпунова. Показано, что затухающие возмущения могут быть использованы для управления динамикой нелинейных систем. Например, параметры возмущения можно выбрать таким образом, чтобы обеспечить появление почти периодических решений с заданной резонансной амплитудой.

Результаты главы опубликованы в [271]. Связанные результаты о резонансных эффектах в изохронных системах опубликованы в [266] и [269].

Глава 5

Резонансы в системах с затухающими чирпированными возмущениями

5.1. Введение

Настоящая глава посвящена исследованию влияния осциллирующих возмущений с чирпированной частотой (от англ. chirp — щебетание, чирикание) на автономные гамильтоновы системы. Предполагается, что интенсивность возмущений затухает со временем, а предельная система описывает сильно нелинейные колебания. Обсуждаются условия существования и устойчивости резонансных решений с неограниченно растущей энергией.

Глава организована следующим образом. В § 5.2 дана математическая формулировка задачи и описан класс убывающих возмущений. Основные результаты представлены в § 5.3. В § 5.4 предложенная теория применена к осциллятору Дуффинга с различными затухающими колебательными возмущениями. Обоснование результатов содержится в § 5.5. Сначала строится замена переменных, упрощающая возмущённую систему в главных членах асимптотики. Построение преобразования описано в § 5.5.1. В зависимости от структуры упрощённых уравнений существует по крайней мере два асимптотических режима решений возмущённой системы: фазовый захват и фазовый дрейф. Эти режимы описаны в § 5.5.2. Анализ устойчивости фазового захвата обсуждается в § 5.5.3. Глава завершается кратким обсуждением полученных результатов.

5.2. Постановка задачи

Рассмотрим асимптотически автономную систему на плоскости

$$\frac{dx}{dt} = y + t^{-c} f(x, y, S(t), t), \quad \frac{dy}{dt} = -\partial_x U(x) + t^{-c} g(x, y, S(t), t), \quad t > 0, \quad (5.1)$$

при $c = a/q > 0$, $S(t) = st^{1+b/q}$ и параметрах $a, b, q \in \mathbb{Z}$, $s \in \mathbb{R}$, таких, что $1 \le a, b \le q$, $s > 0$. Предполагается, что функции $U(x)$, $f(x,y,S,t)$ и $g(x,y,S,t)$, определённые для всех (x,y,S) в $\mathbb{R}^3$, $t > 0$, являются бесконечно дифференцируемыми и 2π-периодическими функциями относительно S. Гамильтониан $H(x,y)$ соответствующей предельной автономной системы

$$\frac{dx}{dt} = \partial_y H(x,y), \quad \frac{dy}{dt} = -\partial_x H(x,y) \tag{5.2}$$

имеет вид

$$H(x,y) = \frac{y^2}{2} + U(x), \quad U(x) = \frac{x^{2h}}{2h} + \sum_{i=1}^{2h-1} u_i x^i \tag{5.3}$$

при $h \in \mathbb{Z}$, $h \ge 2$ и $u_i = \text{const}$. В этом случае существует $E_0 > 0$ такое, что для любого $E > E_0$ линии уровня $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : H(x,y) = E\}$ являются замкнутыми кривыми на фазовом пространстве (x,y), параметризованном параметром E, и не содержат неподвижных точек системы (5.2). Пусть $x_-(E) < 0 < x_+(E)$ — решения уравнения $U(x) = E$ при $E > E_0$. Тогда каждой замкнутой кривой соответствует периодическое решение $(x_0(t,E), y_0(t,E))$ системы (5.2) с периодом (см. лемму 6)

$$T(E) = \kappa E^{\frac{1-h}{2h}}\big(1 + \mathcal{O}(E^{-\frac{1}{h}})\big), \quad E \to \infty, \quad \kappa = \sqrt{2}(2h)^{\frac{1}{2h}} \int\limits_{-1}^{1} \frac{d\varsigma}{\sqrt{1-\varsigma^{2h}}}. \tag{5.4}$$

Возмущения автономной системы (5.2) описываются функциями со степенными асимптотическими разложениями:

$$f(x,y,S,t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} t^{-\frac{k}{q}} f_k(x,y,S), \quad g(x,y,S,t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} t^{-\frac{k}{q}} g_k(x,y,S) \tag{5.5}$$

при $t \to \infty$ с коэффициентами

$$f_k(x,y,S) \equiv \sum_{i=0}^{p} \sum_{j=0}^{l-1} A_{k,i,j}(S) x^i y^j, \quad g_k(x,y,S) \equiv \sum_{i=0}^{p} \sum_{j=0}^{l} B_{k,i,j}(S) x^i y^j,$$

где $l, p \in \mathbb{Z}$, $0 \le l \le p \le 2h-1$, а коэффициенты $A_{k,i,j}(S)$, $B_{k,i,j}(S)$ являются 2π-периодическими по S. Предполагается, что $A_{k,i,j}(S) \equiv B_{k,i,j}(S) \equiv 0$, если $i+$

$j > p$, и $A_{k,i,-1}(S) \equiv 0$ для всех $k, i \geq 0$. Параметр p отвечает за максимальную степень мономов $x^i y^j$ в возмущениях f и g с ненулевыми коэффициентами, а параметр l соответствует максимальной степени y в g. Заметим, что ряды в (5.5) предполагаются асимптотическими рядами при $t \to \infty$ (см., например, [165, §1]). В частности, предполагается, что для любых $n \geq 1$ и $D \subset \mathbb{R}^2$ справедливы следующие оценки: $f(x,y,S,t) - \sum_{k=0}^{n-1} t^{-k/q} f_k(x,y,S) = \mathcal{O}(t^{-n/q})$ и $g(x,y,S,t) - \sum_{k=0}^{n-1} t^{-k/q} g_k(x,y,S) = \mathcal{O}(t^{-n/q})$ при $t \to \infty$ равномерно для всех $(x,y) \in D$ и $S \in \mathbb{R}$.

Предполагается также, что параметры возмущений удовлетворяют следующим неравенствам:

$$-1 \leq \sigma < \frac{b}{q}, \quad \sigma := \frac{b}{q}\Big(l - 1 + \frac{p-1}{h-1}\Big) - \frac{a}{q}. \tag{5.6}$$

Роль этого условия будет указана ниже (см. замечание 6).

Влияние возмущений с медленно меняющейся чирпированной частотой на поведение малых колебаний на конечных временах обсуждается в [195], где рассматривается система вида (5.1) с $H(x,y) = x^2/2 + y^2/2 - x^4/24$, $f \equiv 0$, $t^{-c} g \equiv \epsilon \hat{B}(t,\epsilon) \cos \hat{S}(t,\epsilon)$, $0 < \epsilon \ll 1$, $\hat{S}'(t,\epsilon) = 1 + \mathcal{O}(\epsilon^{2/3})$ при $\epsilon \to 0$ и медленно меняющимся коэффициентом $\hat{B}(t,\epsilon)$, который может расти или затухать в медленном временном масштабе. Однако влияние затухающих возмущений на траектории вдали от равновесия, где решающую роль играют нелинейные члены уравнений, не исследовалось.

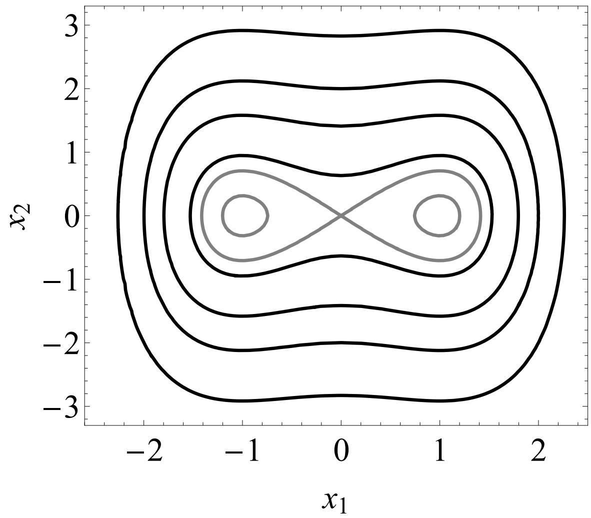
Рассмотрим пример — возмущённый осциллятор Дуффинга:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - x + x^3 = B t^{-\frac{1}{3}} \cos\big(s t^{\frac{4}{3}}\big), \quad t \geq 1. \tag{5.7}$$

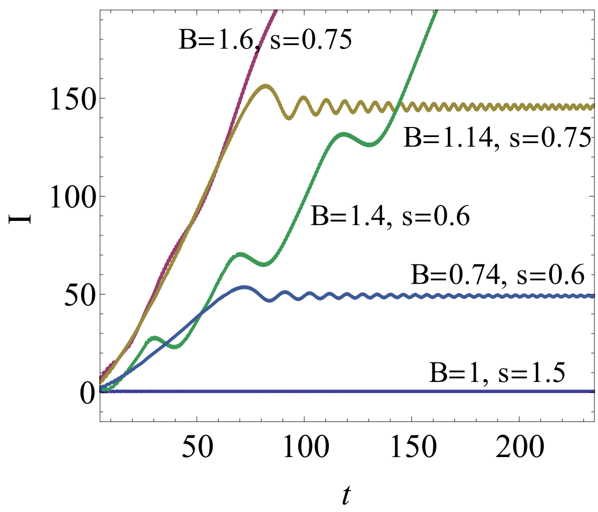
Легко видеть, что уравнение (5.7) в переменных $x, y = \dot{x}$ принимает вид (5.1) с $a = b = 1$, $q = 3$, $h = 2$, $U(x) \equiv x^4/4 - x^2/2$, а возмущения $f \equiv 0$, $g \equiv B \cos S$ удовлетворяют (5.5) и (5.6) с $l = p = 0$, $\sigma = -1$. Заметим, что все траектории соответствующей автономной системы (5.2) ограничены, а решения с $H(x(t), y(t)) \equiv E > 0$ являются периодическими с периодом $T(E) = \mathcal{O}(E^{-1/4})$

при $E \to \infty$ (см. рис. 5.1, а). Численный анализ уравнения (5.7) с $B \neq 0$ показывает, что затухающие возмущения могут приводить к появлению решений с неограниченно растущей энергией $I(t) \equiv H(x(t), \dot{x}(t))$. Кроме того, при некоторых значениях параметров решения возмущённого уравнения имеют такое же долговременное поведение, как и траектории невозмущённой системы: $I(t) = \mathcal{O}(1)$ при $t \to \infty$ (см. рис. 5.1, б).

В этой главе исследуется существование и устойчивость резонансных решений с неограниченно растущей энергией для системы (5.1) с убывающими колебательными возмущениями, удовлетворяющими (5.5) и (5.6).



(а)



(б)

Рис. 5.1. (а) Линии уровня $H(x, y)$ для уравнения (5.7) при $B = 0$. Чёрные кривые соответствуют решениям с $E > 0$. Серые кривые соответствуют решениям с $E \leq 0$. (б) Эволюция $I(t) = H(x(t), \dot{x}(t))$ для решений уравнения (5.7) с различными значениями параметров B, s и начальными данными.

5.3. Основные результаты

Пусть $(x_0(t, E), y_0(t, E))$ — одно из $T(E)$-периодических решений автономной системы (5.2), такое, что $H(x_0(t, E), y_0(t, E)) \equiv E$ при $E > E_0$. Для определённости предположим, что $x_0(0, E) = x_+(E)$ и $y_0(0, E) = 0$. Определим вспомогательные 2π-периодические функции $X(\phi, E) = x_0(\phi/\omega(E), E)$ и $Y(\phi, E) =$

$y_0(\phi/\omega(E), E)$, причём $\omega(E) = 2\pi/T(E) > 0$ для всех $E > E_0$. Из (5.4) следует, что

$$\omega(E) = \omega_0 E^{\frac{h-1}{2h}}(1 + \mathcal{O}(E^{-\frac{1}{h}})), \quad E \to \infty, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{\kappa}.$$

Заметим, что $\partial_E(\omega(E))^{2h/(h-1)} = \omega_0^{2h/(h-1)} + \mathcal{O}(E^{-1/h})$ при $E \to \infty$, где $\omega_0 > 0$. Это означает, что существует $E_1 \geq E_0$, такое что $\partial_E(\omega(E))^{2h/(h-1)} > 0$ для всех $E \geq E_1$. Следовательно, для любого $\varkappa \in \mathbb{Z}_+$ существует $t_1 > 0$, такое что уравнение

$$\omega\big(I_\varkappa(t)\big) \equiv \varkappa^{-1} S'(t) \tag{5.8}$$

имеет гладкое решение $I_\varkappa(t) \geq E_1$, определённое для всех $t \geq t_1$. Определим

$$z(t) \equiv c_\varkappa t^{-\frac{b}{(h-1)q}} \big(I_\varkappa(t)\big)^{\frac{1}{2h}}, \quad c_\varkappa = \left(\frac{\omega_0 \varkappa}{\vartheta}\right)^{\frac{1}{h-1}}, \quad \vartheta = s\Big(1 + \frac{b}{q}\Big) > 0. \tag{5.9}$$

Тогда легко видеть, что функция $z(t)$ имеет степенное асимптотическое разложение:

$$z(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} z_k t^{-\frac{kb}{(h-1)q}}, \quad t \to \infty \tag{5.10}$$

с постоянными коэффициентами z_k. В частности, подставляя (5.10) в (5.8) и приравнивая члены, стоящие в одной степени по t, получаем

$$z_0 = 1, \quad z_1 = 0, \quad z_2 = -\frac{\omega_2 c_\varkappa^2}{(h-1)\omega_0}, \quad z_3 = -\frac{\omega_3 c_\varkappa^3}{(h-1)\omega_0}.$$

Таким образом, $I_\varkappa(t) \sim c_\varkappa^{-2h} t^{2hb/((h-1)q)}$ при $t \to \infty$.

Определим

$$\begin{aligned} &\mu = \frac{1}{2}\left(\frac{b}{q} - \sigma\right), \quad \nu = 1 + 2\mu + \sigma = 1 + \frac{b}{q}, \\ &M = 2\mu q(h-1), \quad N = 2\nu q(h-1). \end{aligned} \tag{5.11}$$

Из (5.6) следует, что

$$\mu > 0, \quad \nu - 2\mu \geq 0,$$

$$M, N \in \mathbb{Z}, \quad 1 \leq M \leq (h-1)(b+q), \quad 0 \leq N - 2M < 2(h-1)(b+q).$$

Определим $\mathcal{D}(E_0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : H(x, y) > E_0\}$. Тогда справедлива

Теорема 43. *Пусть выполнены предположения* (5.5) *и* (5.6). *Тогда для любых* $n > 0$ *и* $\varkappa \in \mathbb{Z}_+$ *найдутся* $t_0 > 0$, $E_1 \geq E_0$ *и цепочка обратимых преобразований* $(x, y, t) \to (E, \phi, t) \to (r, \theta, \tau) \to (R, \Psi, \tau)$, *такие, что*

$$x(t) = X\big(\phi(t), E(t)\big), \quad y(t) = Y\big(\phi(t), E(t)\big), \tag{5.12}$$

$$E(t) = I_\varkappa(t)\big(1 + t^{-\mu} r(\tau)\big)^{2h}, \quad \phi(t) = \theta(\tau) + \varkappa^{-1} S(t), \quad \tau = \frac{t^\nu}{\nu}, \tag{5.13}$$

$$R(\tau) = r(\tau) + \tau^{-\frac{M}{N}} \tilde{\rho}_n(r(\tau), \theta(\tau), \tau), \quad \Psi(\tau) = \theta(\tau) + \tau^{-\frac{M}{N}} \tilde{\psi}_n(r(\tau), \theta(\tau), \tau),$$

и для всех $(x, y) \in \mathcal{D}(E_1)$ *и* $t > t_0$ *система* (5.1) *приводится к виду*

$$\begin{aligned} \frac{dR}{d\tau} &= \sum_{K=0}^{n} \tau^{-\frac{M+K}{N}} \Lambda_K(R, \Psi) + \widetilde{\Lambda}_n(R, \Psi, \tau), \\ \frac{d\Psi}{d\tau} &= \sum_{K=0}^{n} \tau^{-\frac{M+K}{N}} \Omega_K(R, \Psi) + \widetilde{\Omega}_n(R, \Psi, \tau), \end{aligned} \tag{5.14}$$

где $\tilde{\rho}_n(r, \theta, \tau)$ *и* $\tilde{\psi}_n(r, \theta, \tau)$ *являются* 2π*-периодическими по* θ, *коэффициенты* $\Lambda_K(R, \Psi)$ *и* $\Omega_K(R, \Psi)$ *являются* 2π*-периодическими по* Ψ, *и для всех* $d_0 > 0$ *остатки удовлетворяют оценкам*

$$\widetilde{\Lambda}_n(\rho, \varphi, \tau) = \mathcal{O}(\tau^{-\frac{M+n+1}{N}}), \quad \widetilde{\Omega}_n(\rho, \varphi, \tau) = \mathcal{O}(\tau^{-\frac{M+n+1}{N}}), \quad t \to \infty$$

равномерно для всех $|\rho| \leq d_0$ *и* $\varphi \in \mathbb{R}$. *В частности, для всех* $K \in [0, M)$

$$\begin{gathered} \Lambda_K(\rho, \varphi) \equiv \Lambda_K^0(\varphi), \quad \Omega_K(\rho, \varphi) \equiv \mathcal{Q}_K^0 \rho, \quad \mathcal{Q}_K^0 = \text{const}, \quad \mathcal{Q}_0^0 \neq 0, \\ \Lambda_{M+K}(\rho, \varphi) = \Lambda_{M+K}^0(\varphi) + \mathcal{O}(\rho), \quad \Omega_{M+K}(\rho, \varphi) = \Omega_{M+K}^0(\varphi) + \mathcal{O}(\rho) \end{gathered}$$

при $\rho \to 0$ *равномерно для всех* $\varphi \in \mathbb{R}$.

Доказательство теоремы 43 содержится в § 5.5.1. Преобразование, описанное в теореме 43, при достаточно большом $n > 0$ может обнулить некоторые старшие члены первого уравнения системы (5.14). Пусть $0 \leq L \leq \min\{N - M, 2M - 1\}$ — целое число, такое что

$$\Lambda_K(R, \Psi) \equiv 0 \quad \forall\, K < L, \quad \Lambda_L(R, \Psi) \not\equiv 0. \tag{5.15}$$

Заметим, что $0 < (M + L)/N \le 1$. Случай $(M + L)/N > 1$ соответствует некоторым специальным возмущениям системы (5.2) и в настоящей работе не рассматривается.

Из (5.13) и структуры главных членов в (5.14) следует, что наличие резонансного захвата в системе (5.1) зависит от свойств решений преобразованной системы с $R(\tau)$, близким к нулю, и $\Psi(\tau)$, близким к неподвижным точкам уравнения $\Lambda_L(0, \Psi) = 0$. Предположим, что

$$\exists\, \varphi_0 \in \mathbb{R}: \quad \Lambda_L^0(\varphi_0) = 0, \quad \lambda_L := \frac{d\Lambda_L^0}{d\Psi}\Big|_{\Psi=\varphi_0} \neq 0. \tag{5.16}$$

Вырожденный случай с $\Lambda_L(0, \Psi) \equiv 0$ здесь не обсуждается.

Легко видеть, что система (5.14) является гамильтоновой в главных асимптотических членах: $\partial_R \Lambda_K(R, \Psi) \equiv -\partial_\Psi \Omega_K(R, \Psi) \equiv 0$ для всех $K \in [0, M)$. Однако качественные свойства решений в таких асимптотически автономных системах существенно зависят от негамильтоновых членов (см., например, гл. 1). Учитывая это, предположим, что

$$\begin{aligned}
&\exists\, D \ge M: \quad \partial_R \Lambda_K(R, \Psi) + \partial_\Psi \Omega_K(R, \Psi) \equiv 0 \quad \forall\, K < D,\\
&\gamma_D := \partial_R \Lambda_D(0, \varphi_0) + \partial_\Psi \Omega_D(0, \varphi_0) \neq 0.
\end{aligned} \tag{5.17}$$

Заметим, что примеры, рассмотренные в разделе 5.4, показывают, что это предположение не является слишком ограничивающим. Случай, когда (5.17) не выполняется, требует отдельного рассмотрения.

Определим $\hat\gamma_D := \gamma_D + \delta_{M+D,N} L/N$. Тогда справедлива

Теорема 44. *Пусть предположения* (5.5), (5.6), (5.15), (5.16), (5.17) *верны при* $\lambda_L < 0$ *и некотором* $\varkappa \in \mathbb{Z}_+$. *Если* $\hat\gamma_D < 0$ *и* $M + D \le N$, *то для любого* $\varsigma \in (0, 1)$ *найдутся* $t_s > 0$ *и* $\mathcal{D}_s \subset \mathcal{D}(E_0)$ *такие, что для всех* $(x_s, y_s) \in \mathcal{D}_s$ *решение* $x(t)$, $y(t)$ *системы* (5.1) *с начальными данными* $x(t_s) = x_s$, $y(t_s) = y_s$ *имеет следующие оценки при* $t \to \infty$:

$$\begin{aligned}
x(t) &= t^{\frac{b}{(h-1)q}} c_\varkappa^{-1} X_0\big(\varkappa^{-1} S(t) + \Psi(\tau)\big)\Big(1 + t^{-\mu} R(\tau)\Big)^{\frac{1}{2h}}\Big(1 + \mathcal{O}\big(t^{-\frac{b}{(h-1)q}}\big)\Big),\\
y(t) &= t^{\frac{hb}{(h-1)q}} c_\varkappa^{-h} Y_0\big(\varkappa^{-1} S(t) + \Psi(\tau)\big)\Big(1 + t^{-\mu} R(\tau)\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(1 + \mathcal{O}\big(t^{-\frac{b}{(h-1)q}}\big)\Big),
\end{aligned}$$

где

$$R(\tau) = \delta_{M+D,N}\mathcal{O}\big(\tau^{-\frac{\varsigma}{2}|\hat{\gamma}_D|}\big) + \mathcal{O}(\tau^{-\frac{M}{N}}),$$
$$\Psi(\tau) = \varphi_0 + \delta_{M+D,N}\mathcal{O}\big(\tau^{-\frac{\varsigma}{2}|\hat{\gamma}_D|}\big) + \mathcal{O}(\tau^{-\frac{1}{N}}) \tag{5.18}$$

так как $\tau = t^\nu/\nu \to \infty$, *а* $X_0(\phi)$, $Y_0(\phi)$ *является* 2π*-периодическим решением системы*

$$\omega_0\frac{dX_0}{d\phi} = Y_0, \quad \omega_0\frac{dY_0}{d\phi} = -X_0^{2h-1}, \quad X_0(0) = (2h)^{\frac{1}{2h}}, \quad Y_0(0) = 0.$$

5.4. Примеры

5.4.1. Пример 1

Рассмотрим уравнение (5.7), удовлетворяющее предположениям (5.5) и (5.6) при $h = 2$, $a = b = 1$, $q = 3$, $l = p = 0$ и $\sigma = -1$. Из (5.11) следует, что $\mu = 2/3$, $\nu = 4/3$, $M = 4$, $N = 8$. В этом случае имеем следующее [186]:

$$\kappa = 2\sqrt{2}\mathrm{K}\left(\frac{1}{2}\right), \quad X_0(\phi) = \sqrt{2}\mathrm{cn}\left(\frac{\kappa\phi}{\pi\sqrt{2}}; \frac{1}{2}\right), \quad Y_0(\phi) = \frac{2\pi}{\kappa}\partial_\phi X_0(\phi), \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{\kappa},$$

где $\mathrm{K}(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода, $\mathrm{cn}(t;k)$ — эллиптическая функция Якоби. Более того, 2π-периодическая функция $X_0(\phi)$ допускает разложение Фурье [110, §63]:

$$X_0(\phi) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \cos\big((2j-1)\phi\big), \quad x_j = \frac{4\pi\sqrt{2}}{\kappa}\mathrm{sech}\left((2j-1)\frac{\pi}{2}\right).$$

Нетрудно проверить, что соответствующая усреднённая система (5.14) принимает вид

$$\frac{dR}{d\tau} = \tau^{-\frac{1}{2}}\sum_{K=0}^{4}\tau^{-\frac{K}{8}}\Lambda_K(R,\Psi) + \mathcal{O}(\tau^{-\frac{9}{8}}), \quad \frac{d\Psi}{d\tau} = \tau^{-\frac{1}{2}}\sum_{K=0}^{4}\tau^{-\frac{K}{8}}\Omega_K(R,\Psi) + \mathcal{O}(\tau^{-\frac{9}{8}})$$

при $\tau\to\infty$ с $\tau=3t^{4/3}/4$, $\Lambda_1\equiv\Lambda_3\equiv\Omega_1\equiv\Omega_2\equiv\Omega_3\equiv 0$,

$$\begin{aligned}
\Lambda_0 \equiv&\nu^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{c_\varkappa^2 B}{4}\big\langle Y_0(\Psi+\varkappa^{-1}\zeta)\cos\zeta\big\rangle_{\varkappa\zeta}-\frac{1}{3}\right),\\
\Lambda_2 \equiv&\nu^{-\frac{3}{4}}\frac{c_\varkappa^3 B}{4}\big\langle Y_1(\Psi+\varkappa^{-1}\zeta)\cos\zeta\big\rangle_{\varkappa\zeta},\\
\Lambda_4 \equiv&-R\nu^{-1}\left(\frac{c_\varkappa^2 B}{4}\big\langle Y_0(\Psi+\varkappa^{-1}\zeta)\cos\zeta\big\rangle_{\varkappa\zeta}-\frac{1}{3}\right)+\nu^{-1}\frac{2\omega_2 c_\varkappa^2}{3\omega_0}\\
&+\nu^{-1}\frac{c_\varkappa^4 B}{4}\left(\big\langle Y_2(\Psi+\varkappa^{-1}\zeta)\cos\zeta\big\rangle_{\varkappa\zeta}+\frac{2\omega_2}{\omega_0}\big\langle Y_0(\Psi+\varkappa^{-1}\zeta)\cos\zeta\big\rangle_{\varkappa\zeta}\right),\\
\Omega_0 \equiv&\omega_0\nu^{-\frac{1}{2}}c_\varkappa^{-1}R,\\
\Omega_4 \equiv&\nu^{-1}\left(R\omega_2 c_\varkappa(\omega_2-1)-\frac{\omega_0 c_\varkappa^2 B}{4}\big\langle X_0(\Psi+\varkappa^{-1}\zeta)\cos\zeta\big\rangle_{\varkappa\zeta}\right).
\end{aligned}$$

Параметры ω_k и 2π-периодические функции $X_k(\phi)$, $Y_k(\phi)$ определены в (5.24) и (5.27) при $h=2$. Легко показать, что

$$\langle Z(\Psi+\varkappa^{-1}\zeta)\cos\zeta\rangle_{\varkappa\zeta}\equiv\langle Z(\varkappa^{-1}\zeta)\cos\zeta\rangle_{\varkappa\zeta}\cos(\varkappa\Psi)+\langle Z(\varkappa^{-1}\zeta)\sin\zeta\rangle_{\varkappa\zeta}\sin(\varkappa\Psi)$$

для любой непрерывной 2π-периодической функции $Z(\phi)$.

Рассмотрим резонансные решения с $\varkappa=2m-1$, $m\in\mathbb{Z}_+$. В этом случае

$$\begin{aligned}
\langle X_0(\Psi+\varkappa^{-1}\zeta)\cos\zeta\rangle_{\varkappa\zeta}&\equiv(x_m/2)\cos(\varkappa\Psi)\\
\langle Y_0(\Psi+\varkappa^{-1}\zeta)\cos\zeta\rangle_{\varkappa\zeta}&\equiv-(\pi\varkappa x_m/\kappa)\sin(\varkappa\Psi).
\end{aligned}$$

Следовательно, условие (5.15) выполняется при $L=0$ и

$$\Lambda_0(R,\Psi)\equiv-\nu^{-\frac{1}{2}}\frac{\pi B\varkappa x_m c_\varkappa^2}{4\kappa}\Big(\sin(\varkappa\Psi)+\frac{s^2}{Bd_\varkappa}\Big),$$
$$d_\varkappa:=\frac{27\pi^4\varkappa^3\mathrm{sech}\big(\frac{\varkappa\pi}{2}\big)}{2\sqrt{2}\kappa^4},\quad c_\varkappa=\frac{3\varkappa\pi}{2\kappa s}.$$

Мы видим, что если $s^2/|B|<d_\varkappa$, то существует φ_0 такой, что $\Lambda_0(0,\varphi_0)=0$ и $\lambda_0=\partial_\Psi\Lambda_0(0,\varphi_0)<0$ (см. рис. 5.2, а). Заметим, что

$$\partial_R\Lambda_4(R,\Psi)\equiv\frac{\pi\varkappa x_m c_\varkappa^2 B}{4\nu\kappa}\sin(\varkappa\Psi)+\frac{1}{3\nu},\quad \partial_\Psi\Omega_4(R,\Psi)\equiv\frac{\pi\varkappa x_m c_\varkappa^2 B}{4\nu\kappa}\sin(\varkappa\Psi),$$
$$\gamma_4=\partial_R\Lambda_4(0,\varphi_0)+\partial_\Psi\Omega_4(0,\varphi_0)=\frac{\pi\varkappa x_m c_\varkappa^2 B}{2\nu\kappa}\sin(\varkappa\varphi_0)+\frac{1}{3\nu}=-\frac{1}{4}.$$

Видим, что условия (5.16) и (5.17) выполняются при $D = 4$ и $\gamma_4 = -1/4$. Отсюда следует, что уравнение (5.7) удовлетворяет условиям теоремы 44 при $\hat{\gamma}_D = \gamma_D < 0$ и $M + D = N$. Следовательно, режим фазового захвата с $\varkappa = 2m - 1$ устойчив, а резонансные решения уравнения (5.7) имеют следующую асимптотику:

$$\begin{aligned} &x(t) = t^{\frac{1}{3}}\sqrt{2}c_\varkappa^{-1}\mathrm{cn}\left(\frac{\kappa\phi(t)}{\pi\sqrt{2}}; \frac{1}{2}\right)\big(1 + \mathcal{O}(t^{-\frac{1}{3}})\big), \\ &I(t) = c_\varkappa^{-4}t^{\frac{4}{3}}\big(1 + \mathcal{O}(t^{-\frac{1}{3}})\big), \quad \phi(t) = \varkappa^{-1}S(t) + \varphi_0 + \mathcal{O}(t^{-\frac{1}{6}}), \quad t \to \infty. \end{aligned} \tag{5.19}$$

В частности, для резонансных решений с $\varkappa = 1$ имеем

$$\varphi_0 = \begin{cases} -\arcsin\frac{s^2}{Bd_1} + 2\pi k, & B > B_1 \\ \pi + \arcsin\frac{s^2}{Bd_1} + 2\pi k, & B < -B_1 \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

где $B_1 = s^2/d_1$ (см. рис. 5.2, б, в).

Заметим, что для резонансных решений $c_\varkappa^{-4} = \mathcal{O}(e^{-\varkappa\pi})$ при $\varkappa \to \infty$. Следовательно, если $\varkappa \gg 1$ и $B = \mathcal{O}(1)$, можно добиться значительного увеличения энергии в течение достаточно длительного промежутка времени. При этом допустимые значения параметров (s, B) лежат в достаточно узкой области: $s^2/B = \mathcal{O}(\varkappa^3 e^{-\varkappa\pi/2})$ при $\varkappa \to \infty$.

5.4.2. Пример 2

Рассмотрим уравнение с убывающим параметрическим возмущением

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \big(1 + Bt^{-\frac{a}{q}}\cos S(t)\big)x + x^3 = 0, \quad S(t) = st^{1+\frac{b}{q}}, \quad t \geq 1. \tag{5.20}$$

Легко проверить, что уравнение (5.20) относительно переменных $x, y = \dot{x}$ принимает вид (5.1) при $h = 2$, $U(x) \equiv x^4/4 - x^2/2$, и удовлетворяет (5.5) при $l = 0$, $p = 1$, $f \equiv 0$, $g \equiv B_{0,1,0}(S)x$, $B_{0,1,0}(S) \equiv \cos S$. Если $a + b \leq q$, то выполняется условие (5.6) при $\sigma = -(a + b)/q$. Рассмотрим случай $q = 3$, $a = 2$, $b = 1$. Из (5.11) следует, что $\mu = 2/3$, $\nu = 4/3$, $M = 4$, $N = 8$, а соответствующая

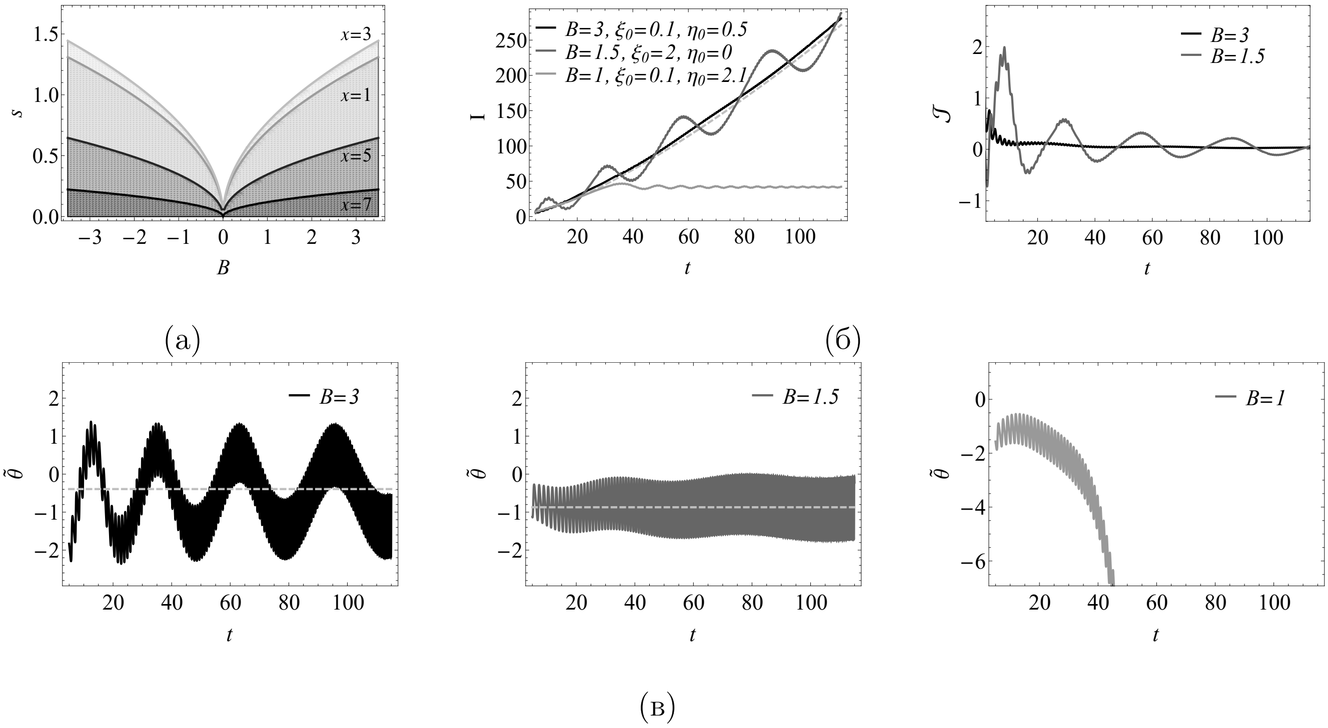


Рис. 5.2. (а) Разбиение плоскости параметров (B, s) для уравнения (5.7) с различными значениями $\varkappa$. (б), (в) Эволюция $I(t) = H(x(t), \dot{x}(t))$, $\mathcal{J}(t) = I(t)c_1^4 t^{-4/3} - 1$ и $\tilde{\theta}(t) = \tilde{\phi}(t) - S(t)$, $\tan\tilde{\phi}(t) = -\dot{x}(t)/x(t)$ для решений (5.7) с $q = 3$, $b = 1$, $s = 0.75$, $(B_1 \approx 1.15)$ и различными значениями параметра B и начальными данными $x(1) = \xi_0$, $\dot{x}(1) = \eta_0$. (б) Серая пунктирная кривая соответствует $c_1^{-4}t^{4/3}$, $c_1^{-4} \approx 0,485$. (в) Серые пунктирные линии соответствуют $\tilde{\theta} = \varphi_0$. Численные решения соответствующих начальных задач были найдены методом Рунге-Кутты четвёртого порядка с шагом $0,01$.

усредненная система (5.14) принимает вид

$$\frac{dR}{d\tau} = \tau^{-\frac{1}{2}} \sum_{K=0}^{4} \tau^{-\frac{K}{8}} \Lambda_K(R, \Psi) + \mathcal{O}(\tau^{-\frac{9}{8}}),$$
$$\frac{d\Psi}{d\tau} = \tau^{-\frac{1}{2}} \sum_{K=0}^{4} \tau^{-\frac{K}{8}} \Omega_K(R, \Psi) + \mathcal{O}(\tau^{-\frac{9}{8}}) \qquad (5.21)$$

при $\tau\to\infty$ с $\tau=(3/4)t^{4/3}$, $\Lambda_1\equiv\Lambda_3\equiv\Omega_1\equiv\Omega_2\equiv\Omega_3\equiv 0$,

$$
\begin{aligned}
\Lambda_0 \equiv&\nu^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{c_\varkappa B}{4}\big\langle X_0(\Psi+\varkappa^{-1}\zeta)Y_0(\Psi+\varkappa^{-1}\zeta)\cos\zeta\big\rangle_{\varkappa\zeta}-\frac{1}{3}\right),\\
\Lambda_2 \equiv&\nu^{-\frac{3}{4}}\frac{c_\varkappa^2 B}{4}\sum_{i+j=1}\big\langle X_i(\Psi+\varkappa^{-1}\zeta)Y_j(\Psi+\varkappa^{-1}\zeta)\cos\zeta\big\rangle_{\varkappa\zeta},\\
\Lambda_4 \equiv&\nu^{-1}\frac{c_\varkappa^2 B}{4}\sum_{i+j=2}\big\langle X_i(\Psi+\varkappa^{-1}\zeta)Y_j(\Psi+\varkappa^{-1}\zeta)\cos\zeta\big\rangle_{\varkappa\zeta}+\nu^{-1}\frac{R}{3}\\
&+\nu^{-1}\frac{\omega_2 c_\varkappa^2}{\omega_0}\left(\frac{c_\varkappa B}{4}\big\langle X_0(\Psi+\varkappa^{-1}\zeta)Y_0(\Psi+\varkappa^{-1}\zeta)\cos\zeta\big\rangle_{\varkappa\zeta}+\frac{2}{3}\right),\\
\Omega_0 \equiv&\omega_0\nu^{-\frac{1}{2}}c_\varkappa^{-1}R,\\
\Omega_4 \equiv&\nu^{-1}\left((\omega_0 z_2 c_\varkappa^{-1}-\omega_2 c_\varkappa)R-\frac{\omega_0 c_\varkappa B}{4}\big\langle X_0^2(\Psi+\varkappa^{-1}\zeta)\cos\zeta\big\rangle_{\varkappa\zeta}\right).
\end{aligned}
$$

Рассмотрим фазовый захват с $\varkappa=2$. В этом случае система (5.21) удовлетворяет условию (5.15) с $L=0$ и

$$
\Lambda_0(R,\Psi)\equiv\nu^{-\frac{1}{2}}\frac{c_2 B a_{11}}{4}\Big(\sin(2\Psi)+\frac{s}{Bd_2}\Big),
$$

где

$$
a_{11}=\big\langle X_0(\zeta)Y_0(\zeta)\sin(2\zeta)\big\rangle_\zeta=-\frac{\pi x_1^2}{2\kappa}-\frac{\pi}{\kappa}\sum_{j=1}^\infty x_j x_{j+1},
$$
$$
d_2:=-\frac{9\pi a_{11}}{4\kappa}>0,\quad c_2=\frac{3\pi}{\kappa s}.
$$

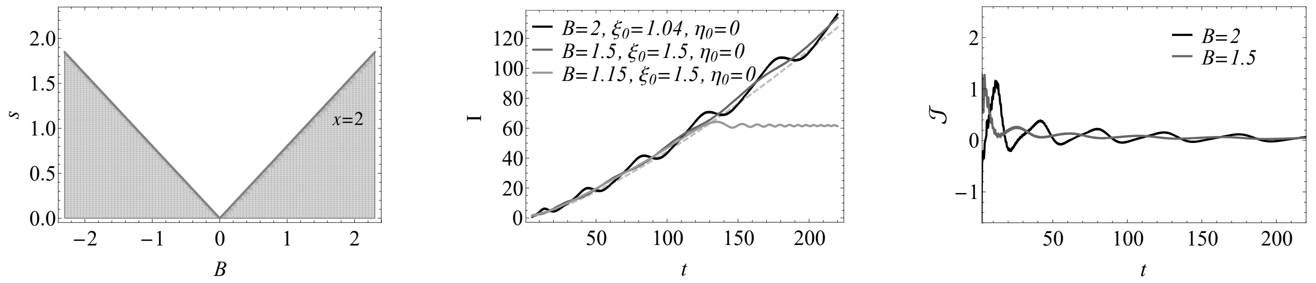
Отсюда следует, что если $s/|B|<d_2$, то существует φ_0, такой что $\Lambda_0(0,\varphi_0)=0$ и $\lambda_0=\partial_\Psi\Lambda_0(0,\varphi_0)<0$ (см. рис. 5.3, а). В частности,

$$
\varphi_0=\begin{cases}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{s}{Bd_2}+\pi k, & B>B_2\\ \frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\arcsin\frac{s}{Bd_2}+\pi k, & B<-B_2\end{cases},\quad k\in\mathbb{Z}.
$$

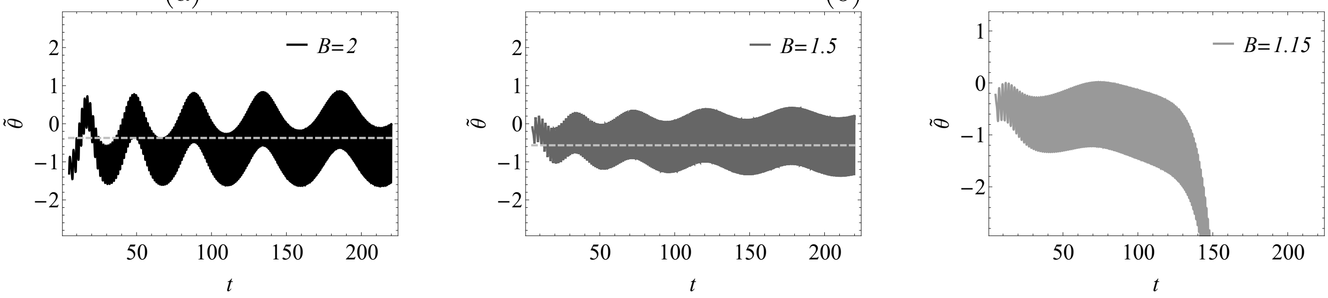
где $B_2=s/d_2$. Следовательно, условие (5.16) выполняется. Поскольку

$$
\begin{aligned}
\partial_\Psi\big\langle X_0^2(\Psi+\varkappa^{-1}\zeta)\cos\zeta\big\rangle_{\varkappa\zeta}&=\frac{2}{\omega_0}\big\langle X_0(\Psi+\varkappa^{-1}\zeta)Y_0(\Psi+\varkappa^{-1}\zeta)\cos\zeta\big\rangle_{\varkappa\zeta}\\
&=\frac{\kappa a_{11}}{\pi}\sin(2\Psi),
\end{aligned}
$$

имеем $\gamma_4 = \partial_R \Lambda_4(0,\varphi_0) + \partial_\Psi \Omega_4(0,\varphi_0) = -1/4$. Следовательно, условие (5.17) выполняется при $D = 4$ и $\gamma_4 \neq 0$. Поэтому уравнение (5.20) удовлетворяет условиям теоремы 44 с $\hat{\gamma}_D = \gamma_D < 0$, $M + D = N$. Следовательно, режим фазовой синхронизации устойчив, а решения уравнения (5.20), соответствующие параметрическому резонансу, имеют асимптотику (5.19) при $\varkappa = 2$ (см. рис. 5.3, б, в).



(а) (б)



(в)

Рис. 5.3. (а) Разбиение плоскости параметров (B,s) для уравнения (5.20) при $\varkappa = 2$. (б), (в) Эволюция $I(t) = H(x(t),\dot{x}(t))$, $\mathcal{J}(t) = I(t)c_2^4 t^{-4/3} - 1$ и $\tilde{\theta}(t) = \tilde{\phi}(t) - S(t)/2$, $\tan\tilde{\phi}(t) = -\dot{x}(t)/x(t)$ для решений (5.20) с $q = 3$, $a = 2$, $b = 1$, $s = 1$, $(B_2 \approx 1.24)$ и различными значениями параметра B и начальными данными $x(1) = \xi_0$, $\dot{x}(1) = \eta_0$. (б) Серая пунктирная кривая соответствует $c_2^{-4} t^{4/3}$, $c_2^{-4} \approx 0.095$. (в) Серые пунктирные линии соответствуют $\tilde{\theta} = \varphi_0$. Численные решения соответствующих начальных задач найдены методом Рунге-Кутты четвёртого порядка с шагом 0.01.

5.4.3. Пример 3

Наконец, рассмотрим систему с нелинейным параметрическим возмущением

$$\frac{d^2x}{dt^2} - x + \big(1 - Bt^{-\frac{a}{q}}\cos S(t)\big)x^3 + Ct^{-\frac{a+1}{q}}x^2\frac{dx}{dt} = 0, \quad t \geq 1, \tag{5.22}$$

$S(t) = st^{1+\frac{b}{q}}$, где $B, C = \text{const}$, $C > 0$. Легко видеть, что (5.20) принимает вид (5.1) с $h = 2$, $U(x) \equiv x^4/4 - x^2/2$ и удовлетворяет (5.5) с $l = 1$, $p = 3$, $f \equiv 0$, $g \equiv B_{0,3,0}(S)x^3 + t^{-1/q}B_{1,2,1}(S)x^2y$, $B_{0,3,0}(S) \equiv B\cos S$, $B_{1,2,1}(S) \equiv -C$. Обратите внимание, что если $b < a$, то выполняется условие (5.6) с $\sigma = (2b - a)/q$. Берём $a = q = 3$ и $b = 1$. Тогда $\sigma = -2/3$, $\mu = 1/3$, $\nu = 4/3$, $M = 2$, $N = 8$, и соответствующая усреднённая система (5.14) принимает следующий вид:

$$\frac{dR}{d\tau} = \tau^{-\frac{1}{4}}\sum_{K=0}^{4}\tau^{-\frac{K}{8}}\Lambda_K(R,\Psi) + \mathcal{O}(\tau^{-1}),$$
$$\frac{d\Psi}{d\tau} = \tau^{-\frac{1}{4}}\sum_{K=0}^{4}\tau^{-\frac{K}{8}}\Omega_K(R,\Psi) + \mathcal{O}(\tau^{-1})$$

при $\tau \to \infty$ с $\tau = (3/4)t^{4/3}$, $\Lambda_0 \equiv \Lambda_1 \equiv \Lambda_3 \equiv \Omega_1 \equiv \Omega_2 \equiv \Omega_3 \equiv 0$,

$$\begin{aligned}
\Lambda_2 \equiv & -\nu^{-\frac{1}{2}}\frac{C}{4c_\varkappa^2}\big\langle X_0^2(\Psi + \varkappa^{-1}\zeta)Y_0^2(\Psi + \varkappa^{-1}\zeta)\big\rangle_{\varkappa\zeta} \\
& + \nu^{-\frac{1}{2}}\frac{B}{4c_\varkappa}\big\langle X_0^3(\Psi + \varkappa^{-1}\zeta)Y_0(\Psi + \varkappa^{-1}\zeta)\cos\zeta\big\rangle_{\varkappa\zeta}, \\
\Lambda_4 \equiv & -\nu^{-\frac{3}{4}}\frac{3CR}{4c_\varkappa^2}\big\langle X_0^2(\Psi + \varkappa^{-1}\zeta)Y_0^2(\Psi + \varkappa^{-1}\zeta)\big\rangle_{\varkappa\zeta} \\
& + \nu^{-\frac{3}{4}}\frac{BR}{2c_\varkappa}\big\langle X_0^3(\Psi + \varkappa^{-1}\zeta)Y_0(\Psi + \varkappa^{-1}\zeta)\cos\zeta\big\rangle_{\varkappa\zeta} \\
& - \nu^{-\frac{3}{4}}\frac{1}{3} - \nu^{-\frac{3}{4}}\frac{C}{2c_\varkappa}\big\langle X_0Y_0(X_1Y_0 + X_0Y_1)\big\rangle_{\varkappa\zeta} \\
& + \nu^{-\frac{3}{4}}\frac{B}{4}\big\langle X_0^2(X_0Y_1 + 3X_1Y_0)\cos\zeta\big\rangle_{\varkappa\zeta}, \\
\Omega_0 \equiv & \omega_0\nu^{-\frac{1}{4}}c_\varkappa^{-1}R, \quad \Omega_4 \equiv \nu^{-\frac{3}{4}}\left(-2c_\varkappa\omega_2R - \frac{\omega_0B}{4c_\varkappa}\big\langle X_0^4(\Psi + \varkappa^{-1}\zeta)\cos\zeta\big\rangle_{\varkappa\zeta}\right).
\end{aligned}$$

Легко проверить, что для резонансных решений с $\varkappa = 2$ условие (5.15) выполняется с $L = 2$ и

$$\Lambda_2(R,\Psi) \equiv \nu^{-\frac{1}{2}} \frac{Ba_{31}\kappa s}{12\pi}\Big(\sin(2\Psi) + \frac{sC}{Bd_2}\Big), \quad d_2 := -\frac{3\pi a_{31}}{\kappa v_{22}} > 0,$$

где $v_{22} \equiv \big\langle X_0^2(\zeta) Y_0^2(\zeta)\big\rangle_\zeta > 0$, $a_{31} \equiv \big\langle X_0^3(\zeta) Y_0(\zeta)\sin 2\zeta\big\rangle_\zeta \approx x_1^2 a_{11}/2 < 0$. Следовательно, если $sC/|B| < d_2$, выполняется условие (5.16) (см. рис. 5.4, а): существует φ_0, такое что $\Lambda_2(0,\varphi_0) = 0$ и $\lambda_2 = \partial_\Psi \Lambda_2(0,\varphi_0) < 0$. В этом случае имеем

$$\varphi_0 = \begin{cases} -\frac{1}{2}\arcsin\frac{sC}{Bd_2} + \pi k, & B > B_2 \\ \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\arcsin\frac{sC}{Bd_2} + \pi k, & B < -B_2 \end{cases}, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

где $B_2 = sC/d_2$. Более того, можно легко проверить, что предположение (5.17) выполняется при $D = 2$ и

$$\gamma_4 \equiv \partial_R \Lambda_4(0,\varphi_0) + \partial_\Psi \Omega_4(0,\varphi_0) = -5Cv_{22}\nu^{-\frac{3}{4}}\Big(\frac{\kappa s}{6\pi}\Big)^2 < 0.$$

Таким образом, применяя теорему 44 с $\hat\gamma_D = \gamma_D < 0$ и $M + D < N$, мы видим, что режим фазовой синхронизации устойчив и резонансные решения (5.22) имеют асимптотику (5.19) с $\varkappa = 2$ (см. рис. 5.4, б, в).

5.5. Обоснование результатов

5.5.1. Замена переменных

В этом разделе строятся преобразования переменных, которые переводят систему (5.1) в (5.14). Сначала рассмотрим 2π-периодические функции $X(\phi,E)$ и $Y(\phi,E)$ при $E > E_0$. Из (5.2) следует, что эти функции удовлетворяют системе

$$\omega(E)\frac{\partial X}{\partial \phi} = \partial_Y H(X,Y), \quad \omega(E)\frac{\partial Y}{\partial \phi} = -\partial_X H(X,Y), \tag{5.23}$$
$$H(X(\phi,E), Y(\phi,E)) \equiv E,$$

с $X(0,E) = x_+(E)$ и $Y(0,E) = 0$.

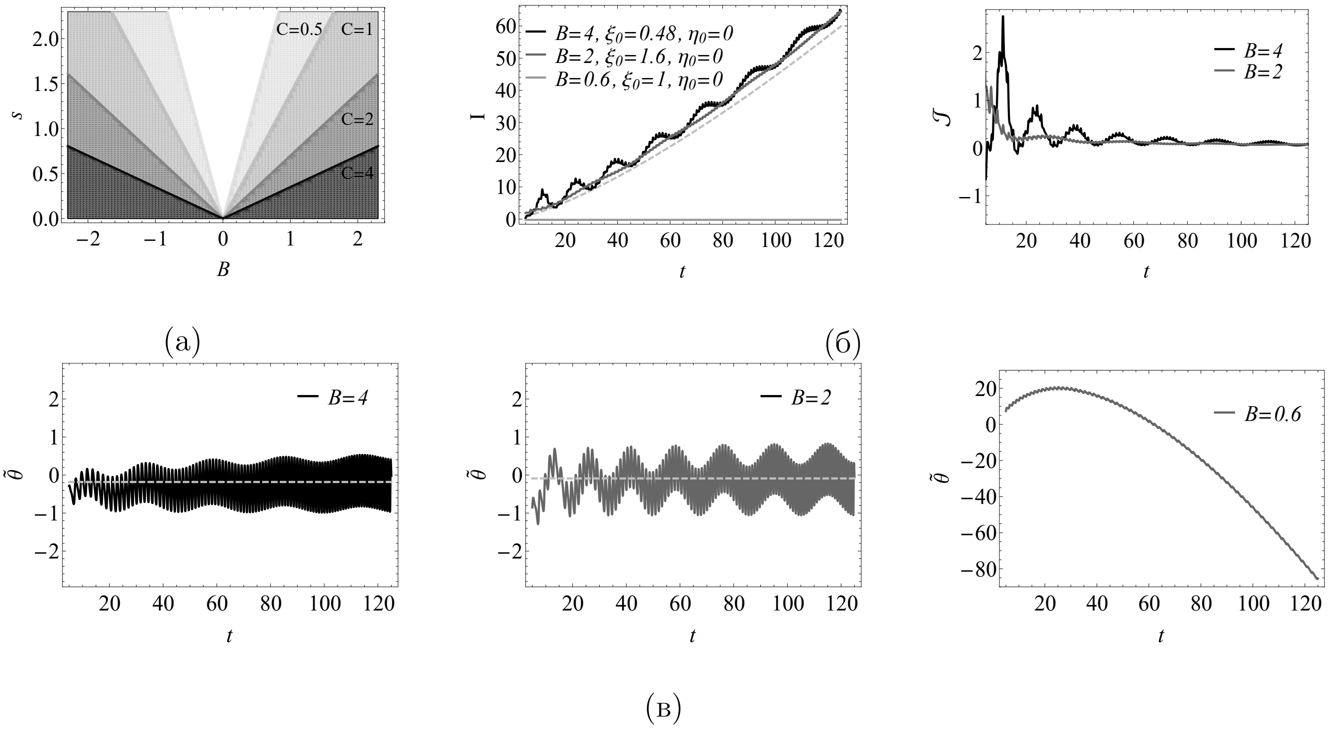


Рис. 5.4. (а) Разбиение плоскости параметров (B, s) для уравнения (5.20) при $\varkappa = 2$ и различных значениях параметра C. (б), (в) Эволюция $I(t) = H(x(t), \dot{x}(t))$, $\mathcal{J}(t) = I(t)c_2^4 t^{-4/3} - 1$ и $\tilde{\theta}(t) = \tilde{\phi}(t) - S(t)/2$, $\tan\tilde{\phi}(t) = -\dot{x}(t)/x(t)$ для решений (5.22) с $a = q = 3$, $b = 1$, $s = C = 1$, $(B_2 \approx 0.71)$ и различными значениями параметра B и начальными данными $x(1) = \xi_0$, $\dot{x}(1) = \eta_0$. (б) Серая пунктирная кривая соответствует $c_2^{-4}t^{4/3}$, $c_2^{-4} \approx 0.095$. (в) Серые пунктирные линии соответствуют $\tilde{\theta} = \varphi_0$. Численные решения соответствующих начальных задач найдены методом Рунге-Кутты четвёртого порядка с шагом 0.01.

Лемма 6. *Коэффициент $\omega(E) \equiv 2\pi/T(E)$ имеет следующее асимптотическое разложение:*

$$\omega(E) \sim E^{\frac{h-1}{2h}} \sum_{j=0}^{\infty} E^{-\frac{j}{2h}} \omega_j, \quad E \to \infty, \quad \omega_j = \mathrm{const}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{\kappa}, \quad \omega_1 = 0. \quad (5.24)$$

Доказательство. Сначала построим асимптотику для периода $T(E)$, определяемого следующим интегралом со слабой особенностью [165, §5.2]:

$$T(E) \equiv \int\limits_{x_-(E)}^{x_+(E)} \frac{\sqrt{2}d\varsigma}{\sqrt{E - U(\varsigma)}},$$

где $x_-(E)$ и $x_+(E)$ — решения уравнения $U(x) = E$ при $E > E_0$, такие, что $U'(x_\pm(E)) \neq 0$. Легко проверить, что функции $x_\pm(E)$ являются гладкими при

$E > E_0$ и имеют следующее асимптотическое разложение:

$$x_{\pm}(E) = (2hE)^{\frac{1}{2h}} \sum_{k=0}^{\infty} x_k^{\pm} E^{-\frac{k}{2h}}, \quad E \to \infty. \tag{5.25}$$

Коэффициенты $x_k^{\pm}$ легко определяются после подстановки этих рядов в уравнение и группировки членов, стоящих при одной и той же степени E. В частности,

$$x_0^{\pm} = \pm 1, \quad x_1^{\pm} = -(2h)^{-\frac{1}{2h}} u_{2h-1}, \quad x_2^{\pm} = \pm(2h)^{-\frac{1}{h}} \Big((2h-1)\frac{u_{2h-1}^2}{2} - u_{2h-2} \Big).$$

Рассмотрим два вспомогательных интеграла

$$T_+(E) = \int\limits_0^{x_+(E)} \frac{\sqrt{2}d\varsigma}{\sqrt{U(x_+(E)) - U(\varsigma)}}, \quad T_-(E) = -\int\limits_0^{x_-(E)} \frac{\sqrt{2}d\varsigma}{\sqrt{U(x_-(E)) - U(\varsigma)}}.$$

Замена переменной $\varsigma \mapsto x_{\pm}(E)\varsigma$ преобразует эти интегралы в следующие:

$$T_{\pm}(E) \equiv 2\sqrt{h}|x_{\pm}(E)|^{1-h} \int\limits_0^1 \frac{\chi(\varsigma, x_{\pm}(E))}{\sqrt{1-\varsigma^{2h}}}\, d\varsigma, \quad \chi(z,x) \equiv \left(\frac{U(x) - U(xz)}{(1-z^{2h})x^{2h}/(2h)} \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Функция $\chi(z,x)$ является гладкой при $z \in [0,1]$ и достаточно больших x. Более того, эта функция имеет следующее асимптотическое разложение:

$$\chi(z,x) = \sum_{j=0}^{\infty} \chi_j(z) x^{-j}, \quad |x| \to \infty$$

равномерно для всех $z \in [0,1]$ с $\chi_0(z) \equiv 1$,

$$\chi_1(z) \equiv -hu_{2h-1} \left(\frac{1-z^{2h-1}}{1-z^{2h}} \right),$$
$$\chi_2(z) \equiv -hu_{2h-2} \left(\frac{1-z^{2h-2}}{1-z^{2h}} \right) + \frac{3h^2 u_{2h-1}^2}{2} \left(\frac{1-z^{2h-1}}{1-z^{2h}} \right)^2.$$

Объединяя это с (5.25), получаем асимптотические разложения для $T_{\pm}(E)$ на бесконечности:

$$T_{\pm}(E) \sim \sqrt{2}(2h)^{\frac{1}{2h}} E^{\frac{1-h}{2h}} \sum_{k=0}^{\infty} T_k^{\pm} E^{-\frac{k}{2h}}, \quad E \to \infty, \quad T_k^{\pm} = \mathrm{const}.$$

В частности, $T_0^\pm = \mathcal{I}_0$,

$$T_1^\pm = \pm\Big((h-1)|x_1^\pm|\mathcal{I}_0 + (2h)^{-\frac{1}{2h}}\mathcal{I}_1\Big),$$
$$T_2^\pm = (h-1)\Big(\frac{h|x_1^\pm|^2}{2} - |x_2^\pm|\Big)\mathcal{I}_0 + (2h)^{-\frac{1}{2h}}(h|x_1^\pm|\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2),$$

где

$$\mathcal{I}_k = \int\limits_0^1 \frac{\chi_k(\varsigma)}{\sqrt{1-\varsigma^{2h}}}\,d\varsigma.$$

Заметим, что $T(E) \equiv T_+(E) + T_-(E)$. Следовательно,

$$T(E) \sim E^{\frac{1-h}{2h}} \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{T}_k E^{-\frac{k}{2h}}, \quad E \to \infty, \quad \mathcal{T}_k = \sqrt{2}(2h)^{\frac{1}{2h}}(T_k^+ + T_k^-). \tag{5.26}$$

Легко видеть, что $\mathcal{T}_0 = \kappa$ и $\mathcal{T}_1 = 0$. Наконец, из (5.26) следует, что

$$\omega(E) \equiv \frac{2\pi}{T(E)} \sim E^{\frac{h-1}{2h}} \sum_{k=0}^{\infty} \omega_k E^{-\frac{k}{2h}}, \quad E \to \infty, \quad \omega_k = \mathrm{const},$$

где $\omega_0 = 2\pi\mathcal{T}_0^{-1}$, $\omega_1 = 0$ и $\omega_2 = -2\pi\mathcal{T}_2\mathcal{T}_0^{-2}$. Это доказывает (5.24). □

Лемма 7. *Функции $X(\phi, E)$ и $Y(\phi, E)$ имеют следующие асимптотические разложения:*

$$X(\phi, E) \sim E^{\frac{1}{2h}} \sum_{j=0}^{\infty} E^{-\frac{j}{2h}} X_j(\phi), \quad Y(\phi, E) \sim E^{\frac{1}{2}} \sum_{j=0}^{\infty} E^{-\frac{j}{2h}} Y_j(\phi) \tag{5.27}$$

при $E \to \infty$ равномерно по всем $\phi \in \mathbb{R}$, где $X_j(\phi)$ и $Y_j(\phi)$ — 2π-периодические коэффициенты. В частности, $X_0(\phi)$, $Y_0(\phi)$ — периодическое решение системы

$$\omega_0 \frac{dX_0}{d\phi} = Y_0, \quad \omega_0 \frac{dY_0}{d\phi} = -X_0^{2h-1},$$

с начальными данными $X_0(0) = (2h)^{1/(2h)}$ и $Y_0(0) = 0$.

Доказательство. Определим функции

$$\tilde{x}(\phi; E) \equiv E^{-\frac{1}{2h}} X(\phi, E), \quad \tilde{y}(\phi; E) \equiv E^{-\frac{1}{2}} Y(\phi, E) \tag{5.28}$$

при $E > E_0$. Из (5.23) следует, что $\tilde{x}(\phi; E)$ и $\tilde{y}(\phi; E)$ удовлетворяют системе

$$\frac{d\tilde{x}}{d\phi} = \tilde{\lambda}(E)\partial_{\tilde{y}}\tilde{H}(\tilde{x},\tilde{y};E), \quad \frac{d\tilde{y}}{d\phi} = -\tilde{\lambda}(E)\partial_{\tilde{x}}\tilde{H}(\tilde{x},\tilde{y};E), \tag{5.29}$$

с начальными данными $\tilde{x}|_{\phi=0} = E^{-1/(2h)}x_+(E)$ и $\tilde{y}|_{\phi=0} = 0$, где

$$\tilde{H}(\tilde{x},\tilde{y};E) \equiv E^{-1}H(E^{\frac{1}{2h}}\tilde{x}, E^{\frac{1}{2}}\tilde{y}) = \tilde{H}_0(\tilde{x},\tilde{y}) + E^{-\frac{1}{2h}}\tilde{U}(\tilde{x};E),$$

$$\tilde{H}_0(\tilde{x},\tilde{y}) \equiv \frac{\tilde{x}^{2h}}{2h} + \frac{\tilde{y}^2}{2}, \quad \tilde{U}(\tilde{x};E) \equiv \sum_{j=1}^{2h-1} E^{-\frac{j-1}{2h}}u_{2h-j}\tilde{x}^{2h-j}, \quad \tilde{\lambda}(E) \equiv \frac{E^{\frac{h-1}{2h}}}{\omega(E)}.$$

Более того, $\tilde{H}(\tilde{x}(\phi;E),\tilde{y}(\phi;E);E) \equiv 1$. Заметим, что $\tilde{\lambda}(E) = \omega_0^{-1}(1 + \mathcal{O}(E^{-1/h}))$ при $E \to \infty$. В этом случае асимптотику периодических решений системы (5.29) при $E^{-1/(2h)} \to 0$ можно построить, используя метод усреднения [15],[9, §6.2].

Рассмотрим невозмущённую систему

$$\omega_0 J^{\frac{h-1}{2h}}\frac{d\xi}{d\alpha} = \partial_\eta \tilde{H}_0(\xi,\eta), \quad \omega_0 J^{\frac{h-1}{2h}}\frac{d\eta}{d\alpha} = -\partial_\xi \tilde{H}_0(\xi,\eta), \tag{5.30}$$

с начальными данными $\xi|_{\alpha=0} = (2hJ)^{1/(2h)}$, $\eta|_{\alpha=0} = 0$ и параметром $J > 0$. При любом $J > 0$ решение $\xi(\alpha, J)$, $\eta(\alpha, J)$ этой задачи удовлетворяет

$$\tilde{H}_0(\xi(\alpha,J),\eta(\alpha,J)) \equiv J \tag{5.31}$$

и является $\tilde{\tau}(J)$-периодическим относительно α, где

$$\tilde{\tau}(J) \equiv \int\limits_{-(2hJ)^{1/(2h)}}^{(2hJ)^{1/(2h)}} \frac{\omega_0\sqrt{2}J^{-\frac{1}{2h}}\,d\varsigma}{\sqrt{1-\varsigma^{2h}/(2hJ)}} = \omega_0\sqrt{2}(2h)^{\frac{1}{2h}}\int\limits_{-1}^{1}\frac{d\varsigma}{\sqrt{1-\varsigma^{2h}}} = \omega_0\mathcal{T}_0 = 2\pi.$$

Эти функции используются для переписывания системы (5.29) в переменных (J, α). Рассмотрим замену переменных.

$$\tilde{x}(\phi) = \xi(\alpha(\phi), J(\phi)), \quad \tilde{y}(\phi) = \eta(\alpha(\phi), J(\phi)). \tag{5.32}$$

Дифференцируя тождество (5.31) по J и учитывая (5.30), получаем $\partial_\alpha\xi\partial_J\eta - \partial_\alpha\eta\partial_J\xi \equiv \omega_0^{-1}J^{(1-h)/(2h)} \neq 0$. Следовательно, преобразование $(\tilde{x},\tilde{y}) \to (J,\alpha)$

обратимо. В новых переменных система (5.29) принимает вид

$$
\begin{aligned}
\frac{dJ}{d\phi} &= -E^{-\frac{1}{2h}}\partial_\alpha \tilde P(\alpha, J; E)\omega_0 J^{\frac{h-1}{2h}}\tilde\lambda(E),\\
\frac{d\alpha}{d\phi} &= (1+E^{-\frac{1}{2h}}\partial_J \tilde P(\alpha, J; E))\omega_0 J^{\frac{h-1}{2h}}\tilde\lambda(E)
\end{aligned}
\tag{5.33}
$$

с начальными данными $J|_{\phi=0} = J_0(E)$ и $\alpha|_{\phi=0} = 0$, где $\tilde P \equiv \tilde U(\xi(\alpha, J); E)$ является 2π-периодической по α и

$$
J_0(E) = E^{-1}\frac{(x_+(E))^{2h}}{2h} = 1 + 2hx_1^+E^{-\frac{1}{2h}} + \mathcal{O}(E^{-\frac{1}{h}}), \quad E\to\infty.
$$

Решение $J(\phi)$, $\alpha(\phi)$ этой задачи удовлетворяет

$$
\tilde H(\xi(\alpha(\phi), J(\phi)), \eta(\alpha(\phi), J(\phi)); E) \equiv 1.
$$

Применяя метод усреднения [225] к системе (5.33), получаем следующие асимптотические разложения:

$$
J(\phi) \sim \sum_{k=0}^\infty E^{-\frac{k}{2h}} J_k(\phi), \quad \alpha(\phi) \sim \phi + \sum_{k=1}^\infty E^{-\frac{k}{2h}}\alpha_k(\phi), \quad E\to\infty,
$$

с 2π-периодическими коэффициентами $J_k(\phi)$ и $\alpha_k(\phi)$. В частности, $J_0(\phi)\equiv 1$, $J_1(\phi) \equiv -u_{2h-1}\big(\xi(\phi,1)\big)^{2h-1}$ и $\alpha_1(\phi) \equiv -\omega_0 u_{2h-1}\partial_J\eta(\phi, 1)$. Объединяя это с (5.28) и (5.32), получаем (5.27) с $X_0(\phi) = \xi(\phi, 1)$, $Y_0(\phi) = \eta(\phi, 1)$,

$$
\begin{aligned}
X_1(\phi) &= \alpha_1(\phi)\partial_\alpha\xi(\phi, 1) + J_1(\phi)\partial_J\xi(\phi, 1),\\
Y_1(\phi) &= \alpha_1(\phi)\partial_\alpha\eta(\phi, 1) + J_1(\phi)\partial_J\eta(\phi, 1).
\end{aligned}
$$

$\square$

Функции $X(\phi, E)$ и $Y(\phi, E)$ используются для переписывания системы (5.1) в переменных типа действие-угол. Легко проверить, что замена переменных (5.12) преобразует систему (5.1) к виду

$$
\frac{dI}{dt} = t^{-c}F(I, \phi, t), \quad \frac{d\phi}{dt} = \omega(I) + t^{-c}G(I, \phi, t), \tag{5.34}
$$

где

$$
\begin{aligned}
F(I,\phi,t) &\equiv f\big(X(\phi,I),Y(\phi,I),S(t),t\big)U'\big(X(\phi,I)\big)\\
&\quad +g\big(X(\phi,I),Y(\phi,I),S(t),t\big)Y(\phi,I),\\
G(I,\phi,t) &\equiv \omega(I)\Big(f\big(X(\phi,I),Y(\phi,I),S(t),t\big)\partial_E Y(\phi,I)\\
&\quad -g\big(X(\phi,I),Y(\phi,I),S(t),t\big)\partial_E X(\phi,I)\Big).
\end{aligned}
$$

Справедлива

Лемма 8. *Пусть выполнены предположения* (5.5) *и* (5.6). *Тогда для всех* $(x,y)\in\mathcal{D}(E_0)$ *и* $t>0$ *система* (5.1) *может быть преобразована в* (5.34) *заменой* (5.12). *Более того, существуют* $\tilde C>0$, $\tilde E_0\ge E_0$ *и* $\tilde t_0>0$, *такие, что*

$$
|F(J,\varphi,t)|\le \tilde C J^{1+\beta},\quad |G(J,\varphi,t)|\le \tilde C J^{\beta},\quad \beta\equiv\frac{p-1+(l-1)(h-1)}{2h} \tag{5.35}
$$

для всех $J\ge\tilde E_0$, $\varphi\in\mathbb{R}$ *и* $t\ge\tilde t_0$.

Доказательство. Из (5.5) следует, что функции $F(I,\phi,t)$ и $G(I,\phi,t)$ имеют следующие асимптотические разложения:

$$
\begin{aligned}
&F(I,\phi,t)\sim\sum_{k=0}^{\infty}t^{-\frac{k}{q}}F_k(I,\phi,S(t)),\\
&G(I,\phi,t)\sim\sum_{k=0}^{\infty}t^{-\frac{k}{q}}G_k(I,\phi,S(t)),\quad t\to\infty,
\end{aligned}
\tag{5.36}
$$

где коэффициенты

$$
\begin{aligned}
&F_k\equiv f_k\big(X(\phi,I),Y(\phi,I),S\big)U'\big(X(\phi,I)\big)+g_k\big(X(\phi,I),Y(\phi,I),S\big)Y(\phi,I),\\
&G_k\equiv\omega(I)\Big(f_k\big(X(\phi,I),Y(\phi,I),S\big)\partial_E Y(\phi,I)-g_k\big(X(\phi,I),Y(\phi,I),S\big)\partial_E X(\phi,I)\Big)
\end{aligned}
$$

являются 2π-периодическими функциями относительно ϕ и S. Заметим, что ряды в (5.36) являются асимптотическими при $t\to\infty$. Определим

$$
\begin{aligned}
&\tilde F_k(I,\phi,S)\equiv I^{-1-\beta}F_k(I,\phi,S), &&\tilde F(I,\phi,t)\equiv I^{-1-\beta}F(I,\phi,t),\\
&\tilde G_k(I,\phi,S)\equiv I^{-\beta}G_k(I,\phi,S), &&\tilde G(I,\phi,t)\equiv I^{-\beta}G(I,\phi,t).
\end{aligned}
$$

Тогда, учитывая (5.27), получаем следующие асимптотические разложения:

$$\tilde{F}_k(I,\phi,S) \sim \sum_{d=0}^{\infty} \tilde{F}_{k,d}(\phi,S) I^{-\frac{d}{2h}},$$
$$\tilde{G}_k(I,\phi,S) \sim \sum_{d=0}^{\infty} \tilde{G}_{k,d}(\phi,S) I^{-\frac{d}{2h}}, \quad I \to \infty, \tag{5.37}$$

с 2π-периодическими коэффициентами:

$$\begin{aligned}
\tilde{F}_{k,d} = & \sum_{(i,j,i_1,j_1,i_2,j_2)\in\mathcal{X}_d} \delta_{j_2,0} X_0^{p-l-i} Y_0^{l-1-j} \\
& \times \Big((2h-i_2) u_{2h-i_2} A_{k,p-l+1-i,l-1-j} \tilde{X}_{p-l-i+2h-i_2,i_1} \tilde{Y}_{l-1-j,j_1} X_0^{2h-i_2} \\
& + \delta_{i_2,0} B_{k,p-l-i,l-j} \tilde{X}_{p-l-i,i_1} \tilde{Y}_{l+1-j,j_1} Y_0^2 \Big), \\
\tilde{G}_{k,d} = & \sum_{(i,j,i_1,j_1,i_2,j_2)\in\mathcal{X}_d} \frac{\omega_{j_2}}{2h} X_0^{p-l-i} Y_0^{l-1-j} \\
& \times \Big((h-i_2) A_{k,p-l+1-i,l-1-j} \tilde{X}_{p-l+1-i,i_1} \tilde{Y}_{l-1-j,j_1} X_0 Y_{i_2} \\
& - (1-i_2) B_{k,p-l-i,l-j} \tilde{X}_{p-l-i,i_1} \tilde{Y}_{l-j,j_1} Y_0 X_{i_2} \Big),
\end{aligned}$$

где $\delta_{i,0}$ — символ Кронекера,

$$\begin{aligned}
\mathcal{X}_d = \big\{ (i,j,i_1,j_1,i_2,j_2) \in \mathbb{Z}^6 : \ & 0 \le i+j \le p,\ 0 \le j \le l,\ i_1,j_1,i_2,j_2 \ge 0, \\
& i+j+(h-1)j+i_1+j_1+i_2+j_2 = d \big\}.
\end{aligned}$$

Функции $\tilde{X}_{n,i}(\phi)$, $\tilde{Y}_{n,i}(\phi)$ обозначают коэффициенты асимптотических разложений:

$$I^{-\frac{n}{2h}} \left(\frac{X(\phi,I)}{X_0(\phi)} \right)^n \sim \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{X}_{n,i}(\phi) I^{-\frac{i}{2h}}, \quad I^{-\frac{n}{2}} \left(\frac{Y(\phi,I)}{Y_0(\phi)} \right)^n \sim \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{Y}_{n,i}(\phi) I^{-\frac{i}{2h}}$$

при $I \to \infty$. Например, $\tilde{X}_{0,0} = 1$, $\tilde{X}_{0,i} = 0$, $\tilde{X}_{n,0} = 1$, $\tilde{X}_{n,1} = nX_1/X_0$, $\tilde{X}_{n,2} = nX_2/X_0 + n(n-1)(X_1/X_0)^2/2$ для всех $n, i \ne 0$. Предполагается, что $u_{2h} = 1/(2h)$, $u_{2h-i_2} = 0$ для всех $i_2 \ge 2h$ и $A_{k,i,-1}(S) \equiv 0$ для всех $k, i \ge 0$. Заметим, что ряды в (5.37) являются асимптотическими, и для любого $n \ge 1$ справедливы следующие оценки: $\tilde{F}_k(J,\varphi,S) - \sum_{d=0}^{n-1} \tilde{F}_{k,d}(\varphi,S) J^{-d/(2h)} = \mathcal{O}(J^{-n/(2h)})$ и

$\tilde{G}_k(J,\varphi,S) - \sum_{d=0}^{n-1}\tilde{G}_{k,d}(\varphi,S)J^{-d/(2h)} = \mathcal{O}(J^{-n/(2h)})$ при $J \to \infty$ равномерно для всех $\varphi \in \mathbb{R}$ и $S \in \mathbb{R}$. Из (5.36) и (5.37) следует, что $\tilde{F}(J,\varphi,t) = \mathcal{O}(1)$ и $\tilde{G}(J,\varphi,t) = \mathcal{O}(1)$ при $J \to \infty$ и $t \to \infty$ равномерно для всех $\varphi \in \mathbb{R}$. Следовательно, $F(J,\varphi,t)$ и $G(J,\varphi,t)$ удовлетворяют оценке (5.35).

Дифференцируя тождество $H(X(\phi,E),Y(\phi,E)) \equiv E$ по E и учитывая систему (5.23), получаем

$$\det\frac{\partial(X,Y)}{\partial(\phi,E)} = \begin{vmatrix}\partial_\phi X & \partial_E X\\ \partial_\phi Y & \partial_E Y\end{vmatrix} = \frac{1}{\omega(E)} > 0 \quad \forall\, E > E_0.$$

Следовательно, преобразование (5.12) обратимо для всех $E > E_0$ и $\phi \in [0,2\pi)$.

□

Замечание 6. *Поведение правых частей системы* (5.34) *при достаточно больших I указывает на роль предположения* (5.6). *В частности, неравенства* (5.6) *являются необходимым условием существования резонансных решений в возмущённой системе* (5.1), *таких, что $I(t) \sim I_\varkappa(t)$ и $\phi(t) \sim \varkappa^{-1}S(t)$ при $t \to \infty$, где $I_\varkappa(t)$ — решение уравнения* (5.8). *Действительно, рассмотрим преобразованную систему* (5.34). *Объединяя* (5.35) *с первым уравнением в* (5.34), *видим, что если $\beta \neq 0$, то*

$$\left|\frac{d}{dt}I^{-\beta}\right| \le |\beta|\tilde{C}t^{-\frac{a}{q}}, \quad t \ge \tilde{t}_0.$$

Интегрирование этих неравенств по t даёт

$$|(I(t))^{-\beta} - (I(\tilde{t}_0))^{-\beta}| \le |\beta|\tilde{C}\Big(t^{1-\frac{a}{q}} - \tilde{t}_0^{1-\frac{a}{q}}\Big)\frac{q}{q-a}, \qquad a < q,$$
$$|(I(t))^{-\beta} - (I(\tilde{t}_0))^{-\beta}| \le |\beta|\tilde{C}\left(\log t - \log\tilde{t}_0\right), \qquad a = q,$$

при $t \ge \tilde{t}_0$, где $I(\tilde{t}_0) \ge \tilde{E}_0$. Следовательно, существует $\tilde{t}_1 \ge \tilde{t}_0$, такой что

$$(I(t))^\beta \ge \frac{t^{-1+\frac{a}{q}}}{2|\beta|\tilde{C}}\Big(1 - \frac{a}{q}\Big), \qquad a < q,$$
$$(I(t))^\beta \ge \frac{1}{2|\beta|\tilde{C}\log t}, \qquad a = q,$$

при $t \geq \tilde{t}_1$. *Заметим, что* $\beta = q(\sigma + a/q)(h-1)/(2hb)$. *Если* $\beta = 0$, *то* $\sigma + a/q = 0$ *и из* (5.34) *следует, что* $|I'(t)/I(t)| \leq \tilde{C}t^{\sigma}$ *при* $t \geq \tilde{t}_0$. *Нетрудно проверить, что* $(I_\varkappa(t))^\beta \sim c_\varkappa^{-2h\beta} t^{\sigma + a/q}$ *и* $I'_\varkappa(t)/I_\varkappa(t) \sim 2hb/((h-1)q)t^{-1}$ *при* $t \to \infty$. *Таким образом, система* (5.34) *допускает решения с* $I(t) \sim I_\varkappa(t)$ *при достаточно больших* t, *если* $\sigma \geq -1$. *Аналогично, из второго уравнения в* (5.34) *следует, что*

$$\frac{\phi(t)}{S(t)} - \varkappa^{-1} = \mathcal{O}(t^{\sigma - \frac{b}{q}}), \quad t \to \infty$$

для решений $I(t) \sim I_\varkappa(t)$. *Поскольку* $\phi(t)/S(t) \to \varkappa^{-1}$ *при* $t \to \infty$, *получаем* $\sigma < b/q$.

Решение $I_\varkappa(t)$ при $t \geq t_1$ уравнения (5.8) используется при замене переменных (5.13) в системе (5.34). Подстановка (5.13) в (5.34) даёт следующую асимптотически автономную систему:

$$\frac{dr}{d\tau} = \tau^{-\frac{M}{N}} \mathcal{A}(r, \theta, \tau), \quad \frac{d\theta}{d\tau} = \tau^{-\frac{M}{N}} \mathcal{B}(r, \theta, \tau), \tag{5.38}$$

с правыми частями

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(r, \theta, \tau) &\equiv \mathcal{F}(r, \theta, \tau) + \tau^{-\frac{N-2M}{N}} \mathcal{P}(r, \tau) + \tau^{-\frac{N-M}{N}} \frac{M}{N} r, \\
\mathcal{B}(r, \theta, \tau) &\equiv \mathcal{Q}(r, \tau) r + \tau^{-\frac{M}{N}} \mathcal{G}(r, \theta, \tau),
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} \equiv & \tilde{F}\Big(I_\varkappa\big((\nu\tau)^{\frac{1}{\nu}}\big)\big(1 + (\nu\tau)^{-\frac{\mu}{\nu}} r\big)^{2h}, \theta + \varkappa^{-1}\zeta(\tau), \zeta(\tau), (\nu\tau)^{\frac{1}{\nu}}\Big) \frac{c_\varkappa \nu^{-\frac{\mu}{\nu}}}{2hz\big((\nu\tau)^{\frac{1}{\nu}}\big)} \\
& \times \Big(c_\varkappa^{-1} z\big((\nu\tau)^{\frac{1}{\nu}}\big)\big(1 + (\nu\tau)^{-\frac{\mu}{\nu}} r\big)\Big)^{p + (l-1)(h-1)}, \\
\mathcal{P} \equiv & -\big(1 + (\nu\tau)^{-\frac{\mu}{\nu}} r\big) \nu^{-\frac{\nu-\mu}{\nu}} \left(\frac{tI'_\varkappa(t)}{2hI_\varkappa(t)}\right)\Big|_{t=(\nu\tau)^{1/\nu}}, \\
\mathcal{Q} \equiv & r^{-1}\left[\omega\Big(I_\varkappa\big((\nu\tau)^{\frac{1}{\nu}}\big)\big(1 + (\nu\tau)^{-\frac{\mu}{\nu}} r\big)^{2h}\Big) - \omega\Big(I_\varkappa\big((\nu\tau)^{\frac{1}{\nu}}\big)\Big)\right] \tau^{\frac{\mu - \nu + 1}{\nu}} \nu^{\frac{1-\nu}{\nu}}, \\
\mathcal{G} \equiv & \tilde{G}\Big(I_\varkappa\big((\nu\tau)^{\frac{1}{\nu}}\big)\big(1 + (\nu\tau)^{-\frac{\mu}{\nu}} r\big)^{2h}, \theta + \varkappa^{-1}\zeta(\tau), \zeta(\tau), (\nu\tau)^{\frac{1}{\nu}}\Big) \nu^{-\frac{2\mu}{\nu}} \\
& \times \Big(c_\varkappa^{-1} z\big((\nu\tau)^{\frac{1}{\nu}}\big)\big(1 + (\nu\tau)^{-\frac{\mu}{\nu}} r\big)\Big)^{p - 1 + (l-1)(h-1)}, \\
\zeta \equiv & S\big((\nu\tau)^{\frac{1}{\nu}}\big).
\end{aligned} \tag{5.39}$$

Лемма 9. *Пусть выполнены предположения* (5.5) *и* (5.6)*. Тогда для любых* $E \geq E_1$*,* $\phi \in \mathbb{R}$ *и* $t \geq t_1$ *система* (5.34) *может быть преобразована в* (5.38) *преобразованием* (5.13)*. Более того, для любых* $r_0 > 0$ *и* $n > 0$ *функции* $\mathcal{A}(r,\theta,\tau)$ *и* $\mathcal{B}(r,\theta,\tau)$ *удовлетворяют следующим оценкам:*

$$\mathcal{A}(r,\theta,\tau) = \sum_{K=0}^{n} \tau^{-\frac{K}{N}} \mathcal{A}_K(r,\theta,\zeta(\tau)) + \mathcal{O}(\tau^{-\frac{n+1}{N}}),$$
$$\mathcal{B}(r,\theta,\tau) = \mathcal{Q}_0^0 r + \mathcal{O}(\tau^{-\frac{1}{N}})$$

при $\tau \to \infty$ *равномерно для всех* $|r| \leq r_0$ *и* $\theta \in \mathbb{R}$*, где каждый* $\mathcal{A}_K(r,\theta,\zeta)$ *является* 2π*-периодическим по* θ *и* $2\pi\varkappa$*-периодическим по* ζ*, и* $\mathcal{Q}_0^0 = \omega_0(h-1)\nu^{-M/N} c_\varkappa^{-(h-1)} \neq 0$*.*

Доказательство. Объединяя (5.36), (5.37) и (5.9), получаем следующие асимптотические разложения:

$$\mathcal{F} \sim \sum_{K=0}^{\infty} \mathcal{F}_K(r,\theta,\zeta)\tau^{-\frac{K}{N}}, \quad \mathcal{P} \sim \sum_{K=0}^{\infty} \mathcal{P}_K(r)\tau^{-\frac{K}{N}},$$
$$\mathcal{Q} \sim \sum_{K=0}^{\infty} \mathcal{Q}_K(r)\tau^{-\frac{K}{N}}, \quad \mathcal{G} \sim \sum_{K=0}^{\infty} \mathcal{G}_K(r,\theta,\zeta)\tau^{-\frac{K}{N}}$$

при $\tau \to \infty$ равномерно для всех $|r| \leq r_0$, $\theta \in \mathbb{R}$, где

$$\mathcal{F}_K(r,\theta,\zeta) \equiv \nu^{-\frac{K+M}{N}} \sum_{(k,d,i,\ell)\in\mathcal{Y}_K} \hat{F}^{\ell}_{k,d,i}(\theta,\zeta) r^{\ell},$$
$$\mathcal{P}_K(r) \equiv \nu^{-\frac{K+N-M}{N}} \sum_{(k,d,i,\ell)\in\mathcal{Y}_K,\ell\in\{0,1\}} \hat{P}^{\ell}_{k,d,i} r^{\ell},$$
$$\mathcal{Q}_K(r) \equiv \nu^{-\frac{K+M}{N}} \sum_{(k,d,i,\ell)\in\mathcal{Y}_K} \hat{Q}^{\ell}_{k,d,i} r^{\ell},$$
$$\mathcal{G}_K(r,\theta,\zeta) \equiv \nu^{-\frac{K+2M}{N}} \sum_{(k,d,i,\ell)\in\mathcal{Y}_K} \hat{G}^{\ell}_{k,d,i}(\theta,\zeta) r^{\ell},$$

и

$$
\begin{aligned}
&\hat{F}^{\ell}_{k,d,i} \equiv \frac{1}{2h}\tilde{F}_{k,d}(\theta+\varkappa^{-1}\zeta,\zeta)C_{p+(l-1)(h-1)-d,\ell}Z_{p-1+(l-1)(h-1)-d,i}c_{\varkappa}^{-(p-1+(l-1)(h-1)-d)},\\
&\hat{G}^{\ell}_{k,d,i} \equiv \tilde{G}_{k,d}(\theta+\varkappa^{-1}\zeta,\zeta)C_{p-1+(l-1)(h-1)-d,\ell}Z_{p-1+(l-1)(h-1)-d,i}c_{\varkappa}^{-(p-1+(l-1)(h-1)-d)},\\
&\hat{Q}^{\ell}_{k,d,i} = \omega_i\delta_{k,0}C_{h-1-i,\ell+1}Z_{h-1-i,d}c_{\varkappa}^{-(h-1-i)},\\
&\hat{P}^{\ell}_{k,d,i} = -\delta_{k,0}\frac{(2h-i)b}{2h(h-1)q}C_{1,\ell}Z_{2h,d}Z_{-2h,i}.
\end{aligned}
$$

Здесь $\mathcal{Y}_K = \{(k,d,i,\ell)\in\mathbb{Z}^4 : k\ge 0,\ d\ge 0,\ i\ge 0,\ \ell\ge 0,\ 2(h-1)k+2b(d+i)+M\ell = K\}$, а параметры $C_{n,i}$, $Z_{n,i}$ обозначают коэффициенты асимптотических разложений

$$
(1+t^{-\mu})^n \sim \sum_{i=0}^{\infty} C_{n,i}t^{-\mu i}, \quad \big(z(t)\big)^n \sim \sum_{i=0}^{\infty} Z_{n,i}t^{-\frac{bi}{(h-1)q}}, \quad t\to\infty.
$$

В частности, $C_{0,0} = Z_{0,0} = 1$, $C_{0,i} = Z_{0,i} = 0$, $C_{n,0} = 1$, $C_{n,1} = n$, $C_{n,2} = n(n-1)/2$, $Z_{n,0} = 1$,$Z_{n,1} = 0$, $Z_{n,2} = nz_2$ для всех $n, i \neq 0$.

Таким образом, правые части системы (5.38) имеют следующие асимптотические разложения:

$$
\mathcal{A}(r,\theta,\tau) \sim \sum_{K=0}^{\infty} \tau^{-\frac{K}{N}}\mathcal{A}_K(r,\theta,\zeta(\tau)), \quad \mathcal{B}(r,\theta,\tau) \sim \sum_{K=0}^{\infty} \tau^{-\frac{K}{N}}\mathcal{B}_K(r,\theta,\zeta(\tau))
$$

при $\tau\to\infty$ равномерно для всех $|r|\le r_0$, $\theta\in\mathbb{R}$ с

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{A}_K(r,\theta,\zeta) \equiv \mathcal{F}_K(r,\theta,\zeta) + \mathcal{P}_{K+2M-N}(r) + \delta_{K,N-M}\frac{M}{N}r,\\
&\mathcal{B}_K(r,\theta,\zeta) \equiv \mathcal{Q}_K(r)r + \mathcal{G}_{K-M}(r,\theta,\zeta).
\end{aligned}
\tag{5.40}
$$

Предполагается, что $\mathcal{P}_i \equiv \mathcal{G}_i \equiv 0$, если $i<0$. Отсюда следует, что $\mathcal{A}_K(r,\theta,\zeta)$ и $\mathcal{B}_K(r,\theta,\zeta)$ являются 2π-периодическими относительно θ и $2\pi\varkappa$-периодическими относительно ζ. В частности,

$$\mathcal{A}_K \equiv \begin{cases} \mathcal{A}^0_K(\theta,\zeta), & K\in[0,M),\\ \mathcal{A}^1_K(\theta,\zeta)r+\mathcal{A}^0_K(\theta,\zeta), & K\in[M,2M),\\ \mathcal{A}^2_K(\theta,\zeta)r^2+\mathcal{A}^1_K(\theta,\zeta)r+\mathcal{A}^0_K(\theta,\zeta), & K\in[2M,3M),\end{cases}$$

$$\mathcal{B}_K \equiv \begin{cases} \mathcal{Q}^0_K r, & K\in[0,M),\\ \mathcal{Q}^1_K r^2+\mathcal{Q}^0_K r+\mathcal{G}^0_{K-M}(\theta,\zeta), & K\in[M,2M),\\ \mathcal{Q}^2_K r^3+\mathcal{Q}^1_K r^2+\big(\mathcal{Q}^0_K+\mathcal{G}^1_{K-M}(\theta,\zeta)\big)r+\mathcal{G}^0_{K-M}(\theta,\zeta), & K\in[2M,3M),\end{cases}$$

где

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^\ell_K(\theta,\zeta) \equiv & \nu^{-\frac{K+M}{N}}\sum_{(k,d,i,\ell)\in\mathcal{Y}_K}\hat F^\ell_{k,d,i}(\theta,\zeta)\\ & +\nu^{-\frac{K+2M-N}{N}}\sum_{(k,d,i,\ell)\in\mathcal{Y}_{K+N-M}}\hat P^\ell_{k,d,i}+\delta_{\ell,1}\delta_{K,N-M}\frac{M}{N},\\ \mathcal{G}^\ell_K(\theta,\zeta)\equiv & \nu^{-\frac{K+2M}{N}}\sum_{(k,d,i,\ell)\in\mathcal{Y}_K}\hat G^\ell_{k,d,i}(\theta,\zeta),\\ \mathcal{Q}^\ell_K\equiv & \nu^{-\frac{K+M}{N}}\sum_{(k,d,i,\ell)\in\mathcal{Y}_K}\hat Q^\ell_{k,d,i}.\end{aligned}$$

Заметим, что для любого $r_0>0$ найдётся $t_2=\max\{t_1,(2r_0)^{1/\mu}\}$ такое, что $t^{-\mu}|r|<1/2$ для всех $|r|\le r_0$ и $t\ge t_2$. В этом случае отображение $(I,\phi,t)\mapsto(r,\theta,\tau)$ обратимо для всех $|r|\le r_0$, $\theta\in\mathbb{R}$ и $\tau\ge\tau_2=t_2^\nu/\nu$. $\square$

Из (5.9) и (5.39) следует, что $d\zeta/d\tau\equiv\vartheta$. Следовательно, $\zeta(\tau)$ меняется быстрее по сравнению с потенциальными вариациями $r(\tau)$ и $\theta(\tau)$ при больших значениях τ. Дальнейшее упрощение системы связано с усреднением уравнений по ζ.

Рассмотрим следующее преобразование близкое к тождественному:

$$\begin{aligned}R_n(r,\theta,\tau)&=r+\sum_{K=0}^n\tau^{-\frac{M+K}{N}}\rho_K(r,\theta,\zeta(\tau)),\\ \Psi_n(r,\theta,\tau)&=\theta+\sum_{K=0}^n\tau^{-\frac{M+K}{N}}\psi_k(r,\theta,\zeta(\tau)),\end{aligned}\tag{5.41}$$

с некоторым целым числом $n \geq 0$. Коэффициенты $\rho_K(r,\theta,\zeta)$ и $\psi_K(r,\theta,\zeta)$ ищутся таким образом, чтобы правые части преобразованных уравнений (5.14) в переменных $R(\tau) \equiv R_n(r(\tau),\theta(\tau),\tau)$ и $\Psi(\tau) \equiv \Psi_n(r(\tau),\theta(\tau),\tau)$ не зависели явно от ζ, по крайней мере, в первых членах асимптотики, а остатки $\widetilde{\Lambda}_n(R,\Psi,\tau)$, $\widetilde{\Omega}_n(R,\Psi,\tau)$ удовлетворяли оценкам

$$\widetilde{\Lambda}_n(R,\Psi,\tau) = \mathcal{O}(\tau^{-\frac{M+n+1}{N}}), \quad \widetilde{\Omega}_n(R,\Psi,\tau) = \mathcal{O}(\tau^{-\frac{M+n+1}{N}}), \quad \tau \to \infty.$$

Лемма 10. *Для любых* $r_0 > 0$ *и* $n > 0$ *найдется* $\tau_0 > 0$ *такое, что для всех* $|r| \leq r_0$, $\theta \in \mathbb{R}$ *и* $\tau \geq \tau_0$ *система* (5.38) *может быть преобразована в* (5.14) *преобразованием* (5.41).

Доказательство. Вычисление полной производной $R_n(r,\theta,\tau)$ и $\Psi_n(r,\theta,\tau)$ по τ вдоль траекторий системы (5.38) даёт

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau}\begin{pmatrix}R_n\\ \Psi_n\end{pmatrix} &= \Big(\tau^{-\frac{M}{N}}\big(\mathcal{A}\partial_r + \mathcal{B}\partial_\theta\big) + \partial_\tau\Big)\begin{pmatrix}R_n\\ \Psi_n\end{pmatrix}\\ &= \sum_{K=0}^{\infty}\tau^{-\frac{M+K}{N}}\left[\vartheta\partial_\zeta\begin{pmatrix}\rho_K\\ \psi_K\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\mathcal{A}_K\\ \mathcal{B}_K\end{pmatrix} + \frac{N-K}{N}\begin{pmatrix}\rho_{K-M-N}\\ \psi_{K-M-N}\end{pmatrix}\right]\\ &\quad + \sum_{K=0}^{\infty}\tau^{-\frac{2M+K}{N}}\sum_{i+j=K}\big(\mathcal{A}_i\partial_r + \mathcal{B}_i\partial_\theta\big)\begin{pmatrix}\rho_j\\ \psi_j\end{pmatrix},\end{aligned} \tag{5.42}$$

где предполагается, что $\rho_i \equiv \psi_i \equiv \mathcal{A}_j \equiv \mathcal{B}_j \equiv 0$, если $i,j < 0$ или $i > n$. Сопоставление (5.42) с (5.14) даёт следующую цепочку дифференциальных уравнений для определения ρ_K и ψ_K:

$$\vartheta\partial_\zeta\begin{pmatrix}\rho_K\\ \psi_K\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\Lambda_K(r,\theta) - \mathcal{A}_K(r,\theta,\zeta) - \mathfrak{A}_K(r,\theta,\zeta)\\ \Omega_K(r,\theta) - \mathcal{B}_K(r,\theta,\zeta) - \mathfrak{B}_K(r,\theta,\zeta)\end{pmatrix}, \quad K \geq 0, \tag{5.43}$$

где функции $\mathfrak{A}_K$ и $\mathfrak{B}_K$ выражаются через $\{\rho_i,\psi_i,\Lambda_i,\Omega_i\}_{j=0}^{K-M}$. В частности, $\mathfrak{A}_K \equiv$

$\mathfrak{B}_K \equiv 0$,

$$
\begin{pmatrix} \mathfrak{A}_{K+M} \\ \mathfrak{B}_{K+M} \end{pmatrix} \equiv \sum_{i+j=K} \left[\big(\mathcal{A}_i\partial_r + \mathcal{B}_i\partial_\theta\big) \begin{pmatrix} \rho_j \\ \psi_j \end{pmatrix} - (\rho_i\partial_r + \psi_i\partial_\theta) \begin{pmatrix} \Lambda_j \\ \Omega_j \end{pmatrix} \right],
$$

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \mathfrak{A}_{K+2M} \\ \mathfrak{B}_{K+2M} \end{pmatrix} &\equiv \sum_{i+j=M+K} \left[\big(\mathcal{A}_i\partial_r + \mathcal{B}_i\partial_\theta\big) \begin{pmatrix} \rho_j \\ \psi_j \end{pmatrix} - (\rho_i\partial_r + \psi_i\partial_\theta) \begin{pmatrix} \Lambda_j \\ \Omega_j \end{pmatrix} \right] \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{i+j+k=K} \Big(\rho_i\rho_j\partial_r^2 + (\rho_i\psi_j + \rho_j\psi_i)\partial_r\partial_\theta + \psi_i\psi_j\partial_\theta^2\Big) \begin{pmatrix} \Lambda_k \\ \Omega_k \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

при $K \in [0, M)$. Определим

$$
\begin{aligned}
\Lambda_K(r,\theta) &\equiv \langle \mathcal{A}_K(r,\theta,\zeta) + \mathfrak{A}_K(r,\theta,\zeta)\rangle_{\varkappa\zeta}, \\
\Omega_K(r,\theta) &\equiv \langle \mathcal{B}_K(r,\theta,\zeta) + \mathfrak{B}_K(r,\theta,\zeta)\rangle_{\varkappa\zeta},
\end{aligned} \tag{5.44}
$$

где

$$
\langle \mathfrak{C}(r,\theta,\zeta)\rangle_{\varkappa\zeta} \equiv \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \mathfrak{C}(r,\theta,\varkappa\varsigma)\, d\varsigma \equiv \frac{1}{2\pi\varkappa}\int\limits_0^{2\pi\varkappa} \mathfrak{C}(r,\theta,\varsigma)\, d\varsigma.
$$

Тогда для любого $K \geq 0$ правые части (5.43) являются $2\pi\varkappa$-периодическими по ζ с нулевым средним. Интегрирование (5.43) даёт

$$
\begin{pmatrix} \rho_K \\ \psi_K \end{pmatrix} = -\frac{1}{\vartheta}\int\limits_0^{\zeta} \begin{pmatrix} \{\mathcal{A}_K(r,\theta,\zeta) + \mathfrak{A}_K(r,\theta,\zeta)\}_{\varkappa\zeta} \\ \{\mathcal{B}_K(r,\theta,\zeta) + \mathfrak{B}_K(r,\theta,\zeta)\}_{\varkappa\zeta} \end{pmatrix} d\zeta + \begin{pmatrix} \hat{\rho}_K(r,\theta) \\ \hat{\psi}_K(r,\theta) \end{pmatrix}, \tag{5.45}
$$

где $\{\mathfrak{C}\}_{\varkappa\zeta} := \mathfrak{C} - \langle\mathfrak{C}\rangle_{\varkappa\zeta}$, а функции $\hat{\rho}_K(r,\theta)$, $\hat{\psi}_K(r,\theta)$ выбраны так, что $\langle\rho_K\rangle_{\varkappa\zeta} \equiv \langle\psi_K\rangle_{\varkappa\zeta} \equiv 0$. Таким образом, функции $\rho_K(r,\theta,\zeta)$ и $\psi_K(r,\theta,\zeta)$ являются гладкими и периодическими относительно θ и ζ.

Из (5.40), (5.43) и (5.45) следует, что

$$\Lambda_K \equiv \begin{cases} \Lambda_K^0(\theta), & K \in [0, M), \\ \Lambda_K^1(\theta) r + \Lambda_K^0(\theta), & K \in [M, 2M), \\ \Lambda_K^2(\theta) r^2 + \Lambda_K^1(\theta) r + \Lambda_K^0(\theta), & K \in [2M, 3M), \end{cases}$$

$$\Omega_K \equiv \begin{cases} \mathcal{Q}_K^0 r, & K \in [0, M), \\ \mathcal{Q}_K^1 r^2 + \mathcal{Q}_K^0 r + \Omega_K^0(\theta), & K \in [M, 2M), \\ \mathcal{Q}_K^2 r^3 + \mathcal{Q}_K^1 r^2 + (\mathcal{Q}_K^0 + \Omega_K^1(\theta)) r + \Omega_K^0(\theta), & K \in [2M, 3M), \end{cases}$$

$$\rho_K \equiv \begin{cases} \rho_K^0(\theta, \zeta), & K \in [0, M), \\ \rho_K^1(\theta, \zeta) r + \rho_K^0(\theta, \zeta), & K \in [M, 2M), \end{cases}$$

$$\psi_K \equiv \begin{cases} 0, & K \in [0, M), \\ \psi_K^0(\theta, \zeta), & K \in [M, 2M), \end{cases}$$

где $\Lambda_K^{0,1} \equiv \langle \mathcal{A}_K^{0,1}(\theta, \zeta) \rangle_{\varkappa\zeta}$, $\Omega_K^{0,1} \equiv \langle \mathcal{G}_{K-M}^{0,1}(\theta, \zeta) \rangle_{\varkappa\zeta}$,

$$\Lambda_K^2 \equiv \langle \mathcal{A}_K^2(\theta, \zeta) \rangle_{\varkappa\zeta} + \sum_{i=0}^{K-2M} \left\langle \mathcal{A}_i^0(\theta, \zeta) \rho_{K-M-i}^1(\theta, \zeta) \right\rangle_{\varkappa\zeta}$$

$$+ \sum_{i=0}^{K-2M-1} \left\langle \mathcal{G}_{K-2M-i}^0(\theta, \zeta) \partial_\theta \rho_i^0(\theta, \zeta) \right\rangle_{\varkappa\zeta},$$

$$\rho_K^0 \equiv -\frac{1}{\vartheta} \left\{ \int_0^\zeta \{\mathcal{A}_K^0(\theta, \zeta)\}_{\varkappa\zeta} \, d\zeta \right\}_{\varkappa\zeta},$$

$$\psi_K^0 \equiv -\frac{1}{\vartheta} \left\{ \int_0^\zeta \left\{ \mathcal{G}_{K-M}^0(\theta, \zeta) - \sum_{i+j=K-M} \mathcal{Q}_i^0 \rho_j^0 \right\}_{\varkappa\zeta} d\zeta \right\}_{\varkappa\zeta},$$

$$\rho_K^1 \equiv -\frac{1}{\vartheta} \left\{ \int_0^\zeta \left\{ \mathcal{A}_K^1(\theta, \zeta) + \sum_{i+j=K-M} \mathcal{Q}_i^0 \partial_\theta \rho_j^0(\theta, \zeta) \right\}_{\varkappa\zeta} d\zeta \right\}_{\varkappa\zeta}.$$

Из (5.41) следует, что для любых $r_0 > 0$ и $\varepsilon \in (0, r_0)$ найдется $\tau_0 \geq \tau_2$ такое, что

$$|R_n(r, \theta, \tau) - r| \leq \varepsilon, \quad |\Psi_n(r, \theta, \tau) - \theta| \leq \varepsilon, \quad |\det \mathbf{J}_n(r, \theta, \tau) - 1| \leq \varepsilon$$

для всех $|r| \le r_0$, $\theta \in \mathbb{R}$ и $\tau \ge \tau_0$, где

$$\mathbf{J}_n(r,\theta,\tau) := \begin{pmatrix} \partial_r R_n(r,\theta,\tau) & \partial_\theta R_n(r,\theta,\tau) \\ \partial_r \Psi_n(r,\theta,\tau) & \partial_\theta \Psi_n(r,\theta,\tau) \end{pmatrix}.$$

Следовательно, отображение $(r,\theta) \mapsto (R,\Psi)$ обратимо для всех $|R| \le d_0$, $\Psi \in \mathbb{R}$ и $\tau \ge \tau_0$ с $d_0 = r_0 - \varepsilon > 0$. Обозначим через $R = \tilde{R}(r,\theta,\tau)$, $\Psi = \tilde{\Psi}(r,\theta,\tau)$ обратное преобразование, тогда

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \widetilde{\Lambda}_n(r,\theta,\tau) \\ \widetilde{\Omega}_n(r,\theta,\tau) \end{pmatrix} &\equiv \frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} R_n \\ \Psi_n \end{pmatrix}\Bigg|_{\substack{R=\tilde{R}(r,\theta,\tau) \\ \Psi=\tilde{\Psi}(r,\theta,\tau)}} - \sum_{K=0}^{n} \tau^{-\frac{M+K}{N}} \begin{pmatrix} \Lambda_K(r,\theta) \\ \Omega_K(r,\theta) \end{pmatrix} \\ &= \mathcal{O}\Big(\tau^{-\frac{M+n+1}{N}}\Big) \end{aligned}$$

при $\tau \to \infty$ равномерно для всех $|r| \le r_0$ и $\theta \in \mathbb{R}$. □

Объединяя леммы 8, 9 и 10, получаем доказательство теоремы 43 с функциями $\tilde{\rho}_n(r,\theta,\tau) \equiv (R_n(r,\theta,\tau) - r)\tau^{M/N}$ и $\tilde{\psi}_n(r,\theta,\tau) \equiv (\Psi_n(r,\theta,\tau) - \theta)\tau^{M/N}$.

5.5.2. Асимптотические режимы

Пусть $0 \le L \le \min\{N-M, 2M-1\}$ — целое число, для которого выполняется предположение (5.15). Выберем достаточно большое $n \ge L$ и рассмотрим систему, полученную из (5.14) путём отбрасывания остатков $\widetilde{\Lambda}_n$ и $\widetilde{\Omega}_n$:

$$\frac{d\varrho}{d\tau} = \sum_{K=L}^{n} \tau^{-\frac{M+K}{N}} \Lambda_K(\varrho,\varphi), \quad \frac{d\varphi}{d\tau} = \sum_{K=0}^{n} \tau^{-\frac{M+K}{N}} \Omega_K(\varrho,\varphi), \quad \tau > \tau_0. \tag{5.46}$$

Функции $\Lambda_K(\varrho,\varphi)$, $\Omega_K(\varrho,\varphi)$ определены формулой (5.44). В частности, для любого $K \in [0,M)$ имеем $\Omega_K(\varrho,\varphi) \equiv \mathcal{Q}_K^0 \varrho$, $\Omega_{M+K}(\varrho,\varphi) = \Omega_{M+K}^0(\varphi) + \mathcal{O}(\varrho)$, $\Lambda_L(\varrho,\varphi) = \Lambda_L^0(\varphi) + \mathcal{O}(\varrho)$ при $\varrho \to 0$ равномерно для всех $\varphi \in \mathbb{R}$.

Покажем, что система (5.46) допускает по крайней мере два различных асимптотических режима в зависимости от свойств функции $\Lambda_L(\varrho,\varphi)$. Первый режим связан с решениями, для которых $\varphi(\tau) \to \text{const}$ при $\tau \to \infty$. Другой режим характеризуется неограниченно растущей разностью фаз.

Лемма 11. *Пусть выполнены предположения* (5.6), (5.15) *и* (5.16). *Тогда система* (5.46) *имеет частное решение* $\varrho_*(\tau)$, $\varphi_*(\tau)$ *с асимптотическим разложением вида*

$$\varrho(\tau) \sim \sum_{K=0}^{\infty} \varrho_K \tau^{-\frac{M+K}{N}}, \quad \varphi(\tau) \sim \varphi_0 + \sum_{K=1}^{\infty} \varphi_K \tau^{-\frac{K}{N}}, \quad \tau \to \infty, \tag{5.47}$$

где $\varrho_K, \varphi_K = \text{const}$.

Доказательство. Подставляя эти ряды в систему (5.46) и группируя члены одинаковой степени τ, получаем $\varrho_0 = -\Omega_M^0(\varphi_0)/\mathcal{Q}_0^0$, где $\mathcal{Q}_0^0 = \omega_0(h-1) > 0$, и цепочку линейных уравнений для коэффициентов ϱ_K, φ_K, $K \geq 1$:

$$\mathcal{Q}_0^0 \varrho_K + \Big(\partial_\varphi \Omega_M^0(\varphi_0) + \delta_{N,2M}\frac{K}{N}\Big)\varphi_K = \mathfrak{R}_K, \quad \lambda_L \varphi_K = \mathfrak{S}_K, \tag{5.48}$$

где функции $\mathfrak{R}_K$ и $\mathfrak{S}_K$ выражаются через $\varrho_0, \varphi_0, \ldots, \varrho_{K-1}, \varphi_{K-1}$. Например, если $M > 3$, то

$$\begin{aligned}
\mathfrak{R}_1 = & - Q_1^0 \varrho_0 - \Omega_{M+1}^0(\varphi_0),\\
\mathfrak{S}_1 = & - \Lambda_{L+1}^0(0,\varphi_0) - \delta_{N,L+1}\frac{M}{N}\varrho_0,\\
\mathfrak{R}_2 = & - Q_2^0\varrho_0 - Q_1^0\varrho_1 - \Omega_{M+2}^0(\varphi_0) - \Big(\partial_\varphi \Omega_{M+1}^0(\varphi_0) + \delta_{N,2M+1}\frac{1}{N}\Big)\varphi_1\\
& - \partial_\varphi^2 \Omega_M^0(\varphi_0)\frac{\varphi_1^2}{2},\\
\mathfrak{S}_2 = & - \Lambda_{L+2}^0(0,\varphi_0) - \partial_\varphi \Lambda_{L+1}(0,\varphi_0)\varphi_1 - \partial_\varphi^2 \Lambda_L(0,\varphi_0)\frac{\varphi_1^2}{2} - \delta_{N,L+1}\frac{M+1}{N}\varrho_1\\
& - \delta_{N,L+2}\frac{M}{N}\varrho_0.
\end{aligned}$$

Заметим, что система (5.48) разрешима при $\lambda_L \neq 0$. Существование частного решения системы (5.46) со степенной асимптотикой на бесконечности следует из [46, 54, 187]. □

Рассмотрим случай, когда вместо (5.16) выполняется следующее предположение:

$$\Lambda_L(\varrho,\varphi) \neq 0 \quad \forall\, (\varrho,\varphi) \in \mathbb{R}^2. \tag{5.49}$$

Тогда справедлива

Лемма 12. *Пусть выполнены предположения* (5.6), (5.15) *и* (5.49). *Тогда решения системы* (5.46) *выходят из любой ограниченной области за конечное время.*

Доказательство. Так как $\Lambda_L(\varrho,\varphi)\neq 0$ для всех $(\varrho,\varphi)\in\mathbb{R}^2$, то для любого $\delta>0$ существуют $C_1,C_2,C_3>0$ и $\tau_1\geq\tau_0$ такие, что

$$\Big|\frac{d\varrho}{d\tau}\Big|\geq \tau^{-\frac{M+L}{N}}C_1,\quad \Big|\frac{d\varphi}{d\tau}\Big|\geq \tau^{-\frac{M}{N}}\Big(C_2|\varrho|-C_3\Big)$$

для всех $|\varrho|\leq\delta$, $\varphi\in\mathbb{R}$ и $\tau\geq\tau_1$. Интегрируя последние неравенства по τ в случае $L<N-M$, получаем:

$$\begin{aligned}
&|\varrho(\tau)-\varrho(\tau_1)|\geq \tilde C_1\Big(\tau^{\frac{N-M-L}{N}}-\tau_1^{\frac{N-M-L}{N}}\Big),\\
&|\varphi(\tau)-\varphi(\tau_1)|\geq \tilde C_2\Big(\tau^{\frac{2N-2M-L}{N}}-\tau_1^{\frac{2N-2M-L}{N}}\Big)-\tilde C_3\Big(\tau^{\frac{N-M}{N}}-\tau_1^{\frac{N-M}{N}}\Big)
\end{aligned}$$

при $\tau\geq\tau_1$, с положительными константами $\tilde C_1=NC_1/(N-M-L)$, $\tilde C_2=N\tilde C_1C_2/(2N-2M-L)$, $\tilde C_3=N(C_3+C_2|\varrho(\tau_1)|+\tilde C_1C_2\tau_1^{(N-M-L)/N})/(N-M)$. Аналогичные оценки справедливы и в случае $L=N-M$. Следовательно, существует $\tau_2\geq\tau_1$, такой что $|\rho(\tau_2)|+|\varphi(\tau_2)|\geq\delta$. □

Заметим, что случай (5.16) соответствует режиму фазовой синхронизации, когда фаза $\phi(t)$ решений возмущённой системы (5.1) синхронизирована с возмущениями, $\phi(t)-\varkappa^{-1}S(t)=\mathcal{O}(1)$ при $t\to\infty$, а энергия $I(t)$ существенно возрастает. Устойчивость таких решений обсуждается в следующем разделе.

В случае (5.49) фаза $\phi(t)$ решений может существенно отличаться от фазы возмущений, и степенной рост энергии $I(t)$ не происходит. Такие решения соответствуют дрейфу фазы. Этот случай далее не рассматривается.

5.5.3. Устойчивость фазового захвата

Пусть $\varrho_*(\tau)$, $\varphi_*(\tau)$ — решение системы (5.46) с асимптотикой (5.47). Сначала исследуется устойчивость этого решения в укороченной системе, а затем обсуждается его сохранение в полной системе (5.14).

Подстановка $\varrho(\tau) = \varrho_*(\tau) + \hat{\varrho}(\tau)$ и $\varphi(\tau) = \varphi_*(\tau) + \hat{\varphi}(\tau)$ в (5.46) даёт следующую систему с неподвижной точкой в $(0,0)$:

$$\tau^{\frac{M}{N}} \frac{d\hat{\varrho}}{d\tau} = \mathbf{\Lambda}(\hat{\varrho}, \hat{\varphi}, \tau), \quad \tau^{\frac{M}{N}} \frac{d\hat{\varphi}}{d\tau} = \mathbf{\Omega}(\hat{\varrho}, \hat{\varphi}, \tau), \tag{5.50}$$

где

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Lambda}(\hat{\varrho}, \hat{\varphi}, \tau) &\equiv \sum_{K=L}^{n} \tau^{-\frac{K}{N}} \Big(\Lambda_K(\varrho_* + \hat{\varrho}, \varphi_* + \hat{\varphi}) - \Lambda_K(\varrho_*, \varphi_*) \Big) \\
&= \tau^{-\frac{L}{N}} \Big(\lambda_L \hat{\varphi} + \partial_{\hat{\varrho}} \Lambda_L(0, \varphi_0) \hat{\varrho} + \mathcal{O}(\Delta^2) \Big) \big(1 + \mathcal{O}(\tau^{-\frac{1}{N}}) \big), \\
\mathbf{\Omega}(\hat{\varrho}, \hat{\varphi}, \tau) &\equiv \sum_{K=0}^{n} \tau^{-\frac{K}{N}} \Big(\Omega_K(\varrho_* + \hat{\varrho}, \varphi_* + \hat{\varphi}) - \Omega_K(\varrho_*, \varphi_*) \Big) \\
&= \Big(\mathcal{Q}_0^0 \hat{\varrho} + \tau^{-\frac{M}{N}} \big(\partial_{\hat{\varphi}} \Omega_M(0, \varphi_0) \hat{\varphi} + \mathcal{O}(\Delta^2) \big) \Big) \big(1 + \mathcal{O}(\tau^{-\frac{1}{N}}) \big)
\end{aligned}$$

при $\tau \to \infty$ и $\Delta = \sqrt{\hat{\varrho}^2 + \hat{\varphi}^2} \to 0$. Заметим, что если $L < M$, то $\partial_{\hat{\varrho}} \Lambda_L(\hat{\varrho}, \hat{\varphi}) \equiv 0$.

Линейный анализ устойчивости

Рассмотрим линеаризованную систему

$$\tau^{\frac{M}{N}} \frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} \hat{\rho} \\ \hat{\varphi} \end{pmatrix} = \mathbf{a}(\tau) \begin{pmatrix} \hat{\rho} \\ \hat{\varphi} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}(\tau) \equiv \begin{pmatrix} \partial_\varrho \mathbf{\Lambda}(0,0,\tau) & \partial_\varphi \mathbf{\Lambda}(0,0,\tau) \\ \partial_\varrho \mathbf{\Omega}(0,0,\tau) & \partial_\varphi \mathbf{\Omega}(0,0,\tau) \end{pmatrix}.$$

Корни характеристического уравнения $|\mathbf{a}(\tau) - e\mathbf{I}| = 0$ имеют вид

$$e_\pm(\tau) = \frac{1}{2} \mathrm{tr}\, \mathbf{a}(\tau) \pm \frac{1}{2} \sqrt{\big(\mathrm{tr}\, \mathbf{a}(\tau)\big)^2 - 4 \det \mathbf{a}(\tau).}$$

Учитывая (5.47) и структуру функций Λ_K и Ω_K, получаем

$$\mathrm{tr}\, \mathbf{a}(\tau) = \mathcal{O}(\tau^{-\frac{M}{N}}), \quad \det \mathbf{a}(\tau) = -\lambda_L \mathcal{Q}_0^0 \tau^{-\frac{L}{N}} \big(1 + \mathcal{O}(\tau^{-\frac{1}{N}}) \big), \quad \tau \to \infty.$$

Поскольку $0 \le L \le \min\{N - M, 2M - 1\}$, мы видим, что если $\lambda_L > 0$, то оба собственных значения $e_+(\tau)$ и $e_-(\tau)$ являются действительными и имеют разные знаки:

$$e_\pm(\tau) = 2\tau^{-\frac{L}{2N}} \sqrt{\lambda_L \mathcal{Q}_0^0} \big(1 + \mathcal{O}(\tau^{-\frac{1}{N}}) \big), \quad \tau \to \infty.$$

В этом случае неподвижная точка $(0,0)$ линеаризованной системы является седлом в асимптотическом пределе, а частное решение $\varrho_*(\tau)$, $\varphi_*(\tau)$ системы (5.46) неустойчиво.

Лемма 13. *Пусть выполнены предположения* (5.15) *и* (5.16) *при* $\lambda_L > 0$. *Тогда решение* $\varrho_*(\tau)$, $\varphi_*(\tau)$ *системы* (5.46) *с асимптотикой* (5.47) *неустойчиво.*

В противоположном случае, когда $\lambda_L < 0$, собственные значения являются комплексными:

$$e_\pm(\tau) = 2i\tau^{-\frac{L}{2N}}\sqrt{|\lambda_L|\mathcal{Q}_0^0}\big(1+\mathcal{O}(\tau^{-\frac{1}{N}})\big), \quad \Re e_\pm(\tau) = \mathcal{O}(\tau^{-\frac{M}{N}}), \quad \tau\to\infty.$$

Следовательно, неподвижная точка $(0,0)$ является центром в асимптотическом пределе, и линейный анализ не позволяет определить устойчивость решения $\varrho_*(\tau)$, $\varphi_*(\tau)$ в полной нелинейной системе (см., например, гл. 1).

Нелинейный анализ устойчивости

Предположим дополнительно, что предположение (5.17) выполняется. Выбираем $n \geq L+D$ в (5.46), тогда имеем следующее:

Лемма 14. *Пусть выполнены предположения* (5.6), (5.15), (5.16), (5.17) *при* $\lambda_L < 0$. *Тогда решение* $\varrho_*(\tau)$, $\varphi_*(\tau)$ *системы* (5.46) *с асимптотикой* (5.47) *имеет вид*

- *асимптотически устойчиво, если* $M+D\leq N$ *и* $\gamma_D + \delta_{M+D,N}\frac{L}{N} < 0$;
- *устойчиво, если* $M+D > N$, $L=0$ *и* $\gamma_D < 0$;
- *неустойчиво, если* $M+D\leq N$ *и* $\gamma_D > 0$.

Доказательство. Доказательство основано на построении подходящей функции Ляпунова для системы (5.50). Прежде всего, отметим, что система (5.50) может быть записана в виде

$$\tau^{\frac{M}{N}}\frac{d\hat\varrho}{d\tau} = -\partial_{\hat\varphi}\Theta(\hat\varrho,\hat\varphi,\tau), \quad \tau^{\frac{M}{N}}\frac{d\hat\varphi}{d\tau} = \partial_{\hat\varrho}\Theta(\hat\varrho,\hat\varphi,\tau) + \Upsilon(\hat\varrho,\hat\varphi,\tau), \tag{5.51}$$

с функциями

$$\Theta(\hat\varrho,\hat\varphi,\tau)\equiv\int\limits_0^{\hat\varrho}\mathbf{\Omega}(r,0,\tau)\,dr-\int\limits_0^{\hat\varphi}\mathbf{\Lambda}(\hat\varrho,\theta,\tau)\,d\theta,$$

$$\Upsilon(\hat\varrho,\hat\varphi,\tau)\equiv\int\limits_0^{\hat\varphi}\Big(\partial_{\hat\varrho}\mathbf{\Lambda}(\hat\varrho,\theta,\tau)+\partial_\theta\mathbf{\Omega}(\hat\varrho,\theta,\tau)\Big)\,d\theta.$$

Легко проверить, что $\Theta(\hat\varrho,\hat\varphi,\tau)=\Theta_L(\hat\varrho,\hat\varphi,\tau)+\mathcal{O}(\Delta^2\tau^{-\frac{L+1}{N}})$, где

$$\begin{aligned}\Theta_L(\hat\varrho,\hat\varphi,\tau)\ &\equiv\ \sum_{K=0}^{L}\tau^{-\frac{K}{N}}\int\limits_0^{\hat\varrho}\Big(\Omega_K(r,\varphi_0)-\Omega_K(0,\varphi_0)\Big)\,dr\\ &\quad-\tau^{-\frac{L}{N}}\int\limits_0^{\hat\varphi}\Big(\Lambda_L(\hat\varrho,\theta+\varphi_0)-\Lambda_L(0,\varphi_0)\Big)\,d\theta\\ &=\ \mathcal{Q}_0^0\frac{\hat\varrho^2}{2}\Big(1+\mathcal{O}(\tau^{-\frac{1}{N}})\Big)-\tau^{-\frac{L}{N}}\Big(\lambda_L\frac{\hat\varphi^2}{2}+\partial_{\hat\varrho}\Lambda_L(0,\varphi_0)\hat\varrho\hat\varphi+\hat\varphi\mathcal{O}(\Delta^2)\Big)\end{aligned}$$

при $\Delta\to 0$ и $\tau\to\infty$. Из (5.17) следует, что

$$\begin{aligned}\Upsilon(\hat\varrho,\hat\varphi,\tau)\ &\equiv\ \sum_{K=M}^{n}\tau^{-\frac{K}{N}}\int\limits_0^{\hat\varphi}\Big(\partial_{\hat\varrho}\Lambda_K(\varrho_*+\hat\varrho,\varphi_*+\theta)+\partial_\theta\Omega_K(\varrho_*+\hat\varrho,\varphi_*+\theta)\Big)\,d\theta\\ &=\ \tau^{-\frac{D}{N}}\hat\varphi\big(\gamma_D+\mathcal{O}(\Delta)+\mathcal{O}(\tau^{-\frac{1}{N}})\big),\quad \Delta\to 0,\quad \tau\to\infty.\end{aligned}$$

Здесь асимптотические оценки равномерны относительно $(\hat\varrho,\hat\varphi,\tau)\in\{(\hat\varrho,\hat\varphi,\tau)\in\mathbb{R}^3:\Delta\le\Delta_*,\tau\ge\tau_*\}$ с некоторыми константами $\Delta_*>0$ и $\tau_*\ge\tau_0$.

Рассмотрим комбинацию

$$V(\hat\varrho,\hat\varphi,\tau)=\Theta(\hat\varrho,\hat\varphi,\tau)+\tau^{-\frac{D}{N}}\gamma_D\frac{\hat\varrho\hat\varphi}{2}+\tau^{-\frac{D+L}{N}}\gamma_D\partial_{\hat\varrho}\Lambda_L(0,\varphi_0)\frac{3\hat\varphi^2}{4\mathcal{Q}_0^0}\tag{5.52}$$

в качестве кандидата на функцию Ляпунова для системы (5.51). Легко показать, что для любого $\varepsilon\in(0,1)$ найдутся $\Delta_1>0$ и $\tau_1\ge\tau_0$ такие, что

$$(1-\varepsilon)W_0(\hat\varrho,\hat\varphi,\tau)\le V(\hat\varrho,\hat\varphi,\tau)\le(1+\varepsilon)W_0(\hat\varrho,\hat\varphi,\tau)\tag{5.53}$$

для всех $(\hat\varrho,\hat\varphi,\tau)\in\mathbb{R}^3$ таких, что $\tau\ge\tau_1$ и $W_0(\hat\varrho,\hat\varphi,\tau_1)\le\Delta_1^2$, где

$$W_0(\hat\varrho,\hat\varphi,\tau)\equiv\frac{1}{2}\Big(\mathcal{Q}_0^0\hat\varrho^2+\tau^{-\frac{L}{N}}|\lambda_L|\hat\varphi^2\Big).\tag{5.54}$$

Заметим, что для любого $\tau_* > 0$ справедливы следующие неравенства:

$$\tau^{-\frac{L}{N}} W_0(\hat{\varrho}, \hat{\varphi}, \tau_*) \le W_0(\hat{\varrho}, \hat{\varphi}, \tau) \le W_0(\hat{\varrho}, \hat{\varphi}, \tau_*)$$

для всех $\tau \ge \tau_*$ и $(\hat{\varrho}, \hat{\varphi}) \in \mathbb{R}^2$.

Вычисляя полную производную V по τ на траекториях системы (5.51), получаем

$$\begin{aligned}\frac{dV}{d\tau} &\equiv \partial_\tau V(\hat{\varrho}, \hat{\varphi}, \tau) + \tau^{-\frac{M}{N}} \partial_{\hat{\varphi}} V(\hat{\varrho}, \hat{\varphi}, \tau) \Upsilon(\hat{\varrho}, \hat{\varphi}, \tau) \\ &= \tau^{-\frac{M+D}{N}} \gamma_D \left(\mathcal{Q}_0^0 \frac{\hat{\varrho}^2}{2} [1 + \mathcal{O}(\tau^{-\frac{1}{N}})] - \tau^{-\frac{L}{N}} \frac{\lambda_L}{2} [\hat{\varphi}^2 + \hat{\varphi} \mathcal{O}(\Delta^2)] + \mathcal{O}\Big(\Delta^2 \tau^{-\frac{L+1}{N}}\Big) \right) \\ &= \tau^{-\frac{M+D}{N}} \gamma_D W_0(\hat{\varrho}, \hat{\varphi}, \tau) \big(1 + \mathcal{O}(\Delta) + \mathcal{O}(\tau^{-\frac{1}{N}})\big)\end{aligned} \tag{5.55}$$

при $\Delta \to 0$ и $\tau \to \infty$. Следовательно, существуют $0 < \Delta_2 \le \Delta_1$ и $\tau_2 \ge \tau_1$ такие, что

$$\frac{dV}{d\tau} \le -\tau^{-\frac{M+D}{N}} |\gamma_D| \left(\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \right) V(\hat{\varrho}, \hat{\varphi}, \tau) \le 0, \qquad \gamma_D < 0, \tag{5.56}$$

$$\frac{dV}{d\tau} \ge \tau^{-\frac{M+D}{N}} \gamma_D \left(\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \right) V(\hat{\varrho}, \hat{\varphi}, \tau) \ge 0, \qquad \gamma_D > 0, \tag{5.57}$$

для всех $(\hat{\varrho}, \hat{\varphi}, \tau) \in \mathbb{R}^3$ таких, что $\tau \ge \tau_2$ и $W_0(\hat{\varrho}, \hat{\varphi}, \tau_2) \le \Delta_2^2$.

Пусть $\gamma_D < 0$. Тогда интегрирование (5.56) по τ даёт

$$0 \le W_0\big(\hat{\varrho}(\tau), \hat{\varphi}(\tau), \tau_2\big) \le C_0 \tau^{\frac{L}{N}} \exp\left(-\frac{|\gamma_D| N}{N-M-D} \Big(\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \Big) \tau^{1-\frac{M+D}{N}} \right),$$

если $M + D \ne N$, и

$$0 \le W_0\big(\hat{\varrho}(\tau), \hat{\varphi}(\tau), \tau_2\big) \le C_0 \tau^{\frac{L}{N} + \gamma_D(\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon})},$$

если $M + D = N$, при $\tau \ge \tau_2$ с некоторой константой $C_0 > 0$, зависящей от Δ_2 и τ_2. Следовательно, если $M + D < N$, неподвижная точка $(0,0)$ системы (5.51) экспоненциально устойчива. Если $M + D = N$ и $\gamma_D + L/N < 0$, то, выбрав $\varepsilon \in (0,1)$ достаточно малым, мы получаем, что неподвижная точка $(0,0)$ полиномиально устойчива. Равновесие $(0,0)$ устойчиво, если $M + D > N$ и $L = 0$.

Пусть $\gamma_D > 0$ и $\hat\varrho(\tau)$, $\hat\varphi(\tau)$ — решение системы (5.51) с начальными данными $W_0(\hat\varrho(\tau_2),\hat\varphi(\tau_2),\tau_2) = \Delta_3^2 < \Delta_2^2$. Интегрируя (5.57) по τ и учитывая (5.53), получаем

$$W_0\big(\hat\varrho(\tau),\hat\varphi(\tau),\tau_2\big) \geq \Delta_3^2\Big(\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\Big)\exp\left(\gamma_D\Big(\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\Big)\int\limits_{\tau_2}^{\tau}\varsigma^{-\frac{M+D}{N}}\,d\varsigma\right)$$

при $\tau \geq \tau_2$. Следовательно, для любого $\Delta_3 > 0$ найдется $\tau_3 > \tau_2$ такое, что $W_0\big(\hat\varrho(\tau),\hat\varphi(\tau),\tau_2\big) \geq \Delta_2^2$ при $\tau \geq \tau_3$. Следовательно, неподвижная точка $(0,0)$ системы (5.51) неустойчива.

Возвращаясь к переменным $\varrho(\tau)$, $\varphi(\tau)$, получаем результат леммы. $\square$

Заметим, что построенная функция Ляпунова не позволяет доказать устойчивость решения $\varrho_*(\tau)$, $\varphi_*(\tau)$ в случае $\gamma_D < 0$, $M + D \geq N$, $L > 0$. Покажем, что в этом случае имеет место, по крайней мере, устойчивость на конечном, но асимптотически большом интервале времени.

Лемма 15. *Пусть выполнены предположения* (5.6), (5.15), (5.16), (5.17) *при* $\lambda_L < 0$. *Если* $\gamma_D < 0$, $M + D \geq N$ *и* $L > 0$, *то частное решение* $\varrho_*(\tau)$, $\varphi_*(\tau)$ *системы* (5.46) *с асимптотикой* (5.47) *устойчиво на конечном, но асимптотически большом интервале времени.*

Доказательство. Из (5.53) и (5.54) следует, что для любого $\delta \in (0,\Delta_2)$ найдется

$$\Delta_\delta = \delta\Big(\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\Big)^{\frac12}\tau_2^{-\frac{L}{2N}} < \delta$$

такое, что

$$\sup_{(\hat\varrho,\hat\varphi):W_0(\hat\varrho,\hat\varphi,\tau_2)\leq\Delta_\delta^2} V(\hat\varrho,\hat\varphi,\tau) \leq (1+\varepsilon)\Delta_\delta^2 < (1-\varepsilon)\delta^2\tau_2^{-\frac{L}{N}} \leq \inf_{(\hat\varrho,\hat\varphi):W_0(\hat\varrho,\hat\varphi,\tau/\tau_2)=\delta^2} V(\hat\varrho,\hat\varphi,\tau)$$

для всех $1 \leq \tau/\tau_2 \leq \Gamma_\delta$ с $\Gamma_\delta = (\Delta_2/\delta)^{2N/L}$. Объединяя это с (5.56), видим, что любое решение системы (5.51) с начальными данными из $\{(\hat\varrho,\hat\varphi) : W_0(\hat\varrho,\hat\varphi,\tau_2) \leq$

$\Delta_\delta^2\}$ при $\tau = \tau_2$ удовлетворяет неравенству $W_0(\hat{\varrho}(\tau), \hat{\varphi}(\tau), \tau/\tau_2) < \delta^2$ при $1 \leq \tau/\tau_2 \leq \Gamma_\delta$, и $\Gamma_\delta \to \infty$ при $\delta \to 0$. Таким образом, неподвижная точка $(0,0)$ системы (5.51) и частное решение $\varrho_*(\tau)$, $\varphi_*(\tau)$ системы (5.46) устойчивы на конечном, но асимптотически большом интервале времени. □

5.5.4. Сохранение фазового захвата

Покажем, что если частное решение $\varrho_*(\tau)$, $\varphi_*(\tau)$ устойчиво, то и в полной системе (5.14) имеет место режим фазового захвата. Справедлива

Лемма 16. *Пусть выполняются предположения* (5.6), (5.15), (5.16), (5.17) *при* $\lambda_L < 0$. *Если выполняется одно из следующих условий:*

- $M + D \leq N$ *и* $\gamma_D + \delta_{M+D,N}\frac{L}{N} < 0$,
- $M + D > N$, $L = 0$ *и* $\gamma_D < 0$,

тогда для любого $\epsilon > 0$ *найдутся* $\delta > 0$ *и* $\tau_s > 0$ *такие, что* $\forall\,(R_s, \Psi_s)$: $|R_s - \varrho_*(\tau_s)| < \delta$, $|\Psi_s - \varphi_*(\tau_s)| < \delta$ *решение* $R(\tau)$, $\Psi(\tau)$ *системы* (5.14) *с начальными данными* $R(\tau_s) = \varrho_*(\tau_s)$, $\Psi(\tau_s) = \varphi_*(\tau_s)$ *удовлетворяет неравенству*: $|R(\tau) - \varrho_*(\tau)| + |\Psi(\tau) - \varphi_*(\tau)| < \epsilon$ *для всех* $\tau > \tau_s$.

Доказательство. Подстановка $R(\tau) = \varrho_*(\tau) + \hat{R}(\tau)$ и $\Psi(\tau) = \varphi_*(\tau) + \hat{\Psi}(\tau)$ в (5.14) даёт

$$\begin{aligned}
&\tau^{\frac{M}{N}}\frac{d\hat{R}}{d\tau} = -\partial_{\hat{\Psi}}\Theta(\hat{R}, \hat{\Psi}, \tau) + \widetilde{\boldsymbol{\Lambda}}_n(\hat{R}, \hat{\Psi}, \tau),\\
&\tau^{\frac{M}{N}}\frac{d\hat{\Psi}}{d\tau} = \partial_{\hat{R}}\Theta(\hat{R}, \hat{\Psi}, \tau) + \Upsilon(\hat{R}, \hat{\Psi}, \tau) + \widetilde{\boldsymbol{\Omega}}_n(\hat{R}, \hat{\Psi}, \tau),
\end{aligned} \tag{5.58}$$

где $\widetilde{\boldsymbol{\Lambda}}_n \equiv \tau^{\frac{M}{N}}\widetilde{\Lambda}_n\big(\varrho_*(\tau) + \hat{R}, \varphi_*(\tau) + \hat{\Psi}, \tau\big)$, $\widetilde{\boldsymbol{\Omega}}_n \equiv \tau^{\frac{M}{N}}\widetilde{\Omega}_n\big(\varrho_*(\tau) + \hat{R}, \varphi_*(\tau) + \hat{\Psi}, \tau\big)$. Отсюда следует, что

$$\widetilde{\boldsymbol{\Lambda}}_n(\hat{R}, \hat{\Psi}, \tau) = \mathcal{O}(\tau^{-\frac{n+1}{N}}), \quad \widetilde{\boldsymbol{\Omega}}_n(\hat{R}, \hat{\Psi}, \tau) = \mathcal{O}(\tau^{-\frac{n+1}{N}}), \quad \tau \to \infty \tag{5.59}$$

равномерно для всех $(\hat{R}, \hat{\Psi}) \in \mathbb{R}^2$ таких, что $W_0(\hat{R}, \hat{\Psi}, 1) \leq \Delta_1^2$ при некотором $\Delta_1 > 0$. Заметим, что функции $\widetilde{\boldsymbol{\Lambda}}_n$ и $\widetilde{\boldsymbol{\Omega}}_n$ играют роль постоянно действующих возмущений системы (5.51). Покажем, что частное решение $\varrho_*(\tau)$, $\varphi_*(\tau)$ системы (5.51) устойчиво относительно этих возмущений.

Используя $V(\hat{R},\hat{\Psi},\tau)$, определённую (5.52), в качестве функции Ляпунова для системы (5.58), получаем

$$\frac{dV}{d\tau}\equiv\frac{dV}{d\tau}\Big|_{(5.51)}+\tau^{-\frac{M}{N}}\Big(\partial_{\hat{R}}V\widetilde{\mathbf{\Lambda}}_n+\partial_{\hat{\Psi}}V\widetilde{\mathbf{\Omega}}_n\Big). \tag{5.60}$$

Из (5.59) следует, что существуют $C_*>0$ и $\tau_1\geq\max\{\tau_0,1\}$ такие, что

$$\partial_{\hat{R}}V\widetilde{\mathbf{\Lambda}}_n+\partial_{\hat{\Psi}}V\widetilde{\mathbf{\Omega}}_n\leq C_*\tau^{-\frac{n+1}{N}}\Big(\mathcal{Q}_0^0|\hat{R}|+\tau^{-\frac{L}{N}}|\lambda_L||\hat{\Psi}|\Big)$$

при $\tau\geq\tau_1$ и для всех $(\hat{R},\hat{\Psi})\in\mathbb{R}^2$, таких, что $W_0(\hat{R},\hat{\Psi},\tau_1)\leq\Delta_1^2$. Поскольку $n\geq L+D$, имеем

$$\begin{gathered}|\hat{R}|\leq\frac{1}{2\delta}\big(\tau^{\frac{L}{2N}}\hat{R}^2+\tau^{-\frac{L}{2N}}\hat{W}_0(\hat{R},\hat{\Psi},\tau_1)\big),\\ |\hat{\Psi}|\leq\frac{1}{2\delta}\big(\tau^{\frac{L}{2N}}\hat{\Psi}^2+\tau^{-\frac{L}{2N}}\hat{W}_0(\hat{R},\hat{\Psi},\tau_1)\big),\\ \partial_{\hat{R}}V\widetilde{\mathbf{\Lambda}}_n+\partial_{\hat{\Psi}}V\widetilde{\mathbf{\Omega}}_n\leq\tau^{-\frac{D+1}{N}}W_0(\hat{R},\hat{\Psi},\tau)\frac{C_*}{\delta}\left(1+\frac{1}{\mathcal{Q}_0^0}+\frac{1}{|\lambda_L|}\right)\end{gathered} \tag{5.61}$$

при $\tau\geq\tau_1$ и для всех $(\hat{R},\hat{\Psi})\in\mathbb{R}^2$, таких, что $\delta^2\leq W_0(\hat{R},\hat{\Psi},\tau_1)\leq\Delta_1^2$ с некоторым $\delta=\text{const}>0$. Таким образом, из (5.55), (5.60) и (5.61) следует, что для любого $\varepsilon\in(0,1)$ существуют $\delta<\Delta_2\leq\Delta_1$ и $\tau_2\geq\tau_1$, такие, что

$$\frac{dV}{d\tau}\Big|_{(5.58)}\leq-\tau^{-\frac{M+D}{N}}|\gamma_D|\left(\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)V(\hat{R},\hat{\Psi},\tau)\leq 0, \tag{5.62}$$

при $\tau\geq\tau_2$ и для всех $(\hat{R},\hat{\Psi})\in\mathbb{R}^2$, таких, что $\delta^2\leq W_0(\hat{R},\hat{\Psi},\tau_2)\leq\Delta_2^2$. Интегрирование (5.62) в случае $M+D=N$ даёт

$$0\leq W_0\big(\hat{R}(\tau),\hat{\Psi}(\tau),\tau_2\big)\leq\left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)W_0\big(\hat{R}(\tau_2),\hat{\Psi}(\tau_2),\tau_2\big)\Big(\frac{\tau}{\tau_2}\Big)^{\frac{L}{N}+\gamma_D\left(\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)} \tag{5.63}$$

при $\tau\geq\tau_2$. Выбрав $\varepsilon\in(0,1)$ достаточно малым, мы можем гарантировать, что $\gamma_D(1-\varepsilon)/(1+\varepsilon)+L/N<0$. Следовательно, для любого $\epsilon\in(0,\Delta_2)$ существуют $\delta=\epsilon\sqrt{(1-\varepsilon)/(1+\varepsilon)}/2<\epsilon$ такие, что любое решение системы (5.58), стартующее из $\{(\hat{R},\hat{\Psi}):W_0(\hat{R},\hat{\Psi},\tau_2)\leq\delta^2\}$ при $\tau_s\geq\tau_2$, не может покинуть множество

$\{(\hat{R}, \hat{\Psi}) : W_0(\hat{R}, \hat{\Psi}, \tau_2) \le \epsilon^2\}$ при $\tau > \tau_s$. Аналогичные оценки справедливы и в случае $M + D \neq N$. Возвращаясь к переменным (R, Ψ), получаем результат леммы. $\square$

Напомним, что $\hat{\gamma}_D = \gamma_D + \delta_{M+D,N} L/N$. Тогда имеем следующее:

Следствие 3. *Пусть предположения* (5.6), (5.15), (5.16), (5.17) *выполняются при* $\lambda_L < 0$. *Если* $\hat{\gamma}_D < 0$ *и* $M + D \le N$, *то для любого* $\varsigma \in (0, 1)$ *существуют* $\Delta_s > 0$ *и* $\tau_s > 0$ *такие, что* $\forall\, (R_s, \Psi_s)$: $|R_s - \varrho_*(\tau_s)| < \delta$, $|\Psi_s - \varphi_*(\tau_s)| < \Delta_s$ *решение* $R(\tau)$, $\Psi(\tau)$ *системы* (5.14) *с начальными данными* $R(\tau_s) = \varrho_*(\tau_s)$, $\Psi(\tau_s) = \varphi_*(\tau_s)$ *имеет вид асимптотические оценки* (5.18) *при* $\tau \to \infty$.

Доказательство. Пусть $M + D = N$. Тогда, взяв $\varepsilon = (1 - \varsigma)|\hat{\gamma}_D|/(2|\gamma_D| - |\hat{\gamma}_D|) > 0$ в (5.63), мы видим, что $W_0\big(\hat{R}(\tau), \hat{\Psi}(\tau), \tau_2\big) = \mathcal{O}(\tau^{-\varsigma|\hat{\gamma}_D|})$ при $\tau \to \infty$ для решений системы (5.58) с начальными данными из $\{(\hat{R}, \hat{\Psi}) : W_0(\hat{R}, \hat{\Psi}, \tau_2) \le \Delta_s^2\}$ при некоторых $0 < \Delta_s \le \Delta_2$. Аналогично, если $M + D < N$, то из (5.62) следует, что $W_0\big(\hat{R}, \hat{\Psi}, \tau_2\big)$ имеет экспоненциально убывающую границу на траекториях. Возвращаясь к переменным (R, Ψ) и учитывая (5.47), получаем соответствующие асимптотические оценки. $\square$

Объединяя это с теоремой 43, получаем доказательство теоремы 44.

5.6. Выводы

В главе показано, что затухающие возмущения с чирпированной частотой в сильно нелинейных автономных системах на плоскости со специальным видом гамильтониана (5.3) могут приводить к появлению по крайней мере двух различных асимптотических режимов вдали от равновесия: фазовый захват и дрейф фазы. В случае фазового захвата энергия системы может существенно возрастать, а фаза системы синхронизируется с фазой возмущения. Описаны условия, гарантирующие существование и устойчивость резонансных решений с ростом энергии. Нарушение этих условий может привести к фазовому дрейфу. Численные примеры показывают, что в этом случае энергия возмущённой системы остаётся ограниченной. Отметим, что такие решения в данной главе подробно не исследовались.

Полученные результаты указывают на возможность использования затухающих со временем возмущений для захвата и удержания сильно нелинейных систем в резонансе.

Отметим также, что влияние затухающих возмущений с чирпированной частотой на колебательные движения вдали от равновесия в автономных системах с более сложными гамильтонианами, чем (5.3), остаётся открытой проблемой. В этом случае предложенный метод не может быть применён напрямую.

Результаты главы опубликованы в [265]. Случай $b/q \geq 1$ разобран в [262].

Глава 6

Стохастическая устойчивость динамических систем относительно белого шума

6.1. Введение

В настоящей главе исследуется влияние постоянно действующих случайных возмущений типа белого шума на динамические системы с устойчивой неподвижной точкой. Возмущённая система рассматривается в форме стохастических дифференциальных уравнений Ито. При этом возмущение не исчезает в неподвижной точке. В этом случае траектории стохастической системы, стартующие вблизи устойчивой неподвижной точки, покидают окрестность равновесия с вероятностью единица. В главе описываются классы возмущений, относительно которых равновесие детерминированной системы устойчиво по вероятности на асимптотически большом и полубесконечном временных интервалах. В частности, обсуждается устойчивость относительно стохастических возмущений с затухающей интенсивностью.

Глава организована следующим образом. В § 6.2 содержится постановка задачи. Основные результаты представлены в разделе § 6.3. Применение результатов к примерам обсуждается в § 6.4. Обоснование результатов содержится в разделе § 6.5. Глава завершается кратким резюме.

6.2. Постановка задачи

Рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{a}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq t_0 = \text{const} > 0. \tag{6.1}$$

Точка $\mathbf{x} = 0$ является положением равновесия: $\mathbf{a}(0, t) \equiv 0$. Будем считать, что вектор-функция $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = (a_1(\mathbf{x}, t), \ldots, a_n(\mathbf{x}, t))^T$ непрерывна, удовлетворяет условию Липшица: $|\mathbf{a}(\mathbf{x}_1,t)-\mathbf{a}(\mathbf{x}_2,t)| \le M_1|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2|$ для всех $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2\in\mathbb{R}^n$, $t\ge t_0$ с положительной постоянной M_1. Здесь $|\mathbf{x}|=\sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}$. Предполагается, что существует функция Ляпунова $V(\mathbf{x},t)$, определённая в области $\mathcal{D}_{r_0,t_0}\stackrel{def}{=}\{(\mathbf{x},t)\in\mathbb{R}^{n+1}:|\mathbf{x}|\le r_0,\ \ t\ge t_0\}$ и обладающая оценками:

$$\begin{gathered}|\mathbf{x}|^2\le V(\mathbf{x},t)\le C_0|\mathbf{x}|^2,\quad |\partial_{\mathbf{x}}V|^2\le C_1|\mathbf{x}|^2,\quad |\partial_{x_i}\partial_{x_j}V|\le C_2,\\ \frac{dV}{dt}\Big|_{(6.1)}\stackrel{def}{=}\frac{\partial V}{\partial t}+\sum_{k=1}^n\frac{\partial V}{\partial x_k}a_k\le-\gamma t^{-\alpha}V\quad\forall\,(\mathbf{x},t)\in\mathcal{D}_{r_0,t_0}.\end{gathered}\tag{6.2}$$

Здесь $\gamma,\alpha,r_0,C_i=\mathrm{const}>0$, $\alpha\ge0$. Наличие такой функции Ляпунова обеспечивает (локальную) устойчивость тривиального решения в системе (6.1) при $t\ge t_0$ (см., например, [190, § 4.5]). Если $0\le\alpha\le1$, то имеет место асимптотическая устойчивость. В главе обсуждается влияние постоянно действующих возмущений типа белого шума на устойчивость тривиального решения $\mathbf{x}(t)\equiv0$ детерминированной системы (6.1).

Вместе с (6.1) рассматривается возмущённая система в форме стохастических дифференциальных уравнений Ито:

$$d\mathbf{y}(t)=\mathbf{a}(\mathbf{y}(t),t)\,dt+\mu\,\mathbf{G}(\mathbf{y}(t),t)\,d\mathbf{w}(t),\quad t>t_0,\quad \mathbf{y}(t_0)=\mathbf{y}_0\in\mathbb{R}^n.\tag{6.3}$$

Здесь $\mathbf{w}(t)=(w_1(t),\dots,w_n(t))^T$ — n-мерный винеровский процесс, определённый на вероятностном пространстве $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$, $\mathbf{G}(\mathbf{y},t)=\{g_{i,j}(\mathbf{y},t)\}_{n\times n}$ — непрерывная матрица размерности $n\times n$, которая не зависит от $\omega\in\Omega$ и удовлетворяет условию роста:

$$\|\mathbf{G}(\mathbf{y},t)\|\le M_2(1+|\mathbf{y}|)\quad\forall\,\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n,\ \ t\ge t_0,\tag{6.4}$$

и условию Липшица:

$$\|\mathbf{G}(\mathbf{y}_1,t)-\mathbf{G}(\mathbf{y}_2,t)\|\le M_3|\mathbf{y}_1-\mathbf{y}_2|\quad\forall\,\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2\in\mathbb{R}^n,\ \ t\ge t_0,\tag{6.5}$$

с положительными постоянными $M_2,M_3>0$. Здесь $\|\cdot\|$ — операторная норма, согласованная с нормой $|\cdot|$ в $\mathbb{R}^n$. Малый параметр $0<\mu\ll1$ используется для контроля за интенсивностью возмущений. Начальные данные $\mathbf{y}_0$ считаются детерминированными. Указанные ограничения на коэффициенты системы (6.3) гарантируют существование и единственность непрерывного с вероятностью единица решения при всех $t \geq t_0$ для любой начальной точки $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ (см. [227, §5.2],[192, §3.3]). Будем считать, что система (6.3) не имеет тривиального решения ($\mathbf{G}(0,t) \not\equiv 0$), то есть возмущения системы (6.1) являются постоянно действующими.

Цель главы — найти такие ограничения на $\mathbf{G}(\mathbf{y},t)$, при которых решение $\mathbf{y}(t)$ возмущённой системы (6.3) при достаточно малых начальных данных и возмущениях не покидает окрестности решения $\mathbf{x}(t) \equiv 0$ детерминированной системы (6.1) с вероятностью сколь угодно близкой к единице. Другим словами, исследуется устойчивость по вероятности тривиального решения относительно случайных возмущений.

Определение 4. *Решение $\mathbf{x}(t) \equiv 0$ системы (6.1) устойчиво по вероятности относительно белого шума при $t \geq t_0$ равномерно по $G \in \mathcal{P}$, если*

$$\forall\, \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0 \;\; \exists\, \delta_1, \delta_2 > 0 : \quad \forall\, |\mathbf{y}_0| < \delta_1, \quad \mu < \delta_2, \quad \mathbf{G} \in \mathcal{P}$$

решение $\mathbf{y}(t)$ возмущённой системы (6.3) с начальными данными $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$ удовлетворяет неравенству:

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t \geq t_0} |\mathbf{y}(t)| \geq \varepsilon_1\right) \leq \varepsilon_2. \tag{6.6}$$

Приведённое определение устойчивости отличается от известных (см. [192, §5.3],[188, §2.1],[199, гл. 2]) наличием класса возмущений $\mathcal{P}$.

Исследованию устойчивости динамических систем со случайными возмущениями посвящено достаточно много работ (см. [188, 192, 199, 215]), большая часть из которых посвящена вырожденным возмущениям: $\mathbf{G}(0,t) \equiv 0$. Приведем основные известные результаты для постоянно действующих возмущений ($\mathbf{G}(0,t) \not\equiv 0$). Известно (см., например, [169, гл 4, §2]), что в автономных системах (где $\mathbf{a}$ и $\mathbf{G}$ явно не зависят от t) при постоянно действующих возмущениях рано или поздно почти все траектории покидают окрестность устойчивого равновесия. Из [192, §7.4] следует, что устойчивость сохраняется в неавтономных системах с глобальной функцией Ляпунова, если коэффициенты матрицы $\mathbf{G}(\mathbf{y},t)$ достаточно быстро затухают со временем. Однако, если невозмущённая система имеет хотя бы два устойчивых решения, то случайные возмущения с ограниченной матрицей $\mathbf{G}(\mathbf{y},t)$ приводят к потере устойчивости [102]. Таким образом, устойчивость при всех $t\geq t_0$ относительно постоянно действующих возмущений типа белого шума встречается в достаточно узком классе систем. Поэтому имеет смысл задача об устойчивости на конечном временном интервале [199, гл. III], [169, гл. 8]. Один из вариантов такого подхода состоит в нахождении как можно большего временного отрезка, на котором решения возмущённых уравнений находятся вблизи равновесия детерминированной системы. Такая постановка задачи рассматривалась в [101, гл. 7], где была доказана устойчивость по вероятности равновесия на отрезке $t_0\leq t\leq t_0+\mathcal{O}(\mu^{-2})$ относительно возмущений с равномерно ограниченной матрицей $\mathbf{G}(\mathbf{y},t)$ при условии, что для детерминированной системы существует функции Ляпунова, обладающей оценками типа (6.2) с $\gamma=0$. Остаётся открыт вопрос об устойчивости на далеких временах при $t_0\leq t\leq t_0+\mathcal{O}(\mu^{-N})$, где $N>2$. Настоящая глава посвящена решению данной проблемы. Основным результатом является описание классов возмущений системы (6.1), при которых имеет место устойчивость по вероятности тривиального решения при $t_0\leq t<t_0+T_\mu$, где $T_\mu=\mathcal{O}(\mu^{-N})$ $(N\in\mathbb{N})$, $T_\mu=\mathcal{O}(\exp\mu^{-1})$ и $T_\mu=\infty$.

Для любого $\beta\geq 0$ определим класс возмущений $\mathcal{P}_\beta$ как множество матриц $\mathbf{G}(\mathbf{y},t)$, для которых выполняются оценки (6.4), (6.5) и

$$\sup_{|\mathbf{y}|\leq r_0,t\geq t_0}\left\{\|\mathbf{G}(\mathbf{y},t)\|t^{\frac{\beta}{2}}\right\}<\infty.$$

Через $\mathcal{P}_\beta^h$, $h>0$ обозначим множество матриц $\mathbf{G}\in\mathcal{P}_\beta$ таких, что

$$\sup_{|\mathbf{y}|\leq r_0,t\geq t_0}\left\{\|\mathbf{G}(\mathbf{y},t)\|t^{\frac{\beta}{2}}\right\}\leq\sqrt{2h}.$$

Если $\mathbf{G} \in \mathcal{P}^h_\beta$, то соответствующая матрица диффузии $\mathbf{\Sigma} \stackrel{def}{=} \mathbf{G}{\cdot}\mathbf{G}^*/2 = \{\sigma_{ij}\}_{n\times n}$ обладает оценкой

$$\sup_{|\mathbf{y}|\le r_0, t\ge t_0} \left\{\|\mathbf{\Sigma}(\mathbf{y},t)\| t^\beta\right\} \le h.$$

6.3. Основные результаты

Уточним определение устойчивости, которое будет использоваться далее.

Определение 5. *Решение* $\mathbf{x}(t) \equiv 0$ *системы* (6.1) *устойчиво по вероятности относительно белого шума при* $t_0 \le t \le t_0 + T_\mu$ *равномерно по* $\mathbf{G} \in \mathcal{P}$, *если*

$$\forall\, \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0 \;\; \exists\, \delta_1, \delta_2 > 0 : \;\; \forall\, |\mathbf{y}_0| < \delta_1, \;\; \mu < \delta_2, \;\; \mathbf{G} \in \mathcal{P}$$

решение $\mathbf{y}(t)$ *возмущённой системы* (6.3) *с начальными данными* $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$ *удовлетворяет неравенству:*

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t_0\le t\le t_0+T_\mu} |\mathbf{y}(t)| \ge \varepsilon_1\right) \le \varepsilon_2.$$

Теорема 45. *Пусть для системы* (6.1) *существует функция Ляпунова* $V(\mathbf{x},t)$, *обладающая оценками* (6.2) *с* $\alpha \ge 0$. *Тогда для любых* $N \in \mathbb{N}$, $h > 0$ *и* $0 < \varkappa < 1$ *решение* $\mathbf{x}(t) \equiv 0$ *системы* (6.1) *устойчиво по вероятности относительно белого шума при* $t_0 \le t \le t_0 + \mu^{-2N+\varkappa}$ *равномерно по* $\mathbf{G} \in \mathcal{P}^h_\alpha$.

Следствие 4. *Если* $\gamma = 0$ *в оценке* (6.2), *то* $\forall\, h > 0$ *и* $0 < \varkappa < 1$ *имеет место устойчивость по вероятности тривиального решения системы* (6.1) *относительно белого шума при* $t_0 \le t \le t_0 + \mu^{-2+\varkappa}$ *равномерно по* $\mathbf{G} \in \mathcal{P}^h_0$.

Заметим, что если $\gamma = 0$, то тривиальное решение системы (6.1) устойчиво по Ляпунову, но не асимптотически устойчиво. Оказывается, что в этом случае интервал устойчивости относительно белого шума можно увеличить за счёт затухания в коэффициентах матрицы возмущения.

Теорема 46. *Пусть для системы* (6.1) *существует функция Ляпунова* $V(\mathbf{x}, t)$, *обладающая оценками* (6.2) *с* $\gamma \geq 0$. *Тогда для любых* $h > 0$ *и* $0 < \varkappa < 1$ *решение* $\mathbf{y}(t) \equiv 0$ *системы* (6.1) *устойчиво по вероятности относительно белого шума при* $t_0 \leq t \leq t_0 \exp(\mu^{-2+\varkappa})$ *равномерно по* $\mathbf{G} \in \mathcal{P}_1^h$.

Теорема 47. *Пусть для системы* (6.1) *существует функция Ляпунова* $V(\mathbf{x}, t)$, *обладающая оценками* (6.2) *с* $\gamma \geq 0$. *Тогда для любых* $h > 0$ *и* $\beta > 1$ *решение* $\mathbf{y}(t) \equiv 0$ *системы* (6.1) *устойчиво по вероятности относительно белого шума при* $t \geq t_0$ *равномерно по* $\mathbf{G} \in \mathcal{P}_\beta^h$.

6.4. Примеры

6.4.1. Пример 1

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение Ито: $dy(t) = \mu dw(t)$. Решение $x(t) \equiv 0$ невозмущённой системы $\dot{x} = 0$ устойчиво (но не асимптотически устойчиво); функция Ляпунова $V = x^2$ удовлетворяет оценкам (6.2) с $\gamma = 0$. Покажем, что тривиальное решение устойчиво по вероятности относительно белого шума (с $g_{1,1} \equiv 1$) на интервале $0 \leq t \leq \mu^{-2+\varkappa}$.

Легко проверить, что функция $y(t) = y_0 + \mu w(t)$ является решением возмущённого уравнения. Для простоты предположим $y_0 = 0$. Используя известную формулу для винеровского процесса (см. [132, стр. 173]), получаем

$$\mathbb{P}(\sup_{0 \leq t \leq T} |w(t)| \geq c) = \operatorname{erfc}\left(\frac{c}{\sqrt{2T}}\right) + \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \sum_{k \neq 0} (-1)^{k+1} \int\limits_{(2k-1)c}^{(2k+1)c} e^{-\frac{u^2}{2T}}\, du,$$

где $c, T = \mathrm{const} > 0$. Это означает, что для всех $0 < \varkappa < 1$, $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$ существует $\delta_2 = (\varepsilon_1^2 / |4 \ln(\varepsilon_2/\sqrt{8})|)^{1/\varkappa}$ такое, что

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq t \leq \mu^{-2+\varkappa}} |y(t)| \geq \varepsilon_1\right) \leq \varepsilon_2$$

при $\mu < \delta_2$. В этом примере устойчивость по вероятности не сохраняется при $t \gg \mu^{-2}$. Растяжения временного интервала устойчивости можно добиться путём дополнительных ограничений на возмущения (см., например, теоремы 46 и 47).

6.4.2. Пример 2

Рассмотрим более сложное уравнение:

$$dy(t) = -\frac{y(1-y^2)}{1+y^2}\,dt + \mu\,G(y,t)\,dw(t), \quad 0 < \mu \ll 1.$$

Соответствующая детерминированная система

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{x(1-x^2)}{1+x^2}$$

имеет три положения равновесия: $\{-1, 0, 1\}$. Легко показать, что тривиальное решение $\mathbf{x}(t) \equiv 0$ локально экспоненциально устойчиво; функция Ляпунова $V(x) = x^2$ удовлетворяет неравенству $dV/dt \le -V$ для всех $|x| \le 1/\sqrt{3}$, $t \ge 0$. Из [102] следует, что в этом случае устойчивость тривиального решения относительно белого шума на полубесконечном интервале времени с $G \in \mathcal{P}_0^h$ отсутствует. Однако из теоремы 45 следует, что решение $x(t) \equiv 0$ сильно устойчиво на конечном, но асимптотически большом интервале времени $0 \le t \le \mu^{-2N+\varkappa}$.

6.4.3. Пример 3

Рассмотрим уравнение Бесселя

$$\frac{d^2z}{dt^2} + t^{-1}\frac{dz}{dt} + (1 - \vartheta^2 t^{-2})z = 0, \quad t > 0, \quad \vartheta = \text{const},$$

которое можно переписать в виде системы двух дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -(1 - \vartheta^2 t^{-2})x_1 - t^{-1}x_2. \tag{6.7}$$

Покажем, что неподвижная точка $(0,0)$ является асимптотически устойчивой. В качестве кандидата на функцию Ляпунова рассмотрим функцию $V(x_1,x_2,t) = 4x_1^2+4x_2^2+4t^{-1}x_1x_2$, для которой справедливы оценки: $x_1^2+x_2^2 \le V(x_1,x_2,t) \le 5(x_1^2+x_2^2)$ при $t\ge 2$. Вычислим полную производную этой функции на траекториях системы:

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} =& -4t^{-1}(x_1^2+x_2^2)+8(\vartheta^2-1)t^{-2}x_1x_2+4\vartheta^2t^{-3}x_1^2\\ \le& -4(x_1^2+x_2^2)t^{-1}\left(1-(2\vartheta^2+1)t^{-1}\right).\end{aligned}$$

При $t \ge 2(2\vartheta^2+1)$ оказывается справедливой оценка $dV/dt \le -2t^{-1}V/5$. Таким образом, для системы (6.7) существует функция Ляпунова, обладающая оценками (6.2) с $\alpha = 1$ и $\gamma = 2/5$.

Рассмотрим возмущённую систему в форме уравнений Ито:

$$\begin{aligned}&dy_1(t) = y_2dt + \mu g_1(y_1,y_2,t)dw_1(t),\\ &dy_2(t) = -\big((1-\vartheta^2t^{-2})y_1+t^{-1}y_2\big)dt+\mu g_2(y_1,y_2,t)dw_2(t), \quad 0<\mu\ll 1.\end{aligned}$$

Если $G = \operatorname{diag}(g_1,g_2)\in\mathcal{P}_1$, то из теоремы 46 вытекает устойчивость равновесия системы (6.7) относительно белого шума при $t_0 \le t \le \mathcal{O}\big(\exp(\mu^{-1})\big)$. На роль таких возмущений можно взять, например, функции $g_i(y_1,y_2,t)\equiv t^{-1/2}$.

6.4.4. Пример 4

Пример нелинейного уравнения даёт модель математического маятника со слабой диссипацией:

$$\frac{d^2z}{dt^2}+\vartheta t^{-1}\frac{dz}{dt}+\sin z = 0, \quad t>0, \quad \vartheta = \mathrm{const}>0.$$

Соответствующая невозмущённая система: $dx_1/dt = x_2$, $dx_2/dt = -\sin x_1 - \vartheta t^{-1}x_2$ имеет локально асимптотически устойчивое равновесие $(0,0)$. На роль функции Ляпунова подходит функция

$$V(x_1,x_2,t) = 8(1-\cos x_1)+4x_2^2+4\vartheta t^{-1}x_1x_2,$$

для которой справедливы оценки

$$x_1^2 + x_2^2 \le V(x_1, x_2, t) \le 5(x_1^2 + x_2^2),$$

при $t \ge 2\vartheta$ и $|x_1| \le 1$. Полная производная этой функции имеет вид:

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} =& -4\vartheta t^{-1} x_1 \sin x_1 - 4\vartheta t^{-1} x_2^2 - 4\vartheta(\vartheta+1)t^{-2}x_1x_2 \\ \le& -2\vartheta t^{-1}(x_1^2 + x_2^2)(1 - (\vartheta+1)t^{-1}).\end{aligned}$$

Легко видеть, что при $t \ge 2(\vartheta + 1)$ и $|x_1| \le 1$ имеет место оценка $dV/dt \le -\vartheta t^{-1} V/5$. Следовательно, функция $V(x_1, x_2, t)$ обладает оценками (6.2) с $\alpha = 1$ и $\gamma = \vartheta/5$.

Рассмотрим возмущённую систему в виде:

$$\begin{aligned}dy_1(t) &= y_2\,dt + \mu g_1(y_1, y_2, t)dw_1(t),\\ dy_2(t) &= -(\sin y_1 + \vartheta t^{-1} y_2)dt + \mu g_2(y_1, y_2, t)dw_2(t),\end{aligned}$$

$g_i(0,0,t) \not\equiv 0$. Наличие множества неподвижных точек $(\pi k, 0)$ $(k \in \mathbb{Z})$ у невозмущённой системы указывает (см. [102]) на отсутствие устойчивости равновесия $(0,0)$ при всех $t \ge t_0$ относительно возмущений с равномерно ограниченными коэффициентами $g_i(y_1, y_2, t) = \mathcal{O}(1)$. Однако, из теоремы 45 следует, что если $\operatorname{diag}(g_1, g_2) \in \mathcal{P}_1$, то имеет место устойчивость по вероятности относительно шума на асимптотически большом отрезке $t_0 \le t \le t_0 + \mathcal{O}(\mu^{-N})$ для любого $N \in \mathbb{N}$.

6.5. Обоснование результатов

Доказательство теоремы 45. Зафиксируем параметры $h > 0$, $0 < \varkappa < 1$, $\varepsilon_2 > 0$ и $0 < \varepsilon_1 < r_0$. Пусть $\mathbf{G} \in \mathcal{P}_\alpha^h$, $\mathbf{y}(t)$ — решение системы (6.3) с начальными данными $|\mathbf{y}_0| < \delta_1$, τ — момент первого выхода решения $\mathbf{y}(t)$ из области

$$\mathcal{D}_{\varepsilon_1, t_0, T} \stackrel{def}{=} \{(\mathbf{y}, t) \in \mathbb{R}^{n+1} : |\mathbf{y}| < \varepsilon_1, \quad t_0 < t < t_0 + T\}.$$

Параметры $0 < \delta_1 < \varepsilon_1$, $T > 0$ будут определены ниже. Определим функцию $s_t = \min\{\tau, t\}$, тогда $\mathbf{y}(s_t)$ является процессом, остановленным в момент первого выхода из $\mathcal{D}_{\varepsilon_1,t_0,T}$.

Вначале докажем утверждение для $N = 1$. Для системы стохастических уравнений (6.3) строится функция Ляпунова в виде:

$$V_1(\mathbf{y}, t; T) = V(\mathbf{y}, t) + \mu^2 n^2 h C_2 t_0^{-\alpha}(T + t_0 - t). \tag{6.8}$$

Легко видеть, что $V_1(\mathbf{y}, t; T) \geq V(\mathbf{y}, t) \geq 0$ и

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}V_1 &\stackrel{def}{=} \partial_t V_1 + \sum_{i=1}^{n} a_i \partial_{y_i} V_1 + \mu^2 \sum_{i,j=1}^{n} \sigma_{ij} \partial_{y_i} \partial_{y_j} V_1 = \\
&= \frac{dV}{dt}\Big|_{(6.1)} + \mu^2 \sum_{i,j=1}^{n} \sigma_{ij}\, \partial_{y_i} \partial_{y_j} V - \mu^2 n^2 h C_2 t_0^{-\alpha} \leq \\
&\leq -\gamma t^{-\alpha} V + \mu^2 n^2 C_2 (\|\mathbf{\Sigma}(\mathbf{y}, t)\| - h t_0^{-\alpha}) \leq -\gamma t^{-\alpha} V \leq 0
\end{aligned}$$

при всех $(\mathbf{y}, t) \in \mathcal{D}_{\varepsilon_1,t_0,T}$. Мы воспользовались здесь тем, что $\|\mathbf{\Sigma}(\mathbf{y}, t)\| \leq h t^{-\alpha} \leq h t_0^{-\alpha}$ при всех $|\mathbf{y}| \leq r_0$, $t \geq t_0$. Отсюда следует, что $V_1(\mathbf{y}(s_t), s_t; T)$ является неотрицательным супермартингалом [192, §5.2]. Из свойств функции $V(\mathbf{y}, t)$ вытекают следующие оценки:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\sup_{t_0 \leq t \leq t_0+T} |\mathbf{y}(t)| \geq \varepsilon_1\right) &= \mathbb{P}\left(\sup_{t_0 \leq t \leq t_0+T} |\mathbf{y}(t)|^2 \geq \varepsilon_1^2\right) \leq \\
&\leq \mathbb{P}\left(\sup_{t_0 \leq t \leq t_0+T} V(\mathbf{y}(t), t) \geq \varepsilon_1^2\right) \leq \\
&\leq \mathbb{P}\left(\sup_{t_0 \leq t \leq t_0+T} V_1(\mathbf{y}(t), t; T) \geq \varepsilon_1^2\right) = \\
&= \mathbb{P}\left(\sup_{t \geq t_0} V_1(\mathbf{y}(s_t), s_t; T) \geq \varepsilon_1^2\right) \leq \\
&\leq \frac{V_1(\mathbf{y}_0, t_0; T)}{\varepsilon_1^2}.
\end{aligned} \tag{6.9}$$

Последняя оценка следует из неравенства Дуба для супермартингалов [25, §7.3]. Определим $T = \mu^{-2+\varkappa}$ и параметры

$$\delta_1 = \sqrt{\frac{\varepsilon_1^2 \varepsilon_2}{2C_0}}, \quad \delta_2 = \left(\frac{\varepsilon_1^2 \varepsilon_2 t_0^{\alpha}}{2\, n^2 h\, C_2}\right)^{\frac{1}{\varkappa}}.$$

Тогда $V_1(\mathbf{y}_0,t_0;T) \le C_0|\mathbf{y}_0|^2 + \mu^{\varkappa} n^2 h C_2 t_0^{-\alpha} \le \varepsilon_1^2\varepsilon_2$ для любых $|\mathbf{y}_0| < \delta_1$, $\mu < \delta_2$, и справедливо неравенство:

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t_0\le t\le t_0+T} |\mathbf{y}(t)| \ge \varepsilon_1\right) \le \varepsilon_2. \tag{6.10}$$

Отсюда вытекает устойчивость решения при $t_0 \le t \le t_0 + \mu^{-2+\varkappa}$.

Заметим, что положительность параметра γ в (6.2) пока не использовалась. Это условие сыграет ключевую роль на следующем шаге.

Устойчивость при $t_0 \le t \le t_0 + \mu^{-4+\varkappa}$ доказывается с помощью функции Ляпунова:

$$V_2(\mathbf{y},t;T) = \big(V(\mathbf{y},t)\big)^2 + \mu^2\nu_1 V_1(\mathbf{y},t;T),$$

где ν_1, T — некоторые параметры, значения которых выбираются ниже. Оценим результат действия оператора $\mathcal{L}$ на $V_2(\mathbf{y},t;T)$ в области $\mathcal{D}_{\varepsilon_1,t_0,T}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}V_2 &= 2V\,\mathcal{L}V + 2\mu^2\sum_{i,j=1}^{n}\sigma_{ij}\,\partial_{y_i}V\partial_{y_j}V + \mu^2\nu_1\mathcal{L}V_1 \le \\ &\le -2\gamma t^{-\alpha}V^2 + \mu^2\big(2\,n^2 h\,(C_1+C_2) - \nu_1\gamma\big)t^{-\alpha}V.\end{aligned}$$

Выберем $\nu_1 = 2\,n^2 h(C_1+C_2)\gamma^{-1} > 0$, тогда $V_2(\mathbf{y},t;T) \ge \big(V(\mathbf{y},t)\big)^2 \ge 0$ и $\mathcal{L}V_2 \le 0$ при всех $(\mathbf{y},t)\in\mathcal{D}_{\varepsilon_1,t_0,T}$. Следовательно, $V_2(\mathbf{y}(s_t),s_t;T)$ является супермартингалом, и справедливы неравенства аналогичные (6.9):

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\sup_{t_0\le t\le t_0+T}|\mathbf{y}(t)|\ge\varepsilon_1\right) &= \mathbb{P}\left(\sup_{t_0\le t\le t_0+T}|\mathbf{y}(t)|^4\ge\varepsilon_1^4\right) \le \\ &\le \mathbb{P}\left(\sup_{t_0\le t\le t_0+T}\big(V(\mathbf{y}(t),t)\big)^2\ge\varepsilon_1^4\right) \le \\ &\le \mathbb{P}\left(\sup_{t_0\le t\le t_0+T}V_2(\mathbf{y}(t),t;T)\ge\varepsilon_1^4\right) = \\ &= \mathbb{P}\left(\sup_{t\ge t_0}V_2(\mathbf{y}(s_t),s_t;T)\ge\varepsilon_1^4\right) \le \\ &\le \frac{V_2(\mathbf{y}_0,t_0;T)}{\varepsilon_1^4}.\end{aligned} \tag{6.11}$$

На этом шаге можно взять $T = \mu^{-4+\varkappa}$, тогда

$$V_2(\mathbf{y}_0,t_0;T) \le \frac{3C_0^2|\mathbf{y}_0|^4}{2} + \frac{\mu^4\nu_1^2}{2} + \mu^{\varkappa}\nu_1 n^2 h C_2 t_0^{-\alpha}.$$

Выберем $\delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$ из условия:

$$\frac{3C_0^2\delta_1^4}{2} + \frac{\delta_2^4\nu_1^2}{2} + \delta_2^{\varkappa}\nu_1 n^2 h C_2 t_0^{-\alpha} \le \varepsilon_1^4\varepsilon_2.$$

Тогда для любых $|\mathbf{y}_0| < \delta_1$ и $\mu < \delta_2$ имеет место оценка: $V_2(\mathbf{y}_0, t_0; T) \le \varepsilon_1^4\varepsilon_2$. Отсюда с учётом (6.11) вытекает оценка для вероятностной меры (6.10), которая свидетельствует об устойчивости на отрезке: $[t_0; t_0 + \mu^{-4+\varkappa}]$.

Устойчивость при $t_0 \le t \le t_0 + \mu^{-2N+\varkappa}$, $N \ge 3$ доказывается с помощью следующей конструкции:

$$\begin{aligned} V_N(\mathbf{y}, t; T) &= \big(V(\mathbf{y}, t)\big)^N + \mu^2\nu_{N-1}V_{N-1}(\mathbf{y}, t; T), \\ V_k(\mathbf{y}, t; T) &= \big(V(\mathbf{y}, t)\big)^k + \mu^2\nu_{k-1}V_{k-1}(\mathbf{y}, t; T), \quad k = 2, \ldots, N-1, \end{aligned}$$

функция $V_1(\mathbf{y}, t; T)$ определяется формулой (6.8), $T = \mu^{-2N+\varkappa}$. Дополнительное условие $\mathcal{L}V_k \le 0$ в области $\mathcal{D}_{\varepsilon_1, t_0, T}$ приводит к выбору параметров ν_k. Пусть $\nu_k = (k+1)n^2h(C_1 + C_2)\gamma^{-1}$, тогда справедливы неравенства:

$$\mathcal{L}V_3 \le -3\gamma t^{-\alpha}V^3 + 2\mu^2\Big(3n^2h\,(C_1 + C_2) - \nu_2\gamma\Big)t^{-\alpha}V^2 \le 0,$$

$$\ldots$$

$$\mathcal{L}V_N \le -N\gamma t^{-\alpha}V^N + (N-1)\mu^2\Big(Nn^2h\,(C_1 + C_2) - \nu_{N-1}\gamma\Big)t^{-\alpha}V^{N-1} \le 0$$

при всех $(\mathbf{y}, t) \in \mathcal{D}_{\varepsilon_1, t_0, T}$ и любом натуральном $N \ge 3$. Следовательно, функция $V_N(\mathbf{y}(s_t), s_t; T)$ является неотрицательным супермартингалом. Так как

$$V_N(\mathbf{y}, t; T) \ge \big(V(\mathbf{y}, t)\big)^N \ge 0, \quad \forall\,(\mathbf{y}, t) \in \mathcal{D}_{\varepsilon_1, t_0, T},$$

то справедливы оценки:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\sup_{t_0 \le t \le t_0 + T} |\mathbf{y}(t)| \ge \varepsilon_1\right) &= \mathbb{P}\left(\sup_{t_0 \le t \le t_0 + T} |\mathbf{y}(t)|^{2N} \ge \varepsilon_1^{2N}\right) \le \\ &\le \mathbb{P}\left(\sup_{t_0 \le t \le t_0 + T} \big(V(\mathbf{y}(t), t)\big)^N \ge \varepsilon_1^{2N}\right) \le \\ &\le \mathbb{P}\left(\sup_{t_0 \le t \le t_0 + T} V_N(\mathbf{y}(t), t; T) \ge \varepsilon_1^{2N}\right) = \\ &= \mathbb{P}\left(\sup_{t \ge t_0} V_N(\mathbf{y}(s_t), s_t; T) \ge \varepsilon_1^{2N}\right) \le \\ &\le \frac{V_N(\mathbf{y}_0, t_0; T)}{\varepsilon_1^{2N}}. \end{aligned} \tag{6.12}$$

Легко видеть, что $V_N(\mathbf{y}_0, t_0; T) = \mathcal{O}(|\mathbf{y}_0|^{2N}) + \mathcal{O}(\mu^{\varkappa})$ при $|\mathbf{y}_0| \to 0$ и $\mu \to 0$. Следовательно, существуют $\delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$ такие, что $V_N(\mathbf{y}_0, t_0; T) \le \varepsilon_1^{2N}\varepsilon_2$ для любых $|\mathbf{y}_0| < \delta_1$ и $\mu < \delta_2$. Отсюда с учётом (6.12) вытекает оценка (6.10). Таким образом, для любого $N \in \mathbb{N}$ и $h > 0$ имеет место устойчивость тривиального решения системы (6.1) относительно белого шума при $t_0 \le t \le t_0 + \mu^{-2N+\varkappa}$ равномерно по $\mathbf{G} \in \mathcal{P}_{\alpha}^{h}$. □

Доказательство теоремы 46. Зафиксируем параметры $h > 0$, $0 < \varkappa < 1$, $\varepsilon_2 > 0$ и $0 < \varepsilon_1 < r_0$. Пусть $\mathbf{y}(t)$ — решение системы (6.3) с начальными данными $|\mathbf{y}_0| < \delta_1$ и $\mathbf{G} \in \mathcal{P}_1^h$, τ — момент первого выхода решения $\mathbf{y}(t)$ из области $\mathcal{D}_{\varepsilon_1, t_0, T}$, где $\delta_1 < \varepsilon_1$, T — некоторые положительные параметры, значения которых определим ниже. Пусть $s_t = \min\{\tau, t\}$, тогда $\mathbf{y}(s_t)$ является процессом, остановленным в момент первого выхода из $\mathcal{D}_{\varepsilon_1, t_0, T}$. Для стохастической системы (6.3) строится функция Ляпунова в виде:

$$V_\mu(\mathbf{y}, t; T) = V(\mathbf{y}, t) + \mu^2 n^2 h C_2 \ln\left(\frac{t_0 + T}{t}\right), \quad (\mathbf{y}, t) \in \mathcal{D}_{r_0, t_0, T}.$$

Легко видеть, что $V_\mu(\mathbf{y}, t; T) \ge V(\mathbf{y}, t) \ge 0$ и

$$\begin{aligned} \mathcal{L}V_\mu &= \frac{dV}{dt}\Big|_{(6.1)} + \mu^2 \sum_{i,j=1}^{n} \sigma_{ij}\, \partial_{y_i}\partial_{y_j} V - \mu^2 n^2 h C_2 t^{-1} \\ &\le \mu^2 n^2 C_2 t^{-1}\big(\|\mathbf{\Sigma}(\mathbf{y}, t)\| t - h\big) \le 0 \end{aligned}$$

при всех $(\mathbf{y}, t) \in \mathcal{D}_{\varepsilon_1, t_0, T}$. Следовательно, $V_\mu(\mathbf{y}(s_t), s_t)$ является неотрицательным супермартингалом [192, §5.2], и справедливы оценки:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\sup_{t_0 \le t \le t_0 + T} |\mathbf{y}(t)| \ge \varepsilon_1\right) &= \mathbb{P}\left(\sup_{t_0 \le t \le t_0 + T} |\mathbf{y}(t)|^2 \ge \varepsilon_1^2\right) \le \\ &\le \mathbb{P}\left(\sup_{t_0 \le t \le t_0 + T} V(\mathbf{y}(t), t) \ge \varepsilon_1^2\right) \le \\ &\le \mathbb{P}\left(\sup_{t_0 \le t \le t_0 + T} V_\mu(\mathbf{y}(t), t; T) \ge \varepsilon_1^2\right) = \\ &= \mathbb{P}\left(\sup_{t \ge t_0} V_\mu(\mathbf{y}(s_t), s_t; T) \ge \varepsilon_1^2\right) \le \\ &\le \frac{V_\mu(\mathbf{y}_0, t_0; T)}{\varepsilon_1^2}. \end{aligned}$$

Положим $T = t_0(\exp(\mu^{-2+\varkappa}) - 1)$, тогда $V_\mu(\mathbf{y}_0, t_0; T) \le C_0|\mathbf{y}_0|^2 + \mu^\varkappa n^2 h C_2$. Определим параметры

$$\delta_1 = \sqrt{\frac{\varepsilon_1^2\varepsilon_2}{2C_0}}, \quad \delta_2 = \left(\frac{\varepsilon_1^2\varepsilon_2}{2\,n^2 h\, C_2}\right)^{\frac{1}{\varkappa}},$$

тогда $V_\mu(\mathbf{y}_0, t_0; T) \le \varepsilon_1^2\varepsilon_2$ для любых $|\mathbf{y}_0| < \delta_1$, $\mu < \delta_2$, и справедливо неравенство (6.10). Отсюда вытекает устойчивость решения $\mathbf{x}(t) \equiv 0$ системы (6.1) при $t_0 \le t \le t_0 \exp(\mu^{-2+\varkappa})$, $0 < \varkappa < 1$. $\square$

Доказательство теоремы 47. Зафиксируем параметры $h > 0$, $\varepsilon_2 > 0$, $0 < \varepsilon_1 < r_0$ и $\beta > 1$. Пусть $\mathbf{y}(t)$ — решение системы (6.3) с начальными данными $|\mathbf{y}_0| < \delta_1$ и $\mathbf{G} \in \mathcal{P}_\beta^h$. Параметр $0 < \delta_1 < \varepsilon_1$ будет определен ниже. Обозначим через τ — момент первого выхода решения $\mathbf{y}(t)$ из области $\mathcal{D}_{\varepsilon_1,t_0} = \{(\mathbf{y}, t) \in \mathbb{R}^{n+1} : |\mathbf{y}| < \varepsilon_1, t > t_0\}$. Пусть $s_t = \min\{\tau, t\}$, тогда $\mathbf{y}(s_t)$ является процессом, остановленным в момент первого выхода из $\mathcal{D}_{\varepsilon_1,t_0}$. В качестве кандидата на функцию Ляпунова для системы (6.3) рассмотрим функцию:

$$V_\mu(\mathbf{y}, t) = V(\mathbf{y}, t) + \frac{\mu^2 n^2 C_2 h t^{-\beta+1}}{(\beta - 1)}.$$

Из определения класса $\mathcal{P}_\beta^h$ следует, что $V_\mu(\mathbf{y}, t) \ge V(\mathbf{y}, t) \ge 0$ и

$$\begin{aligned}\mathcal{L}V_\mu &= \frac{dV}{dt}\Big|_{(6.1)} + \mu^2 \sum_{i,j=1}^{n} \sigma_{ij}\,\partial_{y_i}\partial_{y_j} V - \mu^2 n^2 C_2 h t^{-\beta}\\ &\le \mu^2 n^2 C_2 t^{-\beta}(\|\mathbf{\Sigma}(\mathbf{y}, t)\| t^\beta - h) \le 0\end{aligned}$$

для всех $(\mathbf{y}, t) \in \mathcal{D}_{\varepsilon_1,t_0}$. Следовательно, $V_\mu(\mathbf{z}(s_t), s_t)$ является неотрицательным супермартингалом, и справедливы неравенства:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\sup_{t\ge t_0}|\mathbf{y}(t)| \ge \varepsilon_1\right) &= \mathbb{P}\left(\sup_{t\ge t_0}|\mathbf{y}(s_t)|^2 \ge \varepsilon_1^2\right) \le\\ &\le \mathbb{P}\left(\sup_{t\ge t_0} V(\mathbf{y}(s_t), s_t) \ge \varepsilon_1^2\right) \le\\ &\le \mathbb{P}\left(\sup_{t\ge t_0} V_\mu(\mathbf{y}(s_t), s_t) \ge \varepsilon_1^2\right) \le\\ &\le \frac{V_\mu(\mathbf{y}_0, t_0)}{\varepsilon_1^2}.\end{aligned} \tag{6.13}$$

Последняя оценка следует из неравенства Дуба для супермартингалов. Заметим, что $V_\mu(\mathbf{y}_0, t_0) \le C_0|\mathbf{y}_0|^2 + \mu^2 n^2 C_2 h t_0^{-\beta+1}(\beta-1)^{-1}$. Выберем $\delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$ из условия: $C_0\delta_1^2 + \delta_2^2 n^2 C_2 h t_0^{-\beta+1}(\beta-1)^{-1} \le \varepsilon_1^2\varepsilon_2$. Тогда для всех $\mathbf{G} \in \mathcal{P}_\beta^h$ и $|\mathbf{y}_0| < \delta_1$, $\mu < \delta_2$ выполняется неравенство: $V_\mu(\mathbf{y}_0, t_0) \le \varepsilon_1^2\varepsilon_2$. Отсюда и из (6.13) следует оценка (6.6), которая доказывает устойчивость решения $\mathbf{x}(t) \equiv 0$ при всех $t \ge t_0$. $\square$

6.6. Выводы

Таким образом, описаны классы постоянно действующих стохастических возмущений типа белого шума, при которых в локально устойчивых динамических системах имеет место сильная устойчивость по вероятности на конечных, но асимптотически больших временных интервалах. Длина интервалов устойчивости зависит от скорости затухания возмущений. Предложенный метод основан на построении функций Ляпунова для возмущённой стохастической системы.

Результаты главы опубликованы в [93]. В [248] и [252] рассматривались иные предположения на функцию Ляпунова для детерминированной системы, которые гарантируют либо локальную экспоненциальную устойчивость равновесия, либо локальную асимптотическую устойчивость по части переменных. Результаты о потраекторной устойчивости динамических систем с вероятностью единица относительно стохастических возмущений опубликованы в [251] для аддитивного шума и в [255] для мультипликативного шума. Близкие результаты об устойчивости динамических систем относительно случайных возмущений, малых в среднем, содержатся в [246] и [247].

Глава 7

Бифуркации в асимптотически автономных почти гамильтоновых системах с шумом

7.1. Введение

Настоящая глава посвящена изучению влияния мультипликативных стохастических возмущений на асимптотически автономные гамильтоновы системы на плоскости. Предполагается, что интенсивность шума затухает со временем, а предельная система имеет нейтрально устойчивое положение равновесия типа центр. Обсуждаются бифуркации, связанные с изменением стохастической устойчивости равновесия, а также с появлением новых устойчивых состояний. Обоснование результатов проводится путём построения подходящих стохастических функций Ляпунова. В настоящей главе эта методика развита для класса асимптотически автономных гамильтоновых систем с мультипликативным шумом. В частности, описан метод нахождения таких функций, основанный на усредняющей замене переменных.

Глава организована следующим образом. В § 7.2 дана формулировка задачи и описан класс затухающих возмущений. Основные результаты представлены в § 7.3. В § 7.4 теория применяется к нелинейным колебательным системам с затухающими стохастическими возмущениями. Обоснование результатов содержится в § 7.5. В частности, в § 7.5.1 строятся замены переменных, упрощающие систему в главных членах асимптотики на бесконечности. Эти замены включают переход к переменным типа действие-угол, связанным с параметрами общего решения невозмущённой автономной системы, и преобразование, близкое к тождественному, переменной действия. Изучение структуры упрощённых уравнений и нелинейный анализ устойчивости приводят к описанию возможных бифуркаций в системе. Анализ устойчивости, основанный на построении стохастических функций Ляпунова, содержится в § 7.5.2, § 7.5.3 и § 7.5.4. Глава завершается кратким обсуждением полученных результатов.

7.2. Постановка задачи

Рассмотрим систему стохастических дифференциальных уравнений Ито на плоскости:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{b}(\mathbf{x},t)dt + \mathbf{B}(\mathbf{x},t)d\mathbf{w}(t), \quad t > s > 0, \quad \mathbf{x}(s) = \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2, \tag{7.1}$$

где $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$, $\mathbf{b}(\mathbf{x},t) \equiv (\partial_{x_2} H(x_1,x_2,t), -\partial_{x_1} H(x_1,x_2,t) + F(x_1,x_2,t))^T$, $\mathbf{B}(\mathbf{x},t) \equiv \{B_{i,j}(x_1,x_2,t)\}_{2\times 2}$ и $\mathbf{w}(t) = (w_1(t), w_2(t))^T$ — двумерный винеровский процесс, определённый на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Функции $H(x_1,x_2,t)$, $F(x_1,x_2,t)$, $B_{i,j}(x_1,x_2,t)$ определены для всех $(x_1,x_2,t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+$, бесконечно дифференцируемы и не зависят от $\omega \in \Omega$. Предполагается, что

$$\mathbf{b}(0,t) \equiv 0, \quad \mathbf{B}(0,t) \equiv 0, \tag{7.2}$$

и существует $M > 0$ такое, что

$$|\mathbf{b}(\mathbf{x}_1,t) - \mathbf{b}(\mathbf{x}_2,t)| \le M|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|, \quad \|\mathbf{B}(\mathbf{x}_1,t) - \mathbf{B}(\mathbf{x}_2,t)\| \le M|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2| \tag{7.3}$$

для всех $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^2$ и $t \ge s$, где $|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, а $\|\cdot\|$ — норма оператора, согласованная с нормой $|\cdot|$ в $\mathbb{R}^2$. Эти ограничения на коэффициенты гарантируют существование и единственность непрерывного (с вероятностью единица) решения $\mathbf{x}(t)$ для всех $t \ge s$ для любой начальной точки $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ (см., например, [227, § 5.2]).

Кроме того, предполагается, что система (7.1) асимптотически автономна, и для любого компакта $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$

$$\lim_{t\to\infty} H(x_1,x_2,t) = H_0(x_1,x_2), \quad \lim_{t\to\infty} F(x_1,x_2,t) = \lim_{t\to\infty} B_{i,j}(x_1,x_2,t) = 0$$

для всех $(x_1,x_2) \in \mathcal{D}$ и $i,j \in \{1,2\}$. Предельная автономная система

$$\frac{dx_1}{dt} = \partial_{x_2} H_0(x_1,x_2), \quad \frac{dx_2}{dt} = -\partial_{x_1} H_0(x_1,x_2) \tag{7.4}$$

имеет изолированную неподвижную точку $(0,0)$ типа центр. Без потери общности, предполагается, что

$$H_0(x_1,x_2)=\frac{|\mathbf{x}|^2}{2}+\mathcal{O}(|\mathbf{x}|^3),\quad |\mathbf{x}|\to 0,\tag{7.5}$$

и существуют $E_0>0$ и $r>0$ такие, что для всех $E\in[0,E_0]$ линии уровня $\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 : H_0(x_1,x_2)=E\}$, лежащие в $\mathcal{B}_r=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 : |\mathbf{x}|\le r\}$, определяют семейство замкнутых кривых на фазовом пространстве (x_1,x_2), параметризованном параметром E. Каждая из этих кривых соответствует периодическому решению $(x_1^0(t,E),x_2^0(t,E))$ системы (7.4) с периодом $T(E)=2\pi/\nu(E)$, где $\nu(E)\neq 0$ для всех $E\in[0,E_*]$ и $\nu(E)=1+\mathcal{O}(E)$ при $E\to 0$. Значение $E=0$ соответствует неподвижной точке $(0,0)$. Также предполагается, что $\mathcal{B}_r$ не содержит неподвижных точек предельной системы, кроме начала координат.

Затухающие возмущения предельной системы (7.4) описываются функциями со степенными асимптотическими разложениями:

$$\begin{aligned}H(x_1,x_2,t)&\sim H_0(x_1,x_2)+\sum_{k=1}^{\infty}t^{-\frac{k}{q}}H_k(x_1,x_2),\\ F(x_1,x_2,t)&\sim\sum_{k=1}^{\infty}t^{-\frac{k}{q}}F_k(x_1,x_2),\\ B_{i,j}(x_1,x_2,t)&\sim\sum_{k=1}^{\infty}t^{-\frac{k}{q}}B_{i,j,k}(x_1,x_2)\end{aligned}\tag{7.6}$$

при $t\to\infty$ с $q\in\mathbb{Z}_+$. Заметим, что ряды в (7.6) предполагаются асимптотическими при $t\to\infty$ равномерно для всех $(x_1,x_2)\in\mathcal{B}_r$.

В качестве примера рассмотрим линейную систему

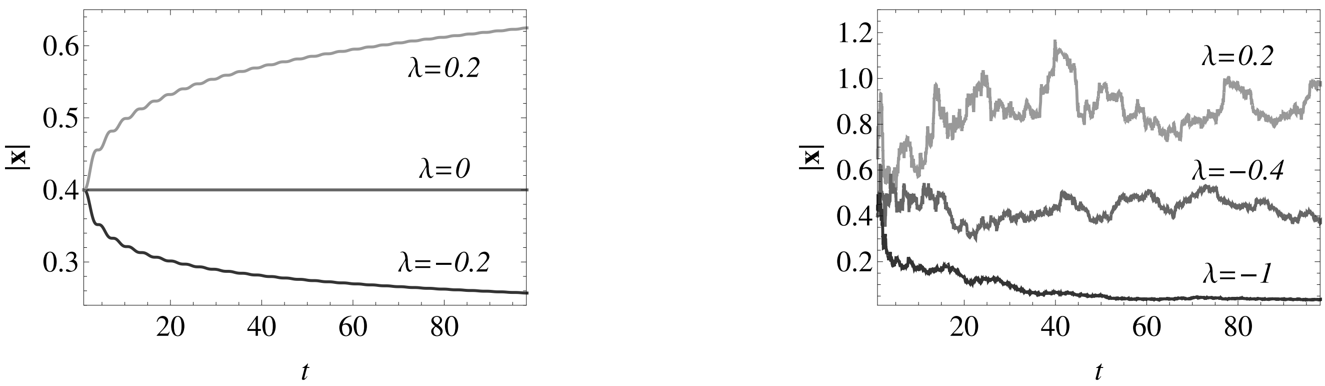
$$dx_1=x_2dt,\quad dx_2=(-x_1+t^{-1}\lambda x_2)\,dt+t^{-\frac12}\mu x_1\,dw_2(t),\quad t>1,\tag{7.7}$$

с $\lambda,\mu=\mathrm{const}$. Эта система имеет вид (7.1) с $q=2$, $H\equiv H_0\equiv|\mathbf{x}|^2/2$, $F\equiv t^{-1}\lambda x_2$, $B_{1,1}\equiv B_{1,2}\equiv B_{2,1}\equiv 0$ и $B_{2,2}\equiv t^{-1/2}\mu x_1$. Легко проверить, что автономная система с $\lambda=0$ и $\mu=0$ имеет периодическое общее решение $x_1^*(t;E,\varphi)=\sqrt{2E}\cos(t+\varphi)$, $x_2^*(t;E,\varphi)=-\sqrt{2E}\sin(t+\varphi)$ с периодом

$T(E) \equiv 2\pi$. Асимптотика двухпараметрического семейства решений возмущённой детерминированной системы с $\lambda \neq 0$ и $\mu = 0$ строится с помощью ВКБ-приближений (см., например, [99, гл. II, § 6]):

$$x_1(t) = t^{\frac{\lambda}{2}} \left(x_1^*(t; E, \varphi) + \mathcal{O}(t^{-1}) \right), \quad x_2(t) = t^{\frac{\lambda}{2}} \left(x_2^*(t; E, \varphi) + \mathcal{O}(t^{-1}) \right), \quad t \to \infty.$$

В этом случае устойчивость равновесия $(0, 0)$ зависит от знака параметра λ (см. рис. 7.1, а). Численный анализ системы (7.7) при $\lambda \neq 0$ и $\mu \neq 0$ показывает, что затухающие стохастические возмущения могут приводить к смещению границы устойчивости: устойчивость равновесия $(0, 0)$ изменяется при переходе λ через некоторое критическое значение $\lambda_*(\mu)$ (см. рис. 7.1, б). Более сложные примеры рассматриваются в разделе 7.4.



(а) $\mu = 0$ (б) $\mu = 1$

Рис. 7.1. Эволюция $|\mathbf{x}(t)|$ для реализаций решений системы (7.7) с начальными данными $x_1(1) = 0.4$, $x_2(1) = 0$.

В общем случае нелинейные члены уравнений с убывающими параметрами также влияют на качественное поведение решений систем вида (7.1). Цель настоящей главы — описание условий стохастической устойчивости системы (7.1) и выявление роли возмущений в соответствующих локальных бифуркациях.

7.3. Основные результаты

Покажем, что система (7.1) может быть упрощена, по крайней мере, в главных членах асимптотики, с помощью подходящей замены переменных.

Пусть $(x_1^0(t,E),x_2^0(t,E))$ — одно из $T(E)$-периодических решений системы (7.4) такое, что $H_0(x_1^0(t,E),x_2^0(t,E))\equiv E$ при $E\in[0,E_0]$. Обозначим $\mathcal{D}(E_0):=\{(x_1,x_2)\in\mathcal{B}_r:0\le H_0(x_1,x_2)\le E_0\}$ и

$$\langle f(\varphi)\rangle_\varphi:=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\varphi)\,d\varphi,\quad \{f(\varphi)\}_\varphi:=f(\varphi)-\langle f(\varphi)\rangle_\varphi.$$

Тогда справедлива

Теорема 48. *Пусть система* (7.1) *удовлетворяет условиям* (7.2), (7.3), (7.5) *и* (7.6). *Тогда для любого* $N\ge 1$ *существуют* $t_*\ge s$ *и цепочка обратимых преобразований* $(x_1,x_2)\to(E,\varphi)\to(v,\varphi)$, *определяемая соотношением*

$$x_1(t)=x_1^0\left(\frac{\varphi(t)}{\nu(E(t))},E(t)\right),\qquad x_2(t)=x_2^0\left(\frac{\varphi(t)}{\nu(E(t))},E(t)\right),\tag{7.8}$$

$$v(t)=V_N(E(t),\varphi(t),t),\qquad V_N(E,\varphi,t)\equiv E+\sum_{k=1}^N t^{-\frac{k}{q}}v_k(E,\varphi),\tag{7.9}$$

такая, что для всех $(x_1,x_2)\in\mathcal{D}(E_0)$ *и* $t\ge t_*$ *система* (7.1) *может быть преобразована к виду*

$$\begin{aligned}dv&=\left(\sum_{k=1}^N t^{-\frac{k}{q}}\Lambda_k(v)+\tilde\Lambda_N(v,\varphi,t)\right)dt+\sum_{j=1}^2\alpha_{1,j}(v,\varphi,t)\,dw_j(t),\\ d\varphi&=\Big(\nu(v)+\tilde G_N(v,\varphi,t)\Big)\,dt+\sum_{j=1}^2\alpha_{2,j}(v,\varphi,t)dw_j(t),\end{aligned}\tag{7.10}$$

где $v_k(E,\varphi)$, $\tilde\Lambda_N(v,\varphi,t)$, $\tilde G_N(v,\varphi,t)$ *и* $\alpha_{i,j}(v,\varphi,t)$ *являются* 2π*-периодическими по* φ, $\Lambda_k(0)\equiv\tilde\Lambda_N(0,\varphi,t)\equiv\alpha_{1,j}(0,\varphi,t)\equiv v_k(0,\varphi)\equiv 0$, *и справедливы следующие оценки:*

$$\tilde\Lambda_N(v,\varphi,t)=\mathcal{O}(t^{-\frac{N+1}{q}}),\quad \tilde G_N(v,\varphi,t)=\mathcal{O}(t^{-\frac{1}{q}}),\quad \alpha_{i,j}(v,\varphi,t)=\mathcal{O}(t^{-\frac{1}{q}})\tag{7.11}$$

при $t\to\infty$ *равномерно для всех* $v\in[0,E_0)$ *и* $\varphi\in\mathbb{R}$.

Доказательство содержится в § 7.5.1.

Заметим, что преобразование, описанное в теореме 48, может обнулить некоторые старшие члены в первом уравнении (7.10). Пусть $n \geq 1$ — целое число, такое, что

$$\Lambda_k(v) \equiv 0, \quad k < n, \quad \Lambda_n(v) \not\equiv 0. \tag{7.12}$$

Из структуру преобразований (7.8) и (7.9) следует, что устойчивость тривиального решения $\mathbf{x}(t) \equiv 0$ системы (7.1) связана с поведением траекторий системы (7.10) при $v(t)$, близких к нулю, которое зависит от структуры правой части первого уравнения системы (7.10). Заметим, что устойчивость решений в неавтономных системах зависит не только от главных и линейных членов уравнений при $t \to \infty$ и $v \to 0$ соответственно (см., например, гл. 1). С учётом этого рассмотрим следующие два случая:

$$\Lambda_n(v) = \lambda_n v \left(1 + \mathcal{O}(v)\right), \quad v \to 0; \tag{7.13}$$

$$\begin{cases} \Lambda_n(v) = \lambda_{n,m} v^m \left(1 + \mathcal{O}(v)\right), \\ \Lambda_k(v) = \mathcal{O}(v^m), \quad n < k < n + l, \\ \Lambda_{n+l}(v) = \lambda_{n+l} v \left(1 + \mathcal{O}(v)\right), \quad v \to 0. \end{cases} \tag{7.14}$$

Здесь λ_n, $\lambda_{n,m}$ и λ_{n+l} — ненулевые константы, n, m, l — целые числа, такие, что $n \geq 1$, $m \geq 2$, $l \geq 1$. Предположение (7.13) соответствует случаю, когда главный асимптотический член уравнения при $t \to \infty$ имеет ненулевую линейную часть. Предположение (7.14) охватывает случаи, когда главный член уравнения для v является нелинейным. Из второго уравнения (7.10) следует, что $|\varphi(t)| \to \infty$ почти наверное при $t \to \infty$, если $v(t) = \mathcal{O}(1)$.

Уточним определение стохастической устойчивости, которое будет использоваться.

Определение 6. *Решение $\mathbf{x}(t) \equiv 0$ системы (7.1) называется устойчивым по вероятности с весом $\gamma(t) > 0$, если существует $t_0 \geq s$ такое, что $\forall\, \varepsilon > 0$ и $\eta > 0$ $\exists\, \delta > 0$: для всех $|\mathbf{x}_0| < \delta$ решение $\mathbf{x}(t)$ системы (7.1) с начальными* *данными* $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ *удовлетворяет неравенству*

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t \geq t_0} \left(|\mathbf{x}(t)|\gamma(t)\right) > \varepsilon\right) < \eta. \tag{7.15}$$

Решение $\mathbf{x}(t) \equiv 0$ *называется неустойчивым по вероятности с весом* $\gamma(t)$, *если оно не является устойчивым по вероятности с этим весом.*

Это определение несколько модифицирует классическое понятие устойчивости по вероятности (см., например, [192, §5.3]) из-за множителя $\gamma(t)$ в неравенстве для решений, которое можно рассматривать как оценку нормы в пространстве непрерывных функций с весом $\gamma(t)$. В случае устойчивости (неустойчивости) с весом $\gamma(t) \equiv 1$ мы будем говорить, что решение $\mathbf{x}(t) \equiv 0$ устойчиво (неустойчиво) по вероятности.

Определим функцию

$$\gamma_n(t) \equiv \begin{cases} \exp\left(\dfrac{q}{q-n} t^{1-\frac{n}{q}}\right), & n \neq q, \\ t, & n = q. \end{cases}$$

Легко видеть, что $\gamma_n(t)$ растет экспоненциально (или полиномиально) при $t \to \infty$, если $n < q$ (или $n = q$), и $\gamma_n(t)$ ограничена, если $n > q$.

Рассмотрим сначала случай (7.13). Справедлива

Теорема 49. *Пусть система* (7.1) *удовлетворяет условиям* (7.2), (7.3), (7.5), (7.6), *и* $n \geq 1$ *— целое число, такое, что выполняются предположения* (7.12) *и* (7.13). *Если* $\lambda_n < 0$, *то для любого* $\kappa \in (0,1)$ *решение* $\mathbf{x}(t) \equiv 0$ *устойчиво по вероятности с весом* $(\gamma_n(t))^{(1-\kappa)|\lambda_n|/2}$.

Из теоремы 49 и определения функции $\gamma_n(t)$ следует, что устойчивость экспоненциальная, если $n < q$, полиномиальная, если $n = q$, и не асимптотическая, если $n > q$.

Опишем условия, гарантирующие потерю устойчивости. Рассмотрим дополнительное предположение об интенсивности стохастических возмущений в системе (7.1):

$$\exists\, \mu > 0 : \quad \left|\mathrm{tr}(\mathbf{B}^T\mathbf{B})\right| \le \mu^2 t^{-\sigma} |\mathbf{x}|^2 \tag{7.16}$$

для всех $(x_1, x_2) \in \mathcal{B}_r$ и $t \ge s$ с некоторой константой $\sigma > 0$. Тогда справедлива

Теорема 50. *Пусть система* (7.1) *удовлетворяет* (7.2), (7.3), (7.5), (7.6), *и* $1 \le n \le q$ *— целое число, такое, что предположения* (7.12), (7.13) *и* (7.16) *выполняются с* $\sigma \ge n/q$.

- *Если* $\lambda_n > 3\mu^2 \delta_{\sigma,n/q}$, *то решение* $\mathbf{x}(t) \equiv 0$ *неустойчиво по вероятности.*
- *Если* $\sigma = \dfrac{n}{q}$ *и* $0 < \lambda_n \le 3\mu^2$, *то для любого* $\kappa > 0$ *решение* $\mathbf{x}(t) \equiv 0$ *неустойчиво по вероятности с весом* $(\gamma_n(t))^{(3\mu^2 - \lambda_n + \kappa)/2}$.

Здесь $\delta_{\sigma,n/q}$ — символ Кронекера.

Заметим, что в случае $\sigma = n/q$ и $0 < \lambda_n \le 3\mu^2$ теорема 50 обеспечивает лишь слабую неустойчивость решения с растущим со временем весом. Можно показать, что в этом случае решение $\mathbf{x}(t) \equiv 0$ устойчиво по вероятности на конечном, но асимптотически большом интервале времени при $\mu \to 0$. Это свойство является вариантом практической устойчивости [201, § 25].

Теорема 51. *Пусть система* (7.1) *удовлетворяет условиям* (7.2), (7.3), (7.5), (7.6), *и* $1 \le n \le q$ *— целое число, такое, что предположения* (7.12), (7.13) *и* (7.16) *выполняются с* $\sigma = n/q$. *Если* $0 < \lambda_n \le 3\mu^2$, *то существует* $t_0 \ge s$ *такое, что* $\forall\, \varepsilon > 0$ *и* $\eta > 0$ $\exists\, \delta > 0$*: для всех* $|\mathbf{x}_0| < \delta$ *решение* $\mathbf{x}(t)$ *системы* (7.1) *с начальными данными* $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ *удовлетворяет неравенству*

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0 < t - t_0 \le \mathcal{T}} |\mathbf{x}(t)| > \varepsilon\right) < \eta, \tag{7.17}$$

где $\mathcal{T} = t_0^{n/q} \delta^2 (\sqrt{3}\varepsilon\mu)^{-2}$, *если* $n < q$, *и* $\mathcal{T} = t_0(\exp(\delta^2(\sqrt{3}\varepsilon\mu)^{-2}) - 1)$, *если* $n = q$.

Доказательства теорем 49, 50 и 51 содержатся в разделе 7.5.2.

Теперь рассмотрим случай, когда главный член в первом уравнении (7.10) сильно нелинеен при $v \to 0$. Определим

$$\vartheta = \frac{l}{q(m-1)}, \quad u_* = \left(\frac{|\lambda_{n+l} + \delta_{n+l,q}\vartheta|}{|\lambda_{n,m}|}\right)^{\frac{1}{m-1}},$$
$$d_\vartheta(\mathbf{x}, t; u_*) := t^\vartheta H_0(x_1, x_2) - u_*. \tag{7.18}$$

Тогда справедлива

Теорема 52. *Пусть система* (7.1) *удовлетворяет* (7.2), (7.3), (7.5), (7.6), *а* $n \geq 1$, $l \geq 1$, $m \geq 2$ *— целые числа, такие, что выполняются предположения* (7.12) *и* (7.14).

- *Если* $\lambda_{n,m} < 0$ *и* $\lambda_{n+l} < 0$, *то решение* $\mathbf{x}(t) \equiv 0$ *устойчиво по вероятности.*
- *Если* $n + l \leq q$, $\lambda_{n+l} + \delta_{n+l,q}\vartheta < 0$, *то решение* $\mathbf{x}(t) \equiv 0$ *устойчиво по вероятности с весом* $t^{\vartheta/2}(\gamma_{n+l}(t))^{(1-\kappa)|\lambda_{n+l}+\delta_{n+l,q}\vartheta|/2}$.
- *Если* $n + l = q$, $\lambda_{n,m} < 0$ *и* $\lambda_{n+l} > 0$, *то для любых* $\varepsilon > 0$ *и* $\eta > 0$ *существуют* $\delta_0 > 0$ *и* $t_0 > 0$ *такие, что решение* $\mathbf{x}(t)$ *системы* (7.1) *с начальными данными* $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, $|d_\vartheta(\mathbf{x}_0, t_0; u_*)| < \delta_0$, *удовлетворяет условию*

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{t \geq t_0} |d_\vartheta(\mathbf{x}(t), t; u_*)| > \varepsilon\Big) < \eta. \tag{7.19}$$

Заметим, что в случае (7.19) решение $\mathbf{x}(t)$ системы (7.1), стартуя из окрестности равновесия, с высокой вероятностью имеет следующее асимптотическое поведение: $|\mathbf{x}(t)| = \mathcal{O}(t^{-\vartheta/2})$ при $t \to \infty$. Это соответствует полиномиальной устойчивости равновесия $(0, 0)$.

Теорема 53. *Пусть система* (7.1) *удовлетворяет условиям* (7.2), (7.3), (7.5), (7.6), *и* $n \geq 1$, $l \geq 1$, $m \geq 2$ *— целые числа, такие, что предположения* (7.12), (7.14), (7.16) *выполняются с* $\sigma \geq (n + l)/q$ *и* $n + l \leq q$. *Если* $\lambda_{n,m} > 0$ *и* $\lambda_{n+l} > 3\mu^2\delta_{\sigma,(n+l)/q}$, *то решение* $\mathbf{x}(t) \equiv 0$ *неустойчиво по вероятности.*

Доказательство теорем 52 и 53 содержится в разделе 7.5.3.

Наконец, рассмотрим случай, когда затухающие возмущения приводят к появлению предельных циклов в системе (7.1). Введём ещё одно предположение:

$$\exists\, c \in (0, E_0): \quad \Lambda_n(c) = 0, \quad \Lambda_n'(c) \neq 0. \tag{7.20}$$

Справедлива следующая теорема:

Теорема 54. *Пусть система* (7.1) *удовлетворяет условиям* (7.2), (7.3), (7.5), (7.6), *и предположения* (7.12), (7.16), (7.20) *выполняются при* $n = q$ *и* $\sigma \geq 1$. *Если* $\Lambda_n'(c) < 0$, *то для любых* $\varepsilon > 0$ *и* $\eta > 0$ *существуют* $\delta > 0$ *и* $t_0 > 0$ *такие, что решение* $\mathbf{x}(t)$ *системы* (7.1) *с начальными данными* $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, $|d_0(\mathbf{x}_0, t_0; c)| < \delta$, *удовлетворяет условию*

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{0 < t - t_0 \leq \mathcal{T}} |d_0(\mathbf{x}(t), t; c)| > \varepsilon\Big) < \eta, \tag{7.21}$$

где $\mathcal{T} = t_0(\exp(\delta^2(\sqrt{2}\mu r)^{-2}) - 1)$, *если* $\sigma = 1$, *и* $\mathcal{T} = \infty$, *если* $\sigma > 1$.

Доказательство содержится в разделе 7.5.4.

Из (7.5) и (7.18) следует, что в случае (7.21) решение системы (7.1) с высокой вероятностью имеет следующее асимптотическое поведение: $|\mathbf{x}(t)| \approx \sqrt{2c}$ на большом временном интервале.

7.4. Примеры

7.4.1. Пример 1

Сначала рассмотрим затухающие возмущения системы (7.4) с

$$H_0(x_1, x_2) \equiv 1 - \cos x_1 + \frac{x_2^2}{2}. \tag{7.22}$$

Легко видеть, что в этом случае равновесие $(0, 0)$ предельной системы (7.4) является центром, а линии уровня $H_0(x_1, x_2) \equiv E$ с $E \in (0, 2)$, лежащие в окрестности равновесия, соответствуют $T(E)$-периодическим решениям с собственной частотой $\nu(E) \equiv 2\pi/T(E) = 1 - E/8 + \mathcal{O}(E^2)$ при $E \to 0$.

Рассмотрим возмущённую систему в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
&dx_1 = \partial_{x_2} H_0(x_1, x_2)\, dt,\\
&dx_2 = \Big(-\partial_{x_1} H_0(x_1, x_2) + t^{-\frac{h}{q}}\lambda x_2\Big)\, dt + t^{-\frac{p}{q}}\mu \sin x_1\, dw_2(t),
\end{aligned}
\qquad (7.23)
$$

при $0 < h, p \le q$ и $\lambda, \mu = \mathrm{const}$. Заметим, что эта система имеет вид (7.1) с $F \equiv t^{-h/q}\lambda x_2$, $B_{1,1} \equiv B_{1,2} \equiv B_{2,1} \equiv 0$ и $B_{2,2} \equiv t^{-p/q}\mu \sin x_1$.

Пусть $h = p = 1$ и $q = 2$. Тогда замены переменных, описанные в разделе 7.5.1 при $N = 1$ и

$$
v_1(E, \varphi) = -\frac{\lambda}{\nu(E)} \int\limits_0^{\varphi} \Big\{\big(X_2(\varsigma, E)\big)^2\Big\}_{\varsigma}\, d\varsigma + \frac{\lambda}{\nu(E)} \left\langle \int\limits_0^{\varphi} \Big\{\big(X_2(\varsigma, E)\big)^2\Big\}_{\varsigma}\, d\varsigma \right\rangle_{\varphi},
$$

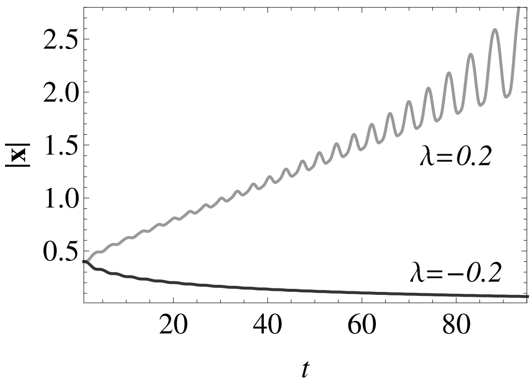
преобразуют (7.23) в (7.10) с функцией

$$
\Lambda_1(v) \equiv \lambda \left\langle \big(X_2(\varphi, v)\big)^2 \right\rangle_{\varphi} = v\big(\lambda + \mathcal{O}(v)\big), \quad v \to 0.
$$

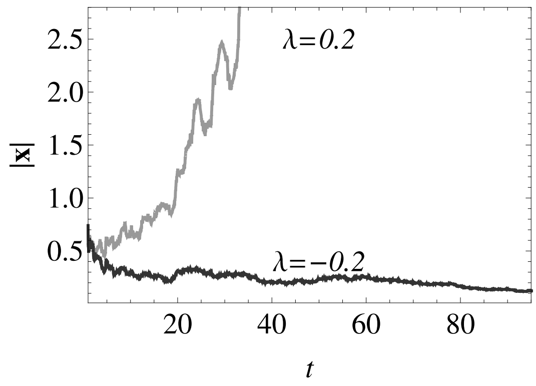
Легко проверить, что преобразованная система удовлетворяет соотношениям (7.12), (7.13) и (7.16) при $n = 1$, $\lambda_n = \lambda$ и $\sigma = 1 > n/q$. Следовательно, из теоремы 49 следует, что равновесие $(0, 0)$ системы (7.23) экспоненциально устойчиво по вероятности, если $\lambda < 0$. Из теоремы 50 следует, что равновесие $(0, 0)$ неустойчиво по вероятности, если $\lambda > 0$. В этом случае устойчивость равновесия определяется знаком коэффициента λ, как и в детерминированной системе при $\mu = 0$ (см. рис. 7.2).

Пусть $h = q = 2$ и $p = 1$. Заметим, что в этом случае при $\lambda = -1$ система (7.23) соответствует третьему уравнению Пенлеве (см., например, [34, гл. 13]) со стохастическим параметрическим возмущением. Под действием преобразований, описанных в § 7.5.1 с $N = 2$, $v_1(E, \varphi) \equiv 0$ и

$$
\begin{aligned}
v_2(E, \varphi) \equiv &-\frac{1}{\nu(E)} \int\limits_0^{\varphi} \Big\{\lambda\big(X_2(\varsigma, E)\big)^2 + \frac{\mu^2}{2}\big(\sin(X_1(\varsigma, E))\big)^2\Big\}_{\varsigma}\, d\varsigma\\
&+ \frac{1}{\nu(E)} \left\langle \int\limits_0^{\varphi} \Big\{\lambda\big(X_2(\varsigma, E)\big)^2 + \frac{\mu^2}{2}\big(\sin(X_1(\varsigma, E))\big)^2\Big\}_{\varsigma}\, d\varsigma \right\rangle_{\varphi},
\end{aligned}
$$



(а) $\mu = 0$



(б) $\mu = 1$

Рис. 7.2. Эволюция $|\mathbf{x}(t)|$ для реализаций решений системы (7.23) при $h = p = 1$, $q = 2$ и начальных данных $x_1(1) = 0.4$, $x_2(1) = 0$.

система (7.23) сводится к (7.10) с функциями $\Lambda_1(v) \equiv 0$ и

$$\Lambda_2(v) \equiv \left\langle \lambda\big(X_2(\varphi, v)\big)^2 + \frac{\mu^2}{2}\big(\sin(X_1(\varphi, v))\big)^2 \right\rangle_\varphi = v\left(\lambda + \frac{\mu^2}{2} + \mathcal{O}(v)\right)$$

при $v \to 0$. Легко видеть, что преобразованная система удовлетворяет (7.12), (7.13) и (7.16) при $n = 2$, $\lambda_n = \lambda + \mu^2/2$ и $\sigma = 1 = n/q$. Применяя теорему 49, получаем, что если $\lambda < -\mu^2/2$, то для любого $\kappa \in (0, 1)$ равновесие $(0, 0)$ устойчиво по вероятности с весом $t^{(1-\kappa)|\lambda_n|/2}$. Из теоремы 50 следует, что равновесие неустойчиво, если $\lambda > 5\mu^2/2$, и неустойчиво с весом, если $-\mu^2/2 < \lambda \le 5\mu^2/2$ (см. рис. 7.3). В последнем случае из теоремы 51 следует, что равновесие $(0, 0)$ устойчиво на асимптотически большом временном интервале.

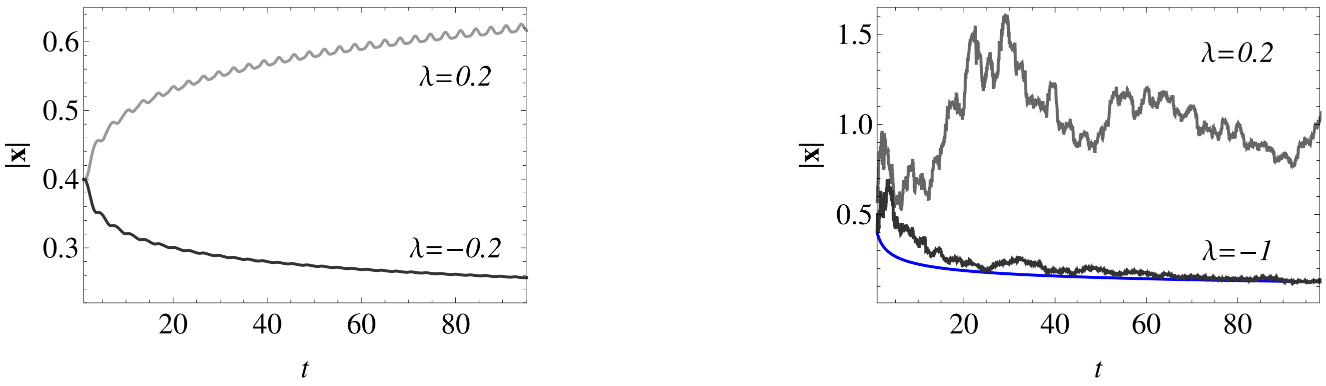
7.4.2. Пример 2

Рассмотрим возмущённую систему

$$\begin{aligned} dx_1 &= \partial_{x_2} H_0(x_1, x_2)\, dt, \\ dx_2 &= \left(-\partial_{x_1} H_0(x_1, x_2) + t^{-\frac{1}{2}} F_2(x_1, x_2) + t^{-1} F_4(x_2)\right) dt \\ &\quad + \left(t^{-\frac{1}{4}} B_{2,2,1}(x_1, x_2) + t^{-\frac{1}{2}} B_{2,2,2}(x_1)\right) dw_2(t), \end{aligned} \tag{7.24}$$

с гамильтонианом $H_0(x_1, x_2)$, определённым формулой (7.22), и функциями

$$F_2 \equiv \frac{a_2 x_1^2 x_2}{1 + x_1^2}, \quad F_4 \equiv a_4 x_2, \quad B_{2,2,1} \equiv \frac{b_1 x_1 x_2}{\sqrt{1 + x_1^2}}, \quad B_{2,2,2} \equiv b_2 x_1,$$



(а) $\mu = 0$ (б) $\mu = 1$

Рис. 7.3. Эволюция $|\mathbf{x}(t)|$ для реализаций решений системы (7.23) при $h = q = 2$, $p = 1$ и начальных данных $x_1(1) = 0,4$, $x_2(1) = 0$. Синяя кривая соответствует $|\mathbf{x}| = t^{-1/4}|\mathbf{x}(1)|$.

где $a_2, a_4, b_1, b_2 = \text{const}$. Легко видеть, что эта система имеет вид (7.1) с $q = 4$. Замены переменных, описанные в разделе 7.5.1 с $N = 4$, $v_1 \equiv 0$,

$$
\begin{aligned}
v_2 \equiv & -\frac{1}{2\nu(E)} \int\limits_0^{\varphi} \Big\{2X_2F_2(X_1,X_2) + \big(B_{2,2,1}(X_1,X_2)\big)^2\Big\}_{\varsigma}\, d\varsigma \\
& + \frac{1}{2\nu(E)} \left\langle \int\limits_0^{\varphi} \Big\{2X_2F_2(X_1,X_2) + \big(B_{2,2,1}(X_1,X_2)\big)^2\Big\}_{\varsigma}\, d\varsigma \right\rangle_{\varphi}, \\
v_3 \equiv & -\frac{1}{\nu(E)} \int\limits_0^{\varphi} \big\{B_{2,2,1}(X_1,X_2)B_{2,2,2}(X_1)\big\}_{\varsigma}\, d\varsigma \\
& + \frac{1}{\nu(E)} \left\langle \int\limits_0^{\varphi} \big\{B_{2,2,1}(X_1,X_2)B_{2,2,2}(X_1)\big\}_{\varsigma}\, d\varsigma \right\rangle_{\varphi}, \\
v_4 \equiv & -\frac{1}{2\nu(E)} \int\limits_0^{\varphi} \Big\{2X_2F_4(X_2) + \big(B_{2,2,2}(X_1)\big)^2 + 2R_4(E,\varsigma)\Big\}_{\varsigma}\, d\varsigma \\
& + \frac{1}{2\nu(E)} \left\langle \int\limits_0^{\varphi} \Big\{2X_2F_4(X_2) + \big(B_{2,2,2}(X_1)\big)^2 + 2R_4(E,\varsigma)\Big\}_{\varsigma}\, d\varsigma \right\rangle_{\varphi},
\end{aligned}
$$

приводят систему (7.24) к виду (7.10) с коэффициентами $\Lambda_1(v) \equiv 0$,

$$\Lambda_2(v) \equiv \frac{1}{2}\left\langle 2X_2F_2(X_1,X_2) + \big(B_{2,2,1}(X_1,X_2)\big)^2\right\rangle_\varphi = \frac{v^2}{4}\left(2a_2 + b_1^2 + \mathcal{O}(v)\right),$$

$$\Lambda_3(v) \equiv \left\langle B_{2,2,1}(X_1,X_2)B_{2,2,2}(X_1)\right\rangle_\varphi = \mathcal{O}(v^3),$$

$$\Lambda_4(v) \equiv \frac{1}{2}\left\langle 2X_2F_4(X_2) + \big(B_{2,2,2}(X_1)\big)^2 + 2R_4(v,\varphi)\right\rangle_\varphi = \frac{v}{2}\left(2a_4 + b_2^2 + \mathcal{O}(v)\right)$$

при $v \to 0$, где

$$\begin{aligned} R_4(E,\varphi) \equiv & -\partial_E\Lambda_2(E)v_2(E,\varphi) + F_2(X_1,X_2)\Big(X_2\partial_E + \partial_{x_2}\Phi(X_1,X_2)\partial_\varphi\Big)v_2(E,\varphi) \\ & + \frac{1}{2}\big(B_{2,2,1}(X_1,X_2)\big)^2\Big(\partial_E + \partial_{x_2}^2\Phi(X_1,X_2)\partial_\varphi\Big)v_2(E,\varphi) = \mathcal{O}(E^3) \end{aligned}$$

при $E \to 0$ равномерно для всех $\varphi \in \mathbb{R}$. Видно, что преобразованная система удовлетворяет (7.12) и (7.14) с $n = m = l = 2$, $\lambda_{n,m} = (2a_2 + b_1^2)/4$ и $\lambda_{n+l} = (2a_4 + b_2^2)/2$. В этом случае $n + l = q$, $\gamma_{n+l}(t) \equiv t$, $\vartheta = 1/2$, $u_* = 2|2a_4 + b_2^2 + 1|/|2a_2 + b_1^2|$ и $d_\vartheta(\mathbf{x}, t; u_*) \equiv t^{1/2}H_0(x_1,x_2) - u_*$. Из теоремы 52 следует, что положение равновесия $(0,0)$ системы (7.24) устойчиво по вероятности, если $a_2 < -b_1^2/2$ и $a_4 < -b_2^2/2$. Более того, для любого $\kappa \in (0,1)$ равновесие $(0,0)$ устойчиво с весом $t^{(\vartheta+(1-\kappa)|\lambda_{n+l}+\vartheta|)/2}$, если $a_4 < -(b_2^2+1)/2$ (см. рис. 7.4, а). Если $a_2 < -b_1^2/2$ и $a_4 > -b_2^2/2$, равновесие $(0,0)$ устойчиво в смысле (7.19). В последнем случае $H_0(x_1(t), x_2(t)) \sim u_* t^{-1/2}$ при $t \to \infty$ с высокой вероятностью для решений, начинающихся вблизи равновесия (см. рис. 7.5).

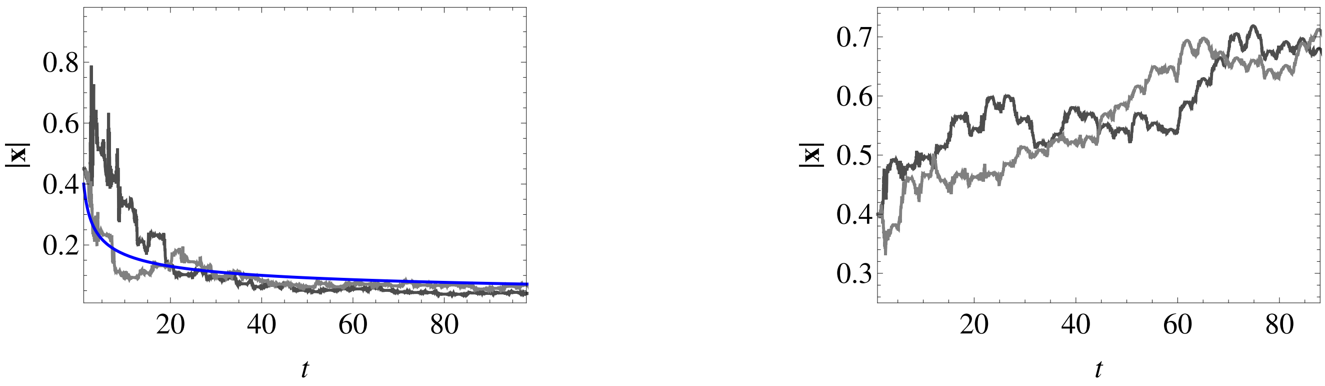
Если $b_1 = 0$, то система (7.24) дополнительно удовлетворяет (7.16) с $\sigma = 1 = (n+l)/q$ и $\mu = b_2^2$. Из теоремы 53 следует, что равновесие $(0,0)$ неустойчиво по вероятности, если $a_2 > 0$ и $a_4 > 5b_2^2/2$ (см. рис. 7.4, б).

7.4.3. Пример 3

Наконец, рассмотрим возмущённую систему

$$dx_1 = x_2\,dt, \quad dx_2 = \left(-x_1 + t^{-1}\frac{(a_1 + a_2x_1^2)x_2}{1+|\mathbf{x}|^2}\right)dt + t^{-\frac{1}{2}}\mu x_1\,dw_2(t) \tag{7.25}$$

при $a_1, a_2, \mu = \text{const}$. Очевидно, что эта система имеет вид (7.1) с $q = 2$, $H_0(x_1,x_2) \equiv |\mathbf{x}|^2/2$, $\nu(E) \equiv 1$. В этом случае $X_1(\varphi, E) = \sqrt{2E}\cos\varphi$ и $X_2(\varphi, E) =$



(а) $a_2 = 1$, $a_4 = -5/4$, $b_1 = 4$, $b_2 = 1$ (б) $a_2 = 0.1$, $a_4 = 0.2$, $b_1 = 0$, $b_2 = 0.2$

Рис. 7.4. Эволюция $|\mathbf{x}(t)|$ для реализаций решений системы (7.24) с начальными данными $x_1(1) = 0.4$, $x_2(1) = 0$ и различными значениями параметров. Синяя кривая соответствует $|\mathbf{x}(1)|t^{-3/8}$.

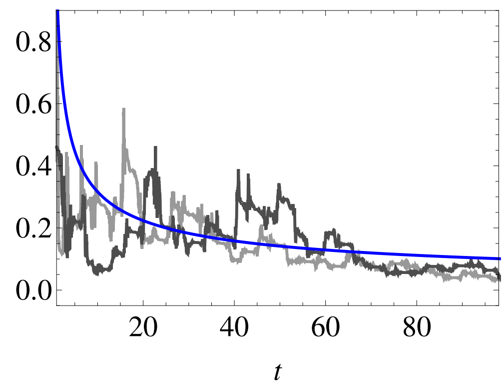


Рис. 7.5. Эволюция $H_0(x_1(t), x_2(t))$ для реализаций решений системы (7.24) при $a_2 = -2$, $a_4 = -1/4$, $b_1 = 1$, $b_2 = 1$ и различных начальных данных. Синяя кривая соответствует $u_* t^{-1/2}$.

$-\sqrt{2E}\sin\varphi$. Преобразования переменных, описанные в разделе 7.5.1 с $N = 2$, $v_1(E,\varphi) \equiv 0$ и

$$v_2(E,\varphi) \equiv -\int\limits_0^{\varphi} \left\{ \frac{(a_1 + a_2 X_1^2)X_2^2}{1+2E} + \frac{\mu^2 X_1^2}{2} \right\}_{\varsigma} d\varsigma + \left\langle \int\limits_0^{\varphi} \left\{ \frac{(a_1 + a_2 X_1^2)X_2^2}{1+2E} + \frac{\mu^2 X_1^2}{2} \right\}_{\varsigma} d\varsigma \right\rangle_{\varphi},$$

приводят систему (7.25) к виду (7.10) с коэффициентами $\Lambda_1(v) = 0$ и

$$\Lambda_2(v) \equiv \left\langle \frac{(a_1 + a_2 X_1^2)X_2^2}{1+2v} + \frac{\mu^2 X_1^2}{2} \right\rangle_{\varphi} = \frac{v\big(2a_1 + \mu^2 + v(a_2 + 2\mu^2)\big)}{2(1+2v)}.$$

Легко видеть, что преобразованная система удовлетворяет (7.12), (7.13) и (7.16) при $n = 2$, $\lambda_n = a_1 + \mu^2/2$ и $\sigma = n/q = 1$. Из теоремы 50 следует, что равновесие $(0, 0)$ неустойчиво, если $a_1 > 5\mu^2/2$. Если, кроме того, $a_2 < -2\mu^2$, то система (7.25) удовлетворяет условию (7.20) с $c = (2a_1 + \mu^2)/|a_2 + 2\mu^2| > 0$, таким, что $\Lambda_2(c) = 0$ и $\Lambda_2'(c) = -(2a_1 + \mu^2)/(2(1 + 2c)) < 0$. Следовательно, применяя теорему 54, заключаем, что существует режим $|\mathbf{x}_*(t)| \approx \sqrt{2c}$, устойчивый на асимптотически большом временном интервале (см. рис. 7.6).

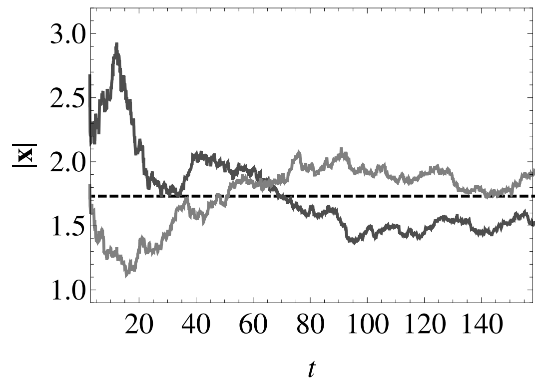


Рис. 7.6. Эволюция $|\mathbf{x}(t)|$ для реализаций решений системы (7.25) при $\mu = 1/2$, $a_1 = 1$ и $a_2 = -2$. Пунктирная линия соответствует $|\mathbf{x}| = \sqrt{2c} = \sqrt{3}$.

7.5. Обоснование результатов

7.5.1. Замена переменных

Доказательство теоремы 48. Рассмотрим вспомогательные 2π-периодические функции

$$X_1(\varphi, E) \equiv x_1^0\left(\frac{\varphi}{\nu(E)}, E\right), \quad X_2(\varphi, E) \equiv x_2^0\left(\frac{\varphi}{\nu(E)}, E\right).$$

Из (7.4) следует, что

$$\nu(E)\frac{\partial X_1}{\partial \varphi} = \partial_{X_2} H_0(X_1, X_2), \quad \nu(E)\frac{\partial X_2}{\partial \varphi} = -\partial_{X_1} H_0(X_1, X_2).$$

Эти функции используются для переписывания системы (7.1) в переменных типа действие-угол (E, φ). Дифференцируя тождество $H_0(X_1(\varphi, E), X_2(\varphi, E)) \equiv$

E по E, получаем

$$\det \frac{\partial(X_1, X_2)}{\partial(\varphi, E)} = \begin{vmatrix} \partial_\varphi X_1 & \partial_E X_1 \\ \partial_\varphi X_2 & \partial_E X_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{\nu(E)} \neq 0.$$

Следовательно, преобразование $(x_1, x_2) \mapsto (E, \varphi)$ обратимо для всех $E \in [0, E_0]$ и $\varphi \in [0, 2\pi)$. Обозначим через

$$E = I(x_1, x_2), \quad \varphi = \Phi(x_1, x_2) \tag{7.26}$$

обратное преобразование к (7.8), и через

$$\begin{aligned} L :=& \partial_t + \partial_{x_2} H \partial_{x_1} + (-\partial_{x_1} H + F)\,\partial_{x_2} \\ &+ \frac{B_{1,1}^2 + B_{1,2}^2}{2}\partial_{x_1}^2 + (B_{1,1}B_{2,1} + B_{1,2}B_{2,2})\partial_{x_1}\partial_{x_2} + \frac{B_{2,1}^2 + B_{2,2}^2}{2}\partial_{x_2}^2 \end{aligned} \tag{7.27}$$

обозначим производящий дифференциальный оператор марковского процесса, определённого системой (7.1). Применяя формулу Ито к (7.26), можно показать, что в новых координатах (E, φ) возмущённая система (7.1) имеет вид

$$\begin{aligned} dE &= f(E, \varphi, t)dt + \sum_{j=1}^{2} \beta_{1,j}(E, \varphi, t)dw_j(t), \\ d\varphi &= \big(\nu(E) + g(E, \varphi, t)\big)dt + \sum_{j=1}^{2} \beta_{2,j}(E, \varphi, t)dw_j(t), \end{aligned} \tag{7.28}$$

где

$$\begin{pmatrix} f(E, \varphi, t) \\ g(E, \varphi, t) \end{pmatrix} \equiv -\begin{pmatrix} 0 \\ \nu(E) \end{pmatrix} + L \begin{pmatrix} I(x_1, x_2) \\ \Phi(x_1, x_2) \end{pmatrix}\Bigg|_{\substack{x_1 = X_1(\varphi, E) \\ x_2 = X_2(\varphi, E)}},$$

$$\begin{pmatrix} \beta_{1,j}(E, \varphi, t) \\ \beta_{2,j}(E, \varphi, t) \end{pmatrix} \equiv \sum_{i=1}^{2} B_{i,j}(x_1, x_2, t)\,\partial_{x_i} \begin{pmatrix} I(x_1, x_2) \\ \Phi(x_1, x_2) \end{pmatrix}\Bigg|_{\substack{x_1 = X_1(\varphi, E) \\ x_2 = X_2(\varphi, E)}}.$$

Легко проверить, что

$$\partial_{x_1}\begin{pmatrix} I(x_1,x_2)\\ \Phi(x_1,x_2)\end{pmatrix}\Bigg|_{\substack{x_1=X_1(\varphi,E)\\ x_2=X_2(\varphi,E)}} \equiv \begin{pmatrix} -\nu\partial_\varphi X_2\\ \nu\partial_E X_2\end{pmatrix},$$

$$\partial_{x_2}\begin{pmatrix} I(x_1,x_2)\\ \Phi(x_1,x_2)\end{pmatrix}\Bigg|_{\substack{x_1=X_1(\varphi,E)\\ x_2=X_2(\varphi,E)}} \equiv \begin{pmatrix} \nu\partial_\varphi X_1\\ -\nu\partial_E X_1\end{pmatrix},$$

$$\partial^2_{x_1}\begin{pmatrix} I(x_1,x_2)\\ \Phi(x_1,x_2)\end{pmatrix}\Bigg|_{\substack{x_1=X_1(\varphi,E)\\ x_2=X_2(\varphi,E)}} \equiv \nu(\partial_E X_2\partial_\varphi-\partial_\varphi X_2\partial_E)\begin{pmatrix} -\nu\partial_\varphi X_2\\ \nu\partial_E X_2\end{pmatrix},$$

$$\partial^2_{x_2}\begin{pmatrix} I(x_1,x_2)\\ \Phi(x_1,x_2)\end{pmatrix}\Bigg|_{\substack{x_1=X_1(\varphi,E)\\ x_2=X_2(\varphi,E)}} \equiv \nu(\partial_\varphi X_1\partial_E-\partial_E X_1\partial_\varphi)\begin{pmatrix} \nu\partial_\varphi X_1\\ -\nu\partial_E X_1\end{pmatrix},$$

$$\partial_{x_1}\partial_{x_2}\begin{pmatrix} I(x_1,x_2)\\ \Phi(x_1,x_2)\end{pmatrix}\Bigg|_{\substack{x_1=X_1(\varphi,E)\\ x_2=X_2(\varphi,E)}} \equiv \nu(\partial_\varphi X_1\partial_E-\partial_E X_1\partial_\varphi)\begin{pmatrix} -\nu\partial_\varphi X_2\\ \nu\partial_E X_2\end{pmatrix}.$$

Отсюда вытекает, что функции f, g и $\beta_{i,j}$ являются 2π-периодическими по φ. Из условия (7.2) следует, что $f(0,\varphi,t)\equiv 0$ и $\beta_{1,j}(E,\varphi,t)\equiv 0$. Из (7.4) и (7.5) следует, что $X_1(\varphi,E)=\mathcal{O}(\sqrt{E})$ и $X_2(\varphi,E)=\mathcal{O}(\sqrt{E})$ при $E\to 0$ равномерно для всех $\varphi\in\mathbb{R}$. Таким образом,

$$\begin{aligned} f(E,\varphi,t)&=\mathcal{O}(E), & g(E,\varphi,t)&=\mathcal{O}(1),\\ \beta_{1,j}(E,\varphi,t)&=\mathcal{O}(E), & \beta_{2,j}(E,\varphi,t)&=\mathcal{O}(1) \end{aligned} \tag{7.29}$$

при $E\to 0$ равномерно для всех $\varphi\in\mathbb{R}$ и $t\geq s$. Более того, из (7.6) следует, что эти функции имеют следующие асимптотические разложения:

$$\begin{aligned} f(E,\varphi,t)&\sim\sum_{k=1}^{\infty}t^{-\frac{k}{q}}f_k(E,\varphi), & g(E,\varphi,t)&\sim\sum_{k=1}^{\infty}t^{-\frac{k}{q}}g_k(E,\varphi),\\ \beta_{i,j}(E,\varphi,t)&\sim\sum_{k=1}^{\infty}t^{-\frac{k}{q}}\beta_{i,j,k}(E,\varphi) \end{aligned}$$

при $t\to\infty$ равномерно для всех $E\in[0,E_0]$ и $\varphi\in\mathbb{R}$, где

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} f_k\\ g_k\end{pmatrix} &\equiv (\partial_{x_2}H_k\partial_{x_1}+(-\partial_{x_1}H_k+F_k)\partial_{x_2})\begin{pmatrix} I\\ \Phi\end{pmatrix}\Bigg|_{\substack{x_1=X_1(\varphi,E)\\ x_2=X_2(\varphi,E)}}\\ &+\frac{1}{2}\sum_{i_1+i_2=k}(B_{1,1,i_1}B_{1,1,i_2}+B_{1,2,i_1}B_{1,2,i_2})\partial^2_{x_1}\begin{pmatrix} I\\ \Phi\end{pmatrix}\Bigg|_{\substack{x_1=X_1(\varphi,E)\\ x_2=X_2(\varphi,E)}}\\ &+\frac{1}{2}\sum_{i_1+i_2=k}(B_{2,1,i_1}B_{2,1,i_2}+B_{2,2,i_1}B_{2,2,i_2})\partial^2_{x_2}\begin{pmatrix} I\\ \Phi\end{pmatrix}\Bigg|_{\substack{x_1=X_1(\varphi,E)\\ x_2=X_2(\varphi,E)}}\\ &+\sum_{i_1+i_2=k}(B_{1,1,i_1}B_{2,1,i_2}+B_{1,2,i_1}B_{2,2,i_2})\partial_{x_1}\partial_{x_2}\begin{pmatrix} I\\ \Phi\end{pmatrix}\Bigg|_{\substack{x_1=X_1(\varphi,E)\\ x_2=X_2(\varphi,E)}},\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \beta_{1,j,k}\\ \beta_{2,j,k}\end{pmatrix}\equiv\sum_{i=1}^{2}B_{i,j,k}\,\partial_{x_i}\begin{pmatrix} I\\ \Phi\end{pmatrix}\Bigg|_{\substack{x_1=X_1(\varphi,E)\\ x_2=X_2(\varphi,E)}}.$$

Из (7.28) следует, что $\varphi(t)$ изменяется быстрее возможных изменений $E(t)$ при больших значениях t. Следующее упрощение системы связано с усреднением первого уравнения в (7.28) по φ.

Рассмотрим преобразование, близкое к тождественному, в следующей форме:

$$V_N(E,\varphi,t)=E+\sum_{k=1}^{N}t^{-\frac{k}{q}}v_k(E,\varphi) \tag{7.30}$$

с некоторым целым числом $N\geq 1$. Коэффициенты $v_k(E,\varphi)$ ищутся таким образом, чтобы коэффициент сноса первого уравнения преобразованной системы (7.10) в новой переменной $v(t)\equiv V_N(E(t),\varphi(t),t)$ не зависел явно от φ, по крайней мере, в главных членах асимптотики с некоторыми функциями $\Lambda_k(v)$, а остаток удовлетворял оценке $\tilde\Lambda_N(v,\varphi,t)=\mathcal{O}(t^{-(N+1)/q})$ при $t\to\infty$. Применяя формулу Ито к $V_N(E,\varphi,t)$ вдоль траекторий системы (7.28), получаем

$$dv=\mathcal{L}V_Ndt+\sum_{j=1}^{2}\big(\beta_{1,j}\partial_EV_N+\beta_{2,j}\partial_\varphi V_N\big)\,dw_j(t), \tag{7.31}$$

где

$$\begin{aligned}\mathcal{L} :=&\partial_t + f\partial_E + (\nu + g)\partial_\varphi \\ &+ \frac{1}{2}(\beta_{1,1}^2 + \beta_{1,2}^2)\partial_E^2 + (\beta_{1,1}\beta_{2,1} + \beta_{1,2}\beta_{2,2})\partial_E\partial_\varphi + \frac{1}{2}(\beta_{2,1}^2 + \beta_{2,2}^2)\partial_\varphi^2\end{aligned} \tag{7.32}$$

— производящий дифференциальный оператор, связанный с системой (7.28). Легко проверить, что

$$\begin{aligned}\mathcal{L}V_N =&\sum_{k=1}^\infty t^{-\frac{k}{q}}\Big(f_k + \nu\partial_\varphi v_k - \frac{k-q}{q}v_{k-q}\Big) + \sum_{k=2}^\infty t^{-\frac{k}{q}}\sum_{i_1+i_2=k}(f_{i_1}\partial_E + g_{i_1}\partial_\varphi)v_{i_2} \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{k=3}^\infty t^{-\frac{k}{q}}\sum_{i_1+i_2+i_3=k}\big\{(\beta_{1,1,i_1}\beta_{1,1,i_2} + \beta_{1,2,i_1}\beta_{1,2,i_2})\partial_E^2 \\ &+2(\beta_{1,1,i_1}\beta_{2,1,i_2} + \beta_{1,2,i_1}\beta_{2,2,i_2})\partial_E\partial_\varphi + (\beta_{2,1,i_1}\beta_{2,1,i_2} + \beta_{2,2,i_1}\beta_{2,2,i_2})\partial_\varphi^2\big\}\, v_{i_3},\end{aligned}$$

где предполагается, что $f_k \equiv g_k \equiv \beta_{i,j,k} \equiv 0$, если $k < 1$, и $v_m \equiv 0$, если $m > N$ или $m < 1$. Сопоставление (7.31) с первым уравнением в (7.10) даёт следующую цепочку дифференциальных уравнений для определения $v_k(E,\varphi)$:

$$\nu(E)\partial_\varphi v_k = \Lambda_k(E) - f_k(E,\varphi) - R_k(E,\varphi), \quad 1 \le k \le N, \tag{7.33}$$

где каждая функция R_k выражается через $v_1, \dots, v_{k-1}$. В частности, $R_1 \equiv 0$,

$$\begin{aligned}R_2 \equiv& (f_1\partial_E + g_1\partial_\varphi)v_1 - v_1\partial_E\Lambda_1 - \frac{2-q}{q}v_{2-q}, \\ R_3 \equiv& \sum_{i_1+i_2=3}\Big((f_{i_1}\partial_E + g_{i_1}\partial_\varphi)v_{i_2} - v_{i_1}\partial_E\Lambda_{i_2}\Big) - \frac{v_1^2}{2}\partial_E^2\Lambda_1 - \frac{3-q}{q}v_{3-q} \\ &+ \frac{\beta_{1,1,1}^2 + \beta_{1,2,1}^2}{2}\partial_E^2 v_1 + (\beta_{1,1,1}\beta_{2,1,1} + \beta_{1,2,1}\beta_{2,1,1})\partial_E\partial_\varphi v_1 + \frac{\beta_{2,1,1}^2 + \beta_{2,2,1}^2}{2}\partial_\varphi^2 v_1.\end{aligned}$$

Определим

$$\Lambda_k(E) = \langle f_k(E,\varphi) + R_k(E,\varphi)\rangle_\varphi. \tag{7.34}$$

Тогда для любого $k \in [1,N]$ правая часть (7.33) является 2π-периодической по φ с нулевым средним. Интегрирование (7.33) даёт

$$v_k(E,\varphi) = -\frac{1}{\nu(E)}\int\limits_0^\varphi \{f_k(E,\varsigma) + R_k(E,\varsigma)\}_\varsigma\, d\varsigma + \hat{v}_k(E),$$

где $\hat{v}_k(E)$ выбрано таким образом, что $\langle v_k(E,\varphi)\rangle_\varphi \equiv 0$. Таким образом, каждая функция $v_k(E,\varphi)$ является гладкой и периодической относительно φ. Более того, из (7.33) и (7.34) следует, что $v_k(E,\varphi) = \mathcal{O}(E)$ и $\Lambda_k(E) = \mathcal{O}(E)$ при $E \to 0$ равномерно для всех $\varphi \in \mathbb{R}$.

Из (7.30) следует, что для любого $\epsilon \in (0,1)$ существует $t_* \geq s$ такое, что

$$|V_N(E,\varphi,t) - E| \leq \epsilon E, \quad |\partial_E V_N(E,\varphi,t) - 1| \leq \epsilon, \quad |\partial_\varphi V_N(E,\varphi,t)| \leq \epsilon E \tag{7.35}$$

для всех $E \in [0, E_0]$, $\varphi \in \mathbb{R}$ и $t \geq t_*$. Следовательно, отображение $(E,\varphi,t) \mapsto (v,\varphi,t)$ обратимо для всех $v \in [0, v_*]$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ и $t \geq t_*$, причём $v_* = (1-\epsilon)E_0$.

Пусть $E = \mathcal{E}(v,\varphi,t)$ — обратное преобразование к (7.30). Тогда,

$$\begin{aligned}
\alpha_{1,j}(v,\varphi,t) &\equiv \left(\beta_{1,j}(E,\varphi,t)\partial_E + \beta_{2,j}(E,\varphi,t)\partial_\varphi\right) V_N(E,\varphi,t)\big|_{E=\mathcal{E}(v,\varphi,t)}, \\
\tilde{\Lambda}_N(v,\varphi,t) &\equiv -\sum_{k=1}^N t^{-\frac{k}{q}}\Lambda_k(v) + \mathcal{L}V_N(E,\varphi,t)\big|_{E=\mathcal{E}(v,\varphi,t)}.
\end{aligned}$$

Второе уравнение в системе (7.28) не претерпевает существенных изменений при преобразовании (7.30). В частности, $\tilde{G}_N(v,\varphi,t) \equiv \nu(\mathcal{E}(v,\varphi,t)) - \nu(v) + g(\mathcal{E}(v,\varphi,t),\varphi,t)$ и $\alpha_{2,j}(v,\varphi,t) \equiv \beta_{2,j}(\mathcal{E}(v,\varphi,t),\varphi,t)$ во втором уравнении преобразованной системы (7.10). Легко проверить, что

$$\tilde{\Lambda}_N(v,\varphi,t) = \mathcal{O}(t^{-\frac{N+1}{q}}), \quad \tilde{G}_N(v,\varphi,t) = \mathcal{O}(t^{-\frac{1}{q}}), \quad \alpha_{i,j}(v,\varphi,t) = \mathcal{O}(t^{-\frac{1}{q}})$$

при $t \to \infty$ равномерно для всех $v \in [0, v_*]$ и $\varphi \in \mathbb{R}$. Из (7.29) следует, что

$$\begin{aligned}
\tilde{\Lambda}_N(v,\varphi,t) &= \mathcal{O}(v), & \tilde{G}_N(v,\varphi,t) &= \mathcal{O}(1), \\
\alpha_{1,j}(v,\varphi,t) &= \mathcal{O}(v), & \alpha_{2,j}(v,\varphi,t) &= \mathcal{O}(1)
\end{aligned}$$

при $v \to 0$ равномерно для всех $t \geq t_*$ и $\varphi \in \mathbb{R}$. □

7.5.2. Анализ устойчивости в случае (7.13)

Доказательство теоремы 49. Зафиксируем $\kappa \in (0,1)$ и рассмотрим

$$U_{n,\kappa}(x_1,x_2,t) = \gamma_{n,\kappa}(t) V_N(I(x_1,x_2), \Phi(x_1,x_2), t)$$

при $N=n$ и положительной функции $\gamma_{n,\kappa}(t)\equiv(\gamma_n(t))^{(1-\kappa)|\lambda_n|}$ в качестве кандидата на функцию Ляпунова для системы (7.1). Функция $V_N(E,\varphi,t)$, имеющая вид (7.30), была построена в предыдущем разделе. Функции $I(x_1,x_2)$ и $\Phi(x_1,x_2)$ определяются формулой (7.26). Из (7.5) и (7.35) следует, что для любого $\epsilon>0$ существует $r_*\in(0,r]$ такое, что

$$(1-\epsilon)^2\frac{|\mathbf{x}|^2}{2}\le V_n(I(x_1,x_2),\Phi(x_1,x_2),t)\le(1+\epsilon)^2\frac{|\mathbf{x}|^2}{2} \tag{7.36}$$

для всех $t\ge t_*$ и $(x_1,x_2)\in\mathcal{B}_{r_*}\subseteq\mathcal{D}(E_0)$. Легко проверить, что

$$LU_{n,\kappa}(x_1,x_2,t)\equiv\frac{\gamma_{n,\kappa}'(t)}{\gamma_{n,k}(t)}U_{n,\kappa}(x_1,x_2,t)+\gamma_{n,\kappa}(t)\mathcal{L}V_n(I(x_1,x_2),\Phi(x_1,x_2),t).$$

Напомним, что L и $\mathcal{L}$ определяются выражениями (7.27) и (7.32) соответственно. Заметим, что $\gamma_{n,\kappa}'(t)/\gamma_{n,\kappa}(t)\equiv(1-\kappa)|\lambda_n|t^{-n/q}$. Объединяя это с (7.12), получаем

$$LU_{n,\kappa}(x_1,x_2,t)=t^{-\frac{n}{q}}U_{n,\kappa}(x_1,x_2,t)\Big(-\kappa|\lambda_n|+\mathcal{O}(|\mathbf{x}|^2)+\mathcal{O}(t^{-\frac{1}{q}})\Big)$$

при $t\to\infty$ и $\mathbf{x}\to 0$. Следовательно, для любого $\epsilon\in(0,1)$ существуют $t_0\ge t_*$ и $r_0\le r_*$, такие, что

$$\begin{aligned}LU_{n,\kappa}(x_1,x_2,t)&\le -t^{-\frac{n}{q}}U_{n,\kappa}(x_1,x_2,t)(1-\epsilon)\kappa|\lambda_n|\\&\le -t^{-\frac{n}{q}}\gamma_{n,\kappa}(t)\frac{|\mathbf{x}|^2}{2}(1-\epsilon)^3\kappa|\lambda_n|\le 0\end{aligned} \tag{7.37}$$

для всех $t\ge t_0$ и $(x_1,x_2)\in\mathcal{B}_{r_0}$.

Зафиксируем параметры $0<\varepsilon<r_0\sqrt{\gamma_{n,\kappa}(t_0)}$ и $0<\eta<1$. Пусть $\mathbf{x}(t)\equiv(x_1(t),x_2(t))^T$ — решение системы (7.1) с начальными данными $(x_1(t_0),x_2(t_0))\in\mathcal{B}_\delta$, $0<\delta<\varepsilon$, а τ_ε — время первого выхода $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ из области $\mathcal{B}_\varepsilon$ при $t>t_0$, где $\tilde{\mathbf{x}}(t)\equiv\mathbf{x}(t)\sqrt{\gamma_{n,\kappa}(t)}$. Определим функцию $\tau_\varepsilon(t)=\min\{\tau_\varepsilon,t\}$, тогда $\tilde{\mathbf{x}}(\tau_\varepsilon(t))$ — процесс, остановленный в момент первого выхода из $\mathcal{B}_\varepsilon$. Из (7.37) следует, что $U(x_1(\tau_\varepsilon(t)),x_2(\tau_\varepsilon(t)),\tau_\varepsilon(t))$ — неотрицательный супермартингал (см., например, [192, §5.2]). Следовательно, используя (7.36) и определение $\tau_\varepsilon(t)$, получаем следующее:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\sup_{t\geq t_0}|\tilde{\mathbf{x}}(t)|\geq\varepsilon\right)&=\mathbb{P}\left(\sup_{t\geq t_0}\big(|\mathbf{x}(\tau_\varepsilon(t))|^2\gamma_{n,\kappa}(\tau_\varepsilon(t))\big)\geq\varepsilon^2\right)\\
&\leq\mathbb{P}\left(\sup_{t\geq t_0}U_{n,\kappa}\big(x_1(\tau_\varepsilon(t)),x_2(\tau_\varepsilon(t)),\tau_\varepsilon(t)\big)\geq(1-\epsilon)^2\frac{\varepsilon^2}{2}\right)\\
&\leq\frac{2U_{n,\kappa}(x_1(t_0),x_2(t_0),t_0)}{(1-\epsilon)^2\varepsilon^2}.
\end{aligned}
$$

Последняя оценка следует из неравенства Дуба для супермартингалов. Из (7.36) следует, что

$$
U_{n,\kappa}(x_1(t_0),x_2(t_0),t_0)\leq\gamma_{n,\kappa}(t_0)(1+\epsilon)^2\frac{\delta^2}{2}.
$$

Следовательно, принимая $\delta=\varepsilon\sqrt{\eta/\gamma_{n,\kappa}(t_0)}(1-\epsilon)/(1+\epsilon)$, получаем (7.15) с $\gamma(t)\equiv\sqrt{\gamma_{n,\kappa}(t)}$. □

Доказательство теоремы 50. Доказательство неустойчивости основано на построении подходящей функции Ляпунова для системы (7.1) и воспроизводит рассуждения из [192, §5.4] с некоторыми изменениями.

1. Пусть $\lambda_n>3\mu^2\delta_{\sigma,n/q}$. Рассмотрим

$$
U_1(x_1,x_2,t)=\log\left((1+\epsilon)^2\frac{r^2}{2}\right)-\log V_N(I(x_1,x_2),\Phi(x_1,x_2),t) \tag{7.38}
$$

с $N=n$ в качестве кандидата на функцию Ляпунова для системы (7.1). Из (7.36) следует, что $U_1(x_1,x_2,t)\geq\log(r/|\mathbf{x}|)^2\geq 0$ для всех $t\geq t_*$ и $(x_1,x_2)\in\mathcal{B}_{r_*}$. Легко проверить, что

$$
LU_1(x_1,x_2,t)\equiv\frac{1}{2}\mathrm{tr}\big(\mathbf{B}^T\mathbf{M}\mathbf{B}\big)-\frac{\mathcal{L}V_n(E,\varphi,t)}{V_n(E,\varphi,t)}\bigg|_{\substack{E=I(x_1,x_2)\\ \varphi=\Phi(x_1,x_2)}},
$$

где

$$
\mathbf{M}(\mathbf{x},t)\equiv\frac{1}{\big(V_n(E,\varphi,t)\big)^2}\begin{pmatrix}(\partial_{x_1}V_n)^2 & \partial_{x_1}V_n\partial_{x_2}V_n\\ \partial_{x_1}V_n\partial_{x_2}V_n & (\partial_{x_2}V_n)^2\end{pmatrix}\Bigg|_{\substack{E=I(x_1,x_2)\\ \varphi=\Phi(x_1,x_2)}}.
$$

Из (7.5), (7.16), (7.35) и (7.36) следует, что для любого $\epsilon \in (0,1)$ существуют $r_1 \in (0, r_*]$ и $t_1 \geq t_*$ такие, что

$$\left|\mathrm{tr}(\mathbf{B}^T\mathbf{M}\mathbf{B})\right| \leq 6\mu^2 t^{-\sigma}\left(\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}\right)^4$$

для всех $t \geq t_1$ и $(x_1, x_2) \in \mathcal{B}_{r_1}$. Объединяя это с (7.13), получаем

$$LU_1(x_1,x_2,t) \leq t^{-\frac{n}{q}}\left(-\lambda_n + 3\mu^2 t^{-(\sigma-\frac{n}{q})}\left(\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}\right)^4 + \mathcal{O}(|\mathbf{x}|^2) + \mathcal{O}\big(t^{-\frac{1}{q}}\big)\right) \quad (7.39)$$

при $t \to \infty$ и $\mathbf{x} \to 0$. Выбор достаточно малого параметра $\epsilon > 0$ гарантирует существование $t_2 \geq t_1$ и $r_2 \leq r_1$ таких, что $LU_1(x_1, x_2, t) \leq 0$ для всех $t \geq t_2$ и $(x_1, x_2) \in \mathcal{B}_{r_2}$.

Рассмотрим также вспомогательную функцию

$$U_*(x_1,x_2,t) = (1+\epsilon)^2\frac{r^2}{2} - V_N(I(x_1,x_2),\Phi(x_1,x_2),t) \quad (7.40)$$

с $N = n$. Легко видеть, что

$$LU_*(x_1,x_2,t) = -t^{-\frac{n}{q}}V_n\big(I(x_1,x_2),\Phi(x_1,x_2),t\big)\Big(\lambda_n + \mathcal{O}(|\mathbf{x}|^2) + \mathcal{O}\big(t^{-\frac{1}{q}}\big)\Big)$$

при $t \to \infty$ и $\mathbf{x} \to 0$. Следовательно, для любого $\epsilon \in (0,1)$ существуют $r_3 \in (0, r_*]$ и $t_3 \geq t_*$, такие, что

$$U_*(x_1,x_2,t) \geq 0, \quad LU_*(x_1,x_2,t) \leq -t^{-\frac{n}{q}}\frac{|\mathbf{x}|^2}{2}(1-\epsilon)^3\lambda_n \leq 0 \quad (7.41)$$

для всех $t \geq t_3$ и $|\mathbf{x}| \leq r_3$.

Определим $r_0 = \min\{r_2, r_3\}$, $t_0 = \max\{t_2, t_3\}$ и зафиксируем $\varepsilon \in (0, r_0]$. Пусть $\mathbf{x}(t) \equiv (x_1(t), x_2(t))^T$ — решение системы (7.1) с начальными данными $(x_1(t_0), x_2(t_0)) \in \mathcal{B}_\varepsilon$ и пусть $\delta \in (0, |\mathbf{x}_0|)$. Определим

$$\tau_{\delta,\varepsilon} = \inf\left\{t > t_0 : |\mathbf{x}(t)| = \delta \ \text{ или } \ |\mathbf{x}(t)| = \varepsilon\right\},$$

$$\tau_\delta = \inf\left\{t > t_0 : |\mathbf{x}(t)| = \delta\right\}, \quad \tau_\varepsilon = \inf\left\{t > t_0 : |\mathbf{x}(t)| = \varepsilon\right\}.$$

Видим, что $\tau_{\delta,\varepsilon}$, τ_ε и τ_δ — первые моменты достижения решения $\mathbf{x}(t)$ границ областей $\overline{\mathcal{B}_\varepsilon \setminus \mathcal{B}_\delta}$, $\mathcal{B}_\varepsilon$ и $\mathcal{B}_\delta$ соответственно. Обозначим $\tau_{\delta,\varepsilon}(t) = \min\{\tau_{\delta,\varepsilon}, t\}$. Из свойств функции $U_1(x_1,x_2,t)$ следует, что

$$U_1(x_1(\tau_{\delta,\varepsilon}(t)),x_2(\tau_{\delta,\varepsilon}(t)),\tau_{\delta,\varepsilon}(t))$$

является неотрицательным супермартингалом и

$$\mathbb{E}\,U_1\big(x_1(\tau_{\delta,\varepsilon}(t)),x_2(\tau_{\delta,\varepsilon}(t)),\tau_{\delta,\varepsilon}(t)\big)\le U_1(x_1(t_0),x_2(t_0),t_0) \qquad (7.42)$$

для всех $t\ge t_0$. Заметим, что построенная функция $U_*(x_1,x_2,t)$, удовлетворяющая оценкам (7.41) с $n/q\le 1$, гарантирует повторение $\mathbf{x}(t)$ (см. [192, Теорема 3.9]). Это означает, что $\mathbb{P}(\tau_{\delta,\rho}<\infty)=1$. Следовательно, подставляя $t\to\infty$ в (7.42), получаем

$$\begin{aligned} U_1(x_1(t_0),x_2(t_0),t_0) &\ge \mathbb{E}\,U_1\big(x_1(\tau_{\delta,\varepsilon}),x_2(\tau_{\delta,\varepsilon}),\tau_{\delta,\varepsilon}\big)\\ &\ge \mathbb{E}\,U_1\big(x_1(\tau_\delta),x_2(\tau_\delta),\tau_\delta\big)\chi_{\{\tau_\delta<\tau_\varepsilon\}}\\ &\ge \mathbb{P}(\tau_\delta<\tau_\varepsilon)\inf_{t\ge t_0,\,|\mathbf{x}|=\delta}U_1(x_1,x_2,t)\\ &\ge \mathbb{P}\left(\sup_{t_0\le t\le\tau_\delta}|\mathbf{x}(t)|<\varepsilon\right)\log\left(\frac{r}{\delta}\right)^2, \end{aligned} \qquad (7.43)$$

где $\chi_{\{\tau_\delta<\tau_\varepsilon\}}$ — индикаторная функция множества $\{\omega\in\Omega:\tau_\delta<\tau_\varepsilon\}$. Заметим, что точка $(0,0)^T$ недоступна для траекторий процесса $\mathbf{x}(t)$ (см. [192, Лемма 5.3]). Следовательно, $\tau_\delta\to\infty$ при $\delta\to 0$ с вероятностью единица. Объединяя это с (7.43), получаем

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t\ge t_0}|\mathbf{x}(t)|<\varepsilon\right)=0.$$

Это означает, что решение $\mathbf{x}(t)\equiv 0$ не является устойчивым по вероятности с весом $\gamma(t)\equiv 1$.

2. Пусть $\sigma=n/q$ и $0<\lambda_n\le 3\mu^2$. Зафиксируем параметр $\kappa>0$ и рассмотрим $U_2(x_1,x_2,t)=U_1(x_1,x_2,t)-\log\gamma_{n,\kappa}(t)+K$ с некоторым параметром K и положительной функцией $\gamma_{n,\kappa}(t)\equiv(\gamma_n(t))^{3\mu^2-\lambda_n+\kappa}$ в качестве кандидата на функцию Ляпунова для системы (7.1). Заметим, что $\partial_t\log\gamma_{n,\kappa}(t)\equiv(3\mu^2-\lambda_n+\kappa)t^{-n/q}$. Объединяя это с (7.39), получаем

$$LU_2(x_1,x_2,t)\le t^{-\frac{n}{q}}\left(-\kappa+3\mu^2\left[\left(\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}\right)^4-1\right]+\mathcal{O}(|\mathbf{x}|^2)+\mathcal{O}\big(t^{-\frac{1}{q}}\big)\right)$$

при $t \to \infty$ и $\mathbf{x} \to 0$. Выбор $\epsilon > 0$ достаточно малым гарантирует существование $t_\kappa \geq t_1$ и $r_\kappa \leq r_1$ таких, что $LU_2(x_1, x_2, t) \leq 0$ для всех $t \geq t_\kappa$ и $(x_1, x_2) \in \mathcal{B}_{r_\kappa}$.

Определим $r_0 = \min\{r_\kappa, r_3\} \leq r$, $t_0 = \max\{t_\kappa, t_3\}$ и зафиксируем $0 < \varepsilon < r_0\sqrt{\gamma_{n,\kappa}(t_0)}$. Пусть $\mathbf{x}(t) \equiv (x_1(t), x_2(t))^T$ — решение системы (7.1) с начальными данными $\mathbf{x}_0 = (x_1(t_0), x_2(t_0))^T$, такими, что $|\mathbf{x}_0| \leq \varepsilon/\sqrt{\gamma_{n,\kappa}(t_0)}$, и пусть $0 < \delta < \sqrt{\gamma_{n,\kappa}(t_0)}|\mathbf{x}_0|$. Определим

$$\tilde{\tau}_{\delta,\varepsilon} = \inf\left\{t > t_0 : |\tilde{\mathbf{x}}(t)| = \delta \ \text{ или } \ |\tilde{\mathbf{x}}(t)| = \varepsilon\right\},$$
$$\tilde{\tau}_\delta = \inf\left\{t > t_0 : |\tilde{\mathbf{x}}(t)| = \delta\right\}, \quad \tilde{\tau}_\varepsilon = \inf\left\{t > t_0 : |\tilde{\mathbf{x}}(t)| = \varepsilon\right\}$$

и $\tilde{\tau}_{\delta,\varepsilon}(t) = \min\{\tilde{\tau}_{\delta,\varepsilon}, t\}$, где $\tilde{\mathbf{x}}(t) \equiv \mathbf{x}(t)\sqrt{\gamma_{n,\kappa}(t)}$. Выберем $K = \log\gamma_{n,\kappa}(t_0)$, тогда

$$U_2\big(x_1(\tilde{\tau}_{\delta,\varepsilon}(t)), x_2(\tilde{\tau}_{\delta,\varepsilon}(t)), \tilde{\tau}_{\delta,\varepsilon}(t)\big) \geq \log\left(\frac{\gamma_{n,\kappa}(t_0)r^2}{\varepsilon^2}\right) \geq 0.$$

Следовательно, $U_2(x_1(\tilde{\tau}_{\delta,\varepsilon}(t)), x_2(\tilde{\tau}_{\delta,\varepsilon}(t)), \tilde{\tau}_{\delta,\varepsilon}(t))$ является неотрицательным супермартингалом и

$$\mathbb{E}\,U_2\big(x_1(\tilde{\tau}_{\delta,\varepsilon}(t)), x_2(\tilde{\tau}_{\delta,\varepsilon}(t)), \tilde{\tau}_{\delta,\varepsilon}(t)\big) \leq U_2(x_1(t_0), x_2(t_0), t_0) \tag{7.44}$$

для всех $t \geq t_0$. Рассуждая, как и выше, получаем $\mathbb{P}(\tilde{\tau}_{\delta,\varepsilon} < \infty) = 1$, и, подставляя $t \to \infty$ в (7.44), получаем

$$\begin{aligned}
U_2(x_1(t_0), x_2(t_0), t_0) &\geq \mathbb{E}\,U_2\big(x_1(\tilde{\tau}_{\delta,\varepsilon}), x_2(\tilde{\tau}_{\delta,\varepsilon}), \tilde{\tau}_{\delta,\varepsilon}\big) \\
&\geq \mathbb{E}\,U_2\big(x_1(\tilde{\tau}_\delta), x_2(\tilde{\tau}_\delta), \tilde{\tau}_\delta\big)\chi_{\{\tilde{\tau}_\delta < \tilde{\tau}_\varepsilon\}} \\
&\geq \log\left(\frac{\gamma_{n,\kappa}(t_0)r^2}{\delta^2}\right)\mathbb{P}(\tilde{\tau}_\delta < \tilde{\tau}_\varepsilon) \\
&= \log\left(\frac{\gamma_{n,\kappa}(t_0)r^2}{\delta^2}\right)\mathbb{P}\left(\sup_{t_0 \leq t \leq \tilde{\tau}_\delta}|\tilde{\mathbf{x}}(t)| < \varepsilon\right).
\end{aligned} \tag{7.45}$$

Поскольку $\tilde{\tau}_\delta \to \infty$ при $\delta \to 0$ с вероятностью единица, из (7.45) следует, что

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t \geq t_0}|\tilde{\mathbf{x}}(t)| < \varepsilon\right) = 0.$$

Следовательно, решение $\mathbf{x}(t) \equiv 0$ неустойчиво по вероятности с весом $\gamma(t) \equiv \sqrt{\gamma_{n,\kappa}(t)}$. $\square$

Доказательство теоремы 51. Рассмотрим вспомогательную функцию, определённую с помощью (7.9), $U(x_1,x_2,t)\equiv V_n(I(x_1,x_2),\Phi(x_1,x_2),t)$ с параметром $N=n$. Из (7.11), (7.13) и (7.36) следует, что для любого $\epsilon\in(0,1)$ существуют $t_0\ge t_*$ и $r_0\le r_*$, такие, что

$$(1-\epsilon)^2\frac{|\mathbf{x}|^2}{2}\le U(x_1,x_2,t)\le(1+\epsilon)^2\frac{|\mathbf{x}|^2}{2},\quad LU(x_1,x_2,t)\le t^{-\frac{n}{q}}(1+\epsilon)^2\frac{3\mu^2|\mathbf{x}|^2}{2}$$

для всех $t\ge t_0$ и $(x_1,x_2)\in\mathcal{B}_{r_0}$. Зафиксируем параметры $\varepsilon\in(0,r_0)$ и $\eta\in(0,1)$. Пусть $\mathbf{x}(t)\equiv(x_1(t),x_2(t))^T$ — решение системы (7.1) с начальными данными $(x_1(t_0),x_2(t_0))\in\mathcal{B}_\delta$, где $\delta\in(0,\varepsilon)$, а τ_D — момент первого выхода процесса $(x_1(t),x_2(t),t)$ из области $D(\varepsilon,t_0,\mathcal{T})=\{(x_1,x_2,t):(x_1,x_2)\in\mathcal{B}_\varepsilon,\quad t_0\le t\le t_0+\mathcal{T}\}$. Параметры $\delta>0$ и $\mathcal{T}>0$ будут определены ниже. Определим функцию $\tau_D(t)=\min\{\tau_D,t\}$.

1. Пусть $n<q$. Рассмотрим

$$U_1(x_1,x_2,t)=U(x_1,x_2,t)+t_0^{-\frac{n}{q}}\frac{3\mu^2\varepsilon^2}{2}(1+\epsilon)^2(\mathcal{T}+t_0-t)$$

в качестве кандидата на функцию Ляпунова для системы (7.1). Легко проверить, что

$$U_1(x_1,x_2,t)\ge U(x_1,x_2,t)\ge0,\quad LU_1(x_1,x_2,t)\le t_0^{-\frac{n}{q}}(1+\epsilon)^2\frac{3\mu^2(|\mathbf{x}|^2-\varepsilon^2)}{2}\le0$$

для всех $(x_1,x_2,t)\in D(\varepsilon,t_0,\mathcal{T})$. Следовательно, $U_1(x_1(\tau_D(t)),x_2(\tau_D(t)),\tau_D(t))$ является неотрицательным супермартингалом, и справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\sup_{t_0\le t\le t_0+\mathcal{T}}|\mathbf{x}(t)|\ge\varepsilon\right)&=\mathbb{P}\left(\sup_{t\ge t_0}|\mathbf{x}(\tau_D(t))|^2\ge\varepsilon^2\right)\\&\le\mathbb{P}\left(\sup_{t\ge t_0}U_1(x_1(\tau_D(t)),x_2(\tau_D(t)),\tau_D(t))\ge(1-\epsilon)^2\frac{\varepsilon^2}{2}\right)\\&\le\frac{2U_1(x_1(t_0),x_2(t_0),t_0)}{(1-\epsilon)^2\varepsilon^2}.\end{aligned}$$

Заметим, что $U_1(x_1(t_0),x_2(t_0),t_0)\le(1+\epsilon)^2(\delta^2+3\mu^2\varepsilon^2t_0^{-n/q}\mathcal{T})/2$. Выберем $\delta=\varepsilon\sqrt{C\eta}$ и $\mathcal{T}=(\sqrt{3}\mu)^{-2}t_0^{n/q}C\eta=(\sqrt{3}\mu)^{-2}t_0^{n/q}(\delta/\varepsilon)^2$ с параметром $C=((1-\epsilon)/(1+\epsilon))^2/2$. Тогда мы получаем (7.17).

2. Пусть $n = q$. Используя

$$U_2(x_1,x_2,t) = U(x_1,x_2,t) + \frac{3\mu^2\varepsilon^2}{2}(1+\epsilon)^2\log\left(\frac{\mathcal{T}+t_0}{t}\right)$$

в качестве кандидата на функцию Ляпунова, получаем

$$U_2(x_1,x_2,t) \geq U(x_1,x_2,t) \geq 0, \quad LU_2(x_1,x_2,t) \leq t^{-1}(1+\epsilon)^2\frac{3\mu^2(|\mathbf{x}|^2-\varepsilon^2)}{2} \leq 0$$

для всех $(x_1,x_2,t) \in D(\varepsilon,t_0,\mathcal{T})$. Это означает, что $U_2(x_1(\tau_D(t)),x_2(\tau_D(t)),\tau_D(t))$ — неотрицательный супермартингал, и, как и в предыдущем случае, мы получаем оценку

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t_0\leq t\leq t_0+\mathcal{T}}|\mathbf{x}(t)| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{2U_2(x_1(t_0),x_2(t_0),t_0)}{(1-\epsilon)^2\varepsilon^2}.$$

Легко видеть, что $U_2(x_1(t_0),x_2(t_0),t_0) \leq (1+\epsilon)^2(\delta^2+3\mu^2\varepsilon^2\log(1+\mathcal{T}/t_0))/2$. Выберем $\delta = \varepsilon\sqrt{C\eta}$ и $\mathcal{T} = t_0(\exp(C(\sqrt{3}\mu)^{-2}\eta)-1)$. Тогда мы получаем (7.17).

□

7.5.3. Анализ устойчивости в случае (7.14)

Доказательство теоремы 52. 1. Пусть $\lambda_{n,m} < 0$ и $\lambda_{n+l} < 0$. Используя

$$U_1(x_1,x_2,t) = V_N(I(x_1,x_2),\Phi(x_1,x_2),t)$$

с $N = n + l$ в качестве кандидата на функцию Ляпунова для системы (7.1), получаем

$$\begin{aligned} LU_1(x_1,x_2,t) \equiv & \mathcal{L}V_{n+l}(E,\varphi,t)\big|_{\substack{E=I(x_1,x_2)\\ \varphi=\Phi(x_1,x_2)}} \\ = & t^{-\frac{n}{q}}\big(U_1(x_1,x_2,t)\big)^m\left(\lambda_{n,m}+\mathcal{O}(U_1)+\mathcal{O}(t^{-\frac{1}{q}})\right) \\ & + t^{-\frac{n+l}{q}}U_1(x_1,x_2,t)\left(\lambda_{n+l}+\mathcal{O}(U_1)+\mathcal{O}(t^{-\frac{1}{q}})\right) \end{aligned} \tag{7.46}$$

при $t \to \infty$ и $|\mathbf{x}| \to 0$. Следовательно, для любого $\epsilon > 0$ существуют $r_0 \in (0, r]$ и $t_0 \geq t_*$ такие, что

$$(1-\epsilon)^2\frac{|\mathbf{x}|^2}{2} \leq U_1(x_1,x_2,t) \leq (1+\epsilon)^2\frac{|\mathbf{x}|^2}{2}, \quad LU_1(x_1,x_2,t) \leq 0 \tag{7.47}$$

для всех $t \ge t_0$ и $(x_1, x_2) \in \mathcal{B}_{r_0} \subseteq \mathcal{D}(E_0)$.

Зафиксируем параметры $\varepsilon \in (0, r_0)$ и $\eta \in (0,1)$. Пусть $\mathbf{x}(t) \equiv (x_1(t), x_2(t))^T$ — решение системы (7.1) с начальными данными $(x_1(t_0), x_2(t_0)) \in \mathcal{B}_\delta$, где $\delta \in (0, \varepsilon)$, а τ_ε — время первого выхода $\mathbf{x}(t)$ из области $\mathcal{B}_\varepsilon$ при $t > t_0$. Определим функцию $\tau_\varepsilon(t) = \min\{\tau_\varepsilon, t\}$. Из (7.47) следует, что $U_1(x_1(\tau_\varepsilon(t)), x_2(\tau_\varepsilon(t)), \tau_\varepsilon(t))$ является неотрицательным супермартингалом, и справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\sup_{t\ge t_0} |\mathbf{x}(t)| \ge \varepsilon\right) &= \mathbb{P}\left(\sup_{t\ge t_0} |\mathbf{x}(\tau_\varepsilon(t))|^2 \ge \varepsilon^2\right) \\ &\le \mathbb{P}\left(\sup_{t\ge t_0} U_1\big(x_1(\tau_\varepsilon(t)), x_2(\tau_\varepsilon(t)), \tau_\varepsilon(t)\big) \ge (1-\epsilon)^2\frac{\varepsilon^2}{2}\right) \\ &\le \frac{2U_1(x_1(t_0), x_2(t_0), t_0)}{(1-\epsilon)^2\varepsilon^2}.\end{aligned}$$

Так как $U_1(x_1(t_0), x_2(t_0), t_0) \le (1+\epsilon)^2\delta^2/2$, то можно выбрать $\delta = \varepsilon\sqrt{\eta}(1-\epsilon)/(1+\epsilon)$, чтобы получить (7.15) с $\gamma(t) \equiv 1$.

2. Пусть $n + l \le q$ и $\lambda^*_{n+l} := \lambda_{n+l} + \delta_{n+l,q}\vartheta < 0$, где $\vartheta = l/(q(m-1)) > 0$. Рассмотрим $U_2(x_1, x_2, t) = \gamma_{n+l,\kappa,\vartheta}(t) U_1(x_1, x_2, t)$ с положительной функцией $\gamma_{n+l,\kappa,\vartheta}(t) \equiv t^\vartheta (\gamma_{n+l}(t))^{(1-\kappa)|\lambda^*_{n+l}|}$ в качестве кандидата на функцию Ляпунова. Заметим, что

$$\partial_t \log \gamma_{n+l,\kappa,\vartheta}(t) \equiv \vartheta t^{-1} + (1-\kappa)|\lambda^*_{n+l}| t^{-\frac{n+l}{q}}.$$

Объединяя это с (7.46), получаем

$$\begin{aligned}LU_2(x_1, x_2, t) &\equiv U_2(x_1, x_2, t)\partial_t \log \gamma_{n+l,\kappa,\vartheta}(t) + \gamma_{n+l,\kappa,\vartheta}(t) LU_1(x_1, x_2, t) \\ &= t^{-\frac{n+l}{q}} U_2(x_1, x_2, t)\left(-\kappa|\lambda^*_{n+l}| + \mathcal{O}(t^{-\frac{\varkappa}{q}})\right)\end{aligned}$$

при $t \to \infty$ и $\mathbf{x} \to 0$, где $\varkappa = \min\{1, q\vartheta, q(1-\kappa)|\lambda^*_{n+l}|\}$. Следовательно, для любого $\epsilon > 0$ существуют $t_0 \ge t_*$ и $r_0 \le r_*$, такие, что

$$LU_2(x_1, x_2, t) \le -t^{-\frac{n+l}{q}}(1-\epsilon) U_2(x_1, x_2, t)\kappa|\lambda^*_{n+l}| \le 0$$

для всех $t \geq t_0$ и $(x_1, x_2) \in \mathcal{B}_{r_0} \subseteq \mathcal{D}(E_0)$. Повторяя доказательство теоремы 49, можно показать, что для любых $\varepsilon > 0$ и $\eta > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что равновесие $(0,0)$ системы (7.1) устойчиво по вероятности с весом $\gamma(t) \equiv \sqrt{\gamma_{n+l,\kappa,\vartheta}(t)}$.

3. Наконец, рассмотрим случай $n+l = q$, $\lambda_{n+l} > 0$ и $\lambda_{n,m} < 0$. Зафиксируем параметры $\varepsilon > 0$ и $\eta > 0$. Определим

$$D(\delta, t_0) = \{(x_1, x_2, t) \in \mathcal{B}_r \times \{t \geq t_0\} : \quad |d_\vartheta(\mathbf{x}, t; u_*)| \leq \delta\}$$

с некоторыми $0 < \delta < \varepsilon$ и $t_0 \geq t_*$. Рассмотрим вспомогательные функции

$$U_\vartheta(x_1, x_2, t) = t^\vartheta U_1(x_1, x_2, t), \quad u(x_1, x_2, t) \equiv U_\vartheta(x_1, x_2, t) - u_*.$$

Из (7.30) следует, что существует $M_1 > 0$ такое, что

$$|d_\vartheta(\mathbf{x}, t; u_*)| - M_1 t^{-\frac{1}{q}} \leq |u(x_1, x_2, t)| \leq |d_\vartheta(\mathbf{x}, t; u_*)| + M_1 t^{-\frac{1}{q}} \tag{7.48}$$

для всех $(x_1, x_2, t) \in D(\delta, t_0)$. Легко проверить, что

$$\begin{aligned} LU_\vartheta(x_1, x_2, t) &\equiv \vartheta t^{-1} U_\vartheta(x_1, x_2, t) + t^\vartheta L U_1(x_1, x_2, t) \\ &= t^{-\frac{n+l}{q}} U_\vartheta \left(\lambda_{n+l} + \delta_{n+l,q}\vartheta + \lambda_{n,m} U_\vartheta^{m-1} + \tilde{R}(x_1, x_2, t)\right) \end{aligned} \tag{7.49}$$

для всех $t \geq t_*$ и $(x_1, x_2) \in \mathcal{D}(E_0)$ с $\tilde{R}(x_1, x_2, t) = \mathcal{O}(t^{-\varkappa/q})$, $\varkappa = \min\{1, q\vartheta\}$ при $t \to \infty$. Заметим, что существует $M_2 > 0$, такое что

$$U_\vartheta(x_1, x_2, t)|\tilde{R}(x_1, x_2, t)| \leq M_2 t^{-\frac{\varkappa}{q}} \quad \forall\, (x_1, x_2, t) \in D(\delta, t_0).$$

Объединяя это с (7.49), получаем

$$L|u(x_1, x_2, t)| \leq -t^{-1} U_\vartheta |\lambda_{n,m}| \left|U_\vartheta^{m-1} - u_*^{m-1}\right| + M_2 t^{-1-\frac{\varkappa}{q}} \tag{7.50}$$

для всех $(x_1, x_2, t) \in D(\delta, t_0)$. Рассмотрим

$$U_3(x_1, x_2, t) = |u(x_1, x_2, t)| + \left(M_1 + \frac{q}{\varkappa} M_2\right) t^{-\frac{\varkappa}{q}}$$

в качестве кандидата на функцию Ляпунова для системы (7.1). Учитывая (7.48) и (7.50), получаем

$$\begin{aligned} &|d_\vartheta(\mathbf{x}, t; u_*)| \leq U_3(x_1, x_2, t) \leq |d_\vartheta(\mathbf{x}, t; u_*)| + 2t^{-\frac{\varkappa}{q}} \left(M_1 + \frac{q}{\varkappa} M_2\right), \\ &LU_3(x_1, x_2, t) \leq -t^{-1} U_\vartheta |\lambda_{n,m}| \left|U_\vartheta^{m-1} - u_*^{m-1}\right| - \frac{\varkappa}{q} M_1 t^{-1-\frac{\varkappa}{q}} \leq 0 \end{aligned} \tag{7.51}$$

для всех $(x_1, x_2, t) \in D(\delta, t_0)$.

Пусть $\mathbf{x}(t) \equiv (x_1(t), x_2(t))^T$ — решение системы (7.1) с начальными данными $\mathbf{x}_0 = (x_1(t_0), x_2(t_0))^T$ такими, что $|d_\vartheta(\mathbf{x}_0, t_0; u_*)| \le \delta$ и τ_D — момент первого выхода $(\mathbf{x}(t), t)$ из области $D(\varepsilon, t_0)$. Определим функцию $\tau_D(t) = \min\{\tau_D, t\}$, тогда $\mathbf{x}(\tau_D(t))$ — процесс, остановленный в момент первого выхода. Из (7.51) следует, что $U_3(x_1(\tau_D(t)), x_2(\tau_D(t)), \tau_D(t))$ является неотрицательным супермартингалом. В этом случае справедливы следующие оценки:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\sup_{t\ge t_0}|d_\vartheta(\mathbf{x}(t), t; u_*)| \ge \varepsilon\right) &= \mathbb{P}\left(\sup_{t\ge t_0}|d_\vartheta(\mathbf{x}(\tau_D(t)), \tau_D(t); u_*)| \ge \varepsilon\right)\\
&\le \mathbb{P}\left(\sup_{t\ge t_0} U_3(x_1(\tau_D(t)), x_2(\tau_D(t)), \tau_D(t)) \ge \varepsilon\right)\\
&\le \frac{U_3(x_1(t_0), x_2(t_0), t_0)}{\varepsilon}.
\end{aligned}
$$

Из (7.51) следует, что $U_3(x_1(t_0), x_2(t_0), t_0) \le \delta + 2t_0^{-\varkappa/q}(M_1 + qM_2/\varkappa)$. Следовательно, принимая

$$
\delta = \frac{\varepsilon\eta}{2}, \quad t_0 = \max\left\{t_*, \left(\frac{\varkappa M_1 + qM_2}{\varepsilon\eta\varkappa}\right)^{\frac{q}{\varkappa}}\right\},
$$

получаем (7.19). □

Доказательство теоремы 53. Доказательство аналогично доказательству теоремы 50 с использованием функции Ляпунова (7.38) и вспомогательной функции (7.40) при $N = n + l$. □

7.5.4. Анализ устойчивости в случае (7.20)

Доказательство теоремы 54. Рассмотрим вспомогательное уравнение

$$
\frac{d\xi}{dt} = \Lambda(\xi, t), \quad \Lambda(\xi, t) \equiv \sum_{k=n}^{N} t^{-\frac{k}{q}}\Lambda_k(\xi) \tag{7.52}
$$

при $N \ge q$. Покажем, что уравнение (7.52) имеет частное решение, такое что $\xi_*(t) \to c$ при $t \to \infty$. Подстановка $\xi(t) = c + \eta(t)$ в (7.52) даёт

$$
\frac{d\eta}{dt} = t^{-1}\left(\Lambda_n'(c)\eta + \mathcal{O}(\eta^2) + \mathcal{O}(t^{-\frac{1}{q}})\right), \quad t \to \infty, \quad \eta \to 0.
$$

Следовательно, существуют $M_0>0$ и $\eta_0>0$ такие, что

$$\frac{d|\eta|}{dt}\leq t^{-1}\left(-\lambda_*|\eta|+M_0t^{-\frac{1}{q}}\right) \tag{7.53}$$

для всех $t\geq t_*$ и $|\eta|\leq\eta_0$, где $\lambda_*=|\Lambda_n'(c)|/2>0$. Зафиксируем $\epsilon\in(0,\eta_0)$ и определим

$$t_\epsilon=\max\left\{t_*,\left(\frac{4M_0}{\epsilon\lambda_*}\right)^q\right\},\quad \delta_\epsilon=\frac{2M_0t_\epsilon^{-\frac{1}{q}}}{\lambda_*}<\epsilon.$$

Тогда

$$\frac{d|\eta|}{dt}\leq t^{-1}\left(-\lambda_*+\frac{M_0}{\delta_\epsilon}t^{-\frac{1}{q}}\right)|\eta|<0$$

для всех $\delta_\epsilon\leq|\eta|\leq\epsilon$ и $t\geq t_\epsilon$. Следовательно, решение $\eta(t)$ с начальными данными $|\eta(t_\epsilon)|<\delta_\epsilon$ не может выйти из области $|\eta|<\epsilon$ при $t>t_\epsilon$. Более того, интегрируя (7.53), получаем

$$|\eta(t)|\leq|\eta(t_*)|\left(\frac{t}{t_0}\right)^{-\lambda_*}+M_0t^{-\lambda_*}\int\limits_{t_*}^{t}\varsigma^{\lambda_*-\frac{1}{q}-1}\,d\varsigma.$$

Отсюда следует, что $\eta(t)=\mathcal{O}(t^{-\varkappa})$ при $t\to\infty$, где $\varkappa=\min\{\lambda_*,1/q\}/2>0$. Следовательно, существует решение $\xi_*(t)$ уравнения (7.52) такое, что $\xi_*(t)=c+\mathcal{O}(t^{-\varkappa})$ при $t\to\infty$.

Определим область определения $D(\rho_*,t_*)=\{(x_1,x_2,t)\in\mathcal{B}_r\times\{t\geq t_*\}:|d_0(\mathbf{x},t;c)|\leq\rho_*\}$ с достаточно малым $\rho_*>0$ таким, что $c+\rho_*<E_0$ при $t\geq t_*$. Рассмотрим вспомогательные функции

$$U(x_1,x_2,t)=V_N(I(x_1,x_2),\Phi(x_1,x_2),t),\quad u(x_1,x_2,t)=(U(x_1,x_2,t)-\xi_*(t))^2$$

с $N=n$. Легко проверить, что

$$Lu(x_1,x_2,t)\equiv\operatorname{tr}\big(\mathbf{B}^T\mathbf{N}\mathbf{B}\big)+2\left(U-\xi_*(t)\right)\left(\mathcal{L}V_n(E,\varphi,t)\big|_{\substack{E=I(x_1,x_2)\\ \varphi=\Phi(x_1,x_2)}}-\xi_*'(t)\right),$$

где

$$\mathbf{N}(\mathbf{x},t)\equiv\begin{pmatrix}(\partial_{x_1}V_n)^2 & \partial_{x_1}V_n\partial_{x_2}V_n\\ \partial_{x_1}V_n\partial_{x_2}V_n & (\partial_{x_2}V_n)^2\end{pmatrix}\Bigg|_{\substack{E=I(x_1,x_2)\\ \varphi=\Phi(x_1,x_2)}}.$$

Из (7.5), (7.16), (7.35) и (7.36) следует, что для любого $\epsilon \in (0,1)$ существуют $r_1 \in (0, r_*]$ и $t_1 \geq t_*$ такие, что

$$\left|\mathrm{tr}(\mathbf{B}^T\mathbf{N}\mathbf{B})\right| \leq 2\mu^2 t^{-\sigma}(1+\epsilon)^4 r^2$$

для всех $t \geq t_1$ и $(x_1, x_2) \in \mathcal{B}_{r_1}$. Заметим, что

$$\mathcal{L}V_n(E,\varphi,t)|_{\substack{E=I(x_1,x_2)\\ \varphi=\Phi(x_1,x_2)}} - \xi_*'(t) = \Lambda(U(x_1,x_2,t),t) - \Lambda(\xi_*(t),t) + \mathcal{O}(t^{-1-\frac{1}{q}})$$

при $t \to \infty$ равномерно для всех $(x_1, x_2) \in \mathcal{B}_{r_1}$. Следовательно, существуют $0 < \rho_0 \leq \rho_*$ и $t_2 \geq t_1$, такие, что

$$\begin{aligned} &|u(x_1,x_2,t) - d_0^2(\mathbf{x},t;c)| \leq M_1 t^{-\varkappa},\\ &Lu(x_1,x_2,t) \leq -t^{-1}\lambda_* u(x_1,x_2,t) + 2\mu^2 t^{-\sigma}(1+\epsilon)^4 r^2 + M_2 t^{-1-\frac{1}{q}} \end{aligned} \tag{7.54}$$

для всех $(x_1, x_2, t) \in D(\rho_0, t_2)$ с некоторыми константами $M_1, M_2 > 0$.

Рассмотрим

$$U_0(x_1,x_2,t) = u(x_1,x_2,t) + M_1 t^{-\varkappa} + qM_2 t^{-\frac{1}{q}} + 2\mu^2(1+\epsilon)^4 r^2 \zeta(t)$$

в качестве кандидата на функцию Ляпунова для системы (7.1) с положительной функцией

$$\zeta(t) \equiv \begin{cases} \log\left(\dfrac{t_0+\mathcal{T}}{t}\right), & \sigma = 1,\\ \displaystyle\int\limits_t^{t_0+\mathcal{T}} \tau^{-\sigma}\,d\tau, & \sigma > 1, \end{cases}$$

и некоторыми параметрами $\mathcal{T} > 0$ и $t_0 \geq t_2$. Из (7.54) следует, что

$$\begin{aligned} U_0(x_1,x_2,t) &\geq d_0^2(\mathbf{x},t;c),\\ LU_0(x_1,x_2,t) &\leq -t^{-1}\lambda_* u(x_1,x_2,t) - \varkappa M_1 t^{-1-\varkappa} \leq 0 \end{aligned} \tag{7.55}$$

для всех $(x_1,x_2,t) \in \mathcal{D}(\rho_0,t_0,\mathcal{T}) = \{(x_1,x_2,t) \in D(\rho_0,t_0), \quad t_0 \leq t \leq t_0+\mathcal{T}\}$.

Зафиксируем параметры $\varepsilon \in (0,\rho_0)$ и $\eta \in (0,1)$. Пусть $\mathbf{x}(t) \equiv (x_1(t), x_2(t))^T$ — решение системы (7.1) с начальными данными $\mathbf{x}_0 = (x_1(t_0), x_2(t_0))^T$, для которого $|d_0(\mathbf{x}_0, t_0; c)| \leq \delta$, где $\delta \in (0, \varepsilon)$, а $\tau_{\mathcal{D}}$ — время первого выхода процесса $(\mathbf{x}(t), t)$ из области $\mathcal{D}(\varepsilon, t_0, \mathcal{T})$. Параметры $\delta > 0$ и $\mathcal{T} > 0$ будут определены ниже. Определим функцию $\tau_{\mathcal{D}}(t) = \min\{\tau_{\mathcal{D}}, t\}$. Из (7.55) следует, что $U_0(x_1(\tau_{\mathcal{D}}(t)), x_2(\tau_{\mathcal{D}}(t)), \tau_{\mathcal{D}}(t))$ является неотрицательным супермартингалом, и справедливы следующие оценки:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\sup_{t_0 \leq t \leq t_0 + \mathcal{T}} |d_0(\mathbf{x}(t), t; c)| \geq \varepsilon\right) &= \mathbb{P}\left(\sup_{t \geq t_0} \left(d_0(\mathbf{x}(\tau_{\mathcal{D}}(t)), \tau_{\mathcal{D}}(t); c)\right)^2 \geq \varepsilon^2\right) \\
&\leq \mathbb{P}\left(\sup_{t \geq t_0} U_0(x_1(\tau_{\mathcal{D}}(t)), x_2(\tau_{\mathcal{D}}(t)), \tau_{\mathcal{D}}(t)) \geq \varepsilon^2\right) \\
&\leq \frac{U_0(x_1(t_0), x_2(t_0), t_0)}{\varepsilon^2}.
\end{aligned}
$$

Заметим, что

$$
U_0(x_1(t_0), x_2(t_0), t_0) \leq \delta^2 + M_3 t_0^{-\varkappa} + 2\mu^2 (1+\epsilon)^4 r^2 \zeta(t_0)
$$

с параметром $M_3 = 2(M_1 + qM_2) > 0$. Следовательно, чтобы получить (7.21), можно взять

$$
\delta = \varepsilon \sqrt{\frac{\eta}{3(1+\epsilon)^4}},
$$

и

$$
\mathcal{T} = t_0 \left(e^{\frac{\delta^2}{2\mu^2 r^2}} - 1\right), \quad t_0 = \max\left\{t_2, \left(\frac{M_3}{\delta^2}\right)^{\frac{1}{\varkappa}}\right\},
$$

если $\sigma = 1$,

$$
\mathcal{T} = \infty, \quad t_0 = \max\left\{t_2, \left(\frac{M_3}{\delta^2}\right)^{\frac{1}{\varkappa}}, \left(\frac{2\mu^2 r^2}{\delta^2(\sigma - 1)}\right)^{\frac{1}{\sigma - 1}}\right\},
$$

если $\sigma > 1$. $\square$

7.6. Выводы

Таким образом, описаны возможные бифуркации, связанные с изменением стохастической устойчивости равновесия в асимптотически гамильтоновых системах с мультипликативным шумом. С помощью комбинации метода усреднения и построения стохастических функций Ляпунова, показано, что в зависимости от структуры затухающих возмущений равновесие предельной системы либо становится устойчивым (экспоненциально, полиномиально или практически), либо теряет устойчивость. В последнем случае возможно возникновение устойчивых циклов.

Отметим, что для рассматриваемого класса систем метод линеаризации для анализа устойчивости не работает. Это, в частности, демонстрирует пример 2. Действительно, линеаризация системы (7.24) при $b_1 = 0$ в окрестности равновесия $(0, 0)$ задаётся системой (7.7) при $\lambda = a_4$ и $\mu = b_2$. Применение теорем 48, 49 и 50 показывает, что если $a_4 < -b_2^2/2$, то равновесие устойчиво по вероятности, а если $a_4 > 5b_2^2/2$, то равновесие неустойчиво (ср. пример 1). Однако равновесие устойчиво в полной системе, если $a_4 > -b_2^2/2$ и $a_2 < 0$ (см. пример 2). Это противоречит неустойчивости, полученной для соответствующей линеаризованной системы.

Результаты главы опубликованы в [260]. Связанные результаты о возмущениях, не сохраняющих равновесие предельной системы, опубликованы в [263].

Глава 8

Устойчивость почти гамильтоновых систем с затухающими осциллирующими возмущениями и шумом

8.1. Введение

В главе исследуется устойчивость гамильтоновых систем под действием мультипликативного шума с осциллирующими коэффициентами. Предполагается, что интенсивность возмущений затухает со временем, а предельная система имеет устойчивое положение равновесия. Обсуждаются возможные асимптотические режимы в возмущённой стохастической системе и условия устойчивости положения равновесия. Предлагаемая методика основана на сочетании метода усреднения и построения стохастических функций Ляпунова.

Глава организована следующим образом. В § 8.2 дана постановка задачи и описан класс затухающих возмущений. Основные результаты представлены в § 8.3. В § 8.4 рассматриваются примеры стохастических систем и применение предлагаемой теории. Обоснование результатов содержится в § 8.5. В частности, в § 8.5.1 построено преобразование, упрощающее коэффициенты сноса возмущённой системы в асимптотике на бесконечности по времени. Исследование структуры упрощённых уравнений в § 8.5.2 приводит к описанию возможных асимптотических режимов в системе. Анализ устойчивости, основанный на построении стохастических функций Ляпунова, содержится в § 8.5.3 и § 8.5.4 для различных режимов. Глава завершается кратким обсуждением полученных результатов.

8.2. Постановка задачи

Рассмотрим систему стохастических дифференциальных уравнений Ито

$$d\mathbf{x}(t) = \mathbf{a}(\mathbf{x}(t), t)dt + \mathbf{A}(\mathbf{x}(t), t)\, d\mathbf{w}(t), \quad t > t_0 > 0, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2, \tag{8.1}$$

где $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$, $\mathbf{w}(t) = (w_1(t), w_2(t))^T$ — двумерный винеровский процесс на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = (a_1(x_1, x_2, t), a_2(x_1, x_2, t))^T$ — векторная функция, а $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \{\alpha_{i,j}(x_1, x_2, t)\}_{2\times 2}$ — матрица размером 2×2. Функции $a_i(x_1, x_2, t)$ и $\alpha_{i,j}(x_1, x_2, t)$, определённые для всех $(x_1, x_2, t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+$, бесконечно дифференцируемы и не зависят от $\omega \in \Omega$. Предполагается, что

$$\mathbf{a}(0, t) \equiv 0, \quad \mathbf{A}(0, t) \equiv 0, \tag{8.2}$$

и существует $M > 0$ такое, что $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$ и $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ удовлетворяют условию Липшица:

$$\begin{aligned} &|\mathbf{a}(\mathbf{x}_1, t) - \mathbf{a}(\mathbf{x}_2, t)| \le M|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|, \\ &\|\mathbf{A}(\mathbf{x}_1, t) - \mathbf{A}(\mathbf{x}_2, t)\| \le M|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2| \end{aligned} \tag{8.3}$$

для всех $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^2$ и $t \ge t_0$. Здесь $|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, а $\|\cdot\|$ — операторная норма, согласованная с нормой $|\cdot|$ $\mathbb{R}^2$. Заметим, что при этих предположениях система (8.1) имеет единственное непрерывное (с вероятностью единица) решение $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t))^T$ для всех $t \ge t_0$ и для любой начальной точки $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ (см., например, [227, §5.2]).

Кроме того, предполагается, что система (8.1) является асимптотически автономной: для любого компакта $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ существуют пределы

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{a}_0(\mathbf{x}), \quad \lim_{t\to\infty} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}$$

при всех $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$, где

$$\mathbf{a}_0(\mathbf{x}) \equiv \begin{pmatrix} \partial_{x_2} H(x_1, x_2) \\ -\partial_{x_1} H(x_1, x_2) \end{pmatrix}, \quad H(x_1, x_2) = \frac{|\mathbf{x}|^2}{2} + \mathcal{O}(|\mathbf{x}|^3), \quad |\mathbf{x}| \to 0. \tag{8.4}$$

В этом случае соответствующая предельная система

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{a}_0(\mathbf{x}) \tag{8.5}$$

является гамильтоновой с устойчивой неподвижной точкой в начале координат $(0,0)$. Предполагается, что существуют $E_0 > 0$ и $r_0 > 0$ такие, что линии уровня $\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 : H(x_1,x_2) = E\}$, лежащие в круге $\mathcal{B}_0 = \{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 : |\mathbf{x}| < r_0\}$ при $E \in (0, E_0]$, являются замкнутыми кривыми и соответствуют периодическим решениям системы (8.5) с периодом $T(E) = 2\pi/\nu(E)$, $\nu(E) \neq 0$ для всех $E \in (0, E_0]$. Значение $E = 0$ соответствует равновесию $\mathbf{x}(t) \equiv 0$. Легко проверить, что $\nu(E) = 1 + \mathcal{O}(E)$ при $E \to 0$. Также предполагается, что $\mathcal{B}_0$ не содержит неподвижных точек системы (8.5), за исключением начала координат.

Таким образом, систему (8.1) можно рассматривать как возмущение автономной гамильтоновой системы (8.5). Опишем класс затухающих стохастических возмущений. Предполагается, что

$$\mathbf{a}(\mathbf{x},t) - \mathbf{a}_0(\mathbf{x}) \sim \sum_{k=1}^{\infty} t^{-\frac{k}{q}}\mathbf{a}_k(\mathbf{x}, S(t)), \quad \mathbf{A}(\mathbf{x},t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} t^{-\frac{k}{q}}\mathbf{A}_k(\mathbf{x}, S(t)) \tag{8.6}$$

при $t \to \infty$ равномерно для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{B}_0$ с $q \in \mathbb{Z}_+ = \{1, 2, \dots\}$, где коэффициенты $\mathbf{a}_k(\mathbf{x}, S)$ и $\mathbf{A}_k(\mathbf{x}, S) = \{\alpha_{i,j,k}(x_1, x_2, S)\}_{2\times 2}$ являются 2π-периодическими по S,

$$S(t) \equiv \sum_{k=0}^{q-1} s_k t^{1-\frac{k}{q}} + s_q \log t, \quad s_k = \mathrm{const}, \tag{8.7}$$

и s_0 удовлетворяет условию резонанса

$$s_0 = \varkappa\nu(0) \tag{8.8}$$

с некоторыми $\varkappa \in \mathbb{Z}_+$. Заметим, что ряды в (8.6) являются асимптотическими при $t \to \infty$. Другими словами, предполагается, что для любого $n \in \mathbb{Z}_+$

справедливы следующие оценки:

$$
\begin{gathered}
|\mathbf{a}(\mathbf{x},t) - \sum_{k=0}^{n-1} t^{-\frac{k}{q}} \mathbf{a}_k(\mathbf{x}, S(t))| = \mathcal{O}(t^{-\frac{n}{q}}), \\
\|\mathbf{A}(\mathbf{x},t) - \sum_{k=1}^{n-1} t^{-\frac{k}{q}} \mathbf{A}_k(\mathbf{x}, S(t))\| = \mathcal{O}(t^{-\frac{n}{q}})
\end{gathered}
$$

при $t \to \infty$ равномерно для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{B}_0$.

В качестве примера рассмотрим линейную систему с затухающим возмущением типа белого шума

$$
\begin{aligned}
& dx_1 = x_2\, dt, \\
& dx_2 = \left(-x_1 + t^{-1} b_0 x_2\right)\, dt + t^{-\frac{p}{2}} c_1 x_1 \cos S(t)\, dw_2(t), \quad t \ge 1,
\end{aligned} \tag{8.9}
$$

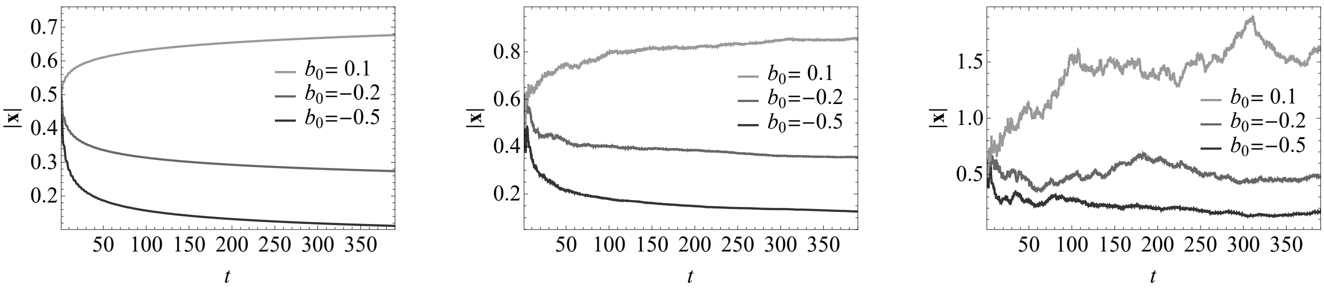
где $S(t) \equiv s_0 t$, $p \in \mathbb{Z}_+$, $b_0, c_1, s_0 = \text{const}$. Легко проверить, что система (8.9) имеет вид (8.1) с $q = 2$,

$$
\begin{gathered}
\mathbf{a}(\mathbf{x},t) \equiv \mathbf{a}_0(\mathbf{x}) + t^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ b_0 x_2 \end{pmatrix}, \quad H(x_1, x_2) \equiv \frac{|\mathbf{x}|^2}{2}, \\
\mathbf{A}(\mathbf{x},t) \equiv t^{-\frac{p}{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c_1 x_1 \cos S(t) \end{pmatrix}.
\end{gathered}
$$

Соответствующая предельная автономная система (при $b_0 = c_1 = 0$) имеет 2π-периодическое общее решение $x_1(t+\phi; E) \equiv \sqrt{2E}\cos(t+\phi)$, $x_2(t+\phi; E) \equiv -\sqrt{2E}\sin(t+\phi)$, где E и ϕ — произвольные постоянные, а $\nu(E) \equiv 1$. В случае детерминированного возмущения (при $b_0 \ne 0$, $c_1 = 0$) асимптотика общего решения (см., например, [99, гл. II, § 6])

$$
\mathbf{x}(t) = t^{\frac{b_0}{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2E}\cos(t+\phi) + \mathcal{O}(t^{-1}) \\ -\sqrt{2E}\sin(t+\phi) + \mathcal{O}(t^{-1}) \end{pmatrix}
$$

при $t \to \infty$ указывает на то, что устойчивость равновесия зависит от знака параметра b_0 (см. рис. 8.1, а). Численный анализ системы (8.9) с $b_0 \ne 0$, $c_1 \ne 0$ и $s_0 = 1$ показывает, что устойчивость равновесия зависит от скорости затухания стохастического возмущения. В частности, если $p = 2$, условия устойчивости, по-видимому, те же, что и в предыдущем случае при $c_1 = 0$ (см. рис. 8.1, б). Однако, если $p = 1$, устойчивость равновесия $(0, 0)$ изменяется при переходе параметра b_0 через некоторое ненулевое критическое значение b_* (см. рис. 8.1, в). В § 8.4 будет показано, что такое смещение границы устойчивости возникает вследствие резонансного захвата в стохастической системе, и его величина зависит, в частности, от параметра s_0.



(а) $c_1 = 0$ (б) $c_1 = 1$, $p = 2$ (в) $c_1 = 1$, $p = 1$

Рис. 8.1. Эволюция $|\mathbf{x}(t)|$ для реализаций решений системы (8.9) с различными значениями параметров.

8.3. Основные результаты

Пусть $\mathbf{x}_*(t) \equiv (\xi_1(t, E), \xi_2(t, E))^T$ — $T(E)$-периодическое решение предельной системы (8.5) такое, что $H(\xi_1(t, E), \xi_2(t, E)) \equiv E$, $\xi_1(0, E) > 0$ и $\xi_2(0, E) = 0$ для всех $E \in (0, E_0]$. Определим

$$\mathcal{D}(E_0) := \{(x_1, x_2) \in \mathcal{B}_0 : H(x_1, x_2) \leq E_0\}.$$

Тогда справедлива

Теорема 55. *Пусть система* (8.1) *удовлетворяет предположениям* (8.2), (8.3), (8.4), (8.6), (8.7) *и* (8.8). *Тогда для любых* $N \in \mathbb{Z}_+$ *и* $\epsilon > 0$ *найдутся* $\ell \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$, $t_* \geq \max\{t_0, 1\}$, $v_0 > 0$ *и цепочка обратимых преобразований* $(x_1, x_2) \to$

$(E,\varphi)\to(R,\theta)\to(v,\psi)$,

$$x_1(t)=\xi_1\left(\frac{\varphi(t)}{\nu(E(t))},E(t)\right), \qquad x_2(t)=\xi_2\left(\frac{\varphi(t)}{\nu(E(t))},E(t)\right), \tag{8.10}$$

$$E(t)=t^{-\frac{2\ell}{q}}\left(R(t)\right)^2, \qquad \varphi(t)=\varkappa^{-1}S(t)+\theta(t), \tag{8.11}$$

$$v(t)=R(t)+\tilde v_N(R(t),\theta(t),t), \qquad \psi(t)=\theta(t)+\tilde\psi_N(R(t),\theta(t),t), \tag{8.12}$$

где функции $\tilde v_N(R,\theta,t)$, $\tilde\psi_N(R,\theta,t)$ являются 2π-периодическими по θ и удовлетворяют неравенствам

$$|\tilde v_N(R,\theta,t)|\le\epsilon R, \quad |\tilde\psi_N(R,\theta,t)|\le\epsilon \quad \forall\, R\in\left[0,t_*^{\frac{\ell}{q}}\sqrt{E_0}\right], \quad \theta\in\mathbb{R}, \quad t\ge t_*,$$

такие, что для всех $(x_1,x_2)\in\mathcal{D}(E_0)$ и $t\ge t_*$ система (8.1) может быть преобразована к виду

$$d\mathbf{z}(t)=\mathbf{g}_N(\mathbf{z}(t),t)\,dt+\mathbf{G}_N(\mathbf{z}(t),t)\,d\mathbf{w}(t), \quad \mathbf{z}=(v,\psi)^T \tag{8.13}$$

с $\mathbf{g}_N(\mathbf{z},t)\equiv(\Lambda_N(v,\psi,t),\Omega_N(v,\psi,t))^T$ и $\mathbf{G}_N(\mathbf{z},t)\equiv\{\sigma_{i,j}(v,\psi,t)\}_{2\times2}$, определёнными для всех $v\in[0,v_0]$, $\psi\in\mathbb{R}$ и $t\ge t_*$, такими, что

$$\begin{aligned}\Lambda_N(v,\psi,t)&\equiv\sum_{k=1}^N t^{-\frac{k}{q}}\Lambda_k(v,\psi)+\tilde\Lambda_N(v,\psi,t),\\ \Omega_N(v,\psi,t)&\equiv\sum_{k=1}^N t^{-\frac{k}{q}}\Omega_k(v,\psi)+\tilde\Omega_N(v,\psi,t),\end{aligned} \tag{8.14}$$

где

$$\tilde\Lambda_N(v,\psi,t)=\mathcal{O}(t^{-\frac{N+1}{q}}), \quad \tilde\Omega_N(v,\psi,t)=\mathcal{O}(t^{-\frac{N+1}{q}}), \quad \sigma_{i,j}(v,\psi,t)=\mathcal{O}(t^{-\frac{1}{q}})$$

при $t\to\infty$ равномерно для всех $v\in[0,v_0]$ и $\psi\in\mathbb{R}$. Функции $\Lambda_N(v,\psi,t)$, $\Omega_N(v,\psi,t)$, $\sigma_{i,j}(v,\psi,t)$ являются 2π-периодическими по ψ и удовлетворяют следующим оценкам:

$$\Lambda_N(v,\psi,t)=\mathcal{O}(v), \quad \Omega_N(v,\psi,t)=\mathcal{O}(1),$$
$$\sigma_{1,j}(v,\psi,t)=\mathcal{O}(v), \quad \sigma_{2,j}(v,\psi,t)=\mathcal{O}(1)$$

при $v\to0$ равномерно для всех $\psi\in\mathbb{R}$ и $t\ge t_*$.

Доказательство основано на усреднении системы по $S(t)$ и содержится в § 8.5.1. Таким образом, преобразование, описанное в теореме 55, упрощает первые N асимптотических членов системы (8.1) при $t \to \infty$. При этом некоторые старшие члены преобразованной системы могут исчезнуть из-за нулевого среднего. Пусть $n \geq 1$ и $m \geq 1$ — целые числа, соответствующие первым ненулевым членам в (8.14):

$$\begin{aligned} &\Lambda_i(v,\psi) \equiv 0, \qquad &&\forall\, i < n, \qquad &&\Lambda_n(v,\psi) \not\equiv 0,\\ &\Omega_j(v,\psi) \equiv 0, \qquad &&\forall\, j < m, \qquad &&\Omega_m(v,\psi) \not\equiv 0. \end{aligned} \tag{8.15}$$

Очевидно, что поведение решений системы (8.1) вблизи решения $\mathbf{x}(t) \equiv 0$ определяется динамикой преобразованной системы (8.13) при $v(t)$, близкой к нулю. Имея это в виду, рассмотрим следующие дополнительные предположения (по отдельности) о поведении функции $\Lambda_N(v,\psi,t)$ при $v \to 0$:

$$\Lambda_n(v,\psi) = v\left(\lambda_n(\psi) + \mathcal{O}(v)\right), \quad v \to 0; \tag{8.16}$$

и существуют $h \geq 2$ и $l \geq 1$ такие, что

$$\Lambda_k(v,\psi) = \begin{cases} v^h\left(\lambda_{k,h}(\psi) + \mathcal{O}(v)\right), & k < n+l,\\ v\left(\lambda_k(\psi) + \mathcal{O}(v)\right), & k \geq n+l, \end{cases} \quad v \to 0, \tag{8.17}$$

где $\lambda_n(\psi)$, $\lambda_{n,h}(\psi)$, $\lambda_{n+l}(\psi)$ — ненулевые 2π-периодические функции. Отсюда легко следует, что в случае (8.16) главный член асимптотики $\Lambda_N(v,\psi,t)$ при $t \to \infty$ имеет ненулевую линейную часть относительно v. В случае (8.17) главный член строго нелинейный.

Уточним также поведение функции $\Omega_N(v,\psi,t)$ при $v \to 0$. Предположим, что

$$\Omega_m(v,\psi) = \omega_{m,0}(\psi) + \omega_{m,1}(\psi)v + \mathcal{O}(v^2), \quad v \to 0, \tag{8.18}$$

где $\omega_{m,0}(\psi)$ — периодическая функция с периодом 2π. Заметим, что, выбрав $\ell \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$ в (8.11), без потери общности можно предположить, что $\omega_{m,0}(\psi) \not\equiv 0$.

Более того, рассмотрим следующие два случая:

$$\exists\, \phi_0 \in \mathbb{R}: \quad \omega_{m,0}(\phi_0) = 0, \quad \vartheta_m := \omega'_{m,0}(\phi_0) \neq 0; \tag{8.19}$$

$$\omega_{m,0}(\psi) \neq 0 \quad \forall\, \psi \in \mathbb{R}. \tag{8.20}$$

Каждый из этих случаев соответствует определённому асимптотическому режиму, связанному с долговременным поведением фазы решений системы (8.1). Действительно, рассмотрим вспомогательную систему обыкновенных дифференциальных уравнений, полученную из системы (8.13) отбрасыванием стохастической части

$$\frac{du}{dt} = \Lambda_N(u, \phi, t), \quad \frac{d\phi}{dt} = \Omega_N(u, \phi, t), \quad t \geq t_* \tag{8.21}$$

с параметром $N = \max\{n, m\}$. Справедлива

Лемма 17. *Пусть выполняются предположения* (8.15), (8.18) *и* (8.19) *при* $m \leq q$. *Если* $\vartheta_m < 0$, *то для любого* $\varepsilon > 0$ *система* (8.21) *имеет частное решение* $u_\varepsilon(t) \equiv 0$, $\phi_\varepsilon(t) \equiv \phi_0 + \varepsilon\phi_1(t)$ *такое, что*

$$\phi_1(t) = \begin{cases} \mathcal{O}(1), & m < q, \\ \mathcal{O}(t^{-c}), & m = q, \end{cases} \tag{8.22}$$

при $t \to \infty$ *с некоторой постоянной* $c > 0$.

Лемма 18. *Пусть выполняются предположения* (8.15), (8.18) *и* (8.20) *при* $m \leq q$. *Тогда система* (8.21) *имеет однопараметрическое семейство решений такое, что* $u(t) \equiv 0$ *и* $|\phi(t)| \to \infty$ *при* $t \to \infty$.

Обоснование лемм 17 и 18 содержится в § 8.5.2.

Сначала рассмотрим случай фазовой синхронизации. Пусть

$$E = H(x_1, x_2), \quad \varphi = \Phi(x_1, x_2) \tag{8.23}$$

для всех $(x_1, x_2) \in \mathcal{D}(E_0)$ обозначает обратное преобразование к (8.10). Определим функцию

$$d(\mathbf{x}, t) \equiv \sqrt{t^{\frac{2\ell}{q}} H(x_1, x_2) + |\Phi(x_1, x_2) - \varkappa^{-1} S(t) - \phi_\varepsilon(t)|^2},$$

где $\phi_\varepsilon(t)$ — функция, определённая в лемме 17, и введем следующее дополнительное предположение о классе возмущений:

$$\exists\,\mu > 0: \quad \left|\mathrm{tr}(\mathbf{A}^T(\mathbf{x},t)\mathbf{A}(\mathbf{x},t))\right| \le \mu^2 t^{-\frac{2p}{q}}|\mathbf{x}|^2 \tag{8.24}$$

для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{B}_0$ и $t \ge t_0$ с некоторым параметром $p \in \mathbb{Z}_+$. Тогда справедлива

Теорема 56. *Пусть система* (8.1) *удовлетворяет* (8.2), (8.3), (8.4), (8.6), (8.7), (8.8) *и выполняются предположения* (8.15), (8.16), (8.18), (8.19), (8.24) *с* $1 \le m \le q$ *и* $\vartheta_m < 0$. *Если* $\lambda_n(\phi_0) < 0$, *то для любых* $\varepsilon_1 > 0$ *и* $\varepsilon_2 > 0$ *существуют* $\delta > 0$ *и* $t_s > 0$ *такие, что решение* $\mathbf{x}(t)$ *системы* (8.1) *с начальными данными* $\mathbf{x}(t_s) = \mathbf{x}_0$, $d(\mathbf{x}_0, t_s) < \delta$ *удовлетворяет условию*

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0\le t-t_s\le \mathcal{T}} \left\{t^{-\varsigma}|d(\mathbf{x}(t),t)|\right\} > \varepsilon_1\right) < \varepsilon_2, \tag{8.25}$$

где

$$\varsigma = \begin{cases} 0, & n \le m, \\ \frac{n-m}{2q}, & n > m, \end{cases} \qquad \mathcal{T} = \begin{cases} C_0\delta^2\mu^{-2}, & 2p < q, \\ t_s(e^{C_0\delta^2\mu^{-2}} - 1), & 2p = q, \\ \infty, & 2p > q \end{cases} \tag{8.26}$$

с некоторой постоянной $C_0 > 0$.

Легко увидеть, что при $n > m$ теорема 56 обеспечивает лишь “слабую” стохастическую устойчивость с убывающим весом $t^{-\varsigma}$. Отметим также, что оценка (8.25) соответствует устойчивости по вероятности [192, §5.3] для состояния равновесия $\mathbf{x}(t) \equiv 0$ и некоторой фазовой динамики.

Заметим, что в строго нелинейном случае (8.17) может возникнуть нетривиальное решение с амплитудой, близкой к нулю. В частности, справедлива

Лемма 19. *Пусть выполняются предположения* (8.15), (8.18) *и* (8.19) *при* $n + l = m \le q$. *Если* $\lambda_{n,h}(\phi_0) < 0$, $\lambda_{n+l}(\phi_0) > 0$ *и* $\vartheta_m < 0$, *то для любого* $\varepsilon > 0$ *система* (8.21) *имеет частное решение*

$$u_\varepsilon(t) \equiv t^{-\kappa}(u_0 + \varepsilon u_1(t)), \quad \phi_\varepsilon(t) \equiv \phi_0 + \varepsilon\phi_1(t)$$

с функциями $u_1(t) = \mathcal{O}(1)$ *и* $\phi_1(t) = \mathcal{O}(1)$ *при* $t \to \infty$, *где*

$$\kappa = \frac{l}{(h-1)q}, \quad u_0 = \left(\frac{\lambda_{n+l}(\phi_0) + \delta_{n+l,q}\kappa}{|\lambda_{n,h}(\phi_0)|}\right)^{\frac{1}{h-1}}. \tag{8.27}$$

Определим функцию

$$\tilde{d}(\mathbf{x}, t) \equiv \sqrt{t^{2\kappa}\left|t^{\frac{\ell}{q}}\sqrt{H(x_1, x_2)} - u_\varepsilon(t)\right|^2 + |\Phi(x_1, x_2) - \varkappa^{-1}S(t) - \phi_\varepsilon(t)|^2},$$

где $u_\varepsilon(t), \phi_\varepsilon(t)$ — решение системы (8.21), описанное в лемме 19. Тогда справедлива

Теорема 57. *Пусть система* (8.1) *удовлетворяет* (8.2), (8.3), (8.4), (8.6), (8.7), (8.8) *и выполняются предположения* (8.15), (8.17), (8.18), (8.19), (8.24) *с* $1 \le m \le q$ *и* $\vartheta_m < 0$.

- *Если* $\lambda_{n,h}(\phi_0) < 0$, $\lambda_{n+l}(\phi_0) < 0$, *то для любых* $\varepsilon_1 > 0$ *и* $\varepsilon_2 > 0$ *найдутся* $\delta > 0$ *и* $t_s > 0$ *такие, что решение* $\mathbf{x}(t)$ *системы* (8.1) *с начальными данными* $\mathbf{x}(t_s) = \mathbf{x}_0$, $d(\mathbf{x}_0, t_s) < \delta$ *удовлетворяет* (8.25) *с* $\mathcal{T}$, *определяемым* (8.26), *и*

$$\varsigma = \begin{cases} 0, & n+l \le m, \\ \frac{n+l-m}{2q}, & n+l > m. \end{cases}$$

- *Если* $\lambda_{n,h}(\phi_0) < 0$, $\lambda_{n+l}(\phi_0) > 0$ *и* $n + l = m$, *то для любых* $\varepsilon_1 > 0$ *и* $\varepsilon_2 > 0$ *найдутся* $\delta > 0$ *и* $t_s > 0$ *такие, что решение* $\mathbf{x}(t)$ *системы* (8.1) *с начальными данными* $\mathbf{x}(t_s) = \mathbf{x}_0$, $\tilde{d}(\mathbf{x}_0, t_s) < \delta$ *удовлетворяет условию*

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0 \le t - t_s \le \mathcal{T}} |\tilde{d}(\mathbf{x}(t), t)| > \varepsilon_1\right) < \varepsilon_2 \tag{8.28}$$

  с $\mathcal{T}$, *определяемым* (8.26).

Обоснование теорем 56, 57 и леммы 19 обсуждается в § 8.5.3.

Таким образом, в случае фазового захвата устойчивость равновесия $\mathbf{x}(t) \equiv 0$ зависит от параметров $\lambda_k(\psi)$, $\lambda_{k,h}(\psi)$ амплитудного уравнения, вычисленного при значении фазового сдвига ϕ_0. При этом фаза системы синхронизируется с возмущением.

Рассмотрим теперь случай предположения (8.20), когда имеет место режим дрейфа фазы. Покажем, что в этом случае равновесие также может быть стохастически устойчивым, но при более строгих ограничениях на коэффициент $\lambda_n(\psi)$. Справедлива

Теорема 58. *Пусть система* (8.1) *удовлетворяет* (8.2), (8.3), (8.4), (8.6), (8.7), (8.8) *и выполняются предположения* (8.15), (8.16), (8.18), (8.20) *с* $1 \leq m \leq q$. *Если* $\lambda_n(\psi) < 0$ *для всех* $\psi \in \mathbb{R}$, *то существует* $t_s \geq t_0$ *такое, что для любых* $\varepsilon_1 > 0$ *и* $\varepsilon_2 > 0$ *существует* $\delta > 0$*: решение* $\mathbf{x}(t)$ *системы* (8.1) *с начальными данными* $\mathbf{x}(t_s) = \mathbf{x}_0$, $|\mathbf{x}_0| < \delta$ *удовлетворяет условию*

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t\geq t_s}\left\{t^{\frac{\ell}{q}}|\mathbf{x}(t)|\right\} > \varepsilon_1\right) < \varepsilon_2. \tag{8.29}$$

Аналогичное утверждение справедливо в случае строго нелинейного главного члена в $\Lambda_N(v,\psi,t)$ относительно v.

Теорема 59. *Пусть система* (8.1) *удовлетворяет* (8.2), (8.3), (8.4), (8.6), (8.7), (8.8) *и выполняются предположения* (8.15), (8.17), (8.18), (8.20) *с* $1 \leq m \leq q$. *Если* $\lambda_{n,h}(\psi) < 0$ *и* $\lambda_{n+l}(\psi) < 0$ *для всех* $\psi \in \mathbb{R}$, *то существует* $t_s \geq t_0$ *такое, что для любых* $\varepsilon_1 > 0$ *и* $\varepsilon_2 > 0$ *найдется* $\delta > 0$*: решение* $\mathbf{x}(t)$ *системы* (8.1) *с начальными данными* $\mathbf{x}(t_s) = \mathbf{x}_0$, $|\mathbf{x}_0| < \delta$ *удовлетворяет* (8.29).

Доказательство теорем 58 и 59 содержатся в § 8.5.4.

Таким образом, в данном случае устойчивость обоснована только при наличии глобальных оценок для коэффициентов $\lambda_k(\psi)$ и $\lambda_{k,h}(\psi)$. Отметим, что подобные условия устойчивости в режиме дрейфа фазы возникают для детерминированных систем без шума (см. гл. 3).

8.4. Примеры

Рассмотрим примеры асимптотически автономных стохастических систем с затухающими осциллирующими коэффициентами и применение предлагаемой теории. Полученные результаты иллюстрируются численным моделированием. При этом стохастические дифференциальные уравнения преобразуются в системы обыкновенных дифференциальных уравнений с винеровским процессом в правых частях. Затем моделируется траектория броуновского движения и преобразованные системы решаются численно методом Эйлера.

8.4.1. Пример 1

Сначала рассмотрим линейную стохастическую систему

$$\begin{aligned} &dx_1 = x_2\, dt, \\ &dx_2 = \big(-x_1 + t^{-1}\left[a\big(S(t)\big)x_1 + b\big(S(t)\big)x_2\right]\big)\ dt + t^{-\frac{p}{2}}c\big(S(t)\big)x_1\, dw_2(t), \end{aligned} \tag{8.30}$$

$t \geq 1$, где

$$\begin{aligned} &a(S) \equiv a_0 + a_1 \cos S, \quad b(S) \equiv b_0 + b_1 \cos S, \quad c(S) \equiv c_0 + c_1 \cos S, \\ &S(t) \equiv s_0 t + s_2 \log t \end{aligned}$$

с $p \in \mathbb{Z}_+$ и постоянными параметрами a_k, b_k, c_k и s_k. Заметим, что система (8.30) имеет вид (8.1) с $q = 2$, $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) \equiv \mathbf{a}_0(\mathbf{x})+t^{-1}\mathbf{a}_2(\mathbf{x}, S(t))$, $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \equiv t^{-p/2}\mathbf{A}_p(\mathbf{x}, S(t))$

$$\mathbf{a}_0 \equiv \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ a(S)x_1 + b(S)x_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_p \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c(S)x_1 \end{pmatrix}.$$

Соответствующая предельная система (8.5) с $H(x_1, x_2) \equiv |\mathbf{x}|^2/2$ имеет устойчивое равновесие в начале координат $(0, 0)$ и 2π-периодические решения с $\nu(E) \equiv 1$. При этом система (8.9), рассмотренная в качестве примера в разделе 8.2, имеет вид (8.30) с $a_0 = a_1 = b_1 = c_0 = s_2 = 0$.

1. Пусть $p = 1$. Тогда замены переменных, описанные в теореме 55 и построенные в § 8.5.1 с $\ell = 0$, $N = 2$, $\xi_1(\phi, E) \equiv \sqrt{2E}\cos\phi$, $\xi_2(\phi, E) \equiv -\sqrt{2E}\sin\phi$,

$\tilde{v}_2(R,\theta,t) \equiv t^{-1}v_2(R,\theta,S(t))$, $\tilde{\psi}_2(R,\theta,t) \equiv t^{-1}\psi_2(R,\theta,S(t))$,

$$v_2 \equiv R\left\{\int\limits_0^S \left\{\frac{a}{2}\sin\left(2\theta+\frac{2s}{\varkappa}\right) - b\sin^2\left(\theta+\frac{s}{\varkappa}\right) - \frac{c^2}{2}\cos^4\left(\theta+\frac{s}{\varkappa}\right)\right\}_{\varkappa s} ds\right\}_{\varkappa S},$$

$$\psi_2 \equiv \left\{\int\limits_0^S \left\{a\cos^2\left(\theta+\frac{s}{\varkappa}\right) - \frac{b}{2}\sin\left(2\theta+\frac{2s}{\varkappa}\right) - \frac{c^2}{4}\partial_\theta\left(\cos^4\left(\theta+\frac{s}{\varkappa}\right)\right)\right\}_{\varkappa s} ds\right\}_{\varkappa S},$$

приводят систему (8.30) к виду (8.13) с коэффициентами $\Lambda_1(v,\psi) \equiv \Omega_1(v,\psi) \equiv 0$, $\Lambda_2(v,\psi) \equiv \lambda_2(\psi)v$, $\Omega_2(v,\psi) \equiv \omega_{2,0}(\psi)$, где вид функций $\lambda_2(\psi)$ и $\omega_{2,0}(\psi)$ зависит от значения параметра s_0. Следовательно, преобразованная система удовлетворяет условиям (8.15), (8.16) и (8.18) с $n = m = 2$. Более того, предположение (8.24) выполняется с $\mu = |c_0| + |c_1|$ и $2p/q = 1$.

Рассмотрим сначала случай $s_0 = 1$. Тогда из (8.8) следует, что $\varkappa = 1$ и

$$\lambda_2(\psi) \equiv \frac{1}{32}\left(16b_0 + 6c_0^2 + 3c_1^2 + 2c_1^2\cos 2\psi\right),$$
$$\omega_{2,0}(\psi) \equiv -\frac{1}{16}\left(8a_0 + 16s_2 + c_1^2\sin 2\psi\right).$$

Нетрудно проверить, что если $|8a_0 + 16s_2| < c_1^2$, то предположение (8.19) выполняется с

$$\phi_0 = \frac{1}{2}\arcsin\left(-\frac{8a_0+16s_2}{c_1^2}\right) + \pi j, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad \vartheta_2 = -\frac{c_1^2}{8}\cos 2\phi_0 < 0.$$

Отсюда следует, что теорема 56 применима при $n = m = q = 2p = 2$ и

$$d(\mathbf{x},t) \equiv \sqrt{\frac{|\mathbf{x}|^2}{2} + |\Phi(x_1,x_2) - S(t) - \phi_\varepsilon(t)|}$$

где $\phi_\varepsilon(t) = \phi_0 + o(1)$ при $t \to \infty$, где $\tan\Phi(x_1,x_2) \equiv -x_2/x_1$. Следовательно, если $b_0 < b_*$, то

$$b_* = -\frac{6c_0^2 + 3c_1^2}{16} - \frac{1}{8}\sqrt{c_1^4 - (8a_0+16s_2)^2},$$

то в системе (8.30) происходит фазовый захват и равновесие $(0,0)$ устойчиво на экспоненциально большом интервале времени при $\mu \to 0$ (см. рис. 8.2). Применяя этот результат к примеру из § 8.2, видим, что в системе (8.9) происходит фазовый захват и равновесие устойчиво, если $b < b_*$, где $b_* = -5/16$.

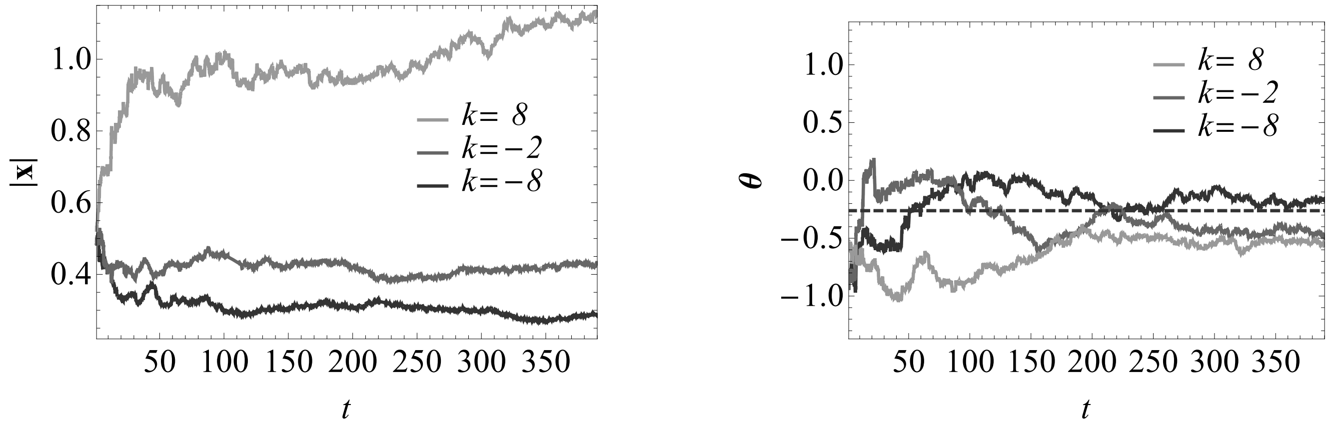


Рис. 8.2. Эволюция $|\mathbf{x}(t)|$ и $\theta(t) = \Phi(x_1(t), x_2(t)) - S(t)$ для реализаций решений системы (8.30) при $a_0 = \mu^2/16$, $b_0 = k\mu^2/16$, $c_1 = \mu$, $s_0 = 1$, $a_1 = b_1 = c_0 = s_2 = 0$, $\mu = 0.5$. Чёрная пунктирная кривая соответствует $\theta(t) \equiv \phi_0$, где $\phi_0 = -\pi/12$. В этом случае $b_0 < b_*$ тогда и только тогда, когда $k < -(3+\sqrt{3}) \approx -4.73$.

Если $|8a_0 + 16s_2| > c_1^2$, то выполняется предположение (8.20) и применима теорема 58 при $m = q = 2$. Следовательно, реализуется режим дрейфа фазы, и равновесие $(0,0)$ устойчиво, если $b_0 < b_*$ при $b_* = -(6c_0^2 + 5c_1^2)/16$ (см. рис. 8.3).

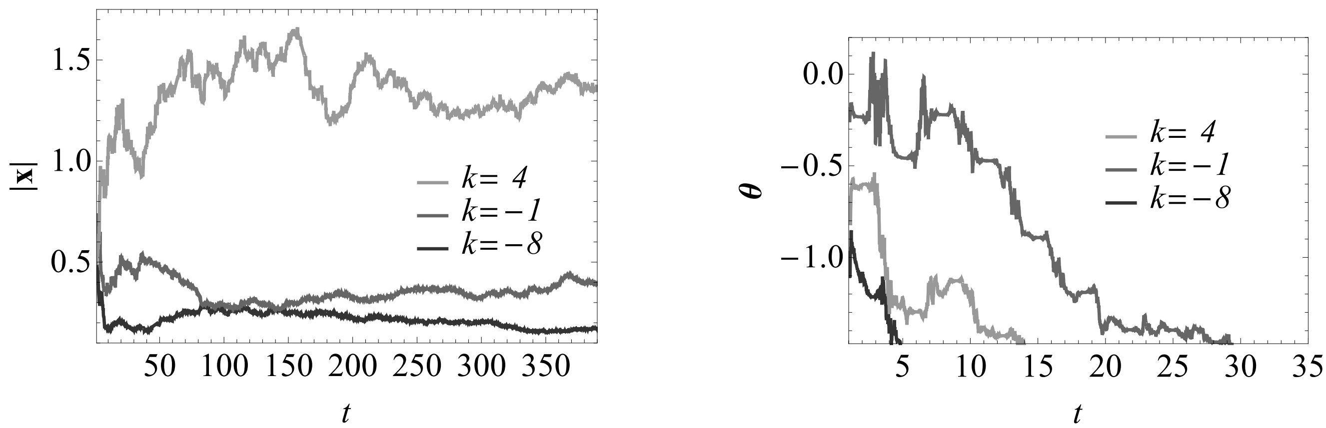


Рис. 8.3. Эволюция $|\mathbf{x}(t)|$ и $\theta(t) = \Phi(x_1(t), x_2(t)) - S(t)$ для траекторий решений системы (8.30) при $a_0 = 1/2$, $b_0 = k/16$, $c_1 = 1$, $s_0 = 1$, $a_1 = b_1 = c_0 = s_2 = 0$. В этом случае $b_0 < b_*$ тогда и только тогда, когда $k < -5$.

Рассмотрим теперь случай $s_0 = 2$. Имеем $\varkappa = 2$ и

$$\lambda_2(\psi) \equiv \frac{1}{64}\left(32b_0 + 12c_0^2 + 6c_1^2 + c_1^2\cos 4\psi - 16(a_1 \sin 2\psi + (b_1 - c_0c_1)\cos 2\psi)\right),$$

$$\omega_{2,0}(\psi) \equiv -\frac{1}{32}\left(16(a_0 + s_2) + c_1^2 \sin 4\psi + 8(a_1\cos 2\psi - (b_1 - c_0c_1)\sin 2\psi)\right).$$

Если $a_1=b_1=c_0=0$ и $16|a_0+s_2|<c_1^2$, то условие (8.19) выполняется с

$$\phi_0=\frac{1}{4}\arcsin\left(-\frac{16(a_0+s_2)}{c_1^2}\right)+\frac{\pi j}{2},\quad j\in\mathbb{Z},\quad \vartheta_2=-\frac{c_1^2}{8}\cos 4\phi_0<0.$$

Более того, если $b<b_*$ с

$$b_*=-\frac{3c_1^2}{16}-\frac{1}{32}\sqrt{c_1^4-256(a_0+s_2)^2},$$

затем из теоремы 56 с $n=m=q=2p=2$ и

$$d(\mathbf{x},t)\equiv\sqrt{\frac{|\mathbf{x}|^2}{2}+\left|\Phi(x_1,x_2)-\frac{S(t)}{2}-\phi_\varepsilon(t)\right|}$$

следует, что реализуется режим фазового захвата и равновесие $(0,0)$ устойчиво. Если $a_1=b_1=c_0=0$ и $16|a_0+s_2|>c_1^2$, то выполняется условие (8.20). Если же, кроме того, $b_0<-7c_1^2/32$, то из теоремы 58 при $m=q=2$ следует, что имеет место режим дрейфа фазы и равновесие $(0,0)$ устойчиво.

Рассмотрим также случай $s_0=3$. Возьмём $\varkappa=3$ и получим

$$\lambda_2(\psi)\equiv\frac{16b_0+6c_0^2+3c_1^2}{32},\quad \omega_{2,0}(\psi)\equiv-\frac{3a_0+2s_2}{6}.$$

Очевидно, если $3a_0+2s_2\neq 0$, то предположение (8.20) выполняется. В этом случае реализуется режим дрейфа фазы. Более того, если $b_0<-(6c_0^2+3c_1^2)/16$, то из теоремы 58 следует, что равновесие $(0,0)$ устойчиво в системе (8.30).

2. Пусть $p=2$. Тогда замена переменных, описанная в теореме 55, при $\ell=0$, $N=1$, $\xi_1(\phi,E)\equiv\sqrt{2E}\cos\phi$, $\xi_2(\phi,E)\equiv-\sqrt{2E}\sin\phi$, $\tilde v_1(R,\theta,t)\equiv t^{-1/2}v_1(R,\theta,S(t))$, $\tilde\psi_1(R,\theta,t)\equiv t^{-1/2}\psi_1(R,\theta,S(t))$,

$$v_1\equiv R\left\{\int\limits_0^S\left\{\frac{a(s)}{2}\sin\left(2\theta+\frac{2s}{\varkappa}\right)-b(s)\sin^2\left(\theta+\frac{s}{\varkappa}\right)\right\}_{\varkappa s}ds\right\}_{\varkappa S},$$

$$\psi_1\equiv\left\{\int\limits_0^S\left\{a(s)\cos^2\left(\theta+\frac{s}{\varkappa}\right)-\frac{b(s)}{2}\sin\left(2\theta+\frac{2s}{\varkappa}\right)\right\}_{\varkappa s}ds\right\}_{\varkappa S},$$

преобразует систему (8.30) к виду (8.13) с функциями $\Lambda_1(v,\psi)\equiv\lambda_1(\psi)v$ и $\Omega_1(v,\psi)\equiv\omega_{1,0}(\psi)$. Видим, что система удовлетворяет (8.15), (8.16) и (8.18) при $n=m=1$, а предположение (8.24) выполняется при $\mu=|c_0|+|c_1|$ и $2p/q=2$.

Рассмотрим случай $s_0 = 1$. Тогда $\varkappa = 1$ и

$$\lambda_1(\psi) \equiv \frac{b_0}{2}, \quad \omega_{1,0}(\psi) \equiv -\frac{a_0 + 2s_2}{2}.$$

Легко видеть, что если $a_0 + 2s_2 \neq 0$, то предположение (8.20) выполняется и теорема 58 применима при $m < q$. Следовательно, имеет место режим дрейфа фазы, и равновесие $(0,0)$ устойчиво, если $b_0 < 0$ (см. рис. 8.1, б).

В случае $s_0 = 2$ имеем $\varkappa = 2$ и

$$\lambda_1(\psi) \equiv \frac{1}{4}\left(2b_0 - d_1 \sin(2\psi + \delta_1)\right), \quad \omega_{1,0}(\psi) \equiv -\frac{1}{4}\left(a_0 + s_2 + 8d_1 \cos(2\psi + \delta_1)\right),$$

где $d_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$ и $\delta_1 = \arccos(a_1/d_1)$. Если $|a_0 + s_2| < 8d_1$, то предположение (8.19) выполняется с

$$\phi_0 = -\frac{\delta_1}{2} - \frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{a_0 + s_2}{8d_1}\right) + \pi j, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad \vartheta_1 = 4d_1 \sin(2\phi_0 + \delta_1) < 0,$$

и теорема 56 применима при $n = m < q < 2p$. Следовательно, реализуется режим фазового захвата (см. рис. 8.4), и равновесие $(0,0)$ устойчиво, если

$$b_0 < -\frac{1}{16}\sqrt{64d_1^2 - (a_0 + s_2)^2}.$$

Если $|a_0 + s_2| > 8d_1$, то предположение (8.20) выполняется. Следовательно, из теоремы 58 следует, что имеет место режим дрейфа фаз, а равновесие $(0,0)$ устойчиво, если $b_0 < -d_1/2$.

Отметим, что в случае $p = 2$ стохастическая часть затухающего возмущения не влияет на устойчивость равновесия в системе (8.30).

Таким образом, устойчивость равновесия в (8.30) зависит как от асимптотического режима в системе, так и от частоты возмущения s_0. Более того, пример из § 8.2 показывает, что возможна устойчивая фазовая синхронизация систем с осциллирующим стохастическим возмущением.

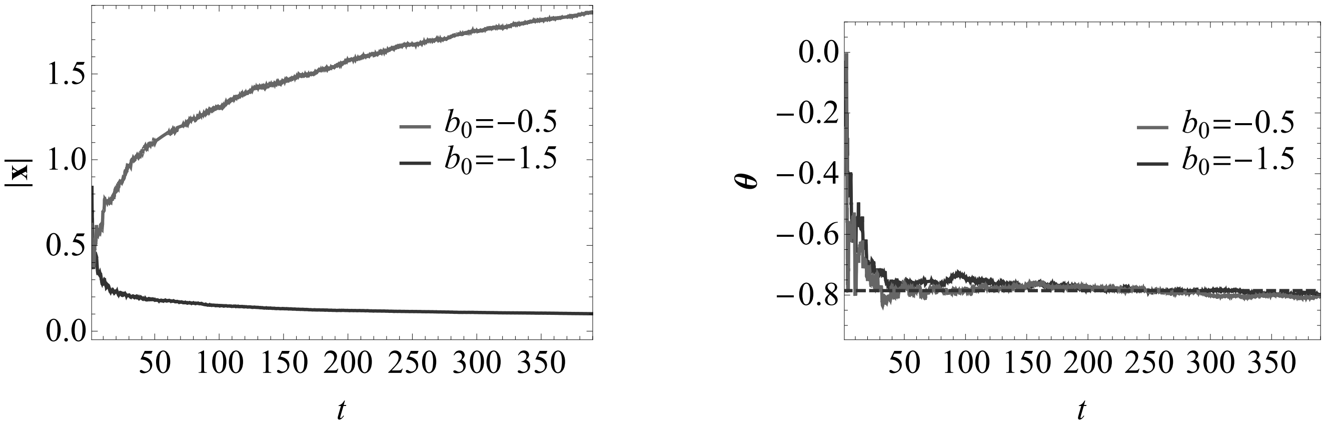


Рис. 8.4. Эволюция $|\mathbf{x}(t)|$ и $\theta(t) = \Phi(x_1(t), x_2(t)) - S(t)/2$ для реализаций решений системы (8.30) при $a_1 = 2$, $c_1 = 1$, $s_0 = 2$, $a_0 = b_1 = c_0 = s_2 = 0$. Чёрная пунктирная кривая соответствует $\theta(t) \equiv \phi_0$, где $\phi_0 = -\pi/4$. В этом случае $\lambda_1(\phi_0) < 0$ тогда и только тогда, когда $b_0 < -1$.

8.4.2. Пример 2

Теперь рассмотрим нелинейную систему

$$\begin{aligned} &dx_1 = x_2\,dt, \\ &dx_2 = \left(-x_1 + t^{-\frac{1}{2}}\frac{a(S(t))x_1^2x_2}{1+|\mathbf{x}|^2} + t^{-1}b(S(t))x_2\right)dt + t^{-\frac{1}{2}}c\big(S(t)\big)x_1\,dw_2(t), \end{aligned} \tag{8.31}$$

$t \geq 1$, где

$$\begin{aligned} &a(S) \equiv a_0 + a_1\cos S, \quad b(S) \equiv b_0 + b_1\cos S, \quad c(S) \equiv c_0 + c_1\cos S, \\ &S(t) \equiv t + s_1 t^{\frac{1}{2}} + s_2\log t \end{aligned}$$

с $p \in \mathbb{Z}_+$ и постоянными параметрами a_k, b_k, c_k и s_k. Видим, что система (8.31) имеет вид (8.1) с $q = 2$,

$$\begin{gathered} \mathbf{a}(\mathbf{x},t) \equiv \mathbf{a}_0(\mathbf{x}) + t^{-\frac{1}{2}}\mathbf{a}_1(\mathbf{x},S(t)) + t^{-1}\mathbf{a}_2(\mathbf{x},S(t)), \quad \mathbf{A}(\mathbf{x},t) \equiv t^{-\frac{1}{2}}\mathbf{A}_1(\mathbf{x},S(t)), \\ \mathbf{a}_0 \equiv \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_1 \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{a(S)x_1^2x_2}{1+|\mathbf{x}|^2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ b(S)x_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_p \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c(S)x_1 \end{pmatrix}. \end{gathered}$$

Как и в предыдущем примере, гамильтониан соответствующей предельной системы (8.5) имеет вид $H(x_1,x_2) \equiv |\mathbf{x}|^2/2$. Замена переменных, описанная в теореме 55, при $\ell = 0$, $N = 2$, $\xi_1(\phi,E) \equiv \sqrt{2E}\cos\phi$, $\xi_2(\phi,E) \equiv -\sqrt{2E}\sin\phi$ и функциями $\tilde{v}_2(R,\theta,t)$, $\tilde{\psi}_2(R,\theta,t)$ в виде $\tilde{v}_2(R,\theta,t) \equiv t^{-1/2}v_1(R,\theta,S(t)) + t^{-1}v_2(R,\theta,S(t))$,

$\tilde{\psi}_2(R,\theta,t) \equiv t^{-1/2}\psi_1(R,\theta,S(t)) + t^{-1}\psi_2(R,\theta,S(t))$, преобразует систему (8.30) к виду (8.13) с

$$\begin{aligned}
\Lambda_1(v,\psi) =& \frac{a_0 v^3}{4(1+2v^2)},\\
\Omega_1(v,\psi) =& -\frac{s_1}{2},\\
\Lambda_2(v,\psi) =& \frac{v}{96}\left(48b_0 + 18c_0^2 + 9c_1^2 + 6c_1^2\cos 2\psi - \frac{2a_1^2 v^4 \sin 2\psi}{(1+2v^2)^2}\right),\\
\Omega_2(v,\psi) =& -s_2 - \frac{c_1^2 \sin 2\psi}{16}\\
& - \frac{v^4\left(165a_0^2 + 104a_1^2 - 20a_1^2\cos 2\psi + 12v^2(25a_0^2 + 16a_1^2 + 5a_1^2\cos 2\psi)\right)}{960(1+2v^2)^3},
\end{aligned}$$

Из этого следует, что условия (8.15), (8.17) и (8.18) выполняются при $n = m = 1$, $l = 1$, $h = 3$ и

$$\begin{gathered}
\lambda_{1,3}(\psi) \equiv \frac{a_0}{4}, \quad \lambda_2(\psi) \equiv \frac{48b_0 + 18c_0^2 + 9c_1^2 + 6c_1^2\cos 2\psi}{96},\\
\omega_{1,0}(\psi) \equiv -\frac{s_1}{2}, \quad \omega_{2,0}(\psi) \equiv -s_2 - \frac{c_1^2\sin 2\psi}{16}.
\end{gathered}$$

Более того, предположение (8.24) справедливо при $\mu = |c_0| + |c_1|$ и $2p/q = 1$.

Пусть $s_1 \neq 0$. Тогда предположение (8.20) выполняется и теорема 59 применима при $m < q$. Следовательно, реализуется режим фазового дрейфа, и равновесие $(0,0)$ устойчиво, если $a_0 < 0$ и $b_0 < -(6c_0^2 + 5c_1^2)/16$ (см. рис. 8.5).

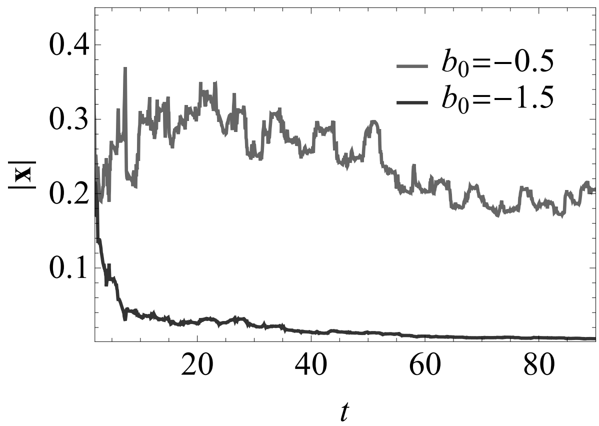


Рис. 8.5. Эволюция $|\mathbf{x}(t)|$ для реализаций решений системы (8.31) при $a_0 = -0.1$, $a_1 = b_1 = s_1 = 1$, $c_0 = s_2 = 0$, $c_1 = 2$.

Пусть теперь $s_1 = 0$. Если $16|s_2| < c_1^2$, то предположения (8.15) и (8.19) выполняются при $m = 2$ и

$$\phi_0 = \frac{1}{2}\arcsin\left(-\frac{16s_2}{c_1^2}\right) + \pi j, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad \vartheta_2 = -\frac{c_1^2}{4}\cos 2\phi_0 < 0,$$

и теорема 57 применима при $n + l = m = q = 2p$. Следовательно, имеет место режим фазового захвата (см. рис. 8.6), и равновесие $(0,0)$ устойчиво на экспоненциально большом интервале времени при $\mu \to 0$, если

$$a_0 < 0, \quad b_0 < b_*, \quad b_* := -\frac{6c_0^2 + 3c_1^2 + 2\sqrt{c_1^4 - (16s_2)^2}}{16}.$$

Более того, из второй части теоремы 57 следует, что если $a_0 < 0$ и $b_0 > b_*$, то

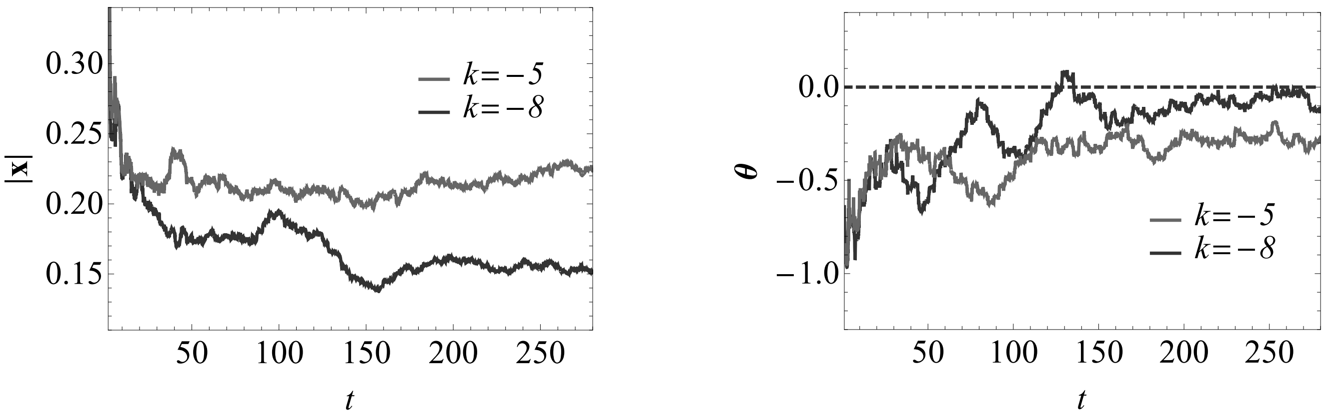


Рис. 8.6. Эволюция $|\mathbf{x}(t)|$ и $\theta(t) = \Phi(x_1(t), x_2(t)) - S(t)$ для реализаций решений системы (8.31) при $a_0 = -1$, $a_1 = b_1 = 1$, $c_0 = s_1 = s_2 = 0$, $b_0 = k\mu^2/16$, $c_1 = \mu$, $\mu = 0,5$. Чёрная пунктирная кривая соответствует $\theta(t) \equiv \phi_0$, где $\phi_0 = 0$. В этом случае $b_* = -5\mu^2/16$.

равновесие $(0,0)$ устойчиво (см. рис. 8.7) в смысле (8.28) с

$$\tilde{d}(\mathbf{x}, t) \equiv \sqrt{t^{\frac{1}{2}}\left|\frac{|\mathbf{x}|}{\sqrt{2}} - u_\varepsilon(t)\right|^2 + |\Phi(x_1, x_2) - S(t) - \phi_\varepsilon(t)|^2},$$

$$u_\varepsilon(t) \approx t^{-\frac{1}{4}}u_0, \quad \phi_\varepsilon(t) \approx \phi_0, \quad t \to \infty, \quad u_0 = \left(\frac{4\lambda_2(\phi_0) + 1}{|a_0|}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

8.5. Обоснование результатов

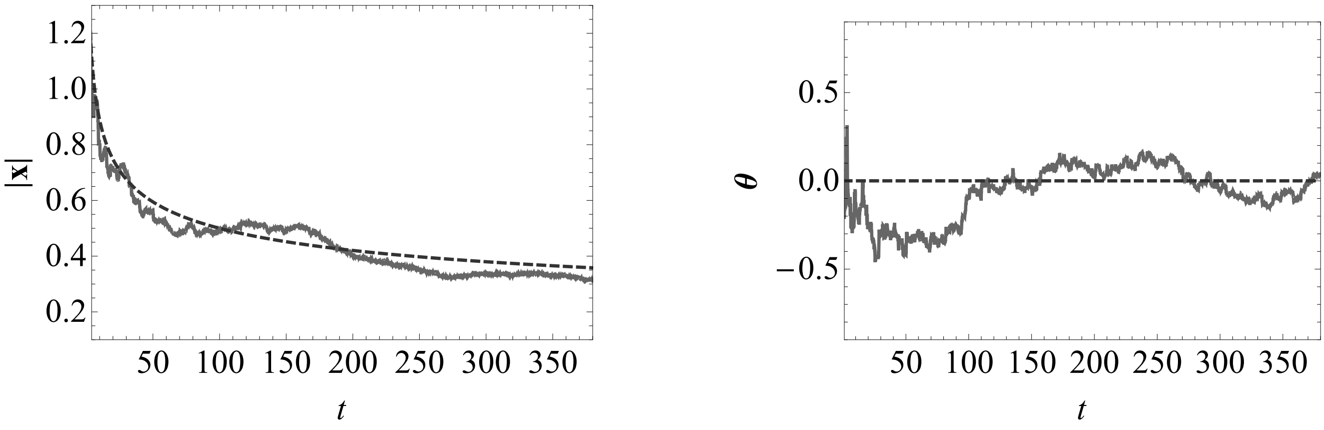


Рис. 8.7. Эволюция $|\mathbf{x}(t)|$ и $\theta(t) = \Phi(x_1(t), x_2(t)) - S(t)$ для реализаций решений системы (8.31) при $a_0 = -1$, $a_1 = b_1 = 1$, $c_0 = s_1 = s_2 = 0$, $b_0 = 3\mu^2/16$, $c_1 = \mu$, $\mu = 0.5$. Чёрные пунктирные кривые соответствуют $|\mathbf{x}(t)| = t^{-1/4}u_0$ и $\theta(t) \equiv \phi_0$, где $u_0 = \sqrt{5/2}$ и $\phi_0 = 0$.

8.5.1. Замена переменных

Доказательство теоремы 55. Сначала определим функции

$$X_1(E,\varphi) \equiv \xi_1\left(\frac{\varphi}{\nu(E)}, E\right), \quad X_2(E,\varphi) \equiv \xi_2\left(\frac{\varphi}{\nu(E)}, E\right).$$

Легко проверить, что эти функции являются 2π-периодическими относительно φ и удовлетворяют системе

$$\nu(E)\frac{\partial X_1}{\partial \varphi} = \partial_{X_2} H(X_1, X_2), \quad \nu(E)\frac{\partial X_2}{\partial \varphi} = -\partial_{X_1} H(X_1, X_2), \tag{8.32}$$

Более того, из определения функций $\xi_1(\varphi, E)$ и $\xi_2(\varphi, E)$ следует, что

$$H(X_1(E,\varphi), X_2(E,\varphi)) \equiv E. \tag{8.33}$$

Используя $X_1(E,\varphi)$ и $X_2(E,\varphi)$, систему (8.1) можно переписать в переменных типа действие-угол (E,φ). Дифференцируя тождество (8.33) по E и используя (8.32), получаем

$$\det\frac{\partial(X_1, X_2)}{\partial(E,\varphi)} = \begin{vmatrix} \partial_E X_1 & \partial_\varphi X_1 \\ \partial_E X_2 & \partial_\varphi X_2 \end{vmatrix} \equiv \frac{1}{\nu(E)} \neq 0, \quad E \in [0, E_0].$$

Следовательно, преобразование (8.10) обратимо для всех $E \in [0, E_0]$ и $\varphi \in [0, 2\pi)$. Определим операторы

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{a}(\mathbf{x}, t), \mathbf{A}(\mathbf{x}, t))U := \partial_t U + (\nabla_{\mathbf{x}} U)^T \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\mathbf{A}^T(\mathbf{x}, t)\mathbf{H}_{\mathbf{x}}(U)\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)\right),$$

$$\nabla_{\mathbf{x}} U := \begin{pmatrix} \partial_{x_1} U \\ \partial_{x_2} U \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}_{\mathbf{x}}(U) := \begin{pmatrix} \partial_{x_1}^2 U & \partial_{x_1}\partial_{x_2} U \\ \partial_{x_2}\partial_{x_1} U & \partial_{x_2}^2 U \end{pmatrix}$$

для любой гладкой функции $U(\mathbf{x}, t)$. Напомним, что обратное преобразование к (8.10) задаётся формулой (8.23). Тогда, применяя формулу Ито, можно показать, что в новых переменных $\mathbf{e} = (E, \varphi)^T$ система (8.1) принимает вид

$$d\mathbf{e}(t) = \mathbf{b}(\mathbf{e}(t), t)dt + \mathbf{B}(\mathbf{e}(t), t)\, d\mathbf{w}(t)$$

с $\mathbf{b}(\mathbf{e}, t) \equiv (b_1(E, \varphi, t), b_2(E, \varphi, t))^T$ и $\mathbf{B}(\mathbf{e}, t) \equiv \{\beta_{i,j}(E, \varphi, t)\}_{2\times 2}$, где

$$\begin{aligned} b_1 \equiv& \mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{a}(\mathbf{x}, t), \mathbf{A}(\mathbf{x}, t))H(x_1, x_2)\Big|_{x_1 = X_1(E,\varphi), x_2 = X_2(E,\varphi)}, \\ b_2 \equiv& \mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{a}(\mathbf{x}, t), \mathbf{A}(\mathbf{x}, t))\Phi(x_1, x_2)\Big|_{x_1 = X_1(E,\varphi), x_2 = X_2(E,\varphi)}, \\ (\beta_{1,1}, \beta_{1,2}) \equiv& (\nabla_{\mathbf{x}} H(x_1, x_2))^T \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)\Big|_{x_1 = X_1(E,\varphi), x_2 = X_2(E,\varphi)}, \\ (\beta_{2,1}, \beta_{2,2}) \equiv& (\nabla_{\mathbf{x}} \Phi(x_1, x_2))^T \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)\Big|_{x_1 = X_1(E,\varphi), x_2 = X_2(E,\varphi)}. \end{aligned}$$

Из (8.6) следует, что

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(\mathbf{e}, t) \sim& \begin{pmatrix} 0 \\ \nu(E) \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^{\infty} t^{-\frac{k}{q}} \begin{pmatrix} b_{1,k}(E, \varphi, S(t)) \\ b_{2,k}(E, \varphi, S(t)) \end{pmatrix}, \\ \beta_{i,j}(E, \varphi, t) \sim& \sum_{k=1}^{\infty} t^{-\frac{k}{q}} \beta_{i,j,k}(E, \varphi, S(t)) \end{aligned} \tag{8.34}$$

при $t \to \infty$, где

$$\begin{aligned} b_{1,k} \equiv& (\nabla_{\mathbf{x}} H)^T \mathbf{a}_k + \frac{1}{2}\sum_{i+j=k} \mathrm{tr}\left(\mathbf{A}_i^T \mathbf{H}_{\mathbf{x}}(H)\mathbf{A}_j\right)\Big|_{x_1 = X_1(E,\varphi), x_2 = X_2(E,\varphi)}, \\ b_{2,k} \equiv& (\nabla_{\mathbf{x}} \Phi)^T \mathbf{a}_k + \frac{1}{2}\sum_{i+j=k} \mathrm{tr}\left(\mathbf{A}_i^T \mathbf{H}_{\mathbf{x}}(\Phi)\mathbf{A}_j\right)\Big|_{x_1 = X_1(E,\varphi), x_2 = X_2(E,\varphi)}, \\ (\beta_{1,1,k}, \beta_{1,2,k}) \equiv& (\nabla_{\mathbf{x}} H)^T \mathbf{A}_k\Big|_{x_1 = X_1(E,\varphi), x_2 = X_2(E,\varphi)}, \\ (\beta_{2,1,k}, \beta_{2,2,k}) \equiv& (\nabla_{\mathbf{x}} \Phi)^T \mathbf{A}_k\Big|_{x_1 = X_1(E,\varphi), x_2 = X_2(E,\varphi)}. \end{aligned} \tag{8.35}$$

Заметим, что $b_{i,k}(E,\varphi,S)$ и $\beta_{i,j,k}(E,\varphi,S)$ являются 2π-периодическими относительно φ и S. Более того, справедливы следующие асимптотические разложения:

$$\begin{aligned} b_{1,k}(E,\varphi,S) &= \sum_{l=2}^{\infty} E^{\frac{l}{2}} b_{1,k,l}(\varphi,S), \\ b_{2,k}(E,\varphi,S) &= \sum_{l=0}^{\infty} E^{\frac{l}{2}} b_{2,k,l}(\varphi,S), \\ \beta_{1,j,k}(E,\varphi,S) &= \sum_{l=2}^{\infty} E^{\frac{l}{2}} \beta_{1,j,k,l}(\varphi,S), \\ \beta_{2,j,k}(E,\varphi,S) &= \sum_{l=0}^{\infty} E^{\frac{l}{2}} \beta_{2,j,k,l}(\varphi,S) \end{aligned} \tag{8.36}$$

при $E \to 0$ равномерно для всех $(\varphi, S) \in \mathbb{R}^2$. Действительно, легко проверить, что $\nabla_{\mathbf{x}} H = \nu(-\partial_\varphi X_2, \partial_\varphi X_1)^T$, $\nabla_{\mathbf{x}} \Phi = \nu(\partial_E X_2, -\partial_E X_1)^T$,

$$\begin{aligned} \partial_{x_1}^2 \begin{pmatrix} H \\ \Phi \end{pmatrix} &\equiv \nu \begin{vmatrix} \partial_\varphi X_2 & \partial_\varphi \\ \partial_E X_2 & \partial_E \end{vmatrix} \begin{pmatrix} \nu \partial_\varphi X_2 \\ -\nu \partial_E X_2 \end{pmatrix}, \\ \partial_{x_1}\partial_{x_2} \begin{pmatrix} H \\ \Phi \end{pmatrix} &\equiv -\nu \begin{vmatrix} \partial_\varphi X_1 & \partial_\varphi \\ \partial_E X_1 & \partial_E \end{vmatrix} \begin{pmatrix} \nu \partial_\varphi X_2 \\ -\nu \partial_E X_2 \end{pmatrix}, \\ \partial_{x_2}^2 \begin{pmatrix} H \\ \Phi \end{pmatrix} &\equiv \nu \begin{vmatrix} \partial_\varphi X_1 & \partial_\varphi \\ \partial_E X_1 & \partial_E \end{vmatrix} \begin{pmatrix} \nu \partial_\varphi X_1 \\ -\nu \partial_E X_2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{8.37}$$

Из (8.4) и (8.32) следует, что $X_1(E,\varphi) = \sqrt{2E}\cos\varphi + \mathcal{O}(E)$ и $X_2(E,\varphi) = -\sqrt{2E}\sin\varphi + \mathcal{O}(E)$ при $E \to 0$ равномерно для всех $\varphi \in \mathbb{R}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{\mathbf{x}}(H) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(E^{\frac{1}{2}}), \\ \mathbf{H}_{\mathbf{x}}(\Phi) &= \frac{1}{2E} \begin{pmatrix} \sin 2\varphi & \cos 2\varphi \\ \cos 2\varphi & -\sin 2\varphi \end{pmatrix} + \mathcal{O}(E^{-\frac{1}{2}}) \end{aligned}$$

при $E \to 0$. Объединяя это с (8.35) и (8.37), получаем (8.36).

Для описания эффектов, связанных с влиянием осциллирующих возмущений в (8.1), вводятся переменные амплитуды и разности фаз в виде (8.11), где ℓ — некоторое неотрицательное целое число. Будем пологать $\ell = 0$, если $\nu(E) \equiv \text{const}$, и $\ell > 0$, если $\nu(E) \not\equiv \text{const}$. В новых переменных $\mathbf{y} = (R, \theta)^T$ возмущённая система имеет вид

$$d\mathbf{y}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{y}(t), t)dt + \mathbf{F}(\mathbf{y}(t), t)\, d\mathbf{w}(t) \tag{8.38}$$

с $\mathbf{f}(\mathbf{y}, t) \equiv (f_1(R, \theta, t) + t^{-1}\ell R/q, f_2(R, \theta, t))^T$ и $\mathbf{F}(\mathbf{y}, t) \equiv \{\gamma_{i,j}(R, \theta, t)\}_{2\times 2}$, где

$$\begin{aligned}
f_1(R, \theta, t) &\equiv (2R)^{-1}\left(t^{\frac{2\ell}{q}} b_1\left(t^{-\frac{2\ell}{q}}R^2, \varkappa^{-1}S(t) + \theta, t\right) - \sum_{j=1}^{2}\gamma_{1,j}^2(R, \theta, t)\right),\\
f_2(R, \theta, t) &\equiv b_2\left(t^{-\frac{2\ell}{q}}R^2, \varkappa^{-1}S(t) + \theta, t\right) - \varkappa^{-1}S'(t),\\
\gamma_{1,j}(R, \theta, t) &\equiv (2R)^{-1}t^{\frac{2\ell}{q}}\beta_{1,j}\left(t^{-\frac{2\ell}{q}}R^2, \varkappa^{-1}S(t) + \theta, t\right),\\
\gamma_{2,j}(R, \theta, t) &\equiv \beta_{2,j}\left(t^{-\frac{2\ell}{q}}R^2, \varkappa^{-1}S(t) + \theta, t\right).
\end{aligned}$$

Из (8.34) и (8.36) следует, что

$$\mathbf{f}(\mathbf{y}, t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} t^{-\frac{k}{q}}\mathbf{f}_k(\mathbf{y}, S(t)), \quad \mathbf{F}(\mathbf{y}, t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} t^{-\frac{k}{q}}\mathbf{F}_k(\mathbf{y}, S(t)),$$

при $t \to \infty$, где $\mathbf{f}_k(\mathbf{y}, S) \equiv (f_{1,k}(R, \theta, S) + \delta_{k,q}\ell R/q, f_{2,k}(R, \theta, S))^T$ и $\mathbf{F}_k(\mathbf{y}, S) \equiv \{\gamma_{i,j,k}(R, \theta, S)\}_{2\times 2}$ являются 2π-периодическими по θ и $2\pi\varkappa$-периодическими по S. В частности, если $\ell = 1$, то имеем

$$\begin{aligned}
f_{1,k} &\equiv \frac{1}{2}\sum_{\substack{l+m=k\\ l\geq 0,\, m\geq 1}} b_{1,m,l+2}(\theta + \varkappa^{-1}S, S)R^{1+l}\\
&\quad -\frac{1}{2R}\sum_{j=1}^{2}\sum_{\substack{l+m=k\\ l\geq 1,\, m\geq 1}} \gamma_{1,j,m}(R, \theta, S)\gamma_{1,j,l}(R, \theta, S),\\
f_{2,k} &\equiv \frac{\nu^{(k/2)}(0)}{(k/2)!}R^k - \varkappa^{-1}\Big(1 - \frac{k}{q} + \delta_{k,q}\Big)s_k + \sum_{\substack{l+m=k\\ l\geq 0,\, m\geq 1}} b_{2,m,l}(\theta + \varkappa^{-1}S, S)R^l,\\
\gamma_{1,j,k} &\equiv \frac{1}{2}\sum_{\substack{l+m=k\\ l\geq 0,\, m\geq 1}} \beta_{1,j,m,l+2}(\theta + \varkappa^{-1}S, S)R^{1+l},\\
\gamma_{2,j,k} &\equiv \sum_{\substack{l+m=k\\ l\geq 0,\, m\geq 1}} \beta_{2,j,m,l}(\theta + \varkappa^{-1}S, S)R^l,
\end{aligned}$$

где $\delta_{k,q}$ — символ Кронекера. Здесь и далее $s_j = 0$ при $j > q$, $\nu^{(k/2)}(0) = 0$ при нечётных k. Таким образом, $f_1(R,\theta,t) = \mathcal{O}(t^{-1/q})\mathcal{O}(R)$, $f_2(R,\theta,t) = \mathcal{O}(t^{-1/q})$, $\gamma_{1,j}(R,\theta,t) = \mathcal{O}(t^{-1/q})\mathcal{O}(R)$, $\gamma_{2,j}(R,\theta,t) = \mathcal{O}(t^{-1/q})$ при $R \to 0$ и $t \to \infty$ равномерно для всех $\theta \in \mathbb{R}$.

Заметим, что система (8.38) асимптотически автономна с соответствующей тривиальной предельной системой $\dot{R} = 0$, $\dot{\theta} = 0$. Следовательно, $S(t)$ изменяется быстрее по сравнению с возможными изменениями $R(t)$ и $\theta(t)$ при $t \to \infty$. Далее рассмотрим замену переменных, усредняющую дрейфовые члены системы (8.38). Преобразование ищется в виде

$$\begin{aligned} V_N(R,\theta,t) &= R + \sum_{k=1}^{N} t^{-\frac{k}{q}} v_k(R,\theta,S(t)), \\ \Psi_N(R,\theta,t) &= \theta + \sum_{k=1}^{N} t^{-\frac{k}{q}} \psi_k(R,\theta,S(t)), \end{aligned} \tag{8.39}$$

с некоторым целым числом $N \geq 1$. Коэффициенты $v_k(R,\theta,S)$ и $\psi_k(R,\theta,S)$ выбираются так, чтобы в новых переменных $v(t) \equiv V_N(R(t),\theta(t),t)$ и $\psi(t) \equiv \Psi_N(R(t),\theta(t),t)$ возмущённая система принимала вид (8.13), где коэффициенты $\Lambda_k(v,\psi)$ и $\Omega_k(v,\psi)$ не зависят от $S(t)$, а остатки $\tilde{\Lambda}_N(v,\psi,t)$, $\tilde{\Omega}_N(v,\psi,t)$ достаточно быстро убывают при $t \to \infty$. Применяя формулу Ито к (8.39), получаем

$$\begin{aligned} dv =& \mathcal{L}(\mathbf{y},\mathbf{f}(\mathbf{y},t),\mathbf{F}(\mathbf{y},t))V_N(R,\theta,t)\,dt + (\nabla_{\mathbf{y}} V_N(R,\theta,t))^T \mathbf{F}(\mathbf{y},t)\,d\mathbf{w}, \\ d\psi =& \mathcal{L}(\mathbf{y},\mathbf{f}(\mathbf{y},t),\mathbf{F}(\mathbf{y},t))\Psi_N(R,\theta,t)\,dt + (\nabla_{\mathbf{y}} \Psi_N(R,\theta,t))^T \mathbf{F}(\mathbf{y},t)\,d\mathbf{w} \end{aligned} \tag{8.40}$$

Заметим, что коэффициенты сноса в (8.40) имеют следующие асимптотические разложения при $t\to\infty$:

$$\mathcal{L}(\mathbf{y},\mathbf{f}(\mathbf{y},t),\mathbf{F}(\mathbf{y},t))\begin{pmatrix}V_N(R,\theta,t)\\ \Psi_N(R,\theta,t)\end{pmatrix}\sim\sum_{k=1}^{\infty}t^{-\frac{k}{q}}\left\{\mathbf{f}_k(\mathbf{y},S(t))+s_0\partial_S\begin{pmatrix}v_k\\ \psi_k\end{pmatrix}\right\}$$

$$+\sum_{k=2}^{\infty}t^{-\frac{k}{q}}\sum_{j=1}^{k-1}\left\{\left(f_{1,j}+\delta_{j,q}\frac{2\ell R}{q}\right)\partial_R+f_{2,j}\partial_\theta+s_j\left(1-\frac{j}{q}+\delta_{j,q}\right)\partial_S-\delta_{j,q}\frac{k-q}{q}\right\}$$

$$\times\begin{pmatrix}v_{k-j}\\ \psi_{k-j}\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\sum_{k=3}^{\infty}t^{-\frac{k}{q}}\sum_{i+j+l=k}\begin{pmatrix}\operatorname{tr}\left(\mathbf{F}_i^T(\mathbf{y},S(t))\mathbf{H}_{\mathbf{y}}(v_j)\mathbf{F}_l(\mathbf{y},S(t))\right)\\ \operatorname{tr}\left(\mathbf{F}_i^T(\mathbf{y},S(t))\mathbf{H}_{\mathbf{y}}(\psi_j)\mathbf{F}_l(\mathbf{y},S(t))\right)\end{pmatrix},$$

где предполагается, что $\mathbf{f}_k(\mathbf{y},S)\equiv 0$ и $\mathbf{F}_k(\mathbf{y},S)\equiv 0$, если $k<1$, и $v_j(R,\theta,S)\equiv\psi_j(R,\theta,S)\equiv 0$, если $j<1$ или $j>N$. Сравнение асимптотики дрейфовых членов в (8.40) с (8.14) даёт следующую цепочку дифференциальных уравнений для определения коэффициентов $v_k(R,\theta,S)$, $\psi_k(R,\theta,S)$:

$$s_0\partial_S\begin{pmatrix}v_k\\ \psi_k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Lambda_k(R,\theta)\\ \Omega_k(R,\theta)\end{pmatrix}-\mathbf{f}_k(\mathbf{y},S)+\tilde{\mathbf{f}}_k(\mathbf{y},S),\quad k\geq 1,\tag{8.41}$$

где дополнительные члены $\tilde{\mathbf{f}}_k(\mathbf{y},S)\equiv(\tilde f_{1,k}(R,\theta,S),\tilde f_{2,k}(R,\theta,S))^T$ в правой части явно выражаются через $\{v_i,\psi_i,\Lambda_i,\Omega_i\}_{i=1}^{k-1}$. В частности, $\tilde{\mathbf{f}}_1\equiv 0$,

$$\tilde{\mathbf{f}}_2\equiv(v_1\partial_R+\psi_1\partial_\theta)\begin{pmatrix}\Lambda_1\\ \Omega_1\end{pmatrix}+\frac{\ell}{q}\begin{pmatrix}v_{2-q}\\ 0\end{pmatrix}$$

$$-\left\{\left(f_{1,1}+\delta_{1,q}\frac{\ell R}{q}\right)\partial_R+f_{2,1}\partial_\theta+s_1\left(1-\frac{1}{q}+\delta_{1,q}\right)\partial_S-\delta_{1,q}\frac{2-q}{q}\right\}\begin{pmatrix}v_1\\ \psi_1\end{pmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{f}}_3\equiv\sum_{i+j=3}(v_j\partial_R+\psi_j\partial_\theta)\begin{pmatrix}\Lambda_i\\ \Omega_i\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\Big(v_1^2\partial_R^2+2v_1\psi_1\partial_R\partial_\theta+\psi_1^2\partial_\theta^2\Big)\begin{pmatrix}\Lambda_1\\ \Omega_1\end{pmatrix}$$

$$-\sum_{j=1}^{2}\left\{\left(f_{1,j}+\delta_{j,q}\frac{\ell R}{q}\right)\partial_R+f_{2,j}\partial_\theta+s_j\left(1-\frac{j}{q}+\delta_{j,q}\right)\partial_S-\delta_{j,q}\frac{3-q}{q}\right\}\begin{pmatrix}v_{3-j}\\ \psi_{3-j}\end{pmatrix}$$

$$-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\operatorname{tr}\left(\mathbf{F}_1^T\mathbf{H}_{\mathbf{y}}(v_1)\mathbf{F}_1\right)\\ \operatorname{tr}\left(\mathbf{F}_1^T\mathbf{H}_{\mathbf{y}}(\psi_1)\mathbf{F}_1\right)\end{pmatrix}+\frac{\ell}{q}\begin{pmatrix}v_{3-q}\\ 0\end{pmatrix},$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{f}}_k \equiv & \sum_{\substack{l+a_1+\ldots+ia_i+b_1+\ldots+jb_j=k\\ a_1+\ldots+a_i+b_1+\ldots+b_j\geq 1}} C_{i,j,a_1,\ldots,a_i,b_1,\ldots,b_j} v_1^{a_1}\cdots v_i^{a_i}\psi_1^{b_1}\cdots\psi_j^{b_j}\\
&\times \partial_R^{a_1+\ldots+a_i}\partial_\theta^{b_1+\ldots+b_j}\begin{pmatrix}\Lambda_l\\ \Omega_l\end{pmatrix}\\
&-\sum_{j=1}^{k-1}\left\{\left(f_{1,j}+\delta_{j,q}\frac{\ell R}{q}\right)\partial_R+f_{2,j}\partial_\theta+s_j\left(1-\frac{j}{q}+\delta_{j,q}\right)\partial_S-\delta_{j,q}\frac{k-q}{q}\right\}\begin{pmatrix}v_{k-j}\\ \psi_{k-j}\end{pmatrix}\\
&-\frac{1}{2}\sum_{i+j+l=k}\begin{pmatrix}\operatorname{tr}\left(\mathbf{F}_i^T\mathbf{H}_{\mathbf{y}}(v_j)\mathbf{F}_l\right)\\ \operatorname{tr}\left(\mathbf{F}_i^T\mathbf{H}_{\mathbf{y}}(\psi_j)\mathbf{F}_l\right)\end{pmatrix}+\frac{\ell}{q}\begin{pmatrix}v_{k-q}\\ 0\end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

где $C_{i,j,a_1,\ldots,a_i,b_1,\ldots,b_j}$ — некоторые постоянные параметры. Положим

$$
\begin{pmatrix}\Lambda_k(R,\theta)\\ \Omega_k(R,\theta)\end{pmatrix}\equiv\left\langle \mathbf{f}_k(\mathbf{y},S)-\tilde{\mathbf{f}}_k(\mathbf{y},S)\right\rangle_{\varkappa S},
$$

где

$$
\langle Z_k(R,\theta,S)\rangle_{\varkappa S}:=\frac{1}{2\pi\varkappa}\int\limits_0^{2\pi\varkappa}Z(R,\theta,S)\,dS=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}Z(R,\theta,\varkappa S)\,dS.
$$

Тогда правая часть системы (8.41) является $2\pi\varkappa$-периодичной по S с нулевым средним. Интегрирование (8.41) даёт

$$
\begin{pmatrix}v_k(R,\theta,S)\\ \psi_k(R,\theta,S)\end{pmatrix}=-\frac{1}{s_0}\int\limits_0^S\begin{pmatrix}\{f_{1,k}(R,\theta,s)-\tilde{f}_{1,k}(R,\theta,s)\}_{\varkappa s}\\ \{f_{2,k}(R,\theta,s)-\tilde{f}_{2,k}(R,\theta,s)\}_{\varkappa s}\end{pmatrix}\,ds+\begin{pmatrix}\tilde{v}_k(R,\theta)\\ \tilde{\psi}_k(R,\theta)\end{pmatrix},
$$

где

$$
\{Z(R,\theta,s)\}_{\varkappa s}:=Z(R,\theta,s)-\langle Z(R,\theta,s)\rangle_{\varkappa s},
$$

а функции $\tilde{v}_k(R,\theta)$ и $\tilde{\psi}_k(R,\theta)$ выбраны таким образом, чтобы $\langle v_k(R,\theta,S)\rangle_{\varkappa S}\equiv\langle\psi_k(R,\theta,S)\rangle_{\varkappa S}\equiv 0$. Легко проверить, что

$$
\begin{gathered}
\tilde{f}_{1,k}(R,\theta,S)=\mathcal{O}(R),\quad \Lambda_k(R,\theta)=\mathcal{O}(R),\quad v_k(R,\theta,S)=\mathcal{O}(R),\\
\tilde{f}_{2,k}(R,\theta,S)=\mathcal{O}(1),\quad \Omega_k(R,\theta)=\mathcal{O}(1),\quad \psi_k(R,\theta,S)=\mathcal{O}(1)
\end{gathered}
$$

при $R\to 0$ равномерно для всех $(\theta,S)\in\mathbb{R}^2$.

Из (8.39) следует, что для любого $\epsilon \in (0,1)$ существуют $t_* \geq \max\{t_0, 1\}$ и $R_0 > 0$ такие, что

$$|V_N(R,\theta,t) - R| \leq \epsilon R, \quad |\Psi_N(R,\theta,t) - \theta| \leq \epsilon \tag{8.42}$$

для всех $R \in [0, R_0]$, $\theta \in \mathbb{R}$ и $t \geq t_*$. Более того,

$$\det \frac{\partial(V_N, \Psi_N)}{\partial(R,\theta)} = \begin{vmatrix} \partial_R V_N(R,\theta,t) & \partial_\theta V_N(R,\theta,t) \\ \partial_R \Psi_N(R,\theta,t) & \partial_\theta \Psi_N(R,\theta,t) \end{vmatrix} = 1 + \mathcal{O}(t^{-\frac{1}{q}})$$

при $t \to \infty$ равномерно для всех $\theta \in \mathbb{R}$ и $R \in [0, R_0]$. Следовательно, преобразование $(R,\theta,t) \to (v,\psi,t)$ обратимо для всех $v \in [0, v_0]$, $\psi \in \mathbb{R}$ и $t \geq t_*$, где $v_0 = R_0(1-\epsilon)$. Выберем $R_0 = E_0^{1/2} t_*^{\ell/q}$, тогда для всех $t \geq t_*$ преобразование (8.11) справедливо для всех $0 \leq E \leq E_0$ и $\varphi \in \mathbb{R}$.

Обозначим через $R = \mathfrak{R}(v,\psi,t)$, $\theta = \mathfrak{T}(v,\psi,t)$ — обратное преобразование к (8.12). Тогда,

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}_N(\mathbf{z},t) &\equiv \begin{pmatrix} \partial_R V_N(R,\theta,t) & \partial_\theta V_N(R,\theta,t) \\ \partial_R \Psi_N(R,\theta,t) & \partial_\theta \Psi_N(R,\theta,t) \end{pmatrix} \mathbf{F}(\mathbf{y},t)\Big|_{\substack{R=\mathfrak{R}(v,\psi,t) \\ \theta=\mathfrak{T}(v,\psi,t)}}, \\
\tilde{\Lambda}_N(v,\psi,t) &\equiv -\sum_{k=1}^N t^{-\frac{k}{q}} \Lambda_k(v,\psi) + \mathcal{L}(\mathbf{y}, \mathbf{f}(\mathbf{y},t), \mathbf{F}(\mathbf{y},t)) V_N(R,\theta,t)\Big|_{\substack{R=\mathfrak{R}(v,\psi,t) \\ \theta=\mathfrak{T}(v,\psi,t)}}, \\
\tilde{\Omega}_N(v,\psi,t) &\equiv -\sum_{k=1}^N t^{-\frac{k}{q}} \Omega_k(v,\psi) + \mathcal{L}(\mathbf{y}, \mathbf{f}(\mathbf{y},t), \mathbf{F}(\mathbf{y},t)) \Psi_N(R,\theta,t)\Big|_{\substack{R=\mathfrak{R}(v,\psi,t) \\ \theta=\mathfrak{T}(v,\psi,t)}}.
\end{aligned}$$

Из этого следует, что

$$\tilde{\Lambda}_N = \mathcal{O}(v)\mathcal{O}(t^{-\frac{N+1}{q}}), \quad \tilde{\Omega}_N = \mathcal{O}(t^{-\frac{N+1}{q}}), \quad \sigma_{1,j} = \mathcal{O}(v)\mathcal{O}(t^{-\frac{1}{q}}), \quad \sigma_{2,j} = \mathcal{O}(t^{-\frac{1}{q}})$$

при $v \to 0$ и $t \to \infty$ равномерно для всех $\psi \in \mathbb{R}$.

Таким образом, мы получаем доказательство теоремы 55 с

$$\tilde{v}_N(R,\theta,t) \equiv \sum_{k=1}^N t^{-\frac{k}{q}} v_k(R,\theta,S(t)), \quad \tilde{\psi}_N(R,\theta,t) \equiv \sum_{k=1}^N t^{-\frac{k}{q}} \psi_k(R,\theta,S(t)).$$

$\square$

8.5.2. Асимптотические режимы

Доказательство леммы 17. Так как $\Lambda_N(u,\phi,t)=\mathcal{O}(u)$ при $u\to 0$ равномерно для всех $\phi\in\mathbb{R}$ и $t\geq t_*$, то первое уравнение в (8.21) имеет неподвижную точку $u(t)\equiv 0$. Из (8.18) следует, что правая часть второго уравнения при $u=0$ имеет вид

$$\Omega_N(0,\phi,t)\equiv\sum_{k=m}^{N}t^{-\frac{k}{q}}\omega_{k,0}(\phi)+\tilde{\Omega}_N(0,\phi,t).$$

Подстановка $u=0$ и $\phi=\phi_0+\eta$ в (8.21) даёт

$$\frac{d\eta}{dt}=t^{-\frac{m}{q}}\mathcal{Z}_m(\eta)+\tilde{\mathcal{Z}}_m(\eta,t), \tag{8.43}$$

где

$$\mathcal{Z}_m(\eta)\equiv\omega_{m,0}(\phi_0+\eta)=\eta\left(\vartheta_m+\mathcal{O}(\eta)\right),\quad \eta\to 0,$$
$$\tilde{\mathcal{Z}}_m(\eta,t)\equiv\sum_{k=m+1}^{N}t^{-\frac{k}{q}}\omega_{k,0}(\phi_0+\eta)+\tilde{\Omega}_N(0,\phi_0+\eta,t)=\mathcal{O}(t^{-\frac{m+1}{q}}),\quad t\to\infty.$$

Следовательно, существуют $K_0>0$, $t_1\geq t_*$ и $\eta_0>0$ такие, что

$$\frac{d|\eta|}{dt}\leq t^{-\frac{m}{q}}\left(-\frac{|\vartheta_m|}{2}|\eta|+K_0t^{-\frac{1}{q}}\right) \tag{8.44}$$

для всех $t\geq t_1$ и $|\eta|\leq\eta_0$. Для любого $\varepsilon\in(0,\eta_0)$ определим

$$\delta_\varepsilon=\frac{4K_0}{|\vartheta_m|}t_\varepsilon^{-\frac{1}{q}},\quad t_\varepsilon=\max\left\{t_1,\left(\frac{8K_0}{\varepsilon|\vartheta_m|}\right)^q\right\}.$$

Тогда $d|\eta(t)|/dt<0$ для решений уравнения (8.43), для которых $\delta_\varepsilon\leq|\eta(t)|<\varepsilon$ при $t\geq t_\varepsilon$. Следовательно, любое решение уравнения (8.43) с начальными данными $|\eta(t_\varepsilon)|<\delta_\varepsilon$ не может покинуть окрестность $|\eta|\leq\varepsilon$ при $t\geq t_\varepsilon$.

Пусть $m=q$. Тогда, интегрируя (8.44) по t, получаем

$$\eta(t)=\begin{cases}\mathcal{O}(t^{-\frac{|\vartheta_m|}{2}})+\mathcal{O}(t^{-\frac{1}{q}}), & \dfrac{|\vartheta_m|}{2}\neq\dfrac{1}{q},\\ \mathcal{O}(t^{-\frac{1}{q}}\log t), & \dfrac{|\vartheta_m|}{2}=\dfrac{1}{q}.\end{cases}$$

Следовательно, существует частное решение уравнения (8.43) такое, что $\eta(t)=\mathcal{O}(t^{-c})$ при $t\to\infty$ с $c=\min\{|\vartheta_m|,q^{-1}\}/2>0$. □

Доказательство леммы 18. Так как $\omega_{m,0}(\phi)\neq 0$, то $0<\omega^-_{m,0}\le|\omega_{m,0}(\phi)|\le\omega^+_{m,0}$ для всех $\phi\in\mathbb{R}$ с некоторыми ненулевыми константами $\omega^\pm_{m,0}$. Следовательно, существует $t_1\ge t_*$ такое, что $|\Omega_N(0,\phi,t)|\ge t^{-\frac{m}{q}}\omega^-_{m,0}/2$ при $t\ge t_1$. Легко видеть, что $u(t)\equiv 0$ удовлетворяет первому уравнению в (8.21) для всех $\phi\in\mathbb{R}$. Поэтому, подставляя $u=0$ во второе уравнение в (8.21), получаем $d\phi/dt\ge t^{-\frac{m}{q}}\omega^-_{m,0}/2$ при $t\ge t_1$, если $\omega_{m,0}(\phi)>0$, и $d\phi/dt\le -t^{-\frac{m}{q}}\omega^-_{m,0}/2$, если $\omega_{m,0}(\phi)<0$. Интегрируя эти неравенства, видим, что $|\phi(t)|\to\infty$ при $t\to\infty$. $\square$

8.5.3. Устойчивость фазового захвата

Доказательство теоремы 56. В теореме 55 выберем $N=\max\{n,m\}$. Из леммы 17 следует, что при всех $\varepsilon>0$ соответствующая редуцированная система (8.21) имеет решение $u_\varepsilon(t)\equiv 0$, $\phi_\varepsilon(t)$ с асимптотикой (8.22). Покажем, что решения системы (8.1) с большой вероятностью остаются в некоторой окрестности этой траектории.

Рассмотрим вспомогательные функции

$$\begin{aligned}
U_1(\mathbf{x},t)&=V_N\left(t^{\frac{\ell}{q}}\sqrt{H(x_1,x_2)},\Phi(x_1,x_2)-\varkappa^{-1}S(t),t\right),\\
U_2(\mathbf{x},t)&=\Psi_N\left(t^{\frac{\ell}{q}}\sqrt{H(x_1,x_2)},\Phi(x_1,x_2)-\varkappa^{-1}S(t),t\right),
\end{aligned}\tag{8.45}$$

где $H(x_1,x_2)$, $\Phi(x_1,x_2)$ и $V_N(R,\theta,t)$, $\Psi_N(R,\theta,t)$ определяются формулами (8.23) и (8.39) соответственно. Из (8.11) и (8.42) следует, что для любого $\epsilon\in(0,1)$ найдется $E_*\in(0,E_0]$ такое, что

$$\begin{aligned}
&(1-\epsilon)\sqrt{H(x_1,x_2)}\le t^{-\frac{\ell}{q}}U_1(\mathbf{x},t)\le(1+\epsilon)\sqrt{H(x_1,x_2)},\\
&\left|U_2(\mathbf{x},t)-\Phi(x_1,x_2)+\varkappa^{-1}S(t)\right|\le Ct^{-\frac{1}{q}}
\end{aligned}\tag{8.46}$$

для всех $\mathbf{x}\in\mathcal{D}(E_*)$ и $t\ge t_*$ с некоторым $C=\mathrm{const}>0$.

Нетрудно доказать, что

$$\mathcal{L}(\mathbf{x},\mathbf{a},\mathbf{A})\left(U(\mathbf{x},t)\right)^2\equiv 2U(\mathbf{x},t)\mathcal{L}(\mathbf{x},\mathbf{a},\mathbf{A})U(\mathbf{x},t)+\mathrm{tr}\left(\mathbf{A}^T(\mathbf{x},t)\mathbf{N}_{\mathbf{x}}(U)\mathbf{A}(\mathbf{x},t)\right)$$

для всех гладких функций $U(\mathbf{x},t)$, где

$$\mathbf{N}_{\mathbf{x}}(U) \equiv \begin{pmatrix} (\partial_{x_1}U)^2 & \partial_{x_1}U\partial_{x_2}U \\ \partial_{x_2}U\partial_{x_1}U & (\partial_{x_2}U)^2 \end{pmatrix}.$$

Из доказательства теоремы 55 следует, что

$$\mathcal{L}(\mathbf{x},\mathbf{a},\mathbf{A})U_1(\mathbf{x},t) \equiv \mathcal{L}(\mathbf{y},\mathbf{f},\mathbf{F})V_N(R,\theta,t) \equiv \Lambda_N\left(U_1(\mathbf{x},t),U_2(\mathbf{x},t),t\right),$$
$$\mathcal{L}(\mathbf{x},\mathbf{a},\mathbf{A})U_2(\mathbf{x},t) \equiv \mathcal{L}(\mathbf{y},\mathbf{f},\mathbf{F})\Psi_N(R,\theta,t) \equiv \Omega_N\left(U_1(\mathbf{x},t),U_2(\mathbf{x},t),t\right)$$

для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{D}(E_0)$ и $t \geq t_*$. Определим

$$Z_1(\mathbf{x},t) \equiv \mathrm{tr}\left(\mathbf{A}^T(\mathbf{x},t)\mathbf{N}_{\mathbf{x}}(U_1)\mathbf{A}(\mathbf{x},t)\right), \quad Z_2(\mathbf{x},t) \equiv \mathrm{tr}\left(\mathbf{A}^T(\mathbf{x},t)\mathbf{N}_{\mathbf{x}}(U_2)\mathbf{A}(\mathbf{x},t)\right).$$

Тогда, используя (8.10), (8.11), (8.12) и (8.24), получаем следующие оценки:

$$|Z_1(\mathbf{x},t)| \leq \mu^2 C_1 t^{-\frac{2p}{q}}, \quad |Z_2(\mathbf{x},t)| \leq \mu^2 C_2 t^{-\frac{2p}{q}} \tag{8.47}$$

для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{D}(E_*)$ и $t \geq t_*$ с некоторыми положительными константами C_1 и C_2.

Оставшуюся часть доказательства разделим на две части.

1. Рассмотрим сначала случай $n < m$. Кандидат на функцию Ляпунова для системы (8.1) строится в следующем виде:

$$U_*(\mathbf{x},t) = \big(U_1(\mathbf{x},t)\big)^2 + \big(U_2(\mathbf{x},t) - \phi_\varepsilon(t)\big)^2 + C^2 t^{-\frac{2}{q}} + \mu^2(C_1+C_2)\zeta_p(t) \tag{8.48}$$

с положительной функцией

$$\zeta_p(t) \equiv \begin{cases} t_*^{-\frac{2p}{q}}\left(\mathcal{T}+t_s-t\right), & 2p<q, \\ \log\left(\dfrac{\mathcal{T}+t_s}{t}\right), & 2p=q, \\ \displaystyle\int\limits_t^{\mathcal{T}+t_s} \varsigma^{-\frac{2p}{q}}\,d\varsigma, & 2p>q, \end{cases} \tag{8.49}$$

и некоторым $t_s \geq t_*$. Легко проверить, что

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{x},\mathbf{a},\mathbf{A})U_*(\mathbf{x},t) \; = \; & 2U_1(\mathbf{x},t)\Lambda_N\big(U_1(\mathbf{x},t),U_2(\mathbf{x},t),t\big) \\ & +2\left(U_2(\mathbf{x},t)-\phi_\varepsilon(t)\right)\left(\Omega_N\left(U_1(\mathbf{x},t),U_2(\mathbf{x},t),t\right)-\phi'_\varepsilon(t)\right) \\ & +Z_1(\mathbf{x},t)+Z_2(\mathbf{x},t)-\frac{2C^2}{q}t^{-1-\frac{2}{q}}+\mu^2(C_1+C_2)\zeta'_p(t) \end{aligned}$$

для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{D}(E_*)$ и $t \geq t_*$. Заметим, что $\phi'_\varepsilon(t) \equiv \Omega_N(0, \phi_\varepsilon(t), t)$. Из (8.14), (8.15), (8.16) и (8.18) следует, что

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{a}, \mathbf{A})U_*(\mathbf{x}, t) = \\
&2t^{-\frac{n}{q}}U_1^2\Big(\lambda_n(\phi_\varepsilon(t)) + \mathcal{O}(\Delta) + \mathcal{O}(t^{-\frac{1}{q}})\Big) \\
&\ + 2t^{-\frac{m}{q}}\Big(\omega'_{m,0}(\phi_\varepsilon(t))\big(U_2 - \phi_\varepsilon(t)\big)^2 + \omega_{m,1}(\phi_\varepsilon(t))U_1\big(U_2 - \phi_\varepsilon(t)\big) + \mathcal{O}(\Delta^3)\Big) \\
&\ \times \Big(1 + \mathcal{O}(t^{-\frac{1}{q}})\Big) \\
&\ + Z_1(\mathbf{x}, t) + Z_2(\mathbf{x}, t) + \mu^2(C_1 + C_2)\zeta'_p(t) - \frac{2C^2}{q}t^{-1-\frac{2}{q}}
\end{aligned}$$

при $\Delta(\mathbf{x}, t) \to 0$ и $t \to \infty$, где $\Delta(\mathbf{x}, t) \equiv \sqrt{(U_1(\mathbf{x}, t))^2 + (U_2(\mathbf{x}, t) - \phi_\varepsilon(t))^2}$. Применение неравенства Юнга даёт

$$\begin{aligned}
\omega_{m,1}(\phi_\varepsilon(t))U_1(U_2 - \phi_\varepsilon(t)) &\leq \chi_m U_1|U_2 - \phi_\varepsilon(t)| \\
&\leq \frac{|\omega'_{m,0}(\phi_\varepsilon(t))|}{2}(U_2 - \phi_\varepsilon(t))^2 + \frac{\chi_m^2}{2|\omega'_{m,0}(\phi_\varepsilon(t))|}U_1^2
\end{aligned} \tag{8.50}$$

с параметром $\chi_m = 1 + \max_\psi |\omega_{m,1}(\psi)|$. Выбрав $\varepsilon > 0$ в лемме 17 достаточно малым, можно гарантировать, что

$$\lambda_n(\phi_\varepsilon(t)) \leq -\frac{|\lambda_n(\phi_0)|}{2}, \quad \omega'_{m,0}(\phi_\varepsilon(t)) \leq -\frac{|\vartheta_m|}{2}$$

для всех $t \geq t_*$. Из (8.47) и (8.49) следует, что $Z_i(\mathbf{x}, t) + \mu^2 C_i \zeta'_p(t) \leq 0$ для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{D}(E_*)$ и $t \geq t_*$. Объединяя эти оценки, мы видим, что

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{a}, \mathbf{A})U_*(\mathbf{x}, t) \leq &-\left(t^{-\frac{n}{q}}|\lambda_n(\phi_0)|U_1^2 + t^{-\frac{m}{q}}\frac{|\vartheta_m|}{2}(U_2 - \phi_\varepsilon(t))^2\right) \\
&\times \Big(1 + \mathcal{O}(\Delta) + \mathcal{O}(t^{-\frac{1}{q}})\Big).
\end{aligned}$$

Следовательно, существуют $\Delta_1 > 0$ и $t_1 \geq t_*$ такие, что $\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{a}, \mathbf{A})U_*(\mathbf{x}, t) \leq 0$ для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{D}(E_*)$ и $t \geq t_*$ таких, что $\Delta(\mathbf{x}, t) \leq \Delta_1$.

Выбрав $\epsilon > 0$ в (8.46) достаточно малым, мы получаем следующие неравенства:

$$\frac{d^2(\mathbf{x}, t)}{2} \leq \Delta^2(\mathbf{x}, t) + C^2 t^{-\frac{2}{q}} \leq 2d^2(\mathbf{x}, t) + 3C^2 t^{-\frac{2}{q}}$$

для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{D}(E_*)$ и $t \geq t_*$. Следовательно,

$$U_*(\mathbf{x}, t) \geq \frac{d^2(\mathbf{x}, t)}{2}, \quad \mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{a}, \mathbf{A}) U_*(\mathbf{x}, t) \leq 0 \tag{8.51}$$

для всех $(\mathbf{x}, t) \in \mathfrak{D}(d_1, t_2, \mathcal{T})$ с $d_1 = \Delta_1/2 > 0$ и $t_2 = \max\{t_1, (2C/\Delta_1)^q\}$, где

$$\mathfrak{D}(d_1, t_2, \mathcal{T}) \equiv \{(\mathbf{x}, t) : \mathbf{x} \in \mathcal{D}(E_*),\, d(\mathbf{x}, t) \leq d_1,\, t_2 \leq t \leq t_2 + \mathcal{T}\}.$$

Зафиксируем параметры $\varepsilon_1 \in (0, d_1)$ и $\varepsilon_2 > 0$. Пусть $\mathbf{x}(t)$ — решение системы (8.1) с начальными данными $\mathbf{x}_0$ такими, что $d(\mathbf{x}_0, t_s) < \delta$ и $\tau_{\mathfrak{D}}$ — время первого выхода $(\mathbf{x}(t), t)$ из области $\mathfrak{D}(\varepsilon_1, t_s, \mathcal{T})$ при некоторых $0 < \delta < \varepsilon_1 \leq d_1$ и $t_s \geq t_2$. Определим функцию $\tau_t = \min\{\tau_{\mathfrak{D}}, t\}$, тогда $(\mathbf{x}(\tau_t), \tau_t)$ — это процесс, остановленный в момент первого выхода из области $\mathfrak{D}(\varepsilon_1, t_s, \mathcal{T})$. Из (8.51) следует, что $U_*(\mathbf{x}(\tau_t), \tau_t)$ является неотрицательным супермартингалом [192, §5.2], и справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq t - t_s \leq \mathcal{T}} d(\mathbf{x}(t), t) > \varepsilon_1\right) &= \mathbb{P}\left(\sup_{t \geq t_s} d(\mathbf{x}(\tau_t), \tau_t) > \varepsilon_1\right) \\ &\leq \mathbb{P}\left(\sup_{t \geq t_s} U_*(\mathbf{x}(\tau_t), \tau_t) > \frac{\varepsilon_1^2}{2}\right) \leq \frac{2U_*(\mathbf{x}(t_s), t_s)}{\varepsilon_1^2}. \end{aligned}$$

Последняя оценка следует из неравенства Дуба для супермартингалов. Заметим, что $U_*(\mathbf{x}(t_s), t_s) \leq 2\delta^2 + 3C^2 t_s^{-2/q} + \mu^2 C_3 \zeta_p(t_s)$, где $C_3 = C_1 + C_2$. Следовательно, взяв $\delta = \varepsilon_1 \sqrt{\varepsilon_2/12}$,

$$t_s = \begin{cases} \max\left\{t_2, \left(\frac{3C^2}{2\delta^2}\right)^{\frac{q}{2}}\right\}, & 2p \leq q, \\ \\ \max\left\{t_2, \left(\frac{3C^2}{2\delta^2}\right)^{\frac{q}{2}}, \left(\frac{\mu^2 C q}{2\delta^2(2p-q)}\right)^{\frac{q}{2p-q}}\right\}, & 2p > q \end{cases}$$

и параметром $\mathcal{T}$, определённым формулой (8.26) с

$$C_0 = \begin{cases} 2t_*^{\frac{2p}{q}} C_3^{-1}, & 2p < q \\ 2C_3^{-1}, & 2p = q, \end{cases}$$

мы получаем (8.25) с $\varsigma = 0$.

2. Рассмотрим случай $n \geq m$. Возьмём

$$\begin{aligned} U_*(\mathbf{x},t) =& \big(U_1(\mathbf{x},t)\big)^2 + \mu^2 C_1 \zeta_p(t) \\ &+ c_* t^{-\frac{n-m}{q}} \left[\big(U_2(\mathbf{x},t) - \phi_\varepsilon(t)\big)^2 + C^2 t^{-\frac{2}{q}} + \mu^2 C_2 \zeta_p(t)\right] \end{aligned} \tag{8.52}$$

с параметром $c_* = |\lambda_n(\phi_0)||\vartheta_m|/(4\chi_m^2) > 0$ в качестве кандидата на функцию Ляпунова. Можно доказать, как и в предыдущем случае, что

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}(\mathbf{x},\mathbf{a},\mathbf{A})U_*(\mathbf{x},t) \leq t^{-\frac{n}{q}} U_1^2 \left(-|\lambda_n(\phi_0)| + \mathcal{O}(\Delta) + \mathcal{O}(t^{-\frac{1}{q}})\right) \\ &+ t^{-\frac{n}{q}} c_* \left(-|\vartheta_m|(U_2 - \phi_\varepsilon(t))^2 + 2\chi_m U_1 |U_2 - \phi_\varepsilon(t)| + \mathcal{O}(\Delta^3)\right)\left(1 + \mathcal{O}(t^{-\frac{1}{q}})\right) \\ &+ Z_1(\mathbf{x},t) + \mu^2 C_1 \zeta_p'(t) + c_* t^{-\frac{n-m}{q}} \left[Z_2(\mathbf{x},t) + \mu^2 C_2 \zeta_p'(t)\right] \end{aligned} \tag{8.53}$$

при $\Delta(\mathbf{x},t) \to 0$ и $t \to \infty$. Нетрудно проверить, что

$$2c_*\chi_m U_1 |U_2 - \phi_\varepsilon(t)| \ \leq \ \frac{|\lambda_n(\phi_0)|}{2} U_1^2 + \frac{c_*|\vartheta_m|}{2}(U_2 - \phi_\varepsilon(t))^2 \tag{8.54}$$

для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{D}(E_*)$ и $t \geq t_*$. Следовательно, объединяя (8.47), (8.53) и (8.54), получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{x},\mathbf{a},\mathbf{A})U_*(\mathbf{x},t) \leq& -t^{-\frac{n}{q}} \frac{1}{4}\left(|\lambda_n(\phi_0)| U_1^2 + c_*|\vartheta_m|(U_2 - \phi_\varepsilon(t))^2\right) \\ &\times \left(1 + \mathcal{O}(\Delta) + \mathcal{O}(t^{-\frac{1}{q}})\right). \end{aligned}$$

Следовательно, существуют $\Delta_1 > 0$ и $t_1 \geq t_*$, такие, что $\mathcal{L}(\mathbf{x},\mathbf{a},\mathbf{A})U_*(\mathbf{x},t) \leq 0$ для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{D}(E_*)$ и $t \geq t_1$, такие, что $\Delta(\mathbf{x},t) \leq \Delta_1$. Таким образом,

$$U_*(\mathbf{x},t) \geq t^{-\frac{n-m}{q}} \frac{c_-}{2} d^2(\mathbf{x},t), \quad \mathcal{L}(\mathbf{x},\mathbf{a},\mathbf{A})U_*(\mathbf{x},t) \leq 0$$

для всех $(\mathbf{x},t) \in \mathfrak{D}(d_1,t_2,\mathcal{T})$ с параметрами $c_- = \min\{1, c_*\} > 0$, $d_1 = \Delta_1/2 > 0$ и $t_2 = \max\{t_1, (2C/\Delta_1)^q\}$. Зафиксируем параметры $\varepsilon_1 \in (0,d_1)$ и $\varepsilon_2 > 0$. Тогда, рассуждая, как и выше, получим следующее неравенство:

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq t - t_s \leq \mathcal{T}} \left\{t^{-\frac{n-m}{2q}} d(\mathbf{x}(t),t)\right\} > \varepsilon_1\right) \leq \frac{2U_*(\mathbf{x}(t_s),t_s)}{\varepsilon_1^2 c_-}$$

для решений системы (8.1) с начальными данными $\mathbf{x}_0$ такими, что $d(\mathbf{x}_0,t_s) < \delta$ с некоторыми $0 < \delta < \varepsilon_1$ и $t_s \geq t_2$. Отсюда легко следует, что $U_*(\mathbf{x}(t_s),t_s) \leq$

$c_+(2\delta^2+3C^2t_s^{-2/q}+\mu^2C_3\zeta_p(t_s))$, где $c_+=\max\{1,c_*\}$. Следовательно, взяв $\delta=\varepsilon_1\sqrt{\varepsilon_2/(12c_+)}$, а параметры t_s и $\mathcal{T}$ такими же, как в предыдущем случае, мы получаем (8.25) с $\varsigma=(n-m)/(2q)$. □

Доказательство леммы 19. Подстановка $u=t^{-\kappa}(u_0+\eta_1)$ и $\phi=\phi_0+\eta_2$ в (8.21) даёт

$$\frac{d\eta_1}{dt}=\mathcal{A}(\eta_1,\eta_2,t),\quad \frac{d\eta_2}{dt}=\mathcal{B}(\eta_1,\eta_2,t), \tag{8.55}$$

где

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A}(\eta_1,\eta_2,t)\equiv t^{\kappa}\Lambda_N(t^{-\kappa}(u_0+\eta_1),\phi_0+\eta_2,t)+\kappa t^{-1}(u_0+\eta_1),\\
&\mathcal{B}(\eta_1,\eta_2,t)\equiv \Omega_N(t^{-\kappa}(u_0+\eta_1),\phi_0+\eta_2,t).
\end{aligned}$$

Из (8.17), (8.18) и (8.27) следует, что

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A}(\eta_1,\eta_2,t)=t^{-\frac{n+l}{q}}\left(\mathcal{A}_1\eta_1+\mathcal{A}_2\eta_2+\mathcal{O}(\rho^2)+\mathcal{O}(t^{-\kappa_1})\right),\\
&\mathcal{B}(\eta_1,\eta_2,t)=t^{-\frac{m}{q}}\left(\vartheta_m\eta_2+\mathcal{O}(\eta_2^2)+\mathcal{O}(t^{-\kappa_1})\right)
\end{aligned}$$

при $t\to\infty$ и $\rho=\sqrt{\eta_1^2+\eta_2^2}\to 0$, где $\mathcal{A}_1=-(h-1)u_0^{h-1}|\lambda_{n,h}(\phi_0)|$, $\mathcal{A}_2=\lambda'_{n,h}(\phi_0)u_0^h+\lambda'_{n+l}(\phi_0)u_0$ и $\kappa_1=\min\{\kappa,q^{-1}\}$. Рассмотрим

$$L(\eta_1,\eta_2,t)=K\eta_2^2+\left(\eta_1+\frac{\mathcal{A}_2}{\mathcal{A}_1}\eta_2\right)^2,\quad K=\frac{|\vartheta_m||\mathcal{A}_2|^2}{|\mathcal{A}_1|^3}$$

в качестве кандидата на функцию Ляпунова для системы (8.55). Легко проверить, что

$$K_-C_1^{-1}\rho^2\le L(\eta_1,\eta_2,t)\le K_+C_1\rho^2,\quad C_1=2\left(1+\left(\mathcal{A}_2\mathcal{A}_1^{-1}\right)^2\right)>0,$$

$K_-=\min\{1,K\}>0$ и $K_+=\max\{1,K\}>0$. Производная $L(\eta_1,\eta_2,t)$ на траекториях системы (8.55) удовлетворяет равенству

$$\begin{aligned}
\frac{dL}{dt}=&t^{-\frac{m}{q}}\Bigg\{2K\vartheta_m\eta_2^2+2\vartheta_m\frac{\mathcal{A}_2}{\mathcal{A}_1}\left(\eta_1+\frac{\mathcal{A}_2}{\mathcal{A}_1}\eta_2\right)\eta_2\\
&+2\mathcal{A}_1\left(\eta_1+\frac{\mathcal{A}_2}{\mathcal{A}_1}\eta_2\right)^2+\mathcal{O}(\rho^3)+\mathcal{O}(t^{-\kappa_1})\Bigg\}
\end{aligned}$$

при $t\to\infty$ и $\rho\to 0$. Следовательно, существуют $K_0>0$, $t_1\geq t_*$ и $\rho_0>0$ такие, что

$$\frac{dL}{dt}\leq t^{-\frac{m}{q}}\left(-C_2\rho^2+K_0t^{-\kappa_1}\right)$$

для всех $t\geq t_1$ и $\rho\leq\rho_0$, где $C_2=K_-\min\{|\vartheta_m|,|\mathcal{A}_1|\}(2C_1)^{-1}>0$. Для любого $\varepsilon\in(0,\rho_0)$ определим

$$\delta_\varepsilon=\left(\frac{2K_0}{C_2t_\varepsilon^{\kappa_1}}\right)^2,\quad t_\varepsilon=\max\left\{t_1,\left(\frac{4K_0}{C_2\varepsilon^2}\right)^{\frac{1}{\kappa_1}}\right\}.$$

Тогда $dL/dt<0$ для решений (8.55) таких, что $\delta_\varepsilon\leq\sqrt{\eta_1^2(t)+\eta_2^2(t)}<\varepsilon$ при $t\geq t_\varepsilon$. Следовательно, любое решение (8.55) с начальными данными из круга $\rho<\delta_\varepsilon$ не может покинуть окрестность $\{(\eta_1,\eta_2)\in\mathbb{R}^2:\rho\leq\varepsilon\}$ при $t\geq t_\varepsilon$. $\square$

Доказательство теоремы 57. Пусть $\lambda_{n,h}(\phi_0)<0$ и $\lambda_{n+l}(\phi_0)<0$. В этом случае доказательство аналогично доказательству теоремы 56. Действительно, пусть $n+l<m$. Тогда рассмотрим $U_*(\mathbf{x},t)$, определенную формулой (8.48), в качестве кандидата на функцию Ляпунова. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}(\mathbf{x},\mathbf{a},\mathbf{A})U_*(\mathbf{x},t)=2t^{-\frac{n}{q}}U_1^{p+1}\left(\lambda_{n,h}(\phi_\varepsilon(t))+\mathcal{O}(\Delta)+\mathcal{O}(t^{-\frac{1}{q}})\right)\\&+2t^{-\frac{n+l}{q}}U_1^2\left(\lambda_{n+l}(\phi_\varepsilon(t))+\mathcal{O}(\Delta)+\mathcal{O}(t^{-\frac{1}{q}})\right)\\&+2t^{-\frac{m}{q}}\left(\omega'_{m,0}(\phi_\varepsilon(t))(U_2-\phi_\varepsilon(t))^2+\omega_{m,1}(\phi_\varepsilon(t))U_1(U_2-\phi_\varepsilon(t))+\mathcal{O}(\Delta^3)\right)\\&\times\left(1+\mathcal{O}(t^{-\frac{1}{q}})\right)\\&+Z_1(\mathbf{x},t)+Z_2(\mathbf{x},t)+\mu^2(C_1+C_2)\zeta_p'(t)-\frac{2C^2}{q}t^{-1-\frac{2}{q}}\end{aligned}$$

при $\Delta(\mathbf{x},t)\to 0$ и $t\to\infty$. Выбор $\varepsilon>0$ в лемме 17 достаточно малым гарантирует, что

$$\lambda_{n,h}(\phi_\varepsilon(t))\leq-\frac{|\lambda_{n,h}(\phi_0)|}{2},\quad\lambda_{n+l}(\phi_\varepsilon(t))\leq-\frac{|\lambda_{n+l}(\phi_0)|}{2},\quad\omega'_{m,0}(\phi_\varepsilon(t))\leq-\frac{|\vartheta_m|}{2}$$

при $t \geq t_*$. Учитывая (8.50), получаем

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{a}, \mathbf{A}) U_*(\mathbf{x}, t) \leq \\
&-\left(t^{-\frac{n}{q}} |\lambda_{n,h}(\phi_0)| U_1^{p+1} + t^{-\frac{n+l}{q}} |\lambda_{n+l}(\phi_0)| U_1^2 + t^{-\frac{m}{q}} \frac{|\vartheta_m|}{2} (U_2 - \phi_\varepsilon(t))^2\right) \\
&\times \left(1 + \mathcal{O}(\Delta) + \mathcal{O}(t^{-\frac{1}{q}})\right)
\end{aligned}
$$

при $\Delta(\mathbf{x}, t) \to 0$ и $t \to \infty$. Следовательно, $U_*(\mathbf{x}, t)$ удовлетворяет условию (8.51). Повторяя шаги доказательства теоремы 56, получаем (8.25) с $\varsigma = 0$.

Если $n + l \geq m$, рассмотрим $U_*(\mathbf{x}, t)$, определяемую формулой (8.52), с $c_* = |\lambda_{n+l}(\phi_0)\vartheta_m|/(2\chi_m)^2$ и $t^{-(n+l-m)/q}$ вместо $t^{-(n-m)/q}$ в качестве кандидата на функцию Ляпунова. В этом случае

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{a}, \mathbf{A}) U_*(\mathbf{x}, t) \leq \\
&t^{-\frac{n}{q}} U_1^{p+1} \left(-|\lambda_{n,h}(\phi_0)| + \mathcal{O}(\Delta) + \mathcal{O}(t^{-\frac{1}{q}})\right) \\
&+ t^{-\frac{n+l}{q}} U_1^2 \left(-|\lambda_{n+l}(\phi_0)| + \mathcal{O}(\Delta) + \mathcal{O}(t^{-\frac{1}{q}})\right) \\
&+ c_* t^{-\frac{n+l}{q}} \left(-|\vartheta_m| (U_2 - \phi_\varepsilon(t))^2 + 2\chi_m U_1 |U_2 - \phi_\varepsilon(t)| + \mathcal{O}(\Delta^3)\right) \left(1 + \mathcal{O}(t^{-\frac{1}{q}})\right) \\
&+ Z_1(\mathbf{x}, t) + \mu^2 C_1 \zeta_p'(t) + c_* t^{-\frac{n+l-m}{q}} \left[Z_2(\mathbf{x}, t) + \mu^2 C_2 \zeta_p'(t)\right]
\end{aligned}
$$

при $\Delta(\mathbf{x}, t) \to 0$ и $t \to \infty$. Заметим, что неравенство (8.54) выполняется с $\lambda_{n+l}(\phi_0)$ вместо $\lambda_n(\phi_0)$. Отсюда следует, что

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{a}, \mathbf{A}) U_*(\mathbf{x}, t) \leq \\
&-\left(t^{-\frac{n}{q}} |\lambda_{n,h}(\phi_0)| U_1^{p+1} + t^{-\frac{n+l}{q}} \frac{|\lambda_{n+l}(\phi_0)|}{4} U_1^2 + t^{-\frac{m}{q}} \frac{c_* |\vartheta_m|}{4} (U_2 - \phi_\varepsilon(t))^2\right) \\
&\times \left(1 + \mathcal{O}(\Delta) + \mathcal{O}(t^{-\frac{1}{q}})\right)
\end{aligned}
$$

при $\Delta(\mathbf{x}, t) \to 0$ и $t \to \infty$. Следовательно, существуют $\Delta_1 > 0$ и $t_1 \geq t_*$ такие, что

$$
\begin{aligned}
&t^{-\frac{n+l-m}{q}} \frac{C_-}{2} d^2(\mathbf{x}, t) \leq U_*(\mathbf{x}, t) \leq c_+ \left(2d^2(\mathbf{x}, t) + 3C^2 t^{-\frac{2}{q}} + \mu^2 C_3 \zeta_{2p}(t)\right), \\
&\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{a}, \mathbf{A}) U_*(\mathbf{x}, t) \leq 0
\end{aligned}
$$

для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{D}(E_*)$ таких, что $\Delta(\mathbf{x},t) \leq \Delta_1$ и $t \geq t_1$ с $c_- = \min\{1,c\} > 0$ и $c_+ = \max\{1,c\} > 0$. Следовательно, повторяя доказательство теоремы 56, получаем (8.25) с $\varsigma = (n+l-m)/(2q)$.

Пусть $\lambda_{n,h}(\phi_0) < 0$, $\lambda_{n+l}(\phi_0) > 0$ и $n+l=m$. Рассмотрим функции

$$\tilde{U}_1(\mathbf{x},t) \equiv t^{\kappa}\left(U_1(\mathbf{x},t) - u_\varepsilon(t)\right), \quad \tilde{U}_2(\mathbf{x},t) \equiv U_2(\mathbf{x},t) - \phi_\varepsilon(t).$$

Из (8.11) и (8.42) следует, что существует $E_* \leq E_0$ такое, что

$$\begin{gathered}\left|\left(\tilde{U}_1(\mathbf{x},t)t^{-\kappa} + u_\varepsilon(t)\right)t^{-\frac{\ell}{q}} - \sqrt{H(x_1,x_2)}\right| \leq Ct^{-\frac{1}{q}}\sqrt{H(x_1,x_2)},\\ \left|\tilde{U}_2(\mathbf{x},t) + \phi_\varepsilon(t) - \Phi(x_1,x_2) + \varkappa^{-1}S(t)\right| \leq Ct^{-\frac{1}{q}}\end{gathered} \tag{8.56}$$

для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{D}(E_*)$ и $t \geq t_*$ с некоторым $C = \mathrm{const} > 0$. Определим

$$\widetilde{\mathcal{D}}(\tilde{E}_*, t_*) = \{(\mathbf{x},t): \quad (x_1,x_2) \in \mathcal{B}_0, \quad t \geq t_*, \quad H(x_1,x_2)t^{2(\kappa+\ell/q)} \leq \tilde{E}_*\}$$

с некоторым параметром $0 < \tilde{E}_* \leq E_* t_*^{-2(\kappa+\ell/q)}$. Следовательно, $\widetilde{\mathcal{D}}(\tilde{E}_*, t_*) \subset \mathcal{D}(E_*) \times \{t \geq t_*\}$. Из (8.10), (8.11), (8.12) и (8.24) следует, что функции

$$\tilde{Z}_1(\mathbf{x},t) \equiv \mathrm{tr}\left(\mathbf{A}^T(\mathbf{x},t)\mathbf{N}_{\mathbf{x}}(\tilde{U}_1)\mathbf{A}(\mathbf{x},t)\right), \quad \tilde{Z}_2(\mathbf{x},t) \equiv \mathrm{tr}\left(\mathbf{A}^T(\mathbf{x},t)\mathbf{N}_{\mathbf{x}}(\tilde{U}_2)\mathbf{A}(\mathbf{x},t)\right)$$

удовлетворяет оценкам

$$|\tilde{Z}_1(\mathbf{x},t)| \leq \mu^2 \tilde{C}_1 t^{-\frac{2p}{q}}, \quad |\tilde{Z}_2(\mathbf{x},t)| \leq \mu^2 \tilde{C}_2 t^{-\frac{2p}{q}}$$

для всех $(\mathbf{x},t) \in \widetilde{\mathcal{D}}(\tilde{E}_*, t_*)$ с некоторыми положительными константами $\tilde{C}_1$ и $\tilde{C}_2$. В этом случае кандидат на функцию Ляпунова для системы (8.1) строится в следующем виде:

$$U_*(\mathbf{x},t) = K\big(\tilde{U}_1(\mathbf{x},t)\big)^2 + \big(\tilde{U}_2(\mathbf{x},t)\big)^2 + K_1\tilde{C}t^{-\frac{2}{q}} + \mu^2(K\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2)\zeta_p(t)$$

с параметрами

$$K = \frac{|\vartheta_m||\mathcal{A}_1|}{(1+4|\mathcal{A}_2|)^2}, \quad K_1 = \min\{1,K\}, \quad \tilde{C} = (1+\tilde{E}_*)C^2,$$

и положительная функция $\zeta_p(t)$, определяемая формулой (8.49) с некоторыми $t_s \geq t_*$. Легко проверить, что

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\mathbf{x},\mathbf{a},\mathbf{A})U_*(\mathbf{x},t) = {}& 2Kt^{\kappa}\tilde{U}_1(\mathbf{x},t)\Big(\Lambda_N\left(U_1(\mathbf{x},t),U_2(\mathbf{x},t),t\right) - \Lambda_N\left(u_\varepsilon(t),\phi_\varepsilon(t),t\right)\Big) \\ & + 2\tilde{U}_2(\mathbf{x},t)\Big(\Omega_N\left(U_1(\mathbf{x},t),U_2(\mathbf{x},t),t\right) - \Omega_N\left(u_\varepsilon(t),\phi_\varepsilon(t),t\right)\Big) \\ & + 2\kappa Kt^{-1}\left(\tilde{U}_1(\mathbf{x},t)\right)^2 - \frac{2K_1\tilde{C}}{q}t^{-1-\frac{2}{q}} \\ & + K\tilde{Z}_1(\mathbf{x},t) + \tilde{Z}_2(\mathbf{x},t) + \mu^2(K\tilde{C}_1+\tilde{C}_2)\zeta_p'(t)\end{aligned}$$

для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{D}(E_*)$ и $t \geq t_*$. Из (8.14), (8.15), (8.17), (8.18) и доказательства леммы 19 следует, что

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}(\mathbf{x},\mathbf{a},\mathbf{A})U_*(\mathbf{x},t) = \\ &2Kt^{-\frac{m}{q}}\tilde{U}_1\left(\mathcal{A}_{1,\varepsilon}(t)\tilde{U}_1 + \mathcal{A}_{2,\varepsilon}(t)\tilde{U}_2 + \mathcal{O}(\tilde{\Delta}^2) + \mathcal{O}(\tilde{\Delta}t^{-\kappa_1})\right) \\ &\ + 2t^{-\frac{m}{q}}\tilde{U}_2\left(\vartheta_{m,\varepsilon}(t)\tilde{U}_2 + \mathcal{O}(\tilde{U}_2^2) + \mathcal{O}(\tilde{\Delta}t^{-\kappa_1})\right) \\ &\ + K\tilde{Z}_1(\mathbf{x},t) + \tilde{Z}_2(\mathbf{x},t) + \mu^2(K\tilde{C}_1+\tilde{C}_2)\zeta_p'(t) - \frac{2K_1\tilde{C}}{q}t^{-1-\frac{2}{q}}\end{aligned}$$

при $\tilde{\Delta}(\mathbf{x},t) \to 0$ и $t \to \infty$, где $\tilde{\Delta}(\mathbf{x},t) = \sqrt{(\tilde{U}_1(\mathbf{x},t))^2 + (\tilde{U}_2(\mathbf{x},t))^2}$, $\kappa_1 = \min\{\kappa, q^{-1}\}$ и

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{1,\varepsilon}(t) &\equiv \lambda_{n+l}(\phi_\varepsilon(t)) + \kappa\delta_{n+l,q} + h\lambda_{n,h}(\phi_\varepsilon(t))(u_0+\varepsilon u_1(t))^{h-1}, \\ \mathcal{A}_{2,\varepsilon}(t) &\equiv \lambda_{n+l}'(\phi_\varepsilon(t))(u_0+\varepsilon u_1(t)) + \lambda_{n,h}'(\phi_\varepsilon(t))(u_0+\varepsilon u_1(t))^h, \\ \vartheta_{m,\varepsilon}(t) &\equiv \omega_{m,0}'(\phi_\varepsilon(t)).\end{aligned}$$

Выбрав $\varepsilon > 0$ в лемме 19 достаточно малым, мы получаем следующие неравенства:

$$\mathcal{A}_{1,\varepsilon}(t) \leq -\frac{|\mathcal{A}_1|}{2}, \quad |\mathcal{A}_{2,\varepsilon}(t)| \leq \frac{1+4|\mathcal{A}_2|}{2}, \quad \vartheta_{m,\varepsilon}(t) \leq -\frac{|\vartheta_m|}{2}$$

для всех $t \geq t_*$. Нетрудно проверить, что

$$K(1+4|\mathcal{A}_2|)|\tilde{U}_1\tilde{U}_2| \ \leq\ \frac{K|\mathcal{A}_1|}{2}\tilde{U}_1^2 + \frac{|\vartheta_m|}{2}\tilde{U}_2^2 \qquad (8.57)$$

для всех $\mathbf{x} \in \tilde{\mathcal{D}}(E_*)$ и $t \geq t_*$. Объединяя (8.47), (8.53) и (8.57), получаем

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{a}, \mathbf{A}) U_*(\mathbf{x}, t) \leq -t^{-\frac{m}{q}} \frac{1}{4} \left(K |\mathcal{A}_1| \tilde{U}_1^2 + |\vartheta_m| \tilde{U}_2^2\right) \left(1 + \mathcal{O}(\tilde{\Delta}) + \mathcal{O}(t^{-\kappa_1})\right)$$

при $\tilde{\Delta}(\mathbf{x}, t) \to 0$ и $t \to \infty$. Следовательно, существуют $\tilde{\Delta}_1 > 0$ и $t_1 \geq t_*$, такие, что $\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{a}, \mathbf{A}) U_*(\mathbf{x}, t) \leq 0$ для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{D}(E_*)$ и $t \geq t_1$, таких что $\tilde{\Delta}(\mathbf{x}, t) \leq \tilde{\Delta}_1$. Из (8.56) следует, что

$$\frac{\tilde{d}^2(\mathbf{x}, t)}{2} \leq \tilde{\Delta}^2(\mathbf{x}, t) + \tilde{C} t^{-\frac{2}{q}} \leq 2\tilde{d}^2(\mathbf{x}, t) + 5\tilde{C} t^{-\frac{2}{q}}$$

для всех $(\mathbf{x}, t) \in \widetilde{\mathcal{D}}(\tilde{E}_*, t_*)$. Следовательно,

$$U_*(\mathbf{x}, t) \geq \frac{K_1}{2} \tilde{d}^2(\mathbf{x}, t), \quad \mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{a}, \mathbf{A}) U_*(\mathbf{x}, t) \leq 0$$

для всех $(\mathbf{x}, t) \in \tilde{\mathfrak{D}}(d_1, t_2, \mathcal{T})$ с $d_1 = \tilde{\Delta}_1/2 > 0$ и $t_2 = \max\{t_1, (2\sqrt{2\tilde{C}}/\tilde{\Delta}_1)^q\}$, где

$$\tilde{\mathfrak{D}}(d_1, t_2, \mathcal{T}) = \{(\mathbf{x}, t) \in \tilde{\mathcal{D}}(E_*, t_*) : \quad \tilde{d}(\mathbf{x}, t) \leq d_1, \quad t_2 \leq t \leq t_2 + \mathcal{T}\}.$$

Зафиксируем параметры $\varepsilon_1 \in (0, d_1)$ и $\varepsilon_2 > 0$. Тогда, рассуждая, как при доказательстве теоремы 56, получим следующее неравенство:

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq t - t_s \leq \mathcal{T}} \tilde{d}(\mathbf{x}(t), t) > \varepsilon_1\right) \leq \frac{2U_*(\mathbf{x}(t_s), t_s)}{K_1 \varepsilon_1^2},$$

для решений системы (8.1) с начальными данными $\mathbf{x}_0$ такими, что $\tilde{d}(\mathbf{x}_0, t_s) < \delta$ с некоторыми $0 < \delta < \varepsilon_1 \leq d_1$ и $t_s \geq t_2$. Заметим, что $U_*(\mathbf{x}(t_s), t_s) \leq K_2(2\delta^2 + 5\tilde{C} t_s^{-2/q} + \mu^2 \tilde{C}_3 \zeta_p(t_s))$ с $\tilde{C}_3 = \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2$. Следовательно, выбирая $\delta = \varepsilon_1 \sqrt{K_1 \varepsilon_2/(12K_2)}$,

$$t_s = \begin{cases} \max\left\{t_2, \left(\frac{5\tilde{C}^2}{2\delta^2}\right)^{\frac{q}{2}}\right\}, & 2p \leq q, \\ \\ \max\left\{t_2, \left(\frac{5\tilde{C}^2}{2\delta^2}\right)^{\frac{q}{2}}, \left(\frac{\mu^2 \tilde{C}_3 q}{2\delta^2(2p-q)}\right)^{\frac{q}{2p-q}}\right\}, & 2p > q \end{cases}$$

и параметр $\mathcal{T}$, определённый формулой (8.26) с

$$C_0 = \begin{cases} 2t_*^{\frac{2p}{q}} \tilde{C}_3^{-1}, & 2p < q \\ 2\tilde{C}_3^{-1}, & 2p = q, \end{cases}$$

получаем (8.28). $\square$

8.5.4. Устойчивость фазового дрейфа

Доказательство теоремы 58. Возьмём $N = \max\{n,m\}$ в теореме 55 и рассмотрим функции $U_1(\mathbf{x},t)$ и $U_2(\mathbf{x},t)$, определённые формулой (8.45). Из (8.4), (8.11) и (8.46) следует, что для любого $\epsilon\in(0,1)$ существует $r_*\le r_0$, такое, что

$$(1-\epsilon)^2\frac{|\mathbf{x}|}{\sqrt{2}}\le t^{-\frac{\ell}{q}}U_1(\mathbf{x},t)\le(1+\epsilon)^2\frac{|\mathbf{x}|}{\sqrt{2}}$$

для всех $|\mathbf{x}|\le r_*$ и $t\ge t_*$. Взяв $U_1(\mathbf{x},t)$ в качестве функции Ляпунова для системы (8.1), можно увидеть, что

$$\mathcal{L}(\mathbf{x},\mathbf{a},\mathbf{A})U_1(\mathbf{x},t)\equiv\mathcal{L}(\mathbf{y},\mathbf{f},\mathbf{F})V_N(R,\theta,t)\equiv\Lambda_N\left(U_1(\mathbf{x},t),U_2(\mathbf{x},t),t\right).$$

Из (8.14), (8.15) и (8.16) следует, что

$$\mathcal{L}(\mathbf{x},\mathbf{a},\mathbf{A})U_1(\mathbf{x},t)=t^{-\frac{n}{q}}U_1(\mathbf{x},t)\Big(\lambda_n(U_2(\mathbf{x},t))+\mathcal{O}(U_1(\mathbf{x},t))+\mathcal{O}(t^{-\frac{1}{q}})\Big)$$

при $U_1(\mathbf{x},t)\to 0$ и $t\to\infty$. Заметим, что существует $\lambda_n^*>0$, такое что $\lambda_n(\psi)\le-\lambda_n^*$ для всех $\psi\in\mathbb{R}$. Следовательно, существуют $t_s\ge t_*$ и $0<U_s\le r_*t_s^{\ell/q}(1-\epsilon)^2/\sqrt{2}$, такие, что

$$\mathcal{L}(\mathbf{x},\mathbf{a},\mathbf{A})U_1(\mathbf{x},t)\le-t^{-\frac{n}{q}}U_1(\mathbf{x},t)\frac{\lambda_n^*}{2}\le 0 \tag{8.58}$$

для всех $|\mathbf{x}|\le r_*$ и $t\ge t_s$ таких, что $0\le U_1(\mathbf{x},t)\le U_s$.

Зафиксируем параметры $0<\varepsilon_1<r_*t_s^{\ell/q}$ и $\varepsilon_2>0$. Пусть $\mathbf{x}(t)$ — решение системы (8.1) с начальными данными $|\mathbf{x}(t_s)|<\delta$, $0<\delta<\varepsilon_1$ и τ_{ε_1} — время первого выхода $\tilde{\mathbf{x}}(t)\equiv\mathbf{x}(t)t^{\ell/q}$ из области $\mathcal{B}_{\varepsilon_1}=\{|\mathbf{x}|\le\varepsilon_1\}$ при $t\ge t_s$. Определим функцию $\tau_t=\min\{\tau_{\varepsilon_1},t\}$, тогда $\tilde{\mathbf{x}}(\tau_t)$ — процесс, остановленный в момент первого выхода из $\mathcal{B}_{\varepsilon_1}$. Из (8.58) следует, что $U_1(\mathbf{x}(\tau_t),\tau_t)$ является неотрицательным супермартингалом, и справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\sup_{t\ge t_s}|\tilde{\mathbf{x}}(t)|>\varepsilon_1\right) &= \mathbb{P}\left(\sup_{t\ge t_s}|\tilde{\mathbf{x}}(\tau_t)|>\varepsilon_1\right)\\ &\le \mathbb{P}\left(\sup_{t\ge t_s}U_1(\mathbf{x}(\tau_t),\tau_t)>\frac{(1-\epsilon)^2\varepsilon_1}{\sqrt{2}}\right)\le\frac{\sqrt{2}U_1(\mathbf{x}(t_s),t_s)}{(1-\epsilon)^2\varepsilon_1}.\end{aligned}$$

Обратите внимание, что $U_1(\mathbf{x}(t_s),t_s) \le t_s^{\ell/q}(1+\epsilon)^2\delta/\sqrt{2}$. Следовательно, взяв $\delta = \varepsilon_1\varepsilon_2[(1-\epsilon)/(1+\epsilon)]^2 t_s^{-\ell/q}$, получаем (8.29). □

Доказательство теоремы 59. Доказательство аналогично доказательству теоремы 58. Как и выше, возьмём $U_1(\mathbf{x},t)$ в качестве кандидата на функцию Ляпунова для системы (8.1). В этом случае из (8.14), (8.15) и (8.17) следует, что

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\mathbf{x},\mathbf{a},\mathbf{A})U_1(\mathbf{x},t) \;&=\; t^{-\frac{n}{q}}U_1^p(\mathbf{x},t)\Big(\lambda_{n,h}(U_2(\mathbf{x},t)) + \mathcal{O}(U_1(\mathbf{x},t)) + \mathcal{O}(t^{-\frac{1}{q}})\Big)\\ &\quad + t^{-\frac{n+l}{q}}U_1(\mathbf{x},t)\Big(\lambda_{n+l}(U_2(\mathbf{x},t)) + \mathcal{O}(U_1(\mathbf{x},t)) + \mathcal{O}(t^{-\frac{1}{q}})\Big)\end{aligned}$$

при $U_1(\mathbf{x},t) \to 0$ и $t \to \infty$. Заметим, что $\lambda_{n,h}(\psi) \le -\lambda^*_{n,h}$ и $\lambda_{n+l}(\psi) \le -\lambda^*_{n+l}$ для всех $\psi \in \mathbb{R}$ с некоторыми константами $\lambda^*_{n,h} > 0$ и $\lambda^*_{n+l} > 0$. Следовательно, существуют $t_s \ge t_*$ и $U_s > 0$, такие, что $\mathcal{L}(\mathbf{x},\mathbf{a},\mathbf{A})U_1(\mathbf{x},t) \le 0$ для всех $|\mathbf{x}| \le r_*$ и $t \ge t_s$, такие, что $0 \le U_1(\mathbf{x},t) \le U_s$. Наконец, повторяя следующие шаги доказательства теоремы 58, получаем (8.29). □

8.6. Выводы

Таким образом, исследовано влияние затухающих стохастических возмущений с осциллирующими коэффициентами на устойчивость равновесия асимптотически гамильтоновых систем на плоскости. Показано, что в зависимости от структуры и степени затухания возмущений возможны два асимптотических режима решений вблизи равновесия: режим фазового захвата, когда фаза возмущённой системы подстраивается под возмущение с конечной предельной разностью фаз, и режим фазового дрейфа, когда разность фаз неограниченно возрастает. Найденные условия устойчивости зависят от реализующегося асимптотического режима. В частности, в случае режима фазового захвата устойчивость равновесия зависит от величины предельной разности фаз.

Отметим, что описанные условия устойчивости являются лишь достаточными. Сравнение этих результатов с выводами для соответствующей укороченной системы (8.21) показывает, что условия стохастической устойчивости близки к необходимым. Однако проблема неустойчивости равновесия для обоих асимптотических режимов в данной главе подробно не исследовалась. Отметим также, что топологическая эквивалентность возмущённой и предельной систем в настоящей главе не обсуждалась. Эти вопросы требует отдельного рассмотрения.

Результаты главы опубликованы в [267].

Глава 9

Резонансы в системах с затухающими чирпированными возмущениями и шумом

9.1. Введение

Настоящая глава посвящена исследованию влияния мультипликативного белого шума на захват нелинейных колебательных систем в резонанс под действием осциллирующих возмущений с чирпированной частотой. Предполагается, что интенсивность возмущений полиномиально убывает со временем, а частота растёт по степенному закону. Рассматриваются резонансные решения с растущей амплитудой и фазой, синхронизированной с накачкой. Обсуждаются условия сохранения такого режима при наличии стохастических возмущений. Используемая техника основана на сочетании метода усреднения, анализа устойчивости и построения стохастических функций Ляпунова.

Глава организована следующим образом. В § 9.2 дана постановка задачи, описан класс возмущений и представлен мотивирующий пример. Вспомогательные утверждения, которые будут использоваться ниже, приведены в § 9.3. Основные результаты представлены в § 9.4. В § 9.5 полученные результаты применяется к осциллятору Дуффинга с различными чирпированными возмущениями и мультипликативным шумом. Обоснование результатов содержится в последующих параграфах. В частности, в § 9.6 доказываются вспомогательные результаты о свойствах укороченной системы в переменных типа действие-угол. В § 9.7.1 строится усредняющее преобразование, которое упрощает возмущённую систему в главных членах асимптотики на бесконечности по времени. Затем в § 9.7.2 рассматривается укороченная система, полученная из упрощённой путём отбрасывания диффузионных членов, и обсуждается существование и устойчивость различных долговременных асимптотических режимов. В § 9.7.3

доказывается сохранение резонансного режима в полной системе с помощью построения подходящих стохастических функций Ляпунова. Глава завершается кратким обсуждением полученных результатов.

9.2. Постановка задачи

Рассмотрим систему стохастических дифференциальных уравнений Ито

$$
\begin{aligned}
&dx_1 = x_2\, dt,\\
&dx_2 = \big(-U'(x_1) + t^{-\alpha} Q\left(x_1, x_2, S(t)\right)\big)\, dt + t^{-\gamma} \mu \sigma(x_1, x_2, S(t))\, dw(t)
\end{aligned} \tag{9.1}
$$

при $t \geq t_0 \geq 1$ с параметрами $\alpha, \gamma, \mu \in \mathbb{R}_+$ и с полиномиальным потенциалом

$$
U(x) \equiv \frac{x^{2h+2}}{2h+2} + \sum_{i=0}^{2h+1} u_i x^i, \quad u_i \in \mathbb{R}, \quad h \in \mathbb{Z}_+, \tag{9.2}
$$

где $w(t)$ — винеровский процесс на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$, функция $S(t) \equiv s t^{\beta+1}$ соответствует фазе возбуждения, $\beta, s \in \mathbb{R}_+$. Предполагается, что функции $Q(x_1, x_2, S)$ и $\sigma(x_1, x_2, S)$ определены для всех $(x_1, x_2, S) \in \mathbb{R}^3$, бесконечно дифференцируемы, не зависят от $\omega \in \Omega$ и имеют следующий вид:

$$
\begin{aligned}
&Q(x_1, x_2, S) \equiv \sum_{i=0}^{p} \sum_{j=0}^{l} Q_{i,j}(S) x_1^i x_2^j, \quad l, p \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq l \leq p \leq 2h+1,\\
&\sigma(x_1, x_2, S) \equiv \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \sigma_{i,j}(S) x_1^i x_2^j, \quad n, m \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq n \leq p, \quad 0 \leq m \leq l,
\end{aligned} \tag{9.3}
$$

где коэффициенты $Q_{i,j}(S)$ и $\sigma_{i,j}(S)$ являются 2π-периодическими по S. Таким образом, (9.1) можно рассматривать как систему маятникового типа с чирпированным возбуждением и мультипликативным шумом. Параметр μ с затухающей функцией $t^{-\gamma}$ отвечает за интенсивность шума.

В качестве примера рассмотрим возмущённый осциллятор Дуффинга.

$$
\begin{aligned}
&dx_1 = x_2\, dt,\\
&dx_2 = \big(-u x_1 - x_1^3 + t^{-\alpha} \mathcal{Q} x_1^p \cos S(t)\big)\, dt + t^{-\gamma} \mu x_1^n \cos S(t)\, dw(t)
\end{aligned} \tag{9.4}
$$

с некоторыми параметрами u и $\mathcal{Q}$. Заметим, что, растягивая зависимые и независимые переменные, можно сделать $u=-1$, если $u<0$, и $u=1$, если $u>0$. Легко проверить, что система (9.4) имеет вид (9.1) с $U(x)\equiv x^4/4+ux^2/2$, $h=1$, $l=m=0$, $Q(x_1,x_2,S)\equiv \mathcal{Q}x_1^p\cos S$ и $\sigma(x_1,x_2,S)\equiv x_1^n\cos S$. Заметим, что все траектории соответствующей предельной автономной системы

$$\frac{dx_1}{dt}=x_2, \quad \frac{dx_2}{dt}=-ux_1-x_1^3$$

являются ограниченными (см. рис. 9.1). Более того, решения с $H(x_1(t),x_2(t))\equiv E>0$, где $H(x_1,x_2)\equiv x_1^4/4+(x_2^2+ux_1^2)/2$, соответствуют неизохронным колебаниям с периодом $\tilde{T}(E)=\mathcal{O}(E^{-1/4})$ при $E\to\infty$. Численный анализ системы (9.4) с $\mu=0$ показывает, что при определённых условиях на параметры чирпированного возмущения имеют место резонансные решения с неограниченно растущей амплитудой $\rho(t)=\sqrt[4]{H(x_1(t),x_2(t))}$ (см. рис. 9.2, а, чёрные кривые). Существуют также нерезонансные решения с ограниченной амплитудой (см. рис. 9.2, а, серые кривые). Если $\mu\neq 0$, стохастические возмущения могут нарушить резонансный захват (см. рис. 9.2, б).

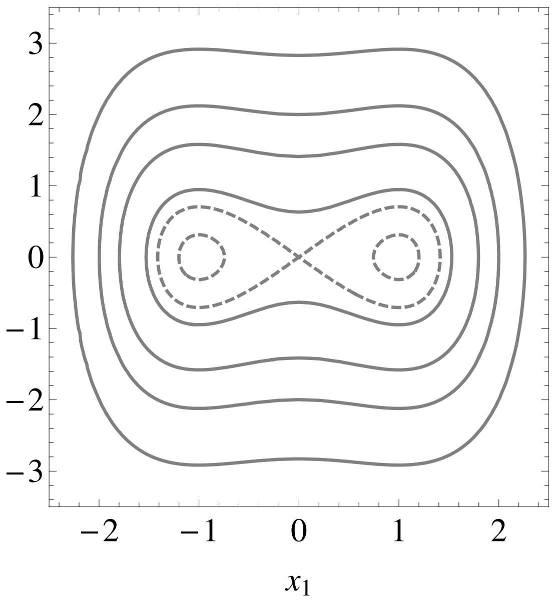
Цель главы — определить условия, при которых захват в резонанс сохраняется в стохастической системе (9.1) с высокой вероятностью.

9.3. Вспомогательные утверждения

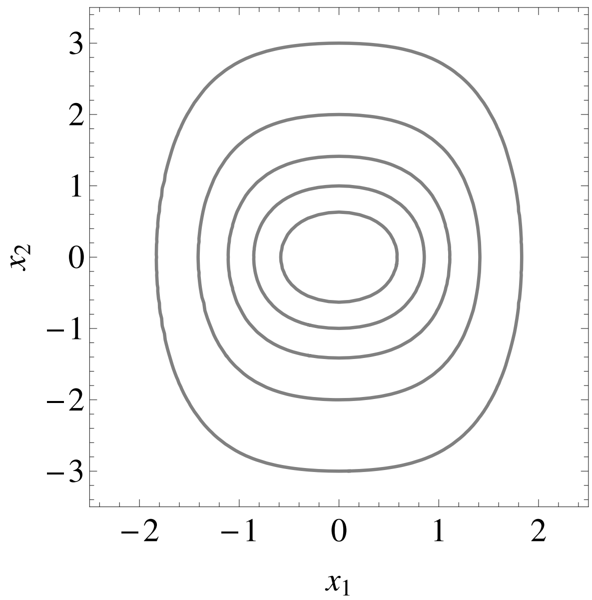
Рассмотрим предельную систему

$$\frac{dx_1}{dt}=\partial_{x_2}H(x_1,x_2), \quad \frac{dx_2}{dt}=-\partial_{x_1}H(x_1,x_2), \quad H(x_1,x_2)\equiv\frac{x_2^2}{2}+U(x_1). \tag{9.5}$$

Легко проверить, что существует $\rho_0>0$ такое, что для любого $\rho\geq\rho_0$ линии уровня $\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2: H(x_1,x_2)=\rho^{2h+2}\}$ определяют замкнутые кривые на фазовой плоскости (x_1,x_2) и соответствуют $T(\rho)$-периодическим решениям



(а) $u = -1$



(б) $u = 1$

Рис. 9.1. Линии уровня $H(x_1, x_2) \equiv x_1^4/4 + (x_2^2 + ux_1^2)/2$. Сплошные кривые соответствуют $H(x_1, x_2) > 0$.

$(x_1^0(t, \rho), x_2^0(t, \rho))$ системы (9.5), где

$$T(\rho) \equiv \int\limits_{x_-(\rho)}^{x_+(\rho)} \frac{\sqrt{2}\, d\varsigma}{\sqrt{\rho^{2h+2} - U(\varsigma)}},$$

и $x_-(\rho) < 0 < x_+(\rho)$ являются корнями уравнения $U(x) = \rho^{2h+2}$ при $\rho > \rho_0$, такими, что $U'(x_\pm(\rho)) \neq 0$. Для определённости предположим, что $x_1^0(0; \rho) = x_+(\rho)$ и $x_2^0(0; \rho) = 0$. Из леммы 6 следует, что

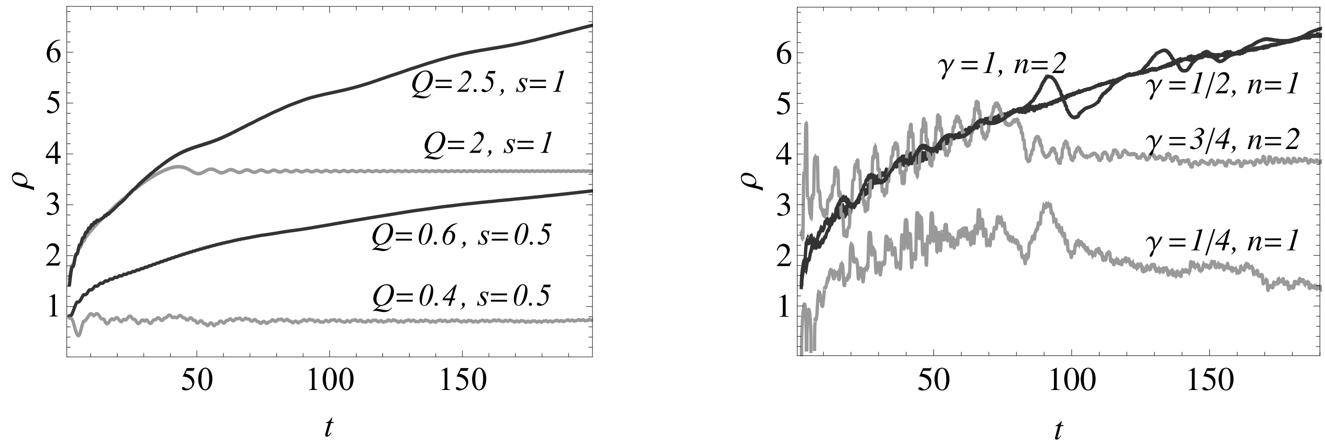
$$\nu(\rho) \equiv \frac{2\pi}{T(\rho)}, \quad \tilde{\nu}(\rho) \equiv \nu(\rho)\rho^{-h} \sim \sum_{k=0}^{\infty} \rho^{-k} \nu_k, \quad \rho \to \infty \tag{9.6}$$

с постоянными коэффициентами $\nu_k = \text{const}$. В частности,

$$\nu_0 = \frac{2\pi}{T_0}, \quad T_0 = (2h+2)^{\frac{1}{2h+2}} \int\limits_{-1}^{1} \frac{\sqrt{2} d\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^{2h+2}}}, \quad \nu_1 = 0.$$

Определим вспомогательные 2π-периодические функции

$$X_1(\varphi, \rho) = x_1^0 \left(\frac{\varphi}{\nu(\rho)}, \rho \right), \quad X_2(\varphi, \rho) = x_2^0 \left(\frac{\varphi}{\nu(\rho)}, \rho \right).$$



(а) $\mu = 0$

(б) $\mu = 0.2$, $\mathcal{Q} = 2.5$, $s = 1$

Рис. 9.2. Эволюция $\rho(t) \equiv \sqrt[4]{H(x_1(t), x_2(t))}$ для реализаций решений системы (9.4) при $u = -1$, $\alpha = \beta = 1/3$ и $p = 0$.

Тогда из леммы 7 следует, что

$$
\begin{aligned}
&X_1(\varphi, \rho) \sim \rho \sum_{k=0}^{\infty} \rho^{-k} X_{1,k}(\varphi), \\
&X_2(\varphi, \rho) \sim \rho^{h+1} \sum_{k=0}^{\infty} \rho^{-k} X_{2,k}(\varphi)
\end{aligned} \tag{9.7}
$$

при $\rho \to \infty$ с 2π-периодическими коэффициентами $X_{i,k}(\varphi)$, где главные члены $X_{1,0}(\varphi)$ и $X_{2,0}(\varphi)$ удовлетворяют системе

$$
\nu_0 \partial_\varphi X_{1,0} = X_{2,0}, \quad \nu_0 \partial_\varphi X_{2,0} = -X_{1,0}^{2h+1}, \quad \frac{X_{1,0}^{2h+2}}{2h+2} + \frac{X_{2,0}^2}{2} = 1. \tag{9.8}
$$

Отметим, что ряды в (9.6) и (9.7) предполагаются асимптотическими при $\rho \to \infty$ (см., например, [165, §1]). Будем использовать функции $X_1(\varphi, \rho)$ и $X_2(\varphi, \rho)$ для переписывания системы (9.1) в переменных типа действие-угол (ρ, φ):

$$
x_1 = X_1(\varphi, \rho), \quad x_2 = X_2(\varphi, \rho). \tag{9.9}
$$

Из тождества $H(X_1(\varphi, \rho), X_2(\varphi, \rho)) \equiv \rho^{2h+2}$ следует, что

$$
\Delta(\rho) := \begin{vmatrix} \partial_\varphi X_1 & \partial_\rho X_1 \\ \partial_\varphi X_2 & \partial_\rho X_2 \end{vmatrix} = \frac{(2h+2)\rho^{2h+1}}{\nu(\rho)} \neq 0, \quad \rho \geq \rho_0.
$$

Следовательно, преобразование (9.9) обратимо для всех $\rho \geq \rho_0$ и $\varphi \in [0, 2\pi)$. Обозначим через

$$\rho = Y_1(x_1, x_2), \quad \varphi = Y_2(x_1, x_2) \tag{9.10}$$

обратное преобразование к (9.9) и определим $\mathcal{D}(\rho_0) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : H(x_1, x_2) > \rho_0\}$. Тогда справедлива

Лемма 20. *Пусть выполнены предположения* (9.2) *и* (9.3). *Тогда для всех* $(x_1, x_2) \in \mathcal{D}(\rho_0)$ *система* (9.1) *может быть преобразована к виду*

$$\begin{aligned} d\rho &= F_1(\rho, \varphi, S(t), t)\, dt + t^{-\gamma} \mu c_1(\rho, \varphi, S(t), t)\, dw(t), \\ d\varphi &= (\nu(\rho) + F_2(\rho, \varphi, S(t), t))\, dt + t^{-\gamma} \mu c_2(\rho, \varphi, S(t), t)\, dw(t), \end{aligned} \tag{9.11}$$

с функциями $F_i(\rho, \varphi, S, t) \equiv t^{-\alpha} f_i(\rho, \varphi, S) + t^{-2\gamma} g_i(\rho, \varphi, S)$, $i \in \{1, 2\}$, *где*

$$\begin{aligned} f_i(\rho, \varphi, S) &\equiv Q(X_1(\varphi, \rho), X_2(\varphi, \rho), S) \partial_{x_2} Y_i(X_1(\varphi, \rho), X_2(\varphi, \rho)), \\ g_i(\rho, \varphi, S) &\equiv \frac{\mu^2}{2} \sigma^2(X_1(\varphi, \rho), X_2(\varphi, \rho), S) \partial^2_{x_2} Y_i(X_1(\varphi, \rho), X_2(\varphi, \rho)), \\ c_i(\rho, \varphi, S) &\equiv \sigma(X_1(\varphi, \rho), X_2(\varphi, \rho), S) \partial_{x_2} Y_i(X_1(\varphi, \rho), X_2(\varphi, \rho)). \end{aligned}$$

Более того, для любого $i \in \{1, 2\}$ *функции*

$$\begin{aligned} &\tilde{f}_i(\rho, \varphi, S) \equiv f_i(\rho, \varphi, S) \rho^{-(a+2-i)}, \quad \tilde{g}_i(\rho, \varphi, S) \equiv g_i(\rho, \varphi, S) \rho^{-(2b+2-i)}, \\ &\tilde{c}_i(\rho, \varphi, S) \equiv c_i(\rho, \varphi, S) \rho^{-(b+2-i)} \end{aligned}$$

имеют следующие асимптотические разложения:

$$\begin{aligned} &\tilde{f}_i(\rho, \varphi, S) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \rho^{-k} f_{i,k}(\varphi, S), \quad \tilde{g}_i(\rho, \varphi, S) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \rho^{-k} g_{i,k}(\varphi, S), \\ &\tilde{c}_i(\rho, \varphi, S) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \rho^{-k} c_{i,k}(\varphi, S) \end{aligned} \tag{9.12}$$

при $\rho \to \infty$ с 2π-периодическими коэффициентами $f_{i,k}$, $g_{i,k}$ и $c_{i,k}$. В частности,

$$\begin{pmatrix} f_{1,0} \\ f_{2,0} \end{pmatrix} \equiv \frac{\nu_0 Q_{p,l}}{2(h+1)} X_{1,0}^p X_{2,0}^l \begin{pmatrix} \partial_\varphi X_{1,0} \\ -X_{1,0} \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} g_{1,0} \\ g_{2,0} \end{pmatrix} \equiv -\frac{\mu\nu_0 \sigma_{n,m}^2}{8(h+1)^2} X_{1,0}^{2n} X_{2,0}^{2m} \begin{pmatrix} h(\partial_\varphi X_{1,0})^2 + X_{1,0}\partial_\varphi^2 X_{1,0} \\ -(h+2) X_{1,0}\partial_\varphi X_{1,0} \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} c_{1,0} \\ c_{2,0} \end{pmatrix} \equiv \frac{\nu_0 \sigma_{n,m}}{2(h+1)} X_{1,0}^n X_{2,0}^m \begin{pmatrix} \partial_\varphi X_{1,0} \\ -X_{1,0} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что предельная система, соответствующая (9.11), имеет следующий вид: $d\varrho/dt = 0$, $d\phi/dt = \nu(\varrho)$. Рассмотрим резонансное условие

$$\nu(\varrho) = \varkappa^{-1} S'(t), \tag{9.13}$$

где $\varkappa \in \mathbb{Z}_+$ соответствует порядку резонанса. Из (9.6) следует, что существует $\tilde\rho_0 > \rho_0$ такое, что $\nu(\varrho) > 0$ и $\nu'(\varrho) > 0$ для всех $\varrho \geq \tilde\rho_0$. Следовательно, для любого $\varkappa \in \mathbb{Z}_+$ существует $\hat t_0 > t_0$ такое, что уравнение (9.13) имеет гладкое решение $\varrho_\varkappa(t) \geq \tilde\rho_0$, определённое для всех $t \geq \hat t_0$. Определим $z(t) \equiv \varrho_\varkappa(t) t^{-\beta/h}$, тогда справедливо следующее асимптотическое разложение:

$$z(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} z_k t^{-\frac{k\beta}{h}}, \quad t \to \infty, \quad z_k = \text{const}, \quad z_0 = \left(\frac{s(\beta+1)}{\nu_0 \varkappa}\right)^{\frac{1}{h}}, \quad z_1 = -\frac{\nu_1}{h\nu_0}.$$

Следовательно, $\varrho_\varkappa(t) \sim t^{\beta/h} z_0$ при $t \to \infty$. Определим параметры:

$$a = p + (l-1)(h+1), \quad b = n + (m-1)(h+1),$$
$$\mathcal{M}_1 = -\alpha + \frac{a\beta}{h}, \quad \mathcal{M}_2 = -2\gamma + \frac{2b\beta}{h}, \quad \mathcal{M} = \max\{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2\},$$
$$A = \frac{1}{2}(\beta - \mathcal{M}), \quad B = \beta + 1, \quad C = \frac{1}{2}(\beta - \min\{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2\}), \tag{9.14}$$

и рассмотрим следующую вспомогательную систему, которая получена из (9.11) путём отбрасывания стохастических частей:

$$\frac{d\varrho}{dt} = F_1(\varrho, \phi, S(t), t), \quad \frac{d\phi}{dt} = \nu(\varrho) + F_2(\varrho, \phi, S(t), t). \tag{9.15}$$

Следующая лемма описывает необходимое условие существования резонансных режимов в укороченной системе:

Лемма 21. *Пусть система* (9.15) *имеет решения с асимптотикой* $\varrho(t) \sim \varrho_\varkappa(t)$, $\phi(t) \sim \varkappa^{-1}S(t)$ *при* $t \to \infty$, *тогда*

$$-1 \leq \mathcal{M} < \beta. \tag{9.16}$$

Таким образом, при нарушении условия (9.16) резонансные решения с неограниченно растущими амплитудой и фазой, синхронизированной с накачкой, не возникают. Далее будем предполагать, что это условие выполняется, и исследовать устойчивость таких решений относительно возмущений типа белого шума.

9.4. Основные результаты

Рассмотрим дополнительное предположение о параметрах

$$3\mathcal{M}_1 - 2\mathcal{M}_2 \geq \beta. \tag{9.17}$$

Объединяя это с (9.16), мы видим, что $\mathcal{M}_1 > \mathcal{M}_2$, $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1$, $A = (\beta - \mathcal{M}_1)/2$, $C = (\beta - \mathcal{M}_2)/2$, $B \geq 2A > 0$ и $C \geq 3A/2$. Положим

$$\langle f(\zeta)\rangle_{\varkappa\zeta} := \frac{1}{2\pi\varkappa}\int\limits_0^{2\pi\varkappa} f(\zeta)\,d\zeta, \quad \{f(\zeta)\}_{\varkappa\zeta} := f(\zeta) - \langle f(\zeta)\rangle_{\varkappa\zeta}.$$

Тогда справедлива

Теорема 60. *Пусть выполнены предположения* (9.2), (9.3), (9.16) *и* (9.17). *Тогда для любого* $\varkappa \in \mathbb{Z}_+$ *найдутся* $\tilde{t}_0 > t_0$, $\tilde{\rho}_0 \geq \rho_0$, $R_0 > 0$ *и цепочка преобра-*

зований $(x_1,x_2,t)\mapsto(\rho,\varphi,t)\mapsto(r,\theta,\tau)\mapsto(R,\Theta,\tau)$,

$$\begin{aligned}
&x_1(t)=X_1(\varphi(t),\rho(t)),\quad x_2(t)=X_2(\varphi(t),\rho(t)),\\
&\rho(t)=\varrho_\varkappa(t)\left(1+t^{-A}r(\tau)\right),\quad \varphi(t)=\varkappa^{-1}S(t)+\theta(\tau),\quad \tau=\frac{t^B}{B},\\
&r(\tau)=R(\tau)+\tau^{-\frac{A}{B}}\tilde Z_1(R(\tau),\Theta(\tau),\zeta(\tau),\tau),\\
&\theta(\tau)=\Theta(\tau)+\tau^{-\frac{A}{B}}\tilde Z_2(R(\tau),\Theta(\tau),\zeta(\tau),\tau),
\end{aligned}\tag{9.18}$$

с некоторыми гладкими функциями $\tilde Z_i(R,\Theta,\zeta,\tau)$ *такими, что для всех* $t\geq\tilde t_0$ *и* $(x_1,x_2)\in\mathcal{D}(\tilde\rho_0)$ *система* (9.1) *может быть преобразована в*

$$\begin{aligned}
&dR=\Lambda_1(R,\Theta,\zeta(\tau),\tau)\,d\tau+\tau^{-\frac{C-A}{B}}\mu\eta_1(R,\Theta,\zeta(\tau),\tau)\,d\tilde w(\tau),\\
&d\Theta=\Lambda_2(R,\Theta,\zeta(\tau),\tau)\,d\tau+\tau^{-\frac{C}{B}}\mu\eta_2(R,\Theta,\zeta(\tau),\tau)\,d\tilde w(\tau),
\end{aligned}\tag{9.19}$$

где $\tilde w(\tau)$ *— винеровский процесс на вероятностном пространстве* $(\Omega,\mathfrak{A},\mathbb{P})$, $\zeta(\tau)\equiv S((B\tau)^{\frac{1}{B}})$,

$$\begin{aligned}
&\Lambda_1(R,\Theta,\zeta,\tau)\equiv\sum_{K\in\{A,B-A,2A,B,2C-A\}}\tau^{-\frac{K}{B}}\Lambda_{1,K}(R,\Theta,\tau)+\tilde\Lambda_1(R,\Theta,\zeta,\tau),\\
&\Lambda_2(R,\Theta,\zeta,\tau)\equiv\sum_{K\in\{A,2A\}}\tau^{-\frac{K}{B}}\Lambda_{2,K}(R,\Theta,\tau)+\tilde\Lambda_2(R,\Theta,\zeta,\tau),
\end{aligned}\tag{9.20}$$

и $\Lambda_i(R,\Theta,\zeta,\tau)$, $\eta_i(R,\Theta,\zeta,\tau)$, $\tilde Z_i(R,\Theta,\zeta,\tau)$ *являются* 2π*-периодическими по* Θ *и* $2\pi\varkappa$*-периодическими по* ζ. *При этом справедливы следующие оценки:*

$$\begin{gathered}
\Lambda_{i,K}(R,\Theta,\tau)=\langle\mathcal{F}_{i,K}(R,\Theta,\zeta,\tau)\rangle_{\varkappa\zeta}+\delta_{i,1}\delta_{K,2A}\mathcal{O}(\tau^{-\frac{A}{B}})+\delta_{i,1}\delta_{K,2C-A}\mathcal{O}(\tau^{-\frac{2A}{B}}),\\
\tilde Z_i(R,\Theta,\zeta,\tau)=\mathcal{O}(1),\quad \eta_i(R,\Theta,\zeta,\tau)=\mathcal{O}(1),\quad \tilde\Lambda_i(R,\Theta,\zeta,\tau)=\mathcal{O}(\tau^{-\frac{3A}{B}})
\end{gathered}$$

при $\tau\to\infty$ *равномерно для всех* $|R|\leq R_0$ *и* $(\Theta,\zeta)\in\mathbb{R}^2$, *где* $\mathcal{F}_{i,K}(r,\theta,\zeta,\tau)$ *определяются с помощью* (9.37).

Здесь $\delta_{i,j}$ — символ Кронекера. Заметим, что (9.17) эквивалентно неравенству $C\geq 3A/2$. При обратном неравенстве коэффициенты диффузии в (9.19) становятся ведущими в долговременной динамике при $\tau\to\infty$. Этот случай требует особого внимания и здесь не обсуждается.

Рассмотрим усеченную систему, соответствующую (9.19)

$$\frac{dR}{d\tau} = \Lambda_1(R,\Theta,\zeta(\tau),\tau), \quad \frac{d\Theta}{d\tau} = \Lambda_2(R,\Theta,\zeta(\tau),\tau) \tag{9.21}$$

при $\tau \geq \tilde\tau_0$, где $\tilde\tau_0 = \tilde t_0^B/B$. Из (9.20) и (9.37) следует, что функции $\Lambda_1(R,\Theta,\zeta,\tau)$ и $\Lambda_2(R,\Theta,\zeta,\tau)$ можно переписать в виде

$$\Lambda_i(R,\Theta,\zeta,\tau) \equiv \hat\lambda_i(R,\Theta,\tau) + \tilde\lambda_i(R,\Theta,\zeta,\tau), \quad i \in \{1,2\},$$

с функциями

$$\begin{aligned}
\hat\lambda_1(R,\Theta,\tau) \equiv{}& \tau^{-\frac{A}{B}}\vartheta_{1,A}(\Theta,\tau) + \tau^{-\frac{B-A}{B}}\chi_{1,B-A}(\tau) \\
&+ \tau^{-\frac{2A}{B}}\vartheta_{1,2A}(\Theta,\tau)R + \tau^{-1}\chi_{1,B}(\tau)R + \tau^{-\frac{2C-A}{B}}\vartheta_{1,2C-A}(\Theta,\tau), \\
\hat\lambda_2(R,\Theta,\tau) \equiv{}& \tau^{-\frac{A}{B}}\chi_{2,A}(\tau)R + \tau^{-\frac{2A}{B}}\left(\vartheta_{2,2A}(\Theta,\tau) + \chi_{2,2A}(\tau)R^2\right),
\end{aligned} \tag{9.22}$$

где

$$\begin{aligned}
\vartheta_{1,A} \equiv{}& B^{-\frac{A}{B}}(z(t))^a \left\langle \tilde f_1\left(\varrho_\varkappa(t), \varkappa^{-1}\zeta + \Theta, \zeta\right)\right\rangle_{\varkappa\zeta}\Big|_{t=(B\tau)^{\frac{1}{B}}}, \\
\vartheta_{1,2A} \equiv{}& (a+1)B^{-\frac{A}{B}}\vartheta_{1,A} \\
&+ B^{-\frac{2A}{B}}(z(t))^a\varrho_\varkappa(t)\left\langle \partial_\rho\tilde f_1\left(\varrho_\varkappa(t), \varkappa^{-1}\zeta + \Theta, \zeta\right)\right\rangle_{\varkappa\zeta}\Big|_{t=(B\tau)^{\frac{1}{B}}}, \\
\vartheta_{1,2C-A} \equiv{}& B^{\frac{A-2C}{B}}(z(t))^{2b}\left\langle \tilde g_1\left(\varrho_\varkappa(t), \varkappa^{-1}\zeta + \Theta, \zeta\right)\right\rangle_{\varkappa\zeta}\Big|_{t=(B\tau)^{\frac{1}{B}}}, \\
\vartheta_{2,2A} \equiv{}& B^{-\frac{2A}{B}}(z(t))^a \left\langle \tilde f_2\left(\varrho_\varkappa(t), \varkappa^{-1}\zeta + \Theta, \zeta\right)\right\rangle_{\varkappa\zeta}\Big|_{t=(B\tau)^{\frac{1}{B}}}, \\
\chi_{1,B-A} \equiv{}& -B^{\frac{A-B}{B}}\left(\frac{\beta}{h} + t(\log z(t))'\right)\Big|_{t=(B\tau)^{\frac{1}{B}}}, \\
\chi_{1,B} \equiv{}& \frac{A}{B} + B^{-\frac{A}{B}}\chi_{1,B-A}, \\
\chi_{2,A} \equiv{}& B^{-\frac{A}{B}}(z(t))^h\Big\{h\tilde\nu(\varrho_\varkappa(t)) + \partial_\rho\tilde\nu\left(\varrho_\varkappa(t)\right)\varrho_\varkappa(t)\Big\}\Big|_{t=(B\tau)^{\frac{1}{B}}}, \\
\chi_{2,2A} \equiv{}& B^{-\frac{2A}{B}}(z(t))^h\left\{\frac{h(h-1)\tilde\nu\left(\varrho_\varkappa(t)\right)}{2}\right. \\
&\left. + h\partial_\rho\tilde\nu\left(\varrho_\varkappa(t)\right)\varrho_\varkappa(t) + \frac{\partial_\rho^2\tilde\nu\left(\varrho_\varkappa(t)\right)\left(\varrho_\varkappa(t)\right)^2}{2}\right\}\Big|_{t=(B\tau)^{\frac{1}{B}}}.
\end{aligned}$$

В этом случае $\tilde\lambda_i(R,\Theta,\zeta,\tau) \equiv \Lambda_i(R,\Theta,\zeta,\tau) - \hat\lambda_i(R,\Theta,\tau)$. Для любого $i \in \{1,2\}$ справедлива оценка: $\tilde\lambda_i(R,\Theta,\zeta,\tau) = \mathcal{O}(\tau^{-3A/B})$ при $\tau \to \infty$ равномерно для всех $|R| \leq R_0$ и $(\Theta,\zeta) \in \mathbb{R}^2$. Легко проверить, что справедливы следующие асимптотические разложения:

$$\vartheta_{i,K}(\Theta,\tau) \sim \vartheta_{i,K,0}(\Theta) + \sum_{k=1}^{\infty} \tau^{-\frac{k\beta}{Bh}} \vartheta_{i,K,k}(\Theta),$$
$$\chi_{i,K}(\tau) \sim \chi_{i,K,0} + \sum_{k=1}^{\infty} \tau^{-\frac{k\beta}{Bh}} \chi_{i,K,k} \tag{9.23}$$

при $\tau \to \infty$, где $\theta_{i,K,k}(\Theta)$ — 2π-периодические функции по Θ, а $\chi_{i,K,k}$ — постоянные величины. В частности,

$$\begin{aligned}
\vartheta_{1,A,0}(\Theta) &\equiv B^{-\frac{A}{B}} z_0^a \left\langle f_{1,0}\left(\varkappa^{-1}\zeta+\Theta,\zeta\right)\right\rangle_{\varkappa\zeta},\\
\vartheta_{1,2A,0}(\Theta) &\equiv (a+1)B^{-\frac{A}{B}}\vartheta_{1,A,0}(\Theta),\\
\vartheta_{1,2C-A,0}(\Theta) &\equiv B^{\frac{A-2C}{B}} z_0^{2b} \left\langle g_{1,0}\left(\varkappa^{-1}\zeta+\Theta,\zeta\right)\right\rangle_{\varkappa\zeta},\\
\vartheta_{2,2A,0}(\Theta) &\equiv B^{-\frac{2A}{B}} z_0^a \left\langle f_{2,0}\left(\varkappa^{-1}\zeta+\Theta,\zeta\right)\right\rangle_{\varkappa\zeta},\\
\chi_{1,B-A,0} &= -\,B^{\frac{A-B}{B}}\frac{\beta}{h},\\
\chi_{1,B,0} &= \frac{1}{B}\left(A-\frac{\beta}{h}\right),\\
\chi_{2,A,0} &= B^{-\frac{A}{B}} z_0^h h\nu_0,\\
\chi_{2,2A,0} &= B^{-\frac{2A}{B}}\frac{z_0^h h(h-1)\nu_0}{2}.
\end{aligned}$$

Заметим, что долговременная динамика асимптотически автономной системы (9.21) зависит от свойств главных членов правых частей при $\tau \to \infty$. Имея это в виду, определим

$$\mathcal{P}(\Theta) \equiv \vartheta_{1,A,0}(\Theta) + \delta_{B,2A}\chi_{1,B-A,0}, \tag{9.24}$$
$$J(\Theta) \equiv \vartheta_{1,2A,0}(\Theta) + \vartheta'_{2,2A,0}(\Theta) + \delta_{B,2A}\chi_{1,B,0}, \tag{9.25}$$

и рассмотрим предположение

$$\exists\,\Theta_0 \in \mathbb{R}: \quad \mathcal{P}(\Theta_0) = 0, \quad \mathcal{P}'(\Theta_0) \neq 0. \tag{9.26}$$

Тогда справедлива

Лемма 22. *Пусть выполняются предположения* (9.16), (9.17) *и* (9.26).

- *Если* $\mathcal{P}'(\Theta_0) < 0$, $J(\Theta_0) < 0$, *то существует* $\tau_0 \geq \tilde{\tau}_0$ *такое, что система* (9.21) *имеет асимптотически устойчивое решение* $R_*(\tau)$, $\Theta_*(\tau)$, *определённое для всех* $\tau \geq \tau_0$. *При этом* $R_*(\tau) = o(1)$ *и* $\Theta_*(\tau) = \Theta_0 + o(1)$ *при* $\tau \to \infty$.

- *Если* $\mathcal{P}'(\Theta_0) < 0$, $J(\Theta_0) > 0$ *или* $\mathcal{P}'(\Theta_0) > 0$, *то существует* $\varepsilon_* > 0$ *такое, что для всех* $\delta \in (0, \varepsilon_*)$ *решения системы* (9.21) *с начальными данными* $\sqrt{R^2(\tau_*) + (\Theta(\tau_*) - \Theta_0)^2} = \delta$ *и некоторым* $\tau_* \geq \tilde{\tau}_0$ *выходят из области* $\{(R, \Theta) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{R^2 + (\Theta - \Theta_0)^2} < \varepsilon_*\}$ *за конечное время.*

Таким образом, лемма 22 гарантирует существование и устойчивость режима фазовой синхронизации в укороченной системе (9.21). Такие решения соответствуют резонансному росту амплитуды $\rho(t) \sim \varrho_\varkappa(t)$ и синхронизации системы с возбуждением $\varphi(t) - \varkappa^{-1}S(t) \sim \Theta_0$ при $t \to \infty$. Если условие (9.26) не выполняется, то справедлива

Лемма 23. *Пусть выполняются предположения* (9.16), (9.17) *и*

$$\mathcal{P}(\Theta) \neq 0 \quad \forall\, \Theta \in \mathbb{R}. \tag{9.27}$$

Тогда решения системы (9.21) *выходят из любой ограниченной области за конечное время.*

Эта лемма описывает условия возникновения режима фазового дрейфа. В этом случае амплитуда $\rho(t)$ и фаза $\varphi(t)$ системы могут существенно отличаться от $\varrho_\varkappa(t)$ и $\varkappa^{-1}S(t)$ даже при отсутствии стохастических возмущений.

Покажем, что режим фазовой синхронизации сохраняется в полной стохастической системе (9.19) с высокой вероятностью. Определим функцию

$$d(\rho, \varphi, t) \equiv \sqrt{\left\{\left(\frac{\rho}{\varrho_\varkappa(t)} - 1\right) t^A - R_*\left(\frac{t^B}{B}\right)\right\}^2 + \left\{\varphi - \varkappa^{-1}S(t) - \Theta_*\left(\frac{t^B}{B}\right)\right\}^2}.$$

Тогда справедлива

Теорема 61. *Пусть выполняются предположения* (9.2), (9.3), (9.16), (9.17) *и* (9.26). *Если* $\mathcal{P}'(\Theta_0) < 0$ *и* $J(\Theta_0) < 0$, *то для любых* $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$, $\epsilon \in (0,1)$ *и* $t_* \geq \tilde{t}_0$ *найдутся* $\delta_1 > 0$ *и* $\delta_2 > 0$ *такие, что решение* $\rho(t)$, $\varphi(t)$ *системы* (9.11) *с начальными данными* $d(\rho(t_*), \varphi(t_*), t_*) < \delta_1$ *и* $0 < \mu < \delta_2$ *удовлетворяет условию*

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0<t-t_*\leq\tilde{\mathcal{T}}} d(\rho(t), \varphi(t), t) \geq \varepsilon_1\right) \leq \varepsilon_2, \tag{9.28}$$

где

$$\tilde{\mathcal{T}} = \begin{cases} t_*\left(\mu^{-\frac{2(1-\epsilon)}{B}} - 1\right), & \text{\textit{если}} \quad C < A + \frac{B}{2}, \\ t_*\left(\exp \mu^{-\frac{2(1-\epsilon)}{B}} - 1\right), & \text{\textit{если}} \quad C = A + \frac{B}{2}, \\ \infty, & \text{\textit{если}} \quad C > A + \frac{B}{2}. \end{cases}$$

Отметим, что оценки отклонения, подобные (9.28), обычно возникают при изучении устойчивости по вероятностей [192, §5.3]. При этом устойчивость на асимптотически большом интервале времени соответствует некоторому варианту практической устойчивости [201, §25].

Таким образом, теорема 61 описывает условия, при которых стохастические возмущения не разрушают резонансный захват в системе (9.1). В зависимости от параметров системы динамика $\rho(t) \approx \varrho_\varkappa(t)$, $\varphi(t) \approx \varkappa^{-1}S(t) + \Theta_0$ сохраняется с высокой вероятностью на бесконечных или асимптотически больших интервалах времени при $\mu \to 0$. Объединяя это с теоремой 60, мы видим, что резонансные решения в системе (9.11) описываются формулами

$$x_1(t) \approx t^{\frac{\beta}{h}} z_0 X_{1,0}(\varphi(t)), \quad x_2(t) \approx t^{\frac{(h+1)\beta}{h}} z_0^{h+1} X_{2,0}(\varphi(t)),$$

где $X_{1,0}(\varphi)$ и $X_{2,0}(\varphi)$ — 2π-периодические функции, определяемые (9.8).

9.5. Примеры

Рассмотрим ещё раз уравнение (9.4). В этом случае

$$
h=1,\quad l=m=0,\quad a=p-2,\quad b=n-2,
$$
$$
\mathcal{M}_1=-\alpha+(p-2)\beta,\quad \mathcal{M}_2=2(-\gamma+(n-2)\beta).
$$

Из [186] следует, что решение системы (9.8) имеет вид

$$
X_{1,0}(\varphi)\equiv\sqrt{2}\mathrm{cn}\left(\frac{T_0\varphi}{\pi\sqrt{2}};\frac{1}{2}\right),\quad X_{2,0}(\varphi)\equiv\nu_0\partial_\varphi X_{1,0}(\varphi)
$$

с $T_0=2\sqrt{2}K(1/2)$ и $\nu_0=2\pi/T_0$, где $K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода, а $\mathrm{cn}(\phi;k)$ — эллиптическая функция Якоби. Более того, из [110, §63] следует, что 2π-периодическая функция $X_{1,0}(\varphi)$ допускает разложение Фурье

$$
X_{1,0}(\varphi)=\sum_{k=1}^{\infty}q_k\cos\big((2k-1)\varphi\big),\quad q_k=2\nu_0\sqrt{2}\,\mathrm{sech}\left((2k-1)\frac{\pi}{2}\right).
$$

Условия (9.16) и (9.17) соответствуют неравенствам

$$
2-\frac{1}{\beta}\le p-\frac{\alpha}{\beta}<3,\quad n-\frac{\gamma}{\beta}\le\frac{3}{4}\left(p-\frac{\alpha}{\beta}+\frac{1}{3}\right). \tag{9.29}
$$

9.5.1. Пример 1

Пусть $p=n=0$, $\alpha=\beta=1/3$ и $\gamma=1/6$. В этом случае выполняются неравенства (9.29), и система (9.4) принимает вид

$$
\begin{aligned}
&dx_1=x_2\,dt,\\
&dx_2=\left(-ux_1-x_1^3+t^{-\frac{1}{3}}\mathcal{Q}\cos\left(st^{\frac{4}{3}}\right)\right)dt+t^{-\frac{1}{6}}\mu\cos\left(st^{\frac{4}{3}}\right)\,dw(t).
\end{aligned} \tag{9.30}
$$

Из (9.14), (9.24) и (9.25) следует, что $a=b=-2$, $A=2/3$, $B=4/3$, $C=1$ и

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}(\Theta)&\equiv\frac{1}{2\sqrt{3}}\Big(\frac{3}{z_0^2}\langle f_{1,0}(\varkappa^{-1}\zeta+\Theta,\zeta)\rangle_{\varkappa\zeta}-1\Big),\\
J(\Theta)&\equiv\frac{3}{4z_0^2}\left\langle\partial_\Theta f_{2,0}(\varkappa^{-1}\zeta+\Theta,\zeta)-f_{1,0}(\varkappa^{-1}\zeta+\Theta,\zeta)\right\rangle_{\varkappa\zeta}+\frac{1}{4},
\end{aligned}
$$

где

$$f_{1,0} \equiv \frac{\mathcal{Q}\nu_0}{4}\partial_\varphi X_{1,0}\cos S, \quad f_{2,0} \equiv -\frac{\mathcal{Q}\nu_0}{4}X_{1,0}\cos S, \quad z_0 = \frac{4s}{3\nu_0\varkappa}.$$

Заметим, что

$$\langle Z(\varkappa^{-1}\zeta+\Theta)\cos\zeta\rangle_{\varkappa\zeta} \equiv \langle Z(\zeta)\cos\varkappa\zeta\rangle_\zeta \cos\varkappa\Theta + \langle Z(\zeta)\sin\varkappa\zeta\rangle_\zeta \sin\varkappa\Theta$$

для любой 2π-периодической функции $Z(\varphi)$. В случае резонанса с $\varkappa = 2k-1$, $k \in \mathbb{Z}_+$, имеем

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(\Theta) &\equiv -\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\frac{\mathcal{Q}}{\mathcal{Q}_\varkappa s^2}\sin\big((2k-1)\Theta\big)+1\right),\\
J(\Theta) &\equiv \frac{\mathcal{Q}}{2\mathcal{Q}_\varkappa s^2}\sin\big((2k-1)\Theta\big)+\frac{1}{4},\\
\mathcal{Q}_\varkappa &= \frac{128}{(3\nu_0(2k-1))^3 q_k}.
\end{aligned}$$

Следовательно, если $|\mathcal{Q}|/s^2 > \mathcal{Q}_\varkappa$, то условие (9.26) выполняется с

$$\Theta_0 \in \left\{(-1)^j\theta_0 + \frac{\pi j}{2k-1}\right\}_{j\in\mathbb{Z}}, \quad \theta_0 = \frac{1}{2k-1}\arcsin\left(-\frac{\mathcal{Q}_\varkappa s^2}{\mathcal{Q}}\right).$$

Легко проверить, что для всех $j \in \mathbb{Z}$

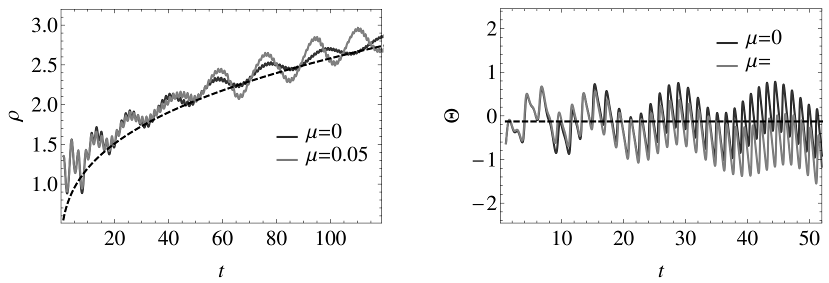
$$\mathcal{P}'(\Theta_0) = -\frac{(-1)^j\mathcal{Q}(2k-1)}{2\sqrt{3}\mathcal{Q}_\varkappa s^2}\cos\big((2k-1)\theta_0\big) \neq 0, \quad J(\Theta_0) = -\frac{1}{4}.$$

Таким образом, если $|\mathcal{Q}|/s^2 > \mathcal{Q}_\varkappa$ и $(-1)^j\mathcal{Q} > 0$, то из Леммы 22 и Теоремы 61 следует, что в системе (9.30) возникает режим фазовой синхронизации такой, что

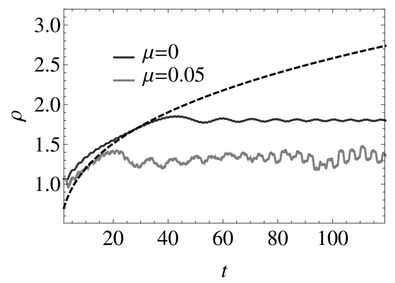
$$\begin{aligned}
\rho(t) &\approx \frac{4st^{\frac{1}{3}}}{3\nu_0(2k-1)},\\
\varphi(t) &\approx \frac{1}{2k-1}\left(S(t) + (-1)^j\arcsin\left(-\frac{\mathcal{Q}_\varkappa s^2}{\mathcal{Q}}\right)+\pi j\right)
\end{aligned}$$

для всех $k \in \mathbb{Z}_+$, где $\rho(t) \equiv \sqrt[4]{H(x_1(t), x_2(t))}$ и $\varphi(t) \equiv Y_2(x(t), \dot{x}(t))$ соответствуют амплитуде и фазе решений системы (9.30). Более того, поскольку $C < A + B/2$, мы видим, что этот режим стохастически устойчив на асимптотически большом интервале $t \leq \mathcal{O}(\mu^{-1+\epsilon})$ при $\mu \to 0$ для всех $\epsilon \in (0,1)$

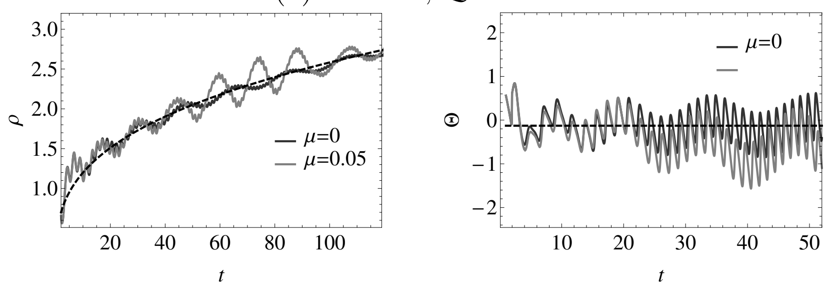
(см. рис. 9.3, а и в). Заметим, что если $|\mathcal{Q}|/s^2 > \mathcal{Q}_\varkappa$ и $(-1)^j\mathcal{Q} < 0$, то этот режим неустойчив в соответствующей укороченной системе. Наконец, из леммы 23 следует, что захват в резонанс не происходит, если $|\mathcal{Q}|/s^2 < \mathcal{Q}_\varkappa$ (см. рис. 9.3, б и г).



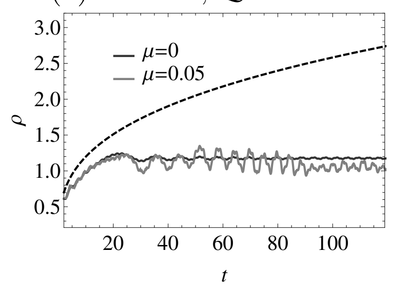
(а) $u = -1$, $\mathcal{Q} = 4$



(б) $u = -1$, $\mathcal{Q} = 0.4$



(в) $u = 1$, $\mathcal{Q} = 4$



(г) $u = 1$, $\mathcal{Q} = 0.4$

Рис. 9.3. Эволюция $\rho(t)$ и $\Theta(t) = \varphi(t) - \varkappa^{-1}S(t)$ для реализаций резонансных решений ($\varkappa = 1$) системы (9.30) при $s = 1/2$ и различных значениях параметров u и $\mathcal{Q}$. Чёрные пунктирные кривые соответствуют $\rho(t) \equiv z_0 t^{1/3}$ и $\Theta(t) \equiv \theta_0$, где $z_0 \approx 0.56$, $\theta_0 \approx -0.127$. В этом случае $\mathcal{Q}_1 \approx 2.04$.

9.5.2. Пример 2

Пусть $p = n = 1$, $\alpha = \beta = 1/2$ и $\gamma = 3/4$. Тогда система (9.4) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} &dx_1 = x_2\,dt, \\ &dx_2 = \left(-ux_1 - x_1^3 + t^{-\frac{1}{2}}\mathcal{Q}x_1\cos\left(st^{\frac{3}{2}}\right)\right)dt + t^{-\frac{3}{4}}\mu x_1\cos\left(st^{\frac{3}{2}}\right)\,dw(t). \end{aligned} \tag{9.31}$$

Легко видеть, что выполняются неравенства (9.29). В этом случае $a=b=-1$, $A=3/4$, $B=3/2$, $C=3/2$,

$$\mathcal{P}(\Theta)\equiv\frac{1}{\sqrt{6}}\left(\frac{2}{z_0}\langle f_{1,0}(\varkappa^{-1}\zeta+\Theta,\zeta)\rangle_{\varkappa\zeta}-1\right),$$
$$J(\Theta)\equiv\frac{2}{3z_0}\left\langle\partial_\Theta f_{2,0}(\varkappa^{-1}\zeta+\Theta,\zeta)\right\rangle_{\varkappa\zeta}+\frac{1}{6},$$

где

$$f_{1,0}\equiv\frac{\mathcal{Q}\nu_0}{8}\partial_\varphi X_{1,0}^2\cos S,\quad f_{2,0}\equiv-\frac{\mathcal{Q}\nu_0}{4}X_{1,0}^2\cos S,\quad z_0=\frac{3s}{2\nu_0\varkappa}.$$

В случае резонанса с $\varkappa=2k$, $k\in\mathbb{Z}_+$, имеем

$$\mathcal{P}(\Theta)\equiv-\frac{1}{\sqrt{6}}\left(\frac{\mathcal{Q}}{s\mathcal{Q}_k}\sin(2k\Theta)+1\right),\quad J(\Theta)\equiv\frac{2\mathcal{Q}}{s\mathcal{Q}_\varkappa}\sin(2k\Theta)+\frac{1}{6},$$
$$\mathcal{Q}_\varkappa=\frac{3}{2(\nu_0k)^2\tilde{q}_k},\quad \tilde{q}_k=\langle(X_{1,0}(\zeta))^2\cos(2k\zeta)\rangle_\zeta. \tag{9.32}$$

Отсюда следует, что если $|\mathcal{Q}|/s>\mathcal{Q}_\varkappa$, то условие (9.26) выполняется с

$$\Theta_0\in\left\{(-1)^j\theta_0+\frac{\pi j}{2k}\right\}_{j\in\mathbb{Z}},\quad \theta_0=\frac{1}{2k}\arcsin\left(-\frac{s\mathcal{Q}_\varkappa}{\mathcal{Q}}\right).$$

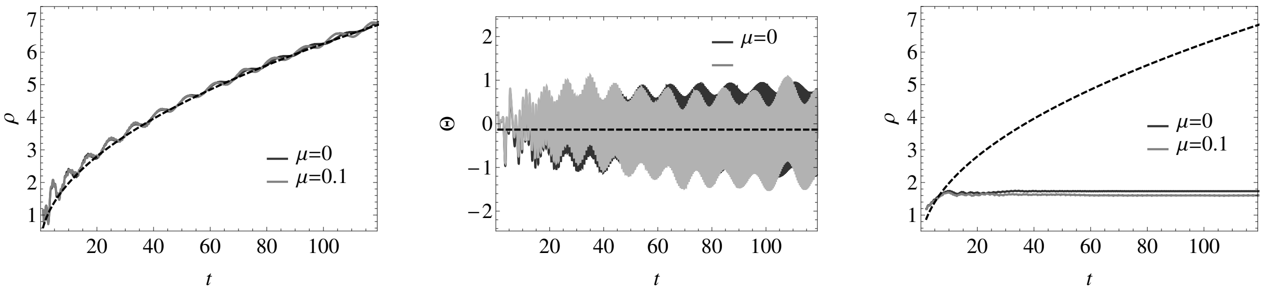
Легко проверить, что для любого $j\in\mathbb{Z}$

$$\mathcal{P}'(\Theta_0)=-\frac{(-1)^j2k\mathcal{Q}}{\sqrt{6}s\mathcal{Q}_\varkappa}\cos(2k\theta_0)\neq0,\quad J(\Theta_0)=-\frac{1}{2}.$$

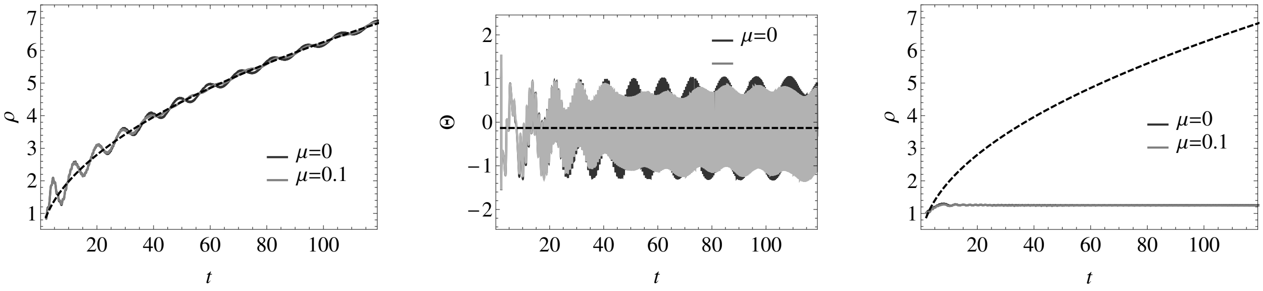
Из леммы 22 и теоремы 61 следует, что если $|\mathcal{Q}|/s>\mathcal{Q}_\varkappa$ и $(-1)^j\mathcal{Q}>0$, то в системе (9.31) возникает режим фазового захвата такой, что

$$\rho(t)\approx\frac{3st^{\frac{1}{2}}}{4\nu_0k},\quad \varphi(t)\approx\frac{1}{2k}\left(S(t)+(-1)^j\arcsin\left(-\frac{s\mathcal{Q}_\varkappa}{\mathcal{Q}}\right)+\pi j\right),\quad k\in\mathbb{Z}_+.$$

Более того, поскольку $C=A+B/2$, то этот режим стохастически устойчив на экспоненциально большом интервале $t\leq\mathcal{O}(\exp\mu^{-4(1-\epsilon)/3})$ при $\mu\to0$ для всех $\epsilon\in(0,1)$ (см. рис. 9.4, а и в). Если $|\mathcal{Q}|/s>\mathcal{Q}_\varkappa$ и $(-1)^j\mathcal{Q}<0$, этот режим неустойчив. Захвата в резонанс не происходит, если $|\mathcal{Q}|/s<\mathcal{Q}_\varkappa$ (см. рис. 9.4, б и г).



(а) $u = -1$, $\mathcal{Q} = 8$ (б) $u = -1$, $\mathcal{Q} = 1$



(в) $u = 1$, $\mathcal{Q} = 8$ (г) $u = 1$, $\mathcal{Q} = 1$

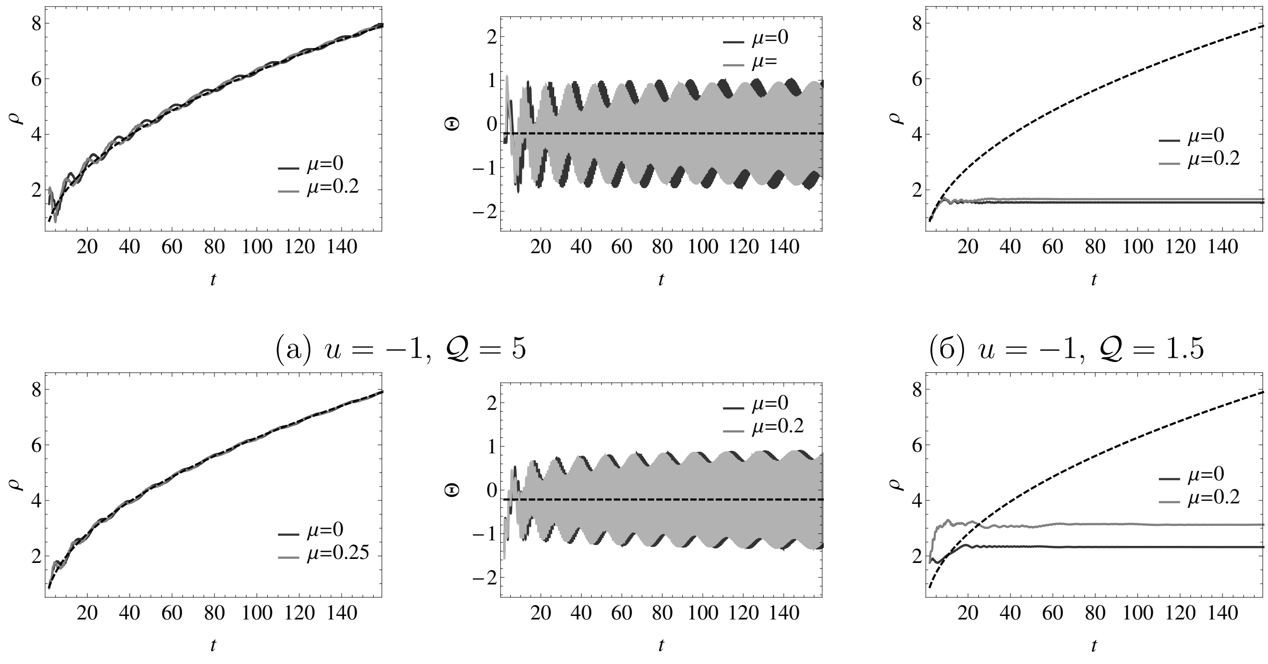
Рис. 9.4. Эволюция $\rho(t)$ и $\Theta(t) = \varphi(t) - \varkappa^{-1}S(t)$ для реализаций резонансных решений ($\varkappa = 2$) системы (9.31) при $s = 1$ и различных значениях параметров u и $\mathcal{Q}$. Чёрные пунктирные кривые соответствуют $\rho(t) \equiv z_0 t^{1/2}$ и $\Theta(t) \equiv \theta_0$, где $z_0 \approx 0.63$, $\theta_0 \approx -0.132$. В этом случае $\mathcal{Q}_2 \approx 2.101$.

9.5.3. Пример 3

Наконец, пусть $p = 1$, $n = 2$, $\alpha = \beta = 1/2$ и $\gamma = 3/2$. Тогда система (9.4) примет вид

$$\begin{aligned} &dx_1 = x_2\, dt, \\ &dx_2 = \left(-ux_1 - x_1^3 + t^{-\frac{1}{2}}\mathcal{Q}x_1 \cos\left(st^{\frac{3}{2}}\right)\right) dt + t^{-\frac{3}{2}}\mu x_1^2 \cos\left(st^{\frac{3}{2}}\right) dw(t). \end{aligned} \tag{9.33}$$

Легко проверить, что выполняются неравенства (9.29). Из (9.14), (9.24) и (9.25) следует, что $a = b = 0$, $A = 3/4$, $B = 3/2$, $C = 7/4$. Заметим, что в случае $\varkappa = 2k$, $k \in \mathbb{Z}_+$ функции $\mathcal{P}(\Theta)$ и $J(\Theta)$ имеют вид (9.32). Таким образом, результаты, полученные для предыдущего примера, верны. Более того, поскольку $C > A + B/2$, то получаем стохастическую устойчивость резонанса на полубесконечном интервале, если $|\mathcal{Q}| > \mathcal{Q}_\varkappa$ и $(-1)^j\mathcal{Q} > 0$ (см. рис. 9.5).



(а) $u=-1,\ \mathcal{Q}=5$ (б) $u=-1,\ \mathcal{Q}=1.5$

(в) $u=1,\ \mathcal{Q}=5$ (г) $u=1,\ \mathcal{Q}=1.5$

Рис. 9.5. Эволюция $\rho(t)$ и $\Theta(t)=\varphi(t)-\varkappa^{-1}S(t)$ для реализаций резонансных решений ($\varkappa=2$) системы (9.33) при $s=1$ и различных значениях параметров u и $\mathcal{Q}$. Чёрные пунктирные кривые соответствуют $\rho(t)\equiv z_0t^{1/2}$ и $\Theta(t)\equiv\theta_0$, где $z_0\approx 0.63$, $\theta_0\approx -0.132$. В этом случае $\mathcal{Q}_2\approx 2.101$.

9.6. Доказательство вспомогательных утверждений

Доказательство леммы 20. Применяя формулу Ито [227, §4.2] к (9.10), видим, что в новых переменных (ρ,φ) система (9.1) принимает вид (9.11). Из свойств функций $X_1(\varphi,\rho)$ и $X_2(\varphi,\rho)$ следует, что

$$
\begin{aligned}
\partial_{x_2}\begin{pmatrix}Y_1\\ Y_2\end{pmatrix} &\equiv \frac{1}{\Delta(\rho)}\begin{pmatrix}\partial_\varphi X_1\\ -\partial_\rho X_1\end{pmatrix},\\
\partial^2_{x_2}\begin{pmatrix}Y_1\\ Y_2\end{pmatrix} &\equiv \frac{1}{\Delta(\rho)}\left(\partial_\varphi X_1\partial_\rho-\partial_\rho X_1\partial_\varphi\right)\frac{1}{\Delta(\rho)}\begin{pmatrix}\partial_\varphi X_1\\ -\partial_\rho X_1\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Объединяя это с (9.3) и (9.7), получаем (9.12). □

Доказательство леммы 21. Из (9.12) следует, что существуют $D>0$ и $\hat\varrho_0>\hat\rho_0$ такие, что

$$
|f_i(\varrho,\phi,S)|\leq D\varrho^{a+2-i},\quad |g_i(\varrho,\phi,S)|\leq D\varrho^{2b+2-i}
$$

для всех $i \in \{1,2\}$, $\varrho \geq \hat{\varrho}_0$ и $(\varrho,\phi) \in \mathbb{R}^2$. Объединяя это с первым уравнением в (9.15), получаем следующее неравенство для решений:

$$\left|\frac{d}{dt}\log\varrho(t)\right| \leq D\left(t^{-\alpha}(\varrho(t))^a + t^{-2\gamma}(\varrho(t))^{2b}\right). \tag{9.34}$$

Нетрудно проверить, что

$$(\log\varrho_\varkappa(t))' \sim \frac{\beta}{h}t^{-1}, \quad t^{-\alpha}(\varrho_\varkappa(t))^a \sim z_0^a t^{\mathcal{M}_1}, \quad t^{-2\gamma}(\varrho_\varkappa(t))^{2b} \sim z_0^{2b}t^{\mathcal{M}_2}, \quad t \to \infty.$$

Подставляя эти оценки в (9.34), видим, что система (9.15) допускает решения с $\varrho(t) \sim \varrho_\varkappa(t)$ при $t \to \infty$, если $\mathcal{M} \geq -1$.

Из второго уравнения в (9.15) следует, что

$$\frac{\phi(t)}{S(t)} - \varkappa^{-1} = \mathcal{O}\left(t^{\mathcal{M}-\beta}\right), \quad t \to \infty$$

для $\varrho(t) \sim \varrho_\varkappa(t)$. Поскольку $\phi(t)/S(t) \to \varkappa^{-1}$ при $t \to \infty$, получаем $\mathcal{M} < \beta$. $\square$

9.7. Обоснование результатов

9.7.1. Замена переменных

Доказательство теоремы 60. Рассмотрим замену переменных (9.18) в системе (9.11). Используя формулу Ито и формулу замены времени для стохастических интегралов [227, §8.5], получаем

$$\begin{aligned}
dr &= \mathcal{F}_1(r,\theta,\zeta(\tau),\tau)\,d\tau + \tau^{-\frac{C-A}{B}}\mu\xi_1(r,\theta,\zeta(\tau),\tau)\,d\tilde{w}(\tau),\\
d\theta &= \mathcal{F}_2(r,\theta,\zeta(\tau),\tau)\,d\tau + \tau^{-\frac{C}{B}}\mu\xi_2(r,\theta,\zeta(\tau),\tau)\,d\tilde{w}(\tau),
\end{aligned} \tag{9.35}$$

где функции

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_1 \equiv{} & t^{A+1-B}\left\{F_1\left(\varrho_\varkappa(t)(1+t^{-A}r), \varkappa^{-1}\zeta+\theta,\zeta,t\right) - \varrho_\varkappa'(t)\right\}(\varrho_\varkappa(t))^{-1}\\
& + t^{-B}r\left(A - t\left(\log\varrho_\varkappa(t)\right)'\right)\Big|_{t=(B\tau)^{\frac{1}{B}}},\\
\mathcal{F}_2 \equiv{} & t^{1-B}\Big\{\nu\big(\varrho_\varkappa(t)(1+t^{-A}r)\big) - \varkappa^{-1}S'(t)\\
& + F_2\left(\varrho_\varkappa(t)(1+t^{-A}r), \varkappa^{-1}\zeta+\theta,\zeta,t\right)\Big\}\Big|_{t=(B\tau)^{\frac{1}{B}}},
\end{aligned}$$

$$
\xi_1 \equiv t^{C-\gamma+\frac{1-B}{2}} B^{-\frac{C-A}{B}} c_1 \left(\varrho_\varkappa(t)(1+t^{-A}r), \varkappa^{-1}\zeta+\theta,\zeta,t\right) (\varrho_\varkappa(t))^{-1}\Big|_{t=(B\tau)^{\frac{1}{B}}},
$$
$$
\xi_2 \equiv t^{C-\gamma+\frac{1-B}{2}} B^{-\frac{C}{B}} c_2 \left(\varrho_\varkappa(t)(1+t^{-A}r), \varkappa^{-1}\zeta+\theta,\zeta,t\right)\Big|_{t=(B\tau)^{\frac{1}{B}}}
$$

являются 2π-периодическими по θ и $2\pi\varkappa$-периодическими по ζ. Заметим, что правые части системы (9.35) удовлетворяют следующим оценкам:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}_1(r,\theta,\zeta,\tau) &= \sum_{K\in\{A,B-A,2A,2C-A,B\}} \tau^{-\frac{K}{B}} \mathcal{F}_{1,K}(r,\theta,\zeta,\tau) + \mathcal{O}(\tau^{-\frac{3A}{B}}),\\
\mathcal{F}_2(r,\theta,\zeta,\tau) &= \sum_{K\in\{A,2A\}} \tau^{-\frac{K}{B}} \mathcal{F}_{2,K}(r,\theta,\zeta,\tau) + \mathcal{O}(\tau^{-\frac{3A}{B}}),\\
\xi_i(r,\theta,\zeta,\tau) &= \xi_{i,0}(r,\theta,\zeta,\tau) + \mathcal{O}(\tau^{-\frac{A}{B}})
\end{aligned} \tag{9.36}
$$

при $\tau\to\infty$ равномерно для всех $(\theta,\zeta)\in\mathbb{R}^2$ и $|r|\le r_0$, где $r_0=(\tilde\rho_0/\rho_0-1)\hat t_0^A>0$,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}_{1,A} &\equiv B^{-\frac{A}{B}}(z(t))^a \tilde f_1\left(\varrho_\varkappa(t)(1+t^{-A}r), \varkappa^{-1}\zeta+\theta,\zeta\right)\Big|_{t=(B\tau)^{\frac{1}{B}}},\\
\mathcal{F}_{1,B-A} &\equiv -B^{\frac{A-B}{B}}\left(\frac{\beta}{h}+t(\log z(t))'\right)\Big|_{t=(B\tau)^{\frac{1}{B}}},\\
\mathcal{F}_{1,2A} &\equiv rB^{-\frac{A}{B}}(a+1)\mathcal{F}_{1,A}(r,\theta,\zeta,\tau),\\
\mathcal{F}_{1,B} &\equiv r\left(\frac{A}{B}+B^{-\frac{A}{B}}\mathcal{F}_{1,B-A}\right),\\
\mathcal{F}_{1,2C-A} &\equiv B^{\frac{A-2C}{B}}(z(t))^{2b}\tilde g_1\left(\varrho_\varkappa(t)(1+t^{-A}r), \varkappa^{-1}\zeta+\theta,\zeta\right)\Big|_{t=(B\tau)^{\frac{1}{B}}},\\
\mathcal{F}_{2,A} &\equiv B^{-\frac{A}{B}}(z(t))^h\Big\{hr\tilde\nu(\varrho_\varkappa(t))\\
&\quad + t^A\Big(\tilde\nu\big(\varrho_\varkappa(t)(1+t^{-A}r)\big)-\tilde\nu\big(\varrho_\varkappa(t)\big)\Big)\Big\}\Big|_{t=(B\tau)^{\frac{1}{B}}},\\
\mathcal{F}_{2,2A} &\equiv rB^{-\frac{2A}{B}}(z(t))^h\frac{h}{2}\Big\{(h-1)r\tilde\nu(\varrho_\varkappa(t))\\
&\quad + 2t^A\Big(\tilde\nu\big(\varrho_\varkappa(t)(1+t^{-A}r)\big)-\tilde\nu\big(\varrho_\varkappa(t)\big)\Big)\Big\}\\
&\quad + B^{-\frac{2A}{B}}(z(t))^a\tilde f_2\left(\varrho_\varkappa(t)(1+t^{-A}r), \varkappa^{-1}\zeta+\theta,\zeta\right)\Big|_{t=(B\tau)^{\frac{1}{B}}},\\
\xi_{1,0} &\equiv B^{-\frac{C-A}{B}}(z(t))^b\tilde c_1\left(\varrho_\varkappa(t)(1+t^{-A}r), \varkappa^{-1}\zeta+\theta,\zeta\right)\Big|_{t=(B\tau)^{\frac{1}{B}}},\\
\xi_{2,0} &\equiv B^{-\frac{C}{B}}(z(t))^b\tilde c_2\left(\varrho_\varkappa(t)(1+t^{-A}r), \varkappa^{-1}\zeta+\theta,\zeta\right)\Big|_{t=(B\tau)^{\frac{1}{B}}}.
\end{aligned} \tag{9.37}
$$

Более того, справедливы следующие асимптотические разложения:

$$\mathcal{F}_{i,K}(r,\theta,\zeta,\tau) \sim \mathcal{F}^0_{i,K}(r,\theta,\zeta) + \sum_{j\geq 1, k\geq 0} \tau^{-\frac{j(\beta/h)+kA}{B}} \mathcal{F}^{j,k}_{i,K}(r,\theta,\zeta),$$

$$\xi_{i,0}(r,\theta,\zeta,\tau) \sim \xi^0_{i,0}(r,\theta,\zeta) + \sum_{j\geq 1, k\geq 0} \tau^{-\frac{j(\beta/h)+kA}{B}} \xi^{j,k}_{i,0}(r,\theta,\zeta)$$

при $\tau \to \infty$ с не зависящими от времени коэффициентами $\mathcal{F}^{j,k}_{1,K}$ и $\xi^{j,k}_{i,0}$. В частности,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^0_{1,A} &\equiv B^{-\frac{A}{B}} z_0^a f_{1,0}, & \mathcal{F}^0_{2,A} &\equiv r B^{-\frac{A}{B}} h\nu_0 z_0^h,\\
\mathcal{F}^0_{1,B-A} &\equiv -B^{\frac{A-B}{B}} \frac{\beta}{h}, & \mathcal{F}^0_{2,B-A} &\equiv 0,\\
\mathcal{F}^0_{1,2A} &\equiv r B^{-\frac{A}{B}} (a+1)\mathcal{F}^0_{1,A}, & \mathcal{F}^0_{2,2A} &\equiv B^{-\frac{2A}{B}} \left(h(h-1)\nu_0 z_0^h \frac{r^2}{2} + f_{2,0} z_0^a\right),\\
\mathcal{F}^0_{1,B} &\equiv \frac{r}{B}\left(A - \frac{\beta}{h}\right), & \mathcal{F}^0_{2,B} &\equiv 0,\\
\mathcal{F}^0_{1,2C-A} &\equiv B^{\frac{A-2C}{B}} z_0^{2b} g_{1,0}, & \mathcal{F}^0_{2,2C-A} &\equiv 0,\\
\xi^0_{1,0} &\equiv B^{-\frac{C-A}{B}} z_0^b c_{1,0}, & \xi^0_{2,0} &\equiv B^{-\frac{C}{B}} z_0^b c_{2,0}.
\end{aligned}$$

Заметим, что предельная система, соответствующая (9.35), имеет вид

$$\frac{dr}{d\tau} = 0, \quad \frac{d\theta}{d\tau} = 0, \quad \frac{d\zeta}{d\tau} = \varsigma,$$

где $\varsigma = sB > 0$. В этом случае ζ можно рассматривать как быструю переменную, и систему (9.35) можно упростить, усреднив дрейфовые члены по ζ. Рассмотрим преобразование близкое к тождественному в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\tilde{R}(r,\theta,\zeta,\tau) &\equiv r + \sum_{K\in\mathcal{X}} \tau^{-\frac{K}{B}} Z_{1,K}(r,\theta,\zeta,\tau),\\
\tilde{\Theta}(r,\theta,\zeta,\tau) &\equiv \theta + \sum_{K\in\mathcal{X}} \tau^{-\frac{K}{B}} Z_{2,K}(r,\theta,\zeta,\tau),
\end{aligned} \tag{9.38}$$

где $\mathcal{X} := \{A, B-A, 2A, 2(B-A), 2C-A, B, B+2C-3A\}$. Коэффициенты $Z_{i,K}(r,\theta,\zeta,\tau)$, $i \in \{1,2\}$ предполагаются периодическими относительно θ и ζ с нулевыми средними. Эти функции выбираются таким образом, чтобы дрейфовые члены системы (9.19), записанные в новых переменных,

$$R(\tau) = \tilde{R}(r(\tau),\theta(\tau),\zeta(\tau),\tau), \quad \Theta(\tau) = \tilde{\Theta}(r(\tau),\theta(\tau),\zeta(\tau),\tau) \tag{9.39}$$

не зависели явно от $\zeta(\tau)$, по крайней мере в ведущих членах асимптотики. Применяя формулу Ито [227, §4.2] к (9.39), получаем

$$
\begin{aligned}
dR &= \mathcal{L}\tilde{R}\,d\tau + \mu\left(\tau^{-\frac{C-A}{B}}\xi_1\partial_r + \tau^{-\frac{C}{B}}\xi_2\partial_\theta\right)\tilde{R}\,d\tilde{w}(\tau),\\
d\Theta &= \mathcal{L}\tilde{\Theta}\,d\tau + \mu\left(\tau^{-\frac{C-A}{B}}\xi_1\partial_r + \tau^{-\frac{C}{B}}\xi_2\partial_\theta\right)\tilde{\Theta}\,d\tilde{w}(\tau),
\end{aligned}
$$

где

$$
\mathcal{L} := \mathcal{F}_1\partial_r + \mathcal{F}_2\partial_\theta + \partial_\tau + \varsigma\partial_\zeta + \frac{\mu^2}{2}\tau^{-\frac{2(C-A)}{B}}\left(\xi_1^2\partial_r^2 + 2\tau^{-\frac{A}{B}}\xi_1\xi_2\partial_r\partial_\theta + \tau^{-\frac{2A}{B}}\xi_2^2\partial_\theta^2\right)
$$

является генератором процесса, определяемого (9.35) (см., например, [192, §3.3]). Вычисляя $\mathcal{L}\tilde{R}$ и $\mathcal{L}\tilde{\Theta}$, используя (9.36) и (9.38), и сравнивая результат с (9.20), получаем следующую цепочку уравнений:

$$
\varsigma\partial_\zeta Z_{i,K} = \Lambda_{i,K}(r,\theta,\tau) - \mathcal{F}_{i,K}(r,\theta,\zeta,\tau) + \tilde{\mathcal{F}}_{i,K}(r,\theta,\zeta,\tau) \tag{9.40}
$$

для всех $K \in \mathcal{X}$ и $i \in \{1,2\}$. Предполагается, что

$$
\mathcal{F}_{2,B-A} \equiv \mathcal{F}_{2,B} \equiv \mathcal{F}_{2,2C-A} \equiv \mathcal{F}_{i,2(B-A)} \equiv \mathcal{F}_{i,B+2C-3A} \equiv 0. \tag{9.41}
$$

Функции $\tilde{\mathcal{F}}_{i,K}(r,\theta,\zeta,\tau)$ выражаются через $\{Z_{i,k},\Lambda_{i,k}\}_{k<K}$. В частности, $\tilde{\mathcal{F}}_{i,A} \equiv \tilde{\mathcal{F}}_{i,B-A} \equiv 0$,

$$
\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{F}}_{i,2A} \equiv{}& \left(Z_{1,A}\partial_r + Z_{2,A}(r,\theta,\zeta,\tau)\partial_\theta\right)\Lambda_{i,A}(r,\theta,\tau)\\
&- \left(\mathcal{F}_{1,A}\partial_r + \mathcal{F}_{2,A}(r,\theta,\zeta,\tau)\partial_\theta\right)Z_{i,A},\\
\tilde{\mathcal{F}}_{i,2(B-A)} \equiv{}& \left(Z_{1,B-A}\partial_r + Z_{2,B-A}\partial_\theta\right)\Lambda_{i,B-A}(r,\theta,\tau)\\
&- \mathcal{F}_{1,B-A}\partial_r Z_{i,A},\\
\tilde{\mathcal{F}}_{i,2C-A} \equiv{}& -\frac{\mu^2}{2}(\xi_{1,0})^2\partial_r^2 Z_{i,A}(r,\theta,\zeta,\tau),\\
\tilde{\mathcal{F}}_{i,B} \equiv{}& \left(Z_{1,B-A}(r,\theta,\zeta,\tau)\partial_r + Z_{2,B-A}(r,\theta,\zeta,\tau)\partial_\theta\right)\Lambda_{i,A}(r,\theta,\tau)\\
&+ \left(Z_{1,A}(r,\theta,\zeta,\tau)\partial_r + Z_{2,A}(r,\theta,\zeta,\tau)\partial_\theta\right)\Lambda_{i,B-A}(r,\theta,\tau)\\
&- \left(\mathcal{F}_{1,A}(r,\theta,\zeta,\tau)\partial_r + \mathcal{F}_{2,A}(r,\theta,\zeta,\tau)\partial_\theta\right)Z_{i,B-A}(r,\theta,\zeta,\tau)\\
&- \mathcal{F}_{1,B-A}(r,\theta,\zeta,\tau)\partial_r Z_{i,A}(r,\theta,\zeta,\tau),\\
\tilde{\mathcal{F}}_{i,B+2C-3A} \equiv{}& -\frac{\mu^2}{2}(\xi_{1,0}(r,\theta,\zeta,\tau))^2\partial_r^2 Z_{i,B-A}(r,\theta,\zeta,\tau).
\end{aligned} \tag{9.42}
$$

Положим

$$\Lambda_{i,K}(r,\theta,\tau) \equiv \langle \mathcal{F}_{i,K}(r,\theta,\zeta,\tau) - \tilde{\mathcal{F}}_{i,K}(r,\theta,\zeta,\tau)\rangle_{\varkappa\zeta}, \quad i \in \{1,2\}, \quad K \in \mathcal{X}.$$

Тогда правая часть системы (9.40) имеет нулевое среднее значение. Интегрируя (9.40), получаем

$$Z_{i,K}(r,\theta,\zeta,\tau) \equiv -\frac{1}{\varsigma}\left\{\int\limits_0^\zeta \{\mathcal{F}_{i,K}(r,\theta,\zeta,\tau) - \tilde{\mathcal{F}}_{i,K}(r,\theta,\zeta,\tau)\}_{\varkappa\zeta}\, d\zeta\right\}_{\varkappa\zeta}.$$

Легко проверить, что

$$\begin{aligned}
&Z_{2,A} \equiv Z_{i,B-A} \equiv Z_{2,2(B-A)} \equiv Z_{2,2C-A} \equiv Z_{2,B} \equiv Z_{i,B+2C-3A} \equiv 0,\\
&\tilde{\mathcal{F}}_{2,2(B-A)} \equiv \tilde{\mathcal{F}}_{2,2C-A} \equiv \tilde{\mathcal{F}}_{2,B} \equiv \tilde{\mathcal{F}}_{i,B+2C-3A} \equiv 0,\\
&\langle \tilde{\mathcal{F}}_{2,2A}(r,\theta,\zeta,\tau)\rangle_{\varkappa\zeta} \equiv \langle \tilde{\mathcal{F}}_{i,2(B-A)}(r,\theta,\zeta,\tau)\rangle_{\varkappa\zeta} \equiv \langle \tilde{\mathcal{F}}_{1,B}(r,\theta,\zeta,\tau)\rangle_{\varkappa\zeta} \equiv 0,
\end{aligned}$$

и $\langle \tilde{\mathcal{F}}_{1,2A}(r,\theta,\zeta,\tau)\rangle_{\varkappa\zeta} = \mathcal{O}(\tau^{-A/B})$, $\langle \tilde{\mathcal{F}}_{1,2C-A}(r,\theta,\zeta,\tau)\rangle_{\varkappa\zeta} = \mathcal{O}(\tau^{-2A/B})$ при $\tau \to \infty$ равномерно для всех $|r| \le r_0$ и $\theta \in \mathbb{R}$. Объединяя это с (9.41) и (9.42), получаем

$$\begin{aligned}
&\Lambda_{i,2(B-A)}(r,\theta,\tau) \equiv \Lambda_{i,B+2C-3A}(r,\theta,\tau) \equiv 0, \quad i \in \{1,2\},\\
&\Lambda_{2,B-A}(r,\theta,\tau) \equiv \Lambda_{2,B}(r,\theta,\tau) \equiv \Lambda_{2,2C-A}(r,\theta,\tau) \equiv 0,\\
&\Lambda_{i,K}(r,\theta,\tau) = \langle \mathcal{F}_{i,K}(r,\theta,\zeta,\tau)\rangle_{\varkappa\zeta} + \delta_{i,1}\delta_{K,2A}\mathcal{O}(\tau^{-\frac{A}{B}}) + \delta_{i,1}\delta_{K,2C-A}\mathcal{O}(\tau^{-\frac{2A}{B}})
\end{aligned}$$

при $\tau \to \infty$. Из (9.38) следует, что для любого $\varepsilon \in (0, r_0)$ найдется $\tilde{\tau}_0 \ge \hat{t}_0^B/B$ такое, что

$$|\tilde{R}(r,\theta,\zeta,\tau) - r| \le \varepsilon, \quad |\tilde{\Theta}(r,\theta,\zeta,\tau) - \theta| \le \varepsilon$$

для всех $|r| \le r_0$, $(\theta,\zeta) \in \mathbb{R}^2$ и $\tau \ge \tilde{\tau}_0$. Более того,

$$\det\frac{\partial(\tilde{R},\tilde{\Theta})}{\partial(r,\theta)} \equiv \begin{vmatrix} \partial_r\tilde{R} & \partial_\theta\tilde{R}\\ \partial_r\tilde{\Theta} & \partial_\theta\tilde{\Theta}\end{vmatrix} = 1 + \mathcal{O}(\tau^{-\frac{A}{B}}), \quad \tau \to \infty$$

равномерно для всех $|r| \le r_0$ и $\theta \in \mathbb{R}$. Следовательно, преобразование $(r,\theta) \mapsto (R,\Theta)$ обратимо. Обозначим через $r = \tilde{r}(R,\Theta,\zeta,\tau)$, $\theta = \tilde{\theta}(R,\Theta,\zeta,\tau)$ преобразование, обратное к (9.39). Тогда,

$$\begin{aligned}
\tilde{\Lambda}_1(R,\Theta,\zeta,\tau) \equiv\, & \mathcal{L}\tilde{R}(r,\theta,\zeta,\tau)\Big|_{\substack{r=\tilde{r}(R,\Theta,\zeta,\tau)\\ \theta=\tilde{\theta}(R,\Theta,\zeta,\tau)}} \\
& - \sum_{K\in\mathcal{X}} \tau^{-\frac{K}{B}}\Lambda_{1,K}(\tilde{r}(R,\Theta,\zeta,\tau),\tilde{\theta}(R,\Theta,\zeta,\tau),\tau),\\
\tilde{\Lambda}_2(R,\Theta,\zeta,\tau) \equiv\, & \mathcal{L}\tilde{\Theta}(r,\theta,\zeta,\tau)\Big|_{\substack{r=\tilde{r}(R,\Theta,\zeta,\tau)\\ \theta=\tilde{\theta}(R,\Theta,\zeta,\tau)}} \\
& - \sum_{K\in\mathcal{X}} \tau^{-\frac{K}{B}}\Lambda_{2,K}(\tilde{r}(R,\Theta,\zeta,\tau),\tilde{\theta}(R,\Theta,\zeta,\tau),\tau),\\
\eta_1(R,\Theta,\zeta,\tau) \equiv\, & \Big(\xi_1(r,\theta,\zeta,\tau)\partial_r + \tau^{-\frac{A}{B}}\xi_2(r,\theta,\zeta,\tau)\partial_\theta\Big)\,\tilde{R}(r,\theta,\zeta,\tau)\Big|_{\substack{r=\tilde{r}(R,\Theta,\zeta,\tau)\\ \theta=\tilde{\theta}(R,\Theta,\zeta,\tau)}},\\
\eta_2(R,\Theta,\zeta,\tau) \equiv\, & \Big(\tau^{\frac{A}{B}}\xi_1(r,\theta,\zeta,\tau)\partial_r + \xi_2(r,\theta,\zeta,\tau)\partial_\theta\Big)\,\tilde{\Theta}(r,\theta,\zeta,\tau)\Big|_{\substack{r=\tilde{r}(R,\Theta,\zeta,\tau)\\ \theta=\tilde{\theta}(R,\Theta,\zeta,\tau)}}.
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что для каждого $i\in\{1,2\}$ справедливы следующие оценки:

$$\tilde{\Lambda}_i(R,\Theta,\zeta,\tau) = \mathcal{O}(\tau^{-\frac{3A}{B}}), \quad \eta_i(R,\Theta,\zeta,\tau) = \xi_i(R,\Theta,\zeta,\tau) + \mathcal{O}(\tau^{-\frac{A}{B}})$$

при $\tau\to\infty$ равномерно для всех $|R|\le r_0-\varepsilon$ и $(\Theta,\zeta)\in\mathbb{R}^2$. Таким образом, мы получаем доказательство теоремы 60 с $\tilde{Z}_1(R,\Theta,\zeta,\tau)\equiv(\tilde{r}(R,\Theta,\zeta,\tau)-R)\tau^{A/B}$, $\tilde{Z}_2(R,\Theta,\zeta,\tau)\equiv(\tilde{\theta}(R,\Theta,\zeta,\tau)-\Theta)\tau^{A/B}$, $\tilde{t}_0=(B\tilde{\tau}_0)^{1/B}$ и $R_0=r_0-\varepsilon$. □

9.7.2. Асимптотические режимы укороченной системы

Доказательство леммы 22. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \hat{\lambda}_1(R,\Theta,\tau) = 0,\\ \hat{\lambda}_2(R,\Theta,\tau) = 0. \end{cases} \tag{9.43}$$

Из (9.22) и (9.26) следует, что $\tau^{A/B}\hat{\lambda}_i(0,\Theta_0,\tau)=o(1)$ и

$$\tau^{\frac{2A}{B}}\begin{vmatrix} \partial_R\hat{\lambda}_1(0,\Theta_0,\tau) & \partial_\Theta\hat{\lambda}_1(0,\Theta_0,\tau)\\ \partial_R\hat{\lambda}_2(0,\Theta_0,\tau) & \partial_\Theta\hat{\lambda}_2(0,\Theta_0,\tau)\end{vmatrix} = -\chi_{2,A,0}\mathcal{P}'(\Theta_0)+o(1), \quad \tau\to\infty.$$

Следовательно, существует $\tau_0\ge\tilde{\tau}_0$, такое, что для всех $\tau\ge\tau_0$ система (9.43) имеет гладкое решение $\hat{R}(\tau)$, $\hat{\Theta}(\tau)$, такое, что $\hat{R}(\tau)\to 0$ и $\hat{\Theta}(\tau)\to\Theta_0$ при

$\tau \to \infty$. Легко проверить, что

$$\hat{R}(\tau) = -\tau^{-\frac{A}{B}}\left(\frac{\vartheta_{2,2A,0}(\Theta_0)}{\chi_{2,2A,0}} + \mathcal{O}(\tau^{-\frac{\beta}{B\hbar}})\right), \quad \hat{\Theta}(\tau) = \Theta_0 + \mathcal{O}(\tau^{-\frac{\beta}{B\hbar}}), \quad \tau \to \infty.$$

Определим параметр

$$\ell = \begin{cases} \dfrac{A}{2B}, & \text{если} \quad B > 2A, \\ \min\left\{\dfrac{A}{2B}, \dfrac{|J(\Theta_0)|}{3}\right\}, & \text{если} \quad B = 2A. \end{cases}$$

Тогда, подставляя

$$R(\tau) = \hat{R}(\tau) + \tau^{-\ell} z_1(\tau), \quad \Theta(\tau) = \hat{\Theta}(\tau) + \tau^{-\ell} z_2(\tau) \tag{9.44}$$

в (9.21), мы получаем систему, близкую к гамильтоновой,

$$\begin{aligned} \frac{dz_1}{d\tau} &= -\tau^{-\frac{A}{B}} \partial_{z_2} \mathcal{H}(z_1, z_2, \tau) + \tau^{-\frac{2A}{B}} \mathcal{G}_1(z_1, z_2, \tau), \\ \frac{dz_2}{d\tau} &= \tau^{-\frac{A}{B}} \partial_{z_1} \mathcal{H}(z_1, z_2, \tau) + \tau^{-\frac{2A}{B}} \left(\mathcal{J}(z_1, z_2, \tau) + \mathcal{G}_2(z_1, z_2, \tau)\right), \end{aligned} \tag{9.45}$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{H} \equiv{}& \tau^{\ell + \frac{A}{B}} \int_0^{z_1} \hat{\lambda}_2(\hat{R}(\tau) + \tau^{-\ell}\varsigma_1, \hat{\Theta}(\tau), \tau)\, d\varsigma_1 \\ & - \tau^{\ell + \frac{A}{B}} \int_0^{z_2} \hat{\lambda}_1(\hat{R}(\tau) + \tau^{-\ell} z_1, \hat{\Theta}(\tau) + \tau^{-\ell}\varsigma_2, \tau)\, d\varsigma_2, \\ \mathcal{J} \equiv{}& \tau^{\ell + \frac{2A}{B}} \sum_{j=1}^{2} \int_0^{z_2} \partial_{z_i} \hat{\lambda}_i(\hat{R}(\tau) + \tau^{-\ell} z_1, \hat{\Theta}(\tau) + \tau^{-\ell}\varsigma_2, \tau)\, d\varsigma_2 + \tau^{\frac{2A}{B} - 1} 2\ell z_2, \\ \mathcal{G}_1 \equiv{}& \tau^{\ell + \frac{2A}{B}} \left(\tilde{\lambda}_1(\hat{R}(\tau) + \tau^{-\ell} z_1, \hat{\Theta}(\tau) + \tau^{-\ell} z_2, \zeta(\tau), \tau) - \hat{R}'(\tau)\right), \\ \mathcal{G}_2 \equiv{}& \tau^{\ell + \frac{2A}{B}} \left(\tilde{\lambda}_2(\hat{R}(\tau) + \tau^{-\ell} z_1, \hat{\Theta}(\tau) + \tau^{-\ell} z_2, \zeta(\tau), \tau) - \hat{\Theta}'(\tau)\right). \end{aligned} \tag{9.46}$$

Заметим, что $\mathcal{H}(0,0,\tau) \equiv 0$, $\partial_{z_i}\mathcal{H}(0,0,\tau) \equiv 0$ и $\mathcal{J}(0,0,\tau) \equiv 0$, тогда как $\mathcal{G}_i(0,0,\tau) \not\equiv 0$ для $i \in \{1,2\}$. Более того,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(z_1, z_2, \tau) ={}& \frac{1}{2}\left(\chi_{2,A,0} z_1^2 - \mathcal{P}'(\Theta_0) z_2^2\right) + \mathcal{O}(\tau^{-\kappa})\mathcal{O}(|\mathbf{z}|^2), \\ \mathcal{J}(z_1, z_2, \tau) ={}& z_2\left(J(\Theta_0) + \delta_{2A,B} 2\ell + \mathcal{O}(\tau^{-\kappa})\right), \end{aligned} \tag{9.47}$$

и $\mathcal{G}_i(z_1, z_2, \tau) = \mathcal{O}(\tau^{-\kappa})$ при $\tau \to \infty$ и $|\mathbf{z}| := \sqrt{z_1^2 + z_2^2} \to 0$ с параметром $\kappa = \min\{A/(2B), \beta/(hB), \ell\} > 0$. Отметим, что функции $\mathcal{G}_1(z_1, z_2, \tau)$ и $\mathcal{G}_2(z_1, z_2, \tau)$ можно рассматривать как постоянно действующие возмущения системы с равновесием при $(z_1, z_2) = (0, 0)$.

Остальная часть доказательства разделена на три части.

1. Пусть $\mathcal{P}'(\Theta_0) < 0$ и $J(\Theta_0) < 0$. В этом случае функция $\mathcal{H}(z_1, z_2, \tau)$ положительно определена при $|\mathbf{z}| \to 0$ и $\tau \to \infty$. Следовательно, точка равновесия $(0, 0)$ соответствующей предельной системы

$$\tau^{\frac{A}{B}} \frac{d\tilde{z}_1}{d\tau} = \mathcal{P}'(\Theta_0)\tilde{z}_2, \quad \tau^{\frac{A}{B}} \frac{d\tilde{z}_2}{d\tau} = \chi_{2,A,0}\tilde{z}_1 \tag{9.48}$$

является центром. Докажем устойчивость равновесия относительно возмущений $\mathcal{G}_i(R, \Theta, \tau)$. Рассмотрим функцию Ляпунова для системы (9.45) в следующем виде:

$$\mathcal{V}(z_1, z_2, \tau) \equiv \mathcal{H}(z_1, z_2, \tau) + \tau^{-\frac{A}{B}} \frac{\tilde{J} z_1 z_2}{2} \tag{9.49}$$

с $\tilde{J} = J(\Theta_0) + \delta_{2A,B} 2\ell \leq -|J(\Theta_0)|/3 < 0$. Производная $\mathcal{V}(z_1, z_2, \tau)$ вдоль траекторий системы (9.45) удовлетворяет равенству

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{V}}{d\tau} &= \partial_\tau \mathcal{V} + \partial_{z_1}\mathcal{V}\left(-\tau^{-\frac{A}{B}}\partial_{z_2}\mathcal{H} + \tau^{-\frac{2A}{B}}\mathcal{G}_1\right) + \partial_{z_2}\mathcal{V}\left(\tau^{-\frac{A}{B}}\partial_{z_1}\mathcal{H} + \tau^{-\frac{2A}{B}}\left(\mathcal{J} + \mathcal{G}_2\right)\right) \\ &= \tau^{-\frac{2A}{B}}\left(\frac{\tilde{J}}{2}\left(\chi_{2,A,0} z_1^2 - \mathcal{P}'(\Theta_0) z_2^2\right) + \mathcal{O}(\tau^{-\kappa})\mathcal{O}(|\mathbf{z}|)\right) \end{aligned} \tag{9.50}$$

при $\tau \to \infty$ и $|\mathbf{z}| \to 0$. Из (9.47), (9.49) и (9.50) следует, что существуют $\tau_1 \geq \tau_0$, $\Delta_1 > 0$, $\mathcal{V}_- = \min\{\chi_{2,A,0}, |\mathcal{P}'(\Theta_0)|\}/4 > 0$, $\mathcal{V}_+ = \max\{\chi_{2,A,0}, |\mathcal{P}'(\Theta_0)|\} > 0$, $D_1 = |\tilde{J}|\mathcal{V}_-$ и $D_2 > 0$ такие, что

$$\mathcal{V}_-|\mathbf{z}|^2 \leq \mathcal{V}(z_1, z_2, \tau) \leq \mathcal{V}_+|\mathbf{z}|^2, \quad \frac{d\mathcal{V}}{d\tau} \leq \tau^{-\frac{2A}{B}}\left(-D_1|\mathbf{z}|^2 + \tau^{-\kappa} D_2 |\mathbf{z}|\right)$$

для всех $\tau \geq \tau_1$ и $|\mathbf{z}| \leq \Delta_1$. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существуют

$$\tau_\varepsilon = \max\left\{\left(\frac{4D_2}{D_1\varepsilon}\sqrt{\frac{\mathcal{V}_+}{\mathcal{V}_-}}\right)^{\frac{1}{\kappa}}, \tau_1\right\}, \quad \delta_\varepsilon = \frac{2D_2\tau_\varepsilon^{-\kappa}}{D_1}$$

такие, что $d\mathcal{V}/d\tau \le -\tau^{-2A/B}D_1|\mathbf{z}|^2/2$ для всех $\tau \ge \tau_\varepsilon$ и $\delta_\varepsilon \le |\mathbf{z}| \le \varepsilon$. Объединяя это с неравенствами

$$\sup_{|\mathbf{z}|\le\delta_\varepsilon} \mathcal{V}(z_1, z_2, \tau) \le \mathcal{V}_+\delta_\varepsilon^2 < \mathcal{V}_-\varepsilon^2 = \inf_{|\mathbf{z}|=\varepsilon} \mathcal{V}(z_1, z_2, \tau)$$

для всех $\tau \ge \tau_\varepsilon$, мы видим, что любое решение $(z_1(\tau), z_2(\tau))$ системы (9.45) с начальными данными $|\mathbf{z}(\tau_\varepsilon)| \le \delta_\varepsilon$ удовлетворяет $|\mathbf{z}(\tau)| < \varepsilon$ для всех $\tau > \tau_\varepsilon$. Из (9.44) и непрерывности решений задачи Коши по начальным данным следует, что существует решение $R_*(\tau)$, $\Theta_*(\tau)$ системы (9.21), определённое для всех $\tau \ge \tau_0$, такое, что $R_*(\tau) = \hat{R}(\tau) + \mathcal{O}(\tau^{-\ell})$ и $\Theta_*(\tau) = \hat{\Theta}(\tau) + \mathcal{O}(\tau^{-\ell})$ при $\tau \to \infty$.

Покажем, что решение $R_*(\tau)$, $\Psi_*(\tau)$ устойчиво в системе (9.21). Подставляя $R(\tau) = R_*(\tau) + \tau^{-\ell}z_1(\tau)$, $\Theta(\tau) = \Theta_*(\tau) + \tau^{-\ell}z_2(\tau)$ в (9.21), получаем (9.45), где функции $\mathcal{H}(z_1, z_2, \tau)$, $\mathcal{J}(z_1, z_2, \tau)$ и $\mathcal{G}_i(z_1, z_2, \tau)$ определены формулой (9.46) с $R_*(\tau)$, $\Psi_*(\tau)$ вместо $\hat{R}(\tau)$, $\hat{\Psi}(\tau)$. В этом случае $\mathcal{H}(0,0,\tau) \equiv \mathcal{J}(0,0,\tau) \equiv \mathcal{G}_i(0,0,\tau) \equiv 0$. Более того, справедливы оценки (9.47) и $\mathcal{G}_i = \mathcal{O}(|\mathbf{z}|)\mathcal{O}(\tau^{-A/B})$ при $\tau \to \infty$ и $|\mathbf{z}| \to 0$. Используя (9.49) в качестве кандидата на функцию Ляпунова, мы видим, что

$$\frac{d\mathcal{V}}{d\tau} = \tau^{-\frac{2A}{B}} \left(\frac{\tilde{J}}{2} \left(\chi_{2,A,0} z_1^2 - \mathcal{P}'(\Theta_0) z_2^2 \right) + \mathcal{O}(\tau^{-\kappa})\mathcal{O}(|\mathbf{z}|^2) \right)$$

при $\tau \to \infty$ и $|\mathbf{z}| \to 0$. Отсюда следует, что существуют $\tau_* \ge \tau_1$ и $0 < \Delta_* \le \Delta_1$ такие, что

$$\frac{d\mathcal{V}}{d\tau} \le -\tau^{-\frac{2A}{B}} \ell_* \mathcal{V} \tag{9.51}$$

для всех $\tau \ge \tau_*$ и $|\mathbf{z}| \le \Delta_*$ с $\ell_* = |\tilde{J}|\mathcal{V}_-/(2\mathcal{V}_+) > 0$. Следовательно, для всех $\varepsilon \in (0, \Delta_*)$ существует $\delta \in (0, \varepsilon)$ такое, что любое решение системы (9.45) с начальными данными $|\mathbf{z}(\tau_*)| \le \delta$ не может покинуть окрестность $\{|\mathbf{z}| \le \varepsilon\}$ при $\tau > \tau_*$. Более того, интегрируя (9.51) по τ, получаем

$$\mathcal{V}(z_1(\tau), z_2(\tau), \tau) \le \mathcal{V}(z_1(\tau_*), z_2(\tau_*), \tau_*) \exp\left(-\ell_* \int\limits_{\tau_*}^{\tau} \varsigma^{-\frac{2A}{B}}\, d\varsigma \right)$$

при $\tau \ge \tau_*$. Таким образом, решение $R_*(\tau)$, $\Psi_*(\tau)$ асимптотически устойчиво.

2. Рассмотрим теперь случай $\mathcal{P}'(\Theta_0) < 0$ и $J(\Theta_0) > 0$. Подставив

$$R(\tau) = \hat{R}(\tau) + z_1(\tau), \quad \Theta(\tau) = \hat{\Theta}(\tau) + z_2(\tau)$$

в (9.21), получаем

$$\begin{aligned}
\frac{dz_1}{d\tau} &= -\tau^{-\frac{A}{B}}\partial_{z_2}\tilde{\mathcal{H}}(z_1, z_2, \tau) + \tau^{-\frac{2A}{B}}\tilde{\mathcal{G}}_1(z_1, z_2, \tau),\\
\frac{dz_2}{d\tau} &= \tau^{-\frac{A}{B}}\partial_{z_1}\tilde{\mathcal{H}}(z_1, z_2, \tau) + \tau^{-\frac{2A}{B}}\tilde{\mathcal{J}}(z_1, z_2, \tau) + \tau^{-\frac{3A}{B}}\tilde{\mathcal{G}}_2(z_1, z_2, \tau),
\end{aligned} \tag{9.52}$$

где

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{H}} &\equiv \tau^{\frac{A}{B}}\int\limits_0^{z_1}\hat{\lambda}_2(\hat{R}(\tau) + \varsigma_1, \hat{\Theta}(\tau), \tau)\,d\varsigma_1 - \tau^{\frac{A}{B}}\int\limits_0^{z_2}\hat{\lambda}_1(\hat{R}(\tau) + z_1, \hat{\Theta}(\tau) + \varsigma_2, \tau)\,d\varsigma_2,\\
\tilde{\mathcal{J}} &\equiv \tau^{\frac{2A}{B}}\sum_{j=1}^{2}\int\limits_0^{z_2}\partial_{z_i}\hat{\lambda}_i(\hat{R}(\tau) + z_1, \hat{\Theta}(\tau) + \varsigma_2, \tau)\,d\varsigma_2,\\
\tilde{\mathcal{G}}_1 &\equiv \tau^{\frac{3A}{B}}\Big(\tilde{\lambda}_1(\hat{R}(\tau) + z_1, \hat{\Theta}(\tau) + z_2, \zeta(\tau), \tau) - \hat{R}'(\tau)\Big),\\
\tilde{\mathcal{G}}_2 &\equiv \tau^{\frac{3A}{B}}\Big(\tilde{\lambda}_2(\hat{R}(\tau) + z_1, \hat{\Theta}(\tau) + z_2, \zeta(\tau), \tau) - \hat{\Theta}'(\tau)\Big).
\end{aligned}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{H}}(z_1, z_2, \tau) =& \frac{1}{2}\left(\chi_{2,A,0}z_1^2 - \mathcal{P}'(\Theta_0)z_2^2\right) + \mathcal{O}(|\mathbf{z}|^3) + \mathcal{O}(\tau^{-\tilde{\kappa}})\mathcal{O}(|\mathbf{z}|^2),\\
\tilde{\mathcal{J}}(z_1, z_2, \tau) =& z_2\left(J(\Theta_0) + \mathcal{O}(|\mathbf{z}|^3) + \mathcal{O}(\tau^{-\tilde{\kappa}})\right),
\end{aligned} \tag{9.53}$$

и $\tilde{\mathcal{G}}_i(z_1, z_2, \tau) = \mathcal{O}(1)$ при $\tau \to \infty$ и $|\mathbf{z}| \to 0$ с $\tilde{\kappa} = \min\{A, \beta/h\}/B > 0$. Рассмотрим функцию

$$\mathcal{W}(z_1, z_2, \tau) \equiv \sqrt{\tilde{\mathcal{V}}(z_1, z_2, \tau)}, \tag{9.54}$$

где

$$\tilde{\mathcal{V}}(z_1, z_2, \tau) \equiv \tilde{\mathcal{H}}(z_1, z_2, \tau) + \tau^{-\frac{A}{B}}\frac{J(\Theta_0)z_1z_2}{2}.$$

Производная $\mathcal{W}(z_1, z_2, \tau)$ вдоль траекторий системы (9.52) определяется выражением

$$\frac{d\mathcal{W}}{d\tau} = \frac{\tau^{-\frac{2A}{B}}}{4\sqrt{\tilde{\mathcal{V}}}} \left(J(\Theta_0)\left(\chi_{2,A,0} z_1^2 - \mathcal{P}'(\Theta_0) z_2^2\right) + \mathcal{O}(|\mathbf{z}|^3) + \mathcal{O}(\tau^{-\tilde{\kappa}})\mathcal{O}(|\mathbf{z}|)\right) \qquad (9.55)$$

при $\tau \to \infty$ и $|\mathbf{z}| \to 0$. Из (9.53), (9.54) и (9.55) следует, что существуют $\tilde{\tau}_1 \geq \tau_0$, $\tilde{\Delta}_1 > 0$, $\mathcal{W}_\pm = \sqrt{\mathcal{V}_\pm}$, $\tilde{D}_1 = |J(\Theta_0)|\mathcal{W}_-/(2\mathcal{W}_+) > 0$ и $\tilde{D}_2 > 0$, такие, что

$$\mathcal{W}_-|\mathbf{z}| \leq \mathcal{W}(z_1, z_2, \tau) \leq \mathcal{W}_+|\mathbf{z}|, \quad \frac{d\mathcal{W}}{d\tau} \geq \tau^{-\frac{2A}{B}} \left(\tilde{D}_1 \mathcal{W} - \tau^{-\tilde{\kappa}} \tilde{D}_2\right)$$

для всех $\tau \geq \tilde{\tau}_1$ и $|\mathbf{z}| \leq \tilde{\Delta}_1$. Интегрируя последнее неравенство как $\tau \geq \tilde{\tau}_*$ с некоторым $\tau_* \geq \tilde{\tau}_1$, получаем

$$\begin{aligned} &\mathcal{W}(z_1(\tau), z_2(\tau), \tau) \geq \\ &e^{\tilde{D}(\tau)} \left(\mathcal{W}(z_1(\tilde{\tau}_*), z_2(\tilde{\tau}_*), \tilde{\tau}_*) e^{-\tilde{D}(\tilde{\tau}_*)} - \frac{\tilde{D}_2}{\tilde{D}_1} \int\limits_{\tilde{\tau}_*}^{\tau} \varsigma^{-\tilde{\kappa}} \tilde{D}'(\varsigma) e^{-\tilde{D}(\varsigma)}\, d\varsigma\right) \end{aligned}$$

для решений системы (9.52), лежащих в $\{(z_1, z_1) \in \mathbb{R}^2 : |\mathbf{z}| \leq \tilde{\Delta}_1\}$. Здесь $\tilde{D}'(\tau) \equiv D_1 \tau^{-2A/B}$. Следовательно, для любого $\tilde{\delta} \in (0, \tilde{\Delta}_1)$ существует $\tilde{\tau}_* = \max\{\tilde{\tau}_1, (2\tilde{D}_2/(\tilde{\delta}\mathcal{W}_-\tilde{D}_1))^{1/\tilde{\kappa}}\}$ такое, что $\mathcal{W}(z_1(\tau), z_2(\tau), \tau) \geq \tilde{\delta} e^{\tilde{D}(\tau) - \tilde{D}(\tilde{\tau}_*)}/2$ при $\tau \geq \tilde{\tau}_*$ для решений системы (9.52) с начальными данными $|\mathbf{z}(\tilde{\tau}_*)| = \tilde{\delta}$. Поскольку $\tilde{D}(\tau)$ строго возрастает, мы видим, что существует $\tilde{\tau}_e > \tilde{\tau}_*$ такое, что $|\mathbf{z}(\tilde{\tau}_e)| = \tilde{\Delta}_1$. Возвращаясь к переменным (R, Θ), получаем неустойчивость асимптотического режима, соответствующего $\hat{R}(\tau)$, $\hat{\Theta}(\tau)$.

Наконец, пусть $\mathcal{P}'(\Theta_0) > 0$. В этом случае точка равновесия $(0, 0)$ системы (9.48) является седлом. Рассмотрим $\mathcal{U}(z_1, z_2) \equiv z_1 z_2$ в качестве кандидата на функцию Четаева для системы (9.52). Легко проверить, что

$$\frac{d\mathcal{U}}{d\tau} = \tau^{-\frac{A}{B}} \left(\chi_{2,A,0} z_1^2 + \mathcal{P}'(\Theta_0) z_2^2 + \mathcal{O}(|\mathbf{z}|^3) + \mathcal{O}(\tau^{-\tilde{\kappa}})\mathcal{O}(|\mathbf{z}|)\right)$$

при $\tau \to \infty$ и $|\mathbf{z}| \to 0$. Следовательно, существуют $\hat{\tau}_1 > \tau_0$ и $\hat{D}_0 > 0$, такие, что

$$\frac{d\mathcal{U}}{d\tau} \geq \tau^{-\frac{A}{B}} \left(\mathcal{V}_-|\mathbf{z}|^2 - \tau^{-\tilde{\kappa}} \hat{D}_0 |\mathbf{z}|\right)$$

для всех $\tau \geq \hat{\tau}_1$ и $|\mathbf{z}| \leq \hat{\Delta}_1$. Таким образом, для любого $\hat{\delta} > 0$ существует $\hat{\tau}_* = \max\{\hat{\tau}_1, (2\hat{D}_0/(\hat{\delta}\mathcal{V}_-))^{1/\tilde{\kappa}}\}$, такое что $d\mathcal{U}/d\tau \geq \tau^{-A/B}\mathcal{V}_-\hat{\delta}^2/2 > 0$ для всех $\hat{\delta} \leq |\mathbf{z}| \leq \hat{\Delta}_1$ и $\tau \geq \hat{\tau}_*$. Интегрируя последнее неравенство, получаем

$$\mathcal{U}(z_1(\tau), z_2(\tau)) \geq \mathcal{U}(z_1(\tilde{\tau}_*), z_2(\tilde{\tau}_*)) + \frac{\hat{\delta}^2 B\mathcal{V}_-}{2(B-A)}\left(\tau^{1-\frac{A}{B}} - \hat{\tau}_*^{1-\frac{A}{B}}\right) \tag{9.56}$$

для решений системы (9.52), лежащих в $\mathfrak{D} := \{(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2 : \hat{\delta} \leq |\mathbf{z}| \leq \hat{\Delta}_1\}$. Рассмотрим решение системы (9.52) с начальными данными $\mathcal{U}(z_1(\tilde{\tau}_*), z_2(\tilde{\tau}_*)) = \tilde{\delta}^2 > 0$. Тогда неравенство (9.56) показывает, что решение не может вечно оставаться в $\{(z_1, z_2) \in \mathfrak{D} : z_1 z_2 > 0\}$, поскольку $\mathcal{U}(z_1, z_2)$ ограничено на $\mathfrak{D}$. Так как $\mathcal{U}(z_1, z_2) \leq |\mathbf{z}|^2/2$ для всех $(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$, то существует $\hat{\tau}_e > \hat{\tau}_*$ такое, что $|\mathbf{z}(\hat{\tau}_e)| = \hat{\Delta}_1$. $\square$

Доказательство леммы 23. Из (9.27) следует, что существуют положительные параметры D_1, D_2, D_3 и $\tau_1 \geq \tilde{\tau}_0$ такие, что

$$\left|\frac{dR}{d\tau}\right| \geq \tau^{-\frac{A}{B}} D_1, \quad \left|\frac{d\Theta}{d\tau}\right| \geq \tau^{-\frac{A}{B}}\left(D_2|R| - D_3\right)$$

для всех $|R| \leq R_0$, $\Theta \in \mathbb{R}$ и $\tau \geq \tau_1$. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}
&|R(\tau) - R(\tau_1)| \geq \tilde{D}_1\left(\tau^{\frac{B-A}{B}} - \tau_1^{\frac{B-A}{B}}\right),\\
&|\Theta(\tau) - \Theta(\tau_1)| \geq \tilde{D}_2\left(\tau^{\frac{2(B-A)}{B}} - \tau_1^{\frac{2(B-A)}{B}}\right) - \tilde{D}_3\left(\tau^{\frac{B-A}{B}} - \tau_1^{\frac{B-A}{B}}\right)
\end{aligned}$$

при $\tau \geq \tau_1$, где $\tilde{D}_1 = BD_1/(B-A) > 0$, $\tilde{D}_2 = B\tilde{D}_1 D_2/(2(B-A)) > 0$ и $\tilde{D}_3 = B(D_3 + |R(\tau_1)| - \tilde{D}_1 D_2 \tau_1^{1-A/B})/(B-A)$. Таким образом, решения системы (9.21) растут неограниченно. Следовательно, существует $\tau_e > \tau_1$ такое, что $|R(\tau_e)| + |\Theta(\tau_e)| > \Delta$. $\square$

9.7.3. Стохастическая устойчивость резонанса

Доказательство теоремы 61. Подставим

$$R(\tau) = R_*(\tau) + z_1(\tau), \quad \Theta(\tau) = \Theta_*(\tau) + z_1(\tau)$$

в (9.19), тогда получим систему стохастических дифференциальных уравнений на переменные z_1, z_2

$$\begin{aligned} dz_1 =& - \tau^{-\frac{A}{B}}\partial_{z_2}\mathcal{H}(z_1,z_2,\tau)\,d\tau + \tau^{-\frac{C-A}{B}}\mu\mathcal{E}_1(z_1,z_2,\tau)\,d\tilde{w}(\tau), \\ dz_2 =& \Big(\tau^{-\frac{A}{B}}\partial_{z_1}\mathcal{H}(z_1,z_2,\tau) + \tau^{-\frac{2A}{B}}\mathcal{J}(z_1,z_2,\tau)\Big)\,d\tau + \tau^{-\frac{C}{B}}\mu\mathcal{E}_2(z_1,z_2,\tau)\,d\tilde{w}(\tau), \end{aligned} \tag{9.57}$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{H} \equiv & \int\limits_0^{z_1}\Big(\Lambda_2(R_*(\tau)+\varsigma_1,\Theta_*(\tau),\zeta(\tau),\tau) - \Lambda_2(R_*(\tau),\Theta_*(\tau),\zeta(\tau),\tau)\Big)\,d\varsigma_1 \\ & - \int\limits_0^{z_2}\Big(\Lambda_1(R_*(\tau)+z_1,\Theta_*(\tau)+\varsigma_2,\zeta(\tau),\tau) - \Lambda_1(R_*(\tau),\Theta_*(\tau),\zeta(\tau),\tau)\Big)\,d\varsigma_2, \\ \mathcal{J} \equiv & \sum_{j=1}^{2}\int\limits_0^{z_2}\partial_{z_i}\Lambda_i(R_*(\tau)+z_1,\Theta_*(\tau)+\varsigma_2,\zeta(\tau),\tau)\,d\varsigma_2, \\ \mathcal{E}_i \equiv & \,\eta_i(R_*(\tau)+z_1,\Theta_*(\tau)+z_2,\zeta(\tau),\tau). \end{aligned}$$

Заметим, что $\mathcal{H}(z_1,z_2,\tau)\equiv 0$, $\partial_{z_i}\mathcal{H}(z_1,z_2,\tau)\equiv 0$ и $\mathcal{J}(0,0,\tau)\equiv 0$. Из (9.22) и (9.23) следует, что

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(z_1,z_2,\tau) =& \frac{1}{2}\left(\chi_{2,A,0}z_1^2 - \mathcal{P}'(\Theta_0)z_2^2\right) + \mathcal{O}(|\mathbf{z}|^3) + \mathcal{O}(\tau^{-\kappa})\mathcal{O}(|\mathbf{z}|^2), \\ \mathcal{J}(z_1,z_2,\tau) =& z_2\left(J(\Theta_0)+\mathcal{O}(\tau^{-\kappa})\right), \\ \mathcal{E}_i(z_1,z_2,\tau) =& \mathcal{O}(1) \end{aligned}$$

при $\tau\to\infty$ и $|\mathbf{z}|\to 0$, где $\kappa = \min\{A,\beta/h\}/B > 0$. При $\mu = 0$ система (9.57) имеет точку равновесия в начале координат. Докажем устойчивость этого решения относительно белого шума с помощью построения стохастической функции Ляпунова [192, 199].

Генератор процесса, определяемого (9.57), имеет вид $\mathfrak{L}\equiv\mathfrak{L}_0+\mu^2\mathfrak{L}_1$, где

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_0 :=& \partial_\tau - \tau^{-\frac{A}{B}}\partial_{z_2}\mathcal{H}\partial_{z_1} + \left(\tau^{-\frac{A}{B}}\partial_{z_1}\mathcal{H} + \tau^{-\frac{2A}{B}}\mathcal{J}\right)\partial_{z_2}, \\ \mathfrak{L}_1 :=& \frac{1}{2}\tau^{-\frac{2(C-A)}{B}}\left(\mathcal{E}_1^2\partial_{z_1}^2 + 2\tau^{-\frac{A}{B}}\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2\partial_{z_1}\partial_{z_2} + \tau^{-\frac{2A}{B}}\mathcal{E}_2^2\partial_{z_2}^2\right). \end{aligned}$$

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\mathcal{V}_0(z_1, z_2, \tau) \equiv \mathcal{H}(z_1, z_2, \tau) + \tau^{-\frac{A}{B}} \frac{J(\Theta_0) z_1 z_2}{2}.$$

Легко проверить, что

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{L}_0 \mathcal{V}_0 = \tau^{-\frac{2A}{B}} \left(\frac{J(\Theta_0)}{2} \left(\chi_{2,A,0} z_1^2 - \mathcal{P}'(\Theta_0) z_2^2 \right) + \mathcal{O}(|\mathbf{z}|^3) + \mathcal{O}(\tau^{-\kappa}) \mathcal{O}(|\mathbf{z}|^2) \right), \\
&\mathfrak{L}_1 \mathcal{V}_0 = \mathcal{O}(\tau^{-\frac{2(C-A)}{B}})
\end{aligned}$$

при $\tau \to \infty$ и $|\mathbf{z}| \to 0$. Следовательно, существуют $\tau_1 > \tau_0$, $r_* > 0$, $\mathcal{V}_+ = \max\{\chi_{2,A,0}, |\mathcal{P}'(\Theta_0)|\} > 0$, $\mathcal{V}_- = \min\{\chi_{2,A,0}, |\mathcal{P}'(\Theta_0)|\} > 0$, $D_0 = |J| \mathcal{V}_- > 0$ и $D_1 > 0$, такие, что

$$\begin{aligned}
&\mathcal{V}_- |\mathbf{z}|^2 \leq \mathcal{V}_0(z_1, z_2, \tau) \leq \mathcal{V}_+ |\mathbf{z}|^2, \\
&\mathfrak{L} \mathcal{V}_0(z_1, z_2, \tau) \leq -\tau^{-\frac{2A}{B}} D_0 |\mathbf{z}|^2 + \mu^2 D_1 \tau^{-\frac{2(C-A)}{B}}
\end{aligned} \tag{9.58}$$

для всех $\tau \geq \tau_1$ и $|\mathbf{z}| \leq r_*$. Зафиксируем параметры $\varepsilon_1 \in (0, r_*)$, $\varepsilon_2 \in (0,1)$ и $\tau_* \geq \tau_1$. Рассмотрим стохастическую функцию Ляпунова для системы (9.57) в виде

$$\mathcal{V}(z_1, z_2, \tau) \equiv \mathcal{V}_0(z_1, z_2, \tau) + \mu^2 \mathcal{V}_1(\tau), \tag{9.59}$$

где

$$\mathcal{V}_1(\tau) \equiv \begin{cases} D_1 \tau_*^{-\frac{2(C-A)}{B}} (\mathcal{T} + \tau_* - \tau), & \text{если} \quad C < A + B/2, \\ D_1 \log\left(\dfrac{\mathcal{T} + \tau_*}{\tau} \right), & \text{если} \quad C = A + B/2, \\ D_1 \displaystyle\int\limits_{\tau}^{\tau_* + \mathcal{T}} \varsigma^{-\frac{2(C-A)}{B}} \, d\varsigma, & \text{если} \quad C > A + B/2 \end{cases}$$

с некоторым $\mathcal{T} > 0$. Легко проверить, что

$$\mathcal{V}(z_1, z_2, \tau) \geq \mathcal{V}_0(z_1, z_2, \tau) \geq 0, \quad \mathfrak{L} \mathcal{V}(z_1, z_2, \tau) \leq -\tau^{-\frac{2A}{B}} D_0 |\mathbf{z}|^2 \leq 0 \tag{9.60}$$

для всех $(\mathbf{z}, \tau) \in \mathfrak{D}(r_*, \tau_*, \mathcal{T}) := \{(\mathbf{z}, \tau) \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{z}| \leq r_*, 0 \leq \tau - \tau_* \leq \mathcal{T}\}$. Пусть $\mathbf{z}(t)$ — решение системы (1) с начальными данными $|\mathbf{z}(\tau_*)| \leq \delta_1$ и $\mathfrak{T}_\varepsilon$ — момент первого выхода $(\mathbf{z}(\tau), \tau)$ из области $\mathfrak{D}(\varepsilon, \tau_*, \mathcal{T})$ при некотором $\delta_1 \in (0, \varepsilon_1)$.

Определим функцию $\mathfrak{T}_{\varepsilon_1,\tau} \equiv \min\{\mathfrak{T}_{\varepsilon_1}, \tau\}$. Тогда $\mathbf{z}(\mathfrak{T}_{\varepsilon_1,\tau})$ — это процесс, остановленный в момент первого выхода из области $\mathfrak{D}(\varepsilon_1, \tau_*, \mathcal{T})$. Из (9.60) следует, что $\mathcal{V}(z_1(\mathfrak{T}_{\varepsilon_1,\tau}), z_2(\mathfrak{T}_{\varepsilon_1,\tau}), \mathfrak{T}_{\varepsilon_1,\tau})$ является неотрицательным супермартингалом (см., например, [192, §5.2]). В этом случае справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\sup_{0\leq\tau-\tau_*\leq\mathcal{T}} |\mathbf{z}(\tau)| \geq \varepsilon_1\right) &= \mathbb{P}\left(\sup_{\tau\geq\tau_*} |\mathbf{z}(\mathfrak{T}_{\varepsilon_1,\tau})| \geq \varepsilon_1\right) \\ &\leq \mathbb{P}\left(\sup_{\tau\geq\tau_*} \mathcal{V}(z_1(\mathfrak{T}_{\varepsilon_1,\tau}), z_2(\mathfrak{T}_{\varepsilon_1,\tau}), \mathfrak{T}_{\varepsilon_1,\tau}) \geq \mathcal{V}_-\varepsilon_1^2\right) \\ &\leq \frac{\mathcal{V}(z_1(\tau_*), z_2(\tau_*), \tau_*)}{\mathcal{V}_-\varepsilon_1^2}.\end{aligned}$$

Последняя оценка следует из неравенства Дуба для супермартингалов. Из (9.58) и (9.59) следует, что $\mathcal{V}(z_1(\tau_*), z_2(\tau_*), \tau_*) \leq \mathcal{V}_+\delta_1^2 + \mu^{2(1-\epsilon)}\delta_2^{2\epsilon}\mathcal{V}_1(\tau_*)$ с некоторым $\epsilon \in (0,1)$. Таким образом, выбирая

$$\delta_1 = \varepsilon_1\sqrt{\frac{\varepsilon_2\mathcal{V}_-}{2\mathcal{V}_+}},$$

$$\delta_2 = \begin{cases} \left(\delta_1^2\mathcal{V}_+D_1^{-1}\right)^{\frac{1}{2\epsilon}} \tau_*^{-\frac{B-2(C-A)}{2\epsilon B}}, & \text{если} \quad C \leq A + B/2, \\ \left(\delta_1^2\mathcal{V}_+D_1^{-1}\right)^{\frac{1}{2}} \tau_*^{\frac{2(C-A)-B}{2B}}, & \text{если} \quad C > A + B/2, \end{cases}$$

$$\mathcal{T} = \begin{cases} \tau_*\left(\mu^{-2(1-\epsilon)} - 1\right), & \text{если} \quad C < A + B/2, \\ \tau_*\left(\exp\mu^{-2(1-\epsilon)} - 1\right), & \text{если} \quad C = A + B/2, \\ \infty, & \text{если} \quad C > A + B/2, \end{cases}$$

мы получаем

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0\leq\tau-\tau_*\leq\mathcal{T}} |\mathbf{z}(\tau)| \geq \varepsilon_1\right) \leq \varepsilon_2.$$

Возвращаясь к переменным $\rho(t)$ и $\varphi(t)$, мы получаем оценку (9.28) с параметрами $t_* = (B\tau_*)^{1/B}$ и $\tilde{\mathcal{T}} = (B\mathcal{T} + t_*^B)^{1/B} - t_*$. □

9.8. Выводы

Таким образом, исследовано совместное влияние затухающего чирпированного возбуждения и белого шума на нелинейные системы вдали от равновесия.

В частности, изучена возможность таких затухающих возмущений значительно увеличивать амплитуду нелинейных неизохронных колебаний в присутствии шума. Используя метод усреднения, была выведена модельная укороченная система (9.21), описывающая возмущённую динамику (9.1). Показано, что модельная система имеет как минимум два режима: фазовый захват и фазовый дрейф. В режиме фазового захвата возникают резонансные решения с неограниченно растущей амплитудой. Описаны условия, гарантирующие сохранение таких решений в полной стохастической системе на асимптотически больших временных интервалах. Показано, что эти условия существенно зависят от свойств траекторий невозмущённой системы при больших значениях энергии и не зависят от их поведения вблизи положений равновесия. Более того, получены долговременные асимптотики растущих резонансных решений в режиме фазовой синхронизации.

Результаты главы опубликованы в [270].

Заключение

В работе рассмотрены различные классы детерминированных и стохастических возмущений нелинейных гамильтоновых систем на плоскости. Исследовались качественные и асимптотические свойства решений при условии степенного затухания интенсивности возмущений. В частности,

- исследованы бифуркации, связанные с изменением свойств устойчивости равновесия и с появлением притягивающих и отталкивающих режимов, и их зависимость от параметров и структуры возмущений;
- продемонстрирована неэффективность метода линеаризации для исследования устойчивости решений асимптотически автономных систем;
- показана возможность как сохранения, так и разрушения автономной бифуркации центр-седло под действием возмущений с затухающей интенсивностью;
- описаны режимы фазового захвата и фазового дрейфа для решений в системах с затухающими осциллирующими возмущениями с почти постоянной резонансной частотой и исследована их устойчивость;
- обнаружены эффекты типа нелинейный резонанс в асимптотически автономных системах;
- доказана возможность неограниченного роста энергии системы под действием затухающих возмущений с чирпированной частотой;
- выявлены условия устойчивости по вероятности динамических систем при постоянно действующих стохастических возмущениях типа белого шума на асимптотически больших временных интервалах;
- изучено влияние белого шума на устойчивость и бифуркации в асимптотически гамильтоновых системах;
- показана возможность устойчивого фазового захвата в системах с затухающими осциллирующими возмущениями в присутствии белого шума;
- описаны условия захвата в резонанс в нелинейных асимптотически автономных системах с чирпированной накачкой при постоянно действующих стохасти-

ческих возмущениях.

Предложенный подход основан на упрощении возмущённых неавтономных детерминированных и стохастических систем с помощь усредняющих замен зависимых переменных в форме преобразований, близких к тождественным, с затухающими добавками. Такой подход позволяет вывести модельные уравнения, решения которых описывают возможные долговременные асимптотические режимы в исходных уравнениях. При выводе и исследовании модельных систем, а также при обосновании соответствующих режимов в исходных уравнениях использовался метод функций Ляпунова. Было показано, что в некоторых задачах в качестве основы такой функции подходит соответствующее усредняющее преобразование.

Остаётся открытым вопрос об устойчивости и бифуркационных явлениях в многомерных системах с затухающими возмущениями. В частности, определённый практический интерес представляют задачи о динамике связанных осцилляторов с затухающими возмущениями и коэффициентами связи. Отметим, что предлагаемый подход напрямую не переносится на многомерный случай из-за малых знаменателей, которые обычно появляются при построении усредняющих преобразований. Эта тема требует особого внимания и будет обсуждаться в последующих работах.

Список литературы

1. *Александров, А. Ю.* Об устойчивости положений равновесия нелинейных неавтономных механических систем / А. Ю. Александров // Прикладная математика и механика. — 2007. — Т. 71, № 3. — С. 361–376.
2. *Александров, А. Ю.* Стабилизация вращательного движения твёрдого тела в условиях убывающей диссипации / А. Ю. Александров, А. А. Тихонов // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. — 2017. — Т. 4, № 4. — С. 631–641.
3. *Анапольский, Л. Ю.* Способы построения функции Ляпунова / Л. Ю. Анапольский, В. Д. Иртегов, В. М. Матросов // Итоги науки и техники. Общая механика. Т. 2. — М. : ВИНИТИ, 1975. — С. 53–112.
4. *Андреев, А. С.* Об асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения неавтономной системы / А. С. Андреев // Прикладная математика и механика. — 1984. — Т. 48, № 2. — С. 225–232.
5. *Андреев, А. С.* О стабилизации движений механических систем с переменными массами / А. С. Андреев, Р. Б. Зайнетдинов // Прикладная математика и механика. — 2009. — Т. 73, № 1. — С. 3–12.
6. *Андронов, А. А.* Теория колебаний / А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин. — М. : Физматлит, 1959.
7. *Арнольд, В. И.* О поведении адиабатического инварианта при медленном периодическом изменении функции Гамильтона / В. И. Арнольд // Докл. АН СССР. — 1962. — Т. 142, № 4. — С. 758–761.
8. *Арнольд, В. И.* Доказательство теоремы А. Н. Колмогорова о сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона / В. И. Арнольд // Успехи математ. наук. — 1963. — Т. 18, № 5. — С. 13–40.
9. *Арнольд, В. И.* Математические аспекты классической и небесной механики / В. И. Арнольд, В. В. Козлов, А. И. Нейштадт. — М. : Эдиториал

УРСС, 2002.

10. *Барбашин, Е. А.* Функции Ляпунова / Е. А. Барбашин. — М. : Наука, 1970.
11. *Баутин, Н. Н.* Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости / Н. Н. Баутин. — М. : Наука, 1984.
12. *Бебутов, М. В.* О динамических системах в пространстве непрерывных функций / М. В. Бебутов // Доклады Академии наук СССР. — 1940. — Т. 27, № 9. — С. 904–906.
13. *Белкина, Т. А.* О стохастической оптимальности для линейного регулятора с затухающими возмущениями / Т. А. Белкина, Е. С. Паламарчук // Автомат. и телемех. — 2013. — № 4. — С. 110–128.
14. *Беллман, Р.* Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений / Р. Беллман. — М. : Изд-во иностр. лит., 1954.
15. *Боголюбов, Н. Н.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. — М. : Наука, 1974.
16. *Болотин, С. В.* Сепаратрисные отображения в быстро-медленных гамильтоновых системах / С. В. Болотин // Труды МИАН. — 2023. — Т. 322. — С. 38–57.
17. *Брюно, А. Д.* О формальной устойчивости систем Гамильтона / А. Д. Брюно // Мат. заметки. — 1967. — Т. 1, № 3. — С. 325–330.
18. *Брюно, А. Д.* Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях / А. Д. Брюно. — М. : Физматлит, 1998.
19. *Брюно, А. Д.* Эллиптические асимптотики решений уравнений Пенлеве / А. Д. Брюно, И. В. Горючкина // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. – 2009. — № 006.
20. *Брюно, А. Д.* Нормальная форма системы гамильтона с периодическим возмущением / А. Д. Брюно // Ж. выч. мат. и мат. физики. — 2020. — Т. 60, № 1. — С. 39-56.
21. *Бурд, В. Ш.* Асимптотическое интегрирование систем линейных дифференциальных уравнений с колебательно убывающими коэффициентами /

В. Ш. Бурд, В. А. Каракулин // Матем. заметки. — 1998. — Т. 64, № 5. — С. 658–666.

22. *Валеев, К. Г.* Построение функций Ляпунова / К. Г. Валеев, Г. С. Финин. — Киев : Наук. думка, 1981.
23. *Валеев, Н. Ф.* Построение асимптотик решений дифференциальных уравнений Штурма-Лиувилля в классах осциллирующих коэффициентов / Н. Ф. Валеев, Э. А. Назирова, Я. Т. Султанаев // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. — 2023. — № 5. — С. 61–65.
24. *Васильева, А. Б.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений / А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов. — М. : Наука, 1973.
25. *Вентцель, А. Д.* Курс теории случайных процессов / А. Д. Вентцель. — М. : Наука, 1996.
26. *Воротников, В. И.* Устойчивость и управление по части координат фазового вектора динамических систем: теория, методы и приложения / В. И. Воротников, В. В. Румянцев. — М. : Научный мир, 2001.
27. *Вркоч, И.* Интегральная устойчивость / И. Вркоч // Чехословацкий математический журнал. — 1959. — Т. 9, № 1. — С. 71–129.
28. *Гонцов, Р. Р.* Сходимость обобщённых степенных рядов, удовлетворяющих функциональным уравнениям / Р. Р. Гонцов, И. В. Горючкина // Успехи мат. наук. — 2025. — Т. 80, № 3. — С. 3–66.
29. *Гринес, В. З.* Неавтономные векторные поля на сфере S^3: простая динамика и дикое вложение сепаратрис / В. З. Гринес, Л. М. Лерман // Теор. мат. физ. — 2022. — Т. 212, № 1. — С. 15–32.
30. *Гринес, В. З.* Неавтономная динамика: классификация, инварианты, реализация / В. З. Гринес, Л. М. Лерман // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2022. Т. 68, № 4. — С. 596–620.
31. *Заславский, Г. М.* Введение в нелинейную физику. От маятника до турбулентности и хаоса / Г. М. Заславский, Р. З. Сагдеев. — М. : Наука, 1988.

32. *Зигель, К. Л.* Лекции по небесной механике / К. Л. Зигель, Ю. К. Мозер. — М., Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, 2001.
33. *Ильин, Ю. А.* Об асимптотическом возмущении нелинейного центра / Ю. А. Ильин // Дифференц. уравнения. — 1997. — Т. 33, № 5. — С. 632–637.
34. *Итс, А. Р.* Транценденты Пенлеве. Метод задачи Римана / А. Р. Итс, А. А. Капаев, В. Ю. Новокшенов, А. С. Фокас. — М., Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, 2005.
35. *Кабанов, Ю. М.* Сингулярные возмущения стохастических дифференциальных уравнений / Ю. М. Кабанов, С. М. Пергаменщиков // Матем. сб. — 1990. — Т. 181, № 9. — С. 1170–1182.
36. *Калякин, Л. А.* Асимптотический анализ моделей авторезонанса / Л. А. Калякин // Успехи мат. наук. — 2008. — Т. 63, вып. 5. — С. 3–72.
37. *Калякин, Л. А.* Асимптотика на бесконечности решений уравнений, близких к гамильтоновым / Л. А. Калякин // Совр. матем. и ее приложения. — 2008. — Т. 53. — С. 138–160.
38. *Калякин, Л. А.* Метод усреднения в задачах об асимптотике на бесконечности / Л. А. Калякин // Уфимский мат. журнал. — 2009. — Т. 1, № 2. — С. 29–52.
39. *Калякин, Л. А.* Функции Ляпунова в теоремах обоснования асимптотики / Л. А. Калякин // Матем. заметки. —2015. — Т. 98, № 5. — С. 695–709.
40. *Калякин, Л. А.* Асимптотика решения дифференциального уравнения при динамической бифуркации типа “седло-узел” / Л. А. Калякин // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2019. — Т. 59, № 9. — С. 1516–1531.
41. *Калякин, Л. А.* Асимптотика решения системы уравнений Ландау-Лифшица при динамической бифуркации седло-узел / Л. А. Калякин // Алгебра и анализ. — 2021. — Т. 33, № 2. — С. 56–81.
42. Качественная теория динамических систем второго порядка / А. А. Андронов, Е. А. Леонтович, И. И. Гордон, А. Г. Майер. — М. : Наука, 1966.
43. *Климов, К. Ю.* Реономные свойства сплавов с памятью формы и их влия-

ние на устойчивость : специальность 01.02.04 “Механика деформируемого твёрдого тела” : диссертация на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук / Климов Кирилл Юрьевич. — Москва, 2017. — 150 с.

44. *Кляцкин, В. И.* Стохастические уравнения глазами физика (Основные положения, точные результаты и асимптотические приближения) / В. И. Кляцкин. — М. : Физматлит, 2001.
45. *Коддингтон, А.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений / А. Коддингтон, Н. Левинсон. — М. : Изд-во иностр. лит., 1958.
46. *Козлов, В. В.* Асимптотики решений сильно нелинейных систем дифференциальных уравнений / В. В. Козлов, С. Д. Фурта. — М. : Изд-во МГУ, 1996. — 244 с.
47. *Колмогоров, А. Н.* О сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона / А. Н. Колмогоров // Докл. АН СССР. — 1954. — Т. 98, № 4. — С. 527–530.
48. *Коняев, Ю. А.* Исследование устойчивости неавтономных систем дифференциальных уравнений квазиполиномиального типа / Ю. А. Коняев, Ю. Г. Мартыненко // Дифференц. уравнения. — 1998. — Т. 34, № 10. — С. 1427–1429.
49. *Коняев, Ю. А.* Асимптотический анализ решений дифференциальных уравнений с полиномиально периодическими коэффициентами / Ю. А. Коняев, Ю. Г. Мартыненко // Изв. вузов. Матем. — 2006. — № 1. — С. 78–81.
50. *Коростелев, А. П.* Критерий сходимости непрерывных процедур стохастической аппроксимации // Теория вероятн. и ее примен. — 1977. — Т. 22, № 3. — С. 595–602.
51. *Коростелев, А. П.* Затухающие возмущения динамических систем и условия сходимости рекуррентных стохастических процедур / А. П. Коростелев // Теория вероятн. и ее примен. — 1979. — Т. 24, № 2. — С. 298–316.
52. *Красовский, Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения /

Н. Н. Красовский. — М. : Физматгиз, 1959.

53. *Крыжевич, С. Г.* О структурной устойчивости неавтономных систем / С. Г. Крыжевич, В. А. Плисс // Дифференц. уравнения. — 2003. — Т. 39, № 10. — С. 1325–1333.

54. *Кузнецов, А. Н.* О существовании входящих в особую точку решений автономной системы, обладающей формальным решением / А. Н. Кузнецов // Функц. анализ и его прилож. — 1989. — Т. 23, вып. 4. — С. 63–74.

55. *Лерман, Л. М.* О классификации грубых неавтономных систем второго порядка с конечным числом ячеек / Л. М. Лерман, Л. П. Шильников // Докл. АН СССР. — 1973. — Т. 209, № 3. — С. 544–547.

56. *Ляпунов, А. М.* Общая задача об устойчивости движения / А. М. Ляпунов. — М.-Л. : Гостехиздат, 1950.

57. *Малкин, И. Г.* Теория устойчивости движения / И. Г. Малкин. — М.–Л. : ГИТТЛ, 1952.

58. *Маркеев, А. П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике / А. П. Маркеев. — М. : Наука, 1978.

59. *Маркеев, А. П.* О кратном параметрическом резонансе в системах Гамильтона / А. П. Маркеев // Прикладная математика и механика. — 2006. — Т. 70, № 2. — С. 200–220.

60. *Мартынюк, А. А.* Устойчивость движения: метод предельных уравнений / А. А. Мартынюк, Д. Като, А. А. Шестаков. — Киев : Наукова думка, 1990.

61. *Матросов, В. М.* Развитие идей А.М.Ляпунова за 100 лет: 1892—1992 / В. М. Матросов, А. И. Маликов // Изв. вузов. Математика. — 1993. — № 4. — С. 3–47.

62. Методы качественной теории в нелинейной динамике. Часть 1 / Л. П. Шильников, А. Л. Шильников, Д. В. Тураев, Л. Чуа. — Москва, Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2004.

63. Методы качественной теории в нелинейной динамике. Часть 2 /

Л. П. Шильников, А. Л. Шильников, Д. В. Тураев, Л. Чуа. — Москва, Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, Институт компьютерных исследований, 2009.

64. *Милованович, Е. В.* Элементы современной теории устойчивости. Введение в асимптотический анализ / Е. В. Милованович, А. В. Рябова, В. Ю. Тертычный-Даури. — СПб. : Университет ИТМО, 2017.

65. *Мищенко, Е. Ф.* Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания / Е. Ф. Мищенко, Н. Х. Розов. — М. : Наука, 1975.

66. *Мозер, Ю. К.* О разложении условно-периодических движений в сходящиеся степенные ряды / Ю. К. Мозер // Успехи математ. наук. — 1969. — Т. 24, № 2. — С. 165–211.

67. *Наймарк, М. А.* Линейные дифференциальные операторы / М. А. Наймарк. — М. : Наука, 1969.

68. *Найфэ, А. Х.* Методы возмущений / А. Х. Найфэ. — М. : Мир, 1976.

69. *Нгуен, Д. А.* Случайные колебания в системе Ван-дер-Поля, подверженной периодическим и случайным воздействиям / Д. А. Нгуен // Докл. АН СССР. — 1986. — Т. 289, № 2. — С. 278–281.

70. *Невельсон, М. Б.* Стохастическая аппроксимация и рекуррентное оценивание / М. Б. Невельсон, Р. З. Хасьминский. — М. : Наука, 1972.

71. *Нейштадт, А. И.* Оценки в теореме Колмогорова о сохранении условно-периодических движений / А. И. Нейштадт // Прикл. матем. и мех. — 1981. — Т. 45, № 6. — С. 1016–1025.

72. *Нейштадт, А. И.* Прохождение через сепаратрису в резонансной задаче с медленно изменяющимся параметром / А. И. Нейштадт // Прикл. мат. и мех. — 1975. — Т. 39, № 4. — С. 621–632.

73. *Нейштадт, А. И.* О затягивании потери устойчивости при динамических бифуркациях. I / А. И. Нейштадт // Дифференц. уравнения. — 1987. — Т. 23, № 12. — С. 2060–2067.

74. *Нейштадт, А. И.* Динамические эффекты, связанные с потерей устойчивости положений равновесия и периодических траекторий / А. И. Нейштадт, Д. В. Трещев // Успехи мат. наук. — 2021. — Т. 76, № 5. — С. 147–194.

75. *Нестеров, П. Н.* Построение асимптотики решений одномерного уравнения Шрёдингера с быстро осциллирующим потенциалом / П. Н. Нестеров // Матем. заметки. — 2006. — Т. 80, № 2. — С. 240–250.

76. *Нестеров, П. Н.* Метод усреднения в задаче асимптотического интегрирования систем с колебательно убывающими коэффициентами / П. Н. Нестеров // Дифференц. уравнения. — 2007. — Т. 43, № 6. — С. 731–742.

77. *Нестеров, П. Н.* Некоторые задачи теории асимптотического интегрирования дифференциальных и функционально-дифференциальных уравнений : специальность 01.01.02 "Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление" : диссертация на соискание учёной степени доктора физико-математических наук / Нестеров Павел Николаевич. — Ярославль, 2021. — 310 с.

78. *Нехорошев, Н. Н.* Экспоненциальная оценка времени устойчивости гамильтоновых систем, близких к интегрируемым / Н. Н. Нехорошев // Успехи мат. наук. — 1977. — Т. 32, № 6. — С. 5–66.

79. *Остром, К. Ю.* Введение в стохастическую теорию управления / К. Ю. Острем. — М. : Мир, 1973.

80. *Паламарчук, Е. С.* О верхних функциях для аномальных диффузий, моделируемых процессом Орнштейна-Уленбека с переменными коэффициентами / Е. С. Паламарчук // Теория вероятн. и ее примен. — 2019. — Т. 64, № 2. — С. 258–282.

81. *Паламарчук, Е. С.* Об оптимальной суперэкспоненциальной стабилизации решений линейных стохастических дифференциальных уравнений / Е. С. Паламарчук // Автомат. и телемех. — 2021. — № 3. — С. 98–111.

82. *Плисс, В. А.* Равномерно ограниченные решения линейных систем диф-

ференциальных уравнений / В. А. Плисс // Дифференц. уравнения. — 1977. — Т. 13, № 5. — С. 883–891.

83. *Плисс, В. А.* Об устойчивости произвольной системы по отношению к малым в смысле C^1 возмущениям / В. А. Плисс // Дифференц. уравнения. — 1980. — Т. 16, № 10. — С. 1891–1892.

84. *Полехин, И. Ю.* О гамильтоновых системах с малыми неавтономными возмущениями / И. Ю. Полехин // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. — 2012. — № 1. — С. 47–53.

85. *Понтрягин, Л. С.* Асимптотическое поведение решений систем дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных / Л. С. Понтрягин // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1957. — Т. 21, № 5.— С. 605–626.

86. *Пуанкаре, А.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями / А. Пуанкаре. — М.–Л. : ГИТТЛ, 1947.

87. *Пустыльников, Л. Д.* Устойчивые и осциллирующие движения в неавтономных динамических системах. Обобщение теоремы К. Л. Зигеля на неавтономный случай / Л. Д. Пустыльников // Матем. сб. — 1974. — Т. 94(136), № 3(7). — С. 407–429.

88. *Румянцев, В. В.* Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных / В. В. Румянцев, А. С. Озиранер. — М. : Наука, 1987.

89. *Руш, Н.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости / Н. Руш, П. Абетс, М. Лалуа. — М. : Мир, 1980.

90. *Стратонович, Р. Л.* Избранные вопросы теории флюктуаций в радиотехнике / Р. Л. Стратонович. — М. : Сов. радио, 1961.

91. *Сулейманов, Б. И.* Влияние малой дисперсии на самофокусировку в пространственно одномерном случае / Б. И. Сулейманов // Письма в ЖЭТФ. — 2017. — Т. 106, № 6. — С. 375–380.

92. *Султанов, О. А.* Устойчивость авторезонанса в диссипативных системах / О. А. Султанов // Уфимский математический журнал. — 2015. — Т. 7,

№ 1. — С. 59–71.

93. *Султанов, О. А.* Стохастическая устойчивость динамической системы, возмущенной белым шумом / О. А. Султанов // Матем. заметки. — 2017. — Т. 101, № 1. — С. 130–139.
94. *Султанов, О. А.* Стохастическая устойчивость модели авторезонанса с бифуркацией типа центр-седло / О. А. Султанов // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. — 2024. — Т. 32, № 2. — С. 147–159.
95. Теория бифуркаций / В. И. Арнольд, В. С. Афраймович, Ю. С. Ильяшенко, Л. П. Шильников // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. — 1986. — Т. 5. — С. 5–218.
96. *Тихонов, А. Н.* Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных / А. Н. Тихонов // Матем. сб. — 1952. — Т. 73, № 3. — С. 575–586.
97. *Трещев, Д. В.* Введение в теорию возмущений гамильтоновых систем / Д. В. Трещев. — М. : ФАЗИС, 1998.
98. *Федорюк, М. В.* Асимптотические методы в теории одномерных сингулярных дифференциальных операторов / М. В. Федорюк // Тр. ММО. —1966. — Т. 15. С. 296–345.
99. *Федорюк, М. В.* Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений / М. В. Федорюк. — М. : Наука, 1977.
100. *Хапаев, М. М.* Усреднение в теории устойчивости: Исследование резонансных многочастотных систем / М. М. Хапаев. — М. : Наука, 1986.
101. *Хапаев, М. М.* Асимптотические методы и устойчивость в теории нелинейных колебаний / М. М. Хапаев. — М. : Высш.шк, 1988. — 184 с.
102. *Хасьминский, Р. З.* Об устойчивости при постоянно действующих случайных возмущениях / Р. З. Хасьминский // Теория передачи информации. Опознание образов. — М. : Наука, 1965. — С. 74–87.
103. *Холостова, О. В.* О периодических движениях неавтономной гамильто-

новой системы в одном случае кратного параметрического резонанса / О. В. Холостова // Нелинейная динам. — 2017. — Т. 13, № 4. — С. 477–504.

104. *Хорстхемке, В.* Индуцированные шумом переходы: Теория и применение в физике, химии и биологии / В. Хорстхемке, Р. Лефевр. — М. : Мир, 1987.

105. *Чандрасекар, С.* Стохастические проблемы в физике и астрономии / С. Чандрасекар. — М. : Гос. изд-во иностр. лит., 1947.

106. *Четаев, Н. Г.* Устойчивость движения / Н. Г. Четаев. — М. : Наука, 1965.

107. *Шульгин, А. М.* К задаче о стабилизации положения равновесия твёрдого тела с переменными моментами инерции в его движении относительно центра масс / А. М. Шульгин, А. С. Андреев // Дифференц. уравнения. — 1979. — Т. 15, № 5. — С. 951–954.

108. *Юмагулов, М. Г.* Методы теории возмущений в задаче о параметрическом резонансе для линейных периодических гамильтоновых систем / М. Г. Юмагулов, Л. С. Ибрагимова, А. С. Белова // Уфимск. матем. журн. — 2021. — Т. 13, № 3. — С. 178–195.

109. *Adler, R.* A study of locking phenomena in oscillators / R. Adler // Proc. I.R.E. — 1946. — Vol. 34. — P. 351–357.

110. *Akhiezer, N. I.* Elements of the theory of elliptic functions / N. I. Akhiezer. — Providence, R.I. : Amer. Math. Soc., 1990.

111. *Aleksandrov, A. Y.* Attitude stabilization of a rigid body under the action of a vanishing control torque / A. Y. Aleksandrov, A. A. Tikhonov // Nonlinear Dyn. — 2018. — Vol. 93. — P. 285–293.

112. *Appleby, J. A. D.* Polynomial asymptotic stability of damped stochastic differential equations / J. A. D. Appleby, D. Mackey // Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ., Proc. 7'th Coll. Qualitative Theory of Diff. Equ. — 2004. — № 2. — P. 1–33.

113. *Appleby, J. A. D.* Pathwise non-exponential decay rates of solutions of scalar nonlinear stochastic differential equations / J. A. D. Appleby, A. Rodkina,

H. Schurz // Discrete Contin. Dyn. Syst., Ser. B. — 2006. — Vol. 6, № 4. — P. 667–696.

114. *Appleby, J. A. D.* Stabilization and destabilization of nonlinear differential equations by noise / J. A. D. Appleby, X. Mao, A. Rodkina // IEEE Trans. Autom. Control. — 2008. — Vol. 53. — P. 683–691.

115. *Appleby, J. A. D.* On asymptotic stability and instability with respect to a fading stochastic perturbation / J. A. D. Appleby, J. P. Gleeson, A. Rodkina // Appl. Anal. — 2009. — Vol. 88. — P. 579–603.

116. *Appleby, J. A. D.* Characterisation of the asymptotic behaviour of scalar linear differential equations with respect to a fading stochastic perturbation / J. A. D. Appleby, J. Cheng, A. Rodkina // Discrete Contin. Dyn. Syst. — 2011. Vol. Suppl. — P. 79–90.

117. *Appleby, J. A. D.* Classification of convergence rates of solutions of perturbed ordinary differential equations with regularly varying nonlinearity / J. A. D. Appleby, D. D. Patterson // Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ., Proc. 10'th Coll. Qualitative Theory of Diff. Equ. — 2016. — № 3. — P. 1–38.

118. *Arnold, L.* Stochastic differential equations: theory and applications / L. Arnold. — New York : Wiley, 1974.

119. *Arnold, L.* Stochastic bifurcation: instructive examples in dimension one / L. Arnold, P. Boxler // Diffusion processes and related problems in analysis, Vol. II, Progress in Probability, vol. 27. — Boston : Birkhäuser, 1992. P. 241–255.

120. *Arnold, L.* Toward an understanding of stochastic Hopf bifurcation / L. Arnold, N. S. Namachchivaya, K. R. Schenk-Hoppé // Int. J. Bifurcat. Chaos. — 1996. — Vol. 06, № 11. — P. 1947–1975.

121. *Arnold, L.* Random dynamical systems / L. Arnold. — New York : Springer, 2003.

122. *Aronson, D. G.* Amplitude response of coupled oscillators / D. G. Aronson, D. G. Ermentrout, N. Kopell // Physica D. — 1990. — Vol. 41. — P. 403–449.

123. *Atkinson, F. V.* The asymptotic solution of second-order differential equations / Atkinson F. V. // Ann. Mat. Pura Appl. — 1954. — Vol. 37. — P. 347–378.

124. *Bashkirtseva, I.* Analysis of noise-induced transitions for Hopf system with additive and multiplicative random disturbances / I. Bashkirtseva, L. Ryashko, H. Schurz // Chaos, Solitons & Fractals. — 2009. — Vol. 39. — P. 72–82.

125. *Bashkirtseva, I.* Sensitivity analysis of stochastic attractors and noise-induced transitions for population model with Allee effect / I. Bashkirtseva, L. Ryashko // Chaos. — 2011. — Vol. 21. — P. 047514.

126. *Bashkirtseva, I.* Stochastic bifurcations caused by multiplicative noise in systems with hard excitement of auto-oscillations / I. Bashkirtseva, T. Ryazanova, L. Ryashko // Phys. Rev. E. — 2015. — Vol. 92. — P. 042908.

127. *Baxendale, P. H.* Lyapunov exponents for small random perturbations of Hamiltonian systems / P. H. Baxendale, L. Goukasian // Ann. Probab. — 2002. — Vol. 30. — P. 101–134.

128. *Baxendale, P. H.* A stochastic Hopf bifurcation / P. H. Baxendale // Probab. Th. Rel. Fields. — 1994. — Vol. 99. — P. 581–616.

129. *Ben-Artzi, M.* Spectral and scattering theory for the adiabatic oscillator and related potentials / M. Ben-Artzi, A. Devinatz // J. Math. Phys. — 1979. — Vol. 20. — P. 594–607.

130. *Berglund, N.* Noise-induced phenomena in slow-fast dynamical systems / N. Berglund, B. Gentz. — London : Springer, 2006.

131. *Borisov, D.* Asymptotic analysis of mean exit time for dynamical systems with a single well potential / D. Borisov, O. Sultanov // J. Differ. Equ. — 2020. — Vol. 269, № 8. — P. 78–116.

132. *Borodin, A. N.* Handbook of Brownian motion — facts and formulae / A.N. Borodin, P. Salminen. — Basel, Boston, Berlin : Birkhauser Verlag, 2002.

133. *Boutroux, P.* Recherches sur les transcendantes de M. Painlevé et l'étude asymptotique des équations différentielles du second ordre / P. Boutroux // Ann. Sci. École Norm. Supér. — 1913. — Vol. 30. — P. 255–375.

134. *Boutroux, P.* Recherches sur les transcendantes de M. Painlevé et l'étude asymptotique des équations différentielles du second ordre (suite) / P. Boutroux // Ann. Sci. École Norm. Supér. — 1914. — Vol. 31. — P. 99–159.

135. *Brauer, F.* Nonlinear differential equations with forcing terms / F. Brauer // Proc. Amer. Math. Soc. — 1964. — Vol. 15, № 5. — P. 758–765.

136. *Bruno, A. D.* Boutroux asymptotic forms of solutions to Painlevé equations and power geometry / A. D. Bruno, I. V. Goryuchkina // Doklady Mathematics. — 2008. — Vol. 78, № 2. — P. 681–685.

137. *Buldygin, V. V.* On the φ-asymptotic behaviour of solutions of stochastic differential equations / V. V. Buldygin, O. I. Klesov, J. G. Steinebach, O. A. Tymoshenko // Theory Stoch. Process. — 2008. — Vol. 14. — P. 11–29.

138. *Burd, V.* Parametric resonance in adiabatic oscillators / V. Burd, P. Nesterov // Results. Math. — 2010. — Vol. 58. — P. 1–15.

139. *Burd, V.* Method of averaging for differential equations on an infinite interval: Theory and applications // V. Burd. — Boca Raton : Chapman & Hall/CRC, 2007.

140. *Callaway, M.* The dichotomy spectrum for random dynamical systems and pitchfork bifurcations with additive noise / M. Callaway, T. S. Doan, J. S. W. Lamb, M. Rasmussen // Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. —- 2017. — Vol. 53. — P. 1548–1574.

141. *Castillo-Chavez, C.* Asymptotically autonomous epidemic models / C. Castillo-Chavez, H. R. Thieme // Mathematical population dynamics: analysis of heterogeneity, vol. 1, Theory of epidemics. — Winnipeg : Wuerz Publishing Ltd, 1994. — P. 33–50.

142. *Canadell, M.* KAM tori and whiskered invariant tori for non-autonomous systems / M. Canadell, R. de la Llave // Physica D: Nonlinear Phenomena. — 2015. — Vol. 310. — P. 104–113.

143. *Cassell, J. S.* The asymptotic integration of some oscillatory differential equations / J. S. Cassell // Quart. J. Math. Oxford Ser. (2). — 1982. — Vol.

33, № 3. — P. 281–296.

144. *Chakraborty, T.* The transition from phase locking to drift in a system of two weakly coupled van der Pol oscillators / T. Chakraborty, R. Rand // Int. J. Nonlin. Mech. — 1988. — Vol. 23. — P. 369–376.

145. *Chan, T.* An ‘excursion’ approach to an annealing problem / T. Chan, D. Williams // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. — 1989. — Vol. 105, № 1. — P. 169–176.

146. *Chan, T.* On multi-dimensional annealing problems / T. Chan // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. — 1989. — Vol. 105, № 1. — P. 177–184.

147. *Cheban, D. N.* Global attractors of non-autonomous dynamical and control systems / D. N. Cheban. — Singapore : World Scientific, 2014.

148. *Cheng, J.* Classification of the asymptotic behaviour of solutions of stochastic differential equations with state independent noise : PhD thesis / Jian Cheng. — Dublin, 2012.

149. *Chepyzhov, V. V.* Attractors of non-autonomous dynamical systems and their dimensions / V. V. Chepyzhov, M. I. Vishik // J. Math. Pures Appl. — 1994. — Vol. 73. — P. 279–333.

150. *Cherubini, A. M.* A random dynamical systems perspective on stochastic resonance / A. M. Cherubini, J. S. W. Lamb, M. Rasmussen, Yu. Sato // Nonlinearity. — 2017. — Vol. 30. — P. 2835–2853.

151. *Chiang, T.-S.* Diffusion for global optimization in R^n / T.-S. Chiang, C.-R. Hwang, S.-J. Sheu // SIAM J. Control Optim. —1987. — Vol. 25, № 3. — P. 737–753.

152. *Chirikov, B. V.* A universal instability of many-dimensional oscillator systems / B. V. Chirikov // Physics Reports. — 1979. — Vol. 52. — P. 263–379.

153. *Chow, S. N.* Method of bifurcation theory / S.N. Chow, J.K. Hale. — New York : Springer, 1982.

154. *Conley, C. C.* Isolated invariant sets and the Morse index / C. C. Conley. — Providence, R.I. : Amer. Math. Soc., 1978.

155. *Crauel, H.* Additive noise destroys a pitchfork bifurcation / H. Crauel, F. Flandoli // J. Dyn. Differ. Equ. — 1998. — Vol. 10, № 2. — P. 259–274.

156. *Delabays, R.* The Kuramoto model on oriented and signed graphs / R. Delabays, P. Jacquod, and F. Dörfler // SIAM J. Appl. Dyn. Syst. — 2019. — Vol. 18, № 1. — P. 458–480.

157. *Denisov, S.* On the singular spectrum of Schrödinger operators with decaying potential / S. Denisov, S. Kupin // Trans. Amer. Math. Soc. — 2005. — Vol. 357. — P. 1525–1544.

158. *DeVille, R. E. L.* Stability of a stochastic two-dimensional non-Hamiltonian system / R. E. L. DeVille, N. S. Namachchivaya, Z. Rapti // SIAM J. Appl. Math. — 2011. — Vol. 71. — P. 1458–1475.

159. *Devinatz, A.* The asymptotic nature of the solutions of certain linear systems of differential equations/ A. Devinatz // Pacific. J. Math. — 1965. — Vol. 15. — P. 75–83.

160. *Devinatz, A.* The deficiency index of a certain class of ordinary self-adjoint differential operators / A. Devinatz // Adv. Math. — 1972. — Vol. 8, № 3. — P. 434–473.

161. *Doan, T. S.* Hopf bifurcation with additive noise / T. S. Doan, M. Engel, J. S W Lamb, M. Rasmussen // Nonlinearity. — 2018. — Vol. 31. — P. 4567.

162. *Dollard, J. D.* Existence of the Møller wave operators for $V(r) = \frac{\gamma \sin(\mu r^\alpha)}{r^\beta}$ / J. D. Dollard, C. N. Friedman // Annals of Physics. — 1978. — Vol. 111. — P. 251–266.

163. *Durran, R.* Planetesimal diffusions / R. Durran, A. Truman // Stochastic mechanics and stochastic processes. Lecture notes in mathematics, vol. 1325. — Berlin, Heidelberg : Springer, 1988.

164. *Eastham, M. S. P.* The asymptotic solution of linear differential systems / M. S. P. Eastham. — Oxford : Clarendon Press, 1989.

165. *Fedoryuk, M. V.* Asymptotic methods in analysis / M. V. Fedoryuk // Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Analysis I. — Berlin, Heidelberg :

Springer, 1989. — P. 83–191.

166. *Feng, C.* Pathwise random periodic solutions of stochastic differential equations / C. Feng, H. Zhao, B. Zhou // J. Differ. Equ. — 2011. — Vol. 251, № 1. — P. 119–149.

167. *Feng, C.* Anticipating random periodic solutions—I. SDEs with multiplicative linear noise / C. Feng, Y. Wu, H. Zhao // J. Funct. Anal. — 2016. — Vol. 271, № 2. — P. 365–417.

168. *Fortunati, A.* Persistence of Diophantine flows for quadratic nearly integrable Hamiltonians under slowly decaying aperiodic time dependence / A. Fortunati, S. Wiggins // Regul. Chaotic Dyn. — 2014. — Vol. 19, № 5. — P. 586–600.

169. *Freidlin, M. I.* Random perturbations of dynamical systems / M. I. Freidlin, A. D. Wentzell. — New York : Springer-Verlag, 1998.

170. *Friedland, L.* Autoresonance in nonlinear systems / L. Friedland // Scholarpedia. — 2009. — Vol. 4, № 1. — P. 5473.

171. *Gaiur, I. Yu.* Asymptotic solutions of a fourth-order analogue for the Painlevé equations / Yu. Gaiur, N. A. Kudryashov // J. Phys.: Conf. Ser. — 2017. — Vol. 788. — P. 012011.

172. *Gammaitoni, L.* Stochastic resonance / L. Gammaitoni, P. Hänggi, P. Jung, F. Marchesoni // Rev. Mod. Phys. — 1998. — Vol. 70, № 1. — P. 223–287.

173. Global and blow-up solutions for compressible Euler equations with time-dependent damping / S. Chen, H. Li, J. Li, M. Mei, K. Zhang // J. Differ. Equ. — 2020. — Vol. 268, № 9. — P. 5035–5077.

174. *Goldobin, D. S.* Synchronization and desynchronozation of self-sustained oscillators by common noise / D.S. Goldobin, A. Pikovsky // Phys. Rev. E. — 2005. — Vol. 71. — P. 045201(R).

175. *Grimmer, R. C.* Asymptotically almost periodic solutions of differential equations / R. C. Grimmer // SIAM J. Appl. Math. — 1969. — Vol. 17, № 1. — P. 109–115.

176. *Guckenheimer, J.* Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations

of vector fields / J. Guckenheimer, P. Holmes. — New York: Springer, 1983.

177. *Haberman, R.* Slowly varying jump and transition phenomena associated with algebraic bifurcation problems / R. Haberman // SIAM J. Appl. Math. — 1979. — Vol. 37, № 1. — P. 69–106.

178. *Hanßmann, H.* Local and semi-local bifurcations in Hamiltonian systems - Results and examples / H. Hanßmann. — Berlin : Springer, 2007.

179. *Harris, W. A. Jr.* On the asymptotic integration of linear differential systems / W. A. Harris Jr., D. A. Lutz // J. Math. Anal. Appl. — 1974. — Vol. 48, № 1. — P. 1–16.

180. *Harris, W. A. Jr.* Asymptotic integration of adiabatic oscillators / W. A. Harris Jr., D. A. Lutz // J. Math. Anal. Appl. — 1975. — Vol. 51, № 1. — P. 76–93.

181. *Hartman, P.* Asymptotic integrations of linear differential equations / P. Hartman, A. Wintner // Amer. J. Math. — 1955. — Vol. 77, № 1. — P. 45–86.

182. *Hatvani, L.* On the asymptotic stability for nonlinear oscillators with time-dependent damping / L. Hatvani // Qual. Theory Dyn. Syst. — 2019. — Vol. 18. — P. 441–459.

183. *Herrmann, S.* Stochastic resonance: a mathematical approach in the small noise limit / S. Herrmann, P. Imkeller, I. Pavlyukevich, D. Peithmann. — Providence, R.I. : Amer. Math. Soc., 2014.

184. *Holroyd, J.* On the perturbed second Painlevé equation / J. Holroyd, N. Joshi // J. Phys. A: Math. Theor. — 2023. — Vol. 56. — P. 014002.

185. *Hou, F.* On the global existence and blowup of smooth solutions to the multi-dimensional compressible Euler equations with time-depending damping / F. Hou, H. Yin // Nonlinearity. — 2017. — Vol. 30, № 6. — P. 2485–2517.

186. Jacobi elliptic functions: A review of nonlinear oscillatory application problems / I. Kovacic, L. Cveticanin, M. Zukovic, Z. Rakaric // J. Sound and Vibr. — 2016. — Vol. 380. — P. 1–36.

187. *Kalyakin, L.* Justification of an asymptotic expansion at infinity / L. Kalyakin

// J. Nonlin. Math. Phys. — 2008. — Vol. 15. — P. 220–226.

188. *Kats, I. Ya.* Stability and stabilization of nonlinear systems with random structures / I. Ya. Kats, A. A. Martynyuk. — London : Taylor and Francis, 2002.
189. *Keller, G.* On the asymptotic behaviour of solutions of stochastic differential equations / G. Keller, G. Kersting, U. Rösler // Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw Gebiete. — 1984. — Vol. 68. — P. 163–189.
190. *Khalil, H. K.* Nonlinear systems / H. K. Khalil. — Upper Saddle River, N.J. : Prentice Hall, 2002.
191. *Khas'minskii, R. Z.* The behavior of a conservative system under the action of slight friction and slight random noise / R.Z. Khas'minskii // J. Appl. Math. Mech. — 1964. — Vol. 28. — P. 1126–1130.
192. *Khasminskii, R.* Stochastic stability of differential equations / R. Khasminskii. — Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 2012.
193. *Kiselev, A.* Absolutely continuous spectrum of one-dimensional Schrödinger operators and Jacobi matrices with slowly decreasing potentials / A. Kiselev // Commun. Math. Phys. — 1996. — Vol. 179. — P. 377–400.
194. *Kiselev, O. M.* Hard loss of stability in Painlevé-2 equation / O. M. Kiselev // J. Nonlinear Math. Phys. — 2001. — Vol. 8, № 1. — P. 65–95.
195. *Kiselev, O. M.* Conditions for phase locking and dephasing of autoresonant pumping / O. M. Kiselev // Rus. J. Nonlin. Dyn. — 2019. — Vol. 15. — P. 381–394.
196. *Klesov, O. I.* Unbounded solutions of stochastic differential equations with time-dependent coefficients / O. I. Klesov, O. A. Tymoshenko // Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp. — 2013. — Vol. 41. — P. 25–35.
197. *Kloeden, P. E.* Bifurcations and continuous transitions of attractors in autonomous and nonautonomous systems / P. E. Kloeden, S. Siegmund // Int. J. Bifurcat. Chaos. — 2005. — Vol. 15. — P. 743–762.
198. *Kuehn, C.* Multiple time scale dynamics / C. Kuehn. — Cham : Springer, 2015.

199. *Kushner, H. J.* Stochastic stability and control / H. J. Kushner. — New York, London : Academic Press, 1967.

200. *Langa, J. A.* Stability, instability and bifurcation phenomena in nonautonomous differential equations / J. A. Langa, J. C. Robinson, A. Suárez // Nonlinearity. — 2002. — Vol. 15. — P. 887–903.

201. *LaSalle, J. P.* Stability by Lyapunov's direct method with applications / J. P. LaSalle, S. Lefschetz. — New York : Academic Press, 1961.

202. *Lebovitz, N. R.* Exchange of stabilities in autonomous systems / N. R. Lebovitz, R. J. Schaar // Stud. Appl. Math. — 1975. — Vol. 54, № 3. — P. 229–260.

203. *Leoni, G.* Asymptotic stability for perturbed Hamiltonian systems / G. Leoni // Arch. Rational Mech. Anal. — 1994. — Vol. 128. — P. 105–125.

204. *Lerman, L. M.* On stability at the Hamiltonian Hopf bifurcation / L. M. Lerman, A. P. Markova // Regul. Chaotic Dyn. — 2009. — Vol. 14, № 1. — P. 148–162.

205. *Lerman, L. M.* Nonautonomous gradient-like vector fields on the circle: classification, structural stability and autonomization / L. M. Lerman, E. V. Gubina // Discrete Contin. Dyn. Syst., Ser. S. — 2020. — Vol. 13, № 4. — P. 1341–1367.

206. *Levinson, N.* The growth of solutions of a differential equation, / N. Levinson // Duke Math. J. — 1941. — Vol. 8. — P. 1–10.

207. *Levinson, N.* The asymptotic behavior of a system of linear differential equations / N. Levinson // Amer. J. Math. — 1946. — Vol. 68, № 1. — P. 1–6.

208. *Levinson, N.* The asymptotic nature of solutions of linear systems of differential equations / N. Levinson // Duke Math. J. — 1948. — Vol. 15, № 1. — P. 111–126.

209. *Li, L. K. B.* Phase trapping and slipping in a forced hydrodynamically self-excited jet / L. K. B. Li, M. P. Juniper // J. Fluid Mech. — 2013. — Vol. 735. — P. R5.

210. *Liu, K.* Large time decay behavior of dynamical equations with random perturbation features / K. Liu, X. Mao // Stoch. Anal. Appl. — 2001. —

Vol. 19, № 2. — P. 295–327.

211. *Lobry, C.* Dynamic bifurcations / C. Lobry // Lecture Notes in Mathematics, vol 1493. — Berlin, Heidelberg : Springer, 1991. — P. 1–13.

212. *Lukic, M.* A class of Schrödinger operators with decaying oscillatory potentials / M. Lukic // Commun. Math. Phys. — 2014. — Vol. 326. — P. 441–458.

213. *Luo, C.* Stability and bifurcation of a class of stochastic closed orbit equations / C. Luo, S. Guo // Int. J. Bifurcat. Chaos. — 2015. — Vol. 25, № 11. — P. 1550148.

214. *Mao, X.* Almost sure polynomial stability for a class of stochastic differential equations / X. Mao // Quart. J. Math. Oxford (2). — 1992. — Vol. 43, № 3. — P. 339–348.

215. *Mao, X.* Exponential stability of stochastic differential equations / X. Mao. — New York : Dekker, 1994.

216. *Maree, G. J. M.* Slow passage through a pitchfork bifurcation / G. J. M. Maree // SIAM J. Appl. Math. — 1996. — Vol. 56, № 3. — P. 889–918.

217. *Markus, L.* Asymptotically autonomous differential systems / L. Markus // Contributions to the theory of nonlinear oscillations III, Ann. Math. Stud., vol. 36. — Princeton : Princeton University Press, 1956. — P. 17–29.

218. *Matkowsky, B. J.* The exit problem for randomly perturbed dynamical systems / B. J. Matkowsky, Z. Schuss // SIAM J. Appl. Math. — 1977. — Vol. 33, № 2. — P. 365–382.

219. *Meyer, K. R.* Stability of a Hamiltonian system in a limiting case / K. R. Meyer, J. F. Palacián, P. Yanguas // Regul. Chaotic Dyn. — 2012. — Vol. 17, № 1. — P. 24–35.

220. *Miller, R. K.* Almost periodic differential equations as dynamical systems with applications to the existence of A. P. solutions / R. K. Miller // J. Differ. Equ.— 1955. — Vol. 1, № 3. — P. 337–345.

221. *Mischaikow, K.* Asymptotically autonomous semiflows: chain recurrence and Lyapunov functions / K. Mischaikow, H. Smith, H. R. Thieme // Trans. Amer.

Math. Soc. — 1995. — Vol. 347, № 5. — P. 1669–1685.

222. *Namachchivaya, N. S.* Stochastic bifurcation / N. S. Namachchivaya // Appl. Math. Comput. — 1990. — Vol. 39. — P. 37s–95s.

223. *Nectoux, B.* Sharp estimate of the mean exit time of a bounded domain in the zero white noise limit / B. Nectoux // Markov Process. Relat. Fields. — 2020. — Vol. 26, № 3. — P. 403–422.

224. *Neiman, A.* Synchronizationlike phenomena in coupled stochastic bistable systems / A. Neiman // Phys.Rev. E. — 1994. — Vol. 49, № 4. — P. 3485–3488.

225. *Neishtadt, A. I.* The separation of motions in systems with rapidly rotating phase / A. I. Neishtadt // J. Appl. Math. Mech. — 1984. — Vol. 48. — P. 133–139.

226. *Ni, W.-M.* On Matukuma's equation and related topics / W.-M. Ni, S. Yotsutani // Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. — 1986. — Vol. 62, № 7. — P. 260–263.

227. *Øksendal, B.* Stochastic differential equations. An introduction with applications / B. Øksendal. — New York, Heidelberg, Berlin : Springer-Verlag, 1998.

228. *Olver, F. W. J.* Asymptotics and special functions / F. W. J. Olver. — New York : Academic Press, 1974.

229. *Pan, X.* Blow up of solutions to 1-d Euler equations with time-dependent damping / X. Pan // J. Math. Anal. Appl. — 2016. — Vol. 442, № 2. — P. 435–445.

230. *Perron, O.* Über stabilität und asymptotisches verhalten der integrale von diffe rentialgleichungssystemen / O. Perron // Mathernatische Zeitnchrift. — 1929. — Vol. 29. — P. 129–160.

231. *Perryman, C. G.* How fast is too fast? Rate-induced bifurcations in multiple time-scale systems : PhD thesis / Clare G. Perryman. — Exeter, 2015.

232. *Pikovsky, A.* Coherence resonance in a noisy driven excitable system / A. Pikovsky, J. Kurths // Phys. Rev. Lett. — 1997. — Vol. 78, № 5. —

P. 775–778.

233. *Pinto, M.* Asymptotic integration of second-order linear differential equations / M. Pinto // J. Math. Anal. Appl. — 1985. — Vol. 111. — P. 388–406.

234. *Pötzsche, C.* Nonautonomous bifurcation of bounded solutions I: A Lyapunov-Schmidt approach / C. Pötzsche // Discrete Contin. Dyn. Syst., Ser. B. — 2010. — Vol. 14. — P. 739–776.

235. *Rasmussen, M.* Bifurcations of asymptotically autonomous differential equations / M. Rasmussen // Set-Valued Anal. — 2008. — Vol. 16. — P. 821–849.

236. *Pucci, P.* Precise damping conditions for global asymptotic stability for nonlinear second order systems / P. Pucci, J. Serrin // Acta Math. — 1993. — Vol. 170. — P. 275–307.

237. *Pucci, P.* Asymptotic stability for ordinary differential systems with time-dependent restoring potentials / P. Pucci, J. Serrin // Arch. Rational Mech. Anal. — 1995. — Vol. 132. — P. 207–232.

238. *Samoilenko, A.* Krylov-Bogolyubov averaging of asymptotically autonomous differential equations / A. Samoilenko, M. Pinto, S. Trofimchuk // Proc. Amer. Math. Soc. — 2005. — Vol. 133, № 1. — P. 145–154.

239. *Scarcella, D.* Asymptotically quasiperiodic solutions for time-dependent Hamiltonians / D. Scarcella // Nonlinearity. — 2024. — Vol. 37, № 6. — P. 065005.

240. *Scarcella, D.* Weakly asymptotically quasiperiodic solutions for time-dependent Hamiltonians with a view to celestial mechanics / D. Scarcella // J. Differ. Equ. — 2025. — Vol. 431. — P. 113192.

241. *Schuss, Z.* Theory and applications of stochastic processes / Z. Schuss. — New York : Springer, 2010.

242. *Skorokhod, A. V.* Asymptotic methods in the theory of stochastic differential equations / A. V. Skorokhod. — Providence, R.I. : Amer. Math. Soc., 1989.

243. *Sell, G. R.* Nonautonomous differential equations and dynamical systems. I.

The basic theory / G. R. Sell // Trans. Amer. Math. Soc. — 1967. — Vol. 127. — P. 241–262.

244. *Sell, G. R.* Nonautonomous differential equations and dynamical systems. II. Limiting equations / G. R. Sell // Trans. Amer. Math. Soc. — 1967. — Vol. 127. — P. 263–283.

245. *Simon, B.* On the positive eigenvalues of one-body Schrödinger operators / B. Simon // Comm. Appl. Math. — 1969. — Vol. 22. — P. 531–538.

246. *Sultanov, O. A.* Random perturbations of autoresonance in oscillating systems with small dissipation / O. A. Sultanov // Journal of Mathematical Sciences. — 2016. — Vol. 219, № 2. — P. 267–274.

247. *Sultanov, O.* Random perturbations of parametric autoresonance / O. Sultanov // Nonlinear Dynamics. — 2017. — Vol. 89, № 4. — P. 2785–2793.

248. *Sultanov, O.* White noise perturbation of locally stable dynamical systems / O. Sultanov // Stochastics and Dynamics. — 2017. — Vol. 17, № 1. — P. 1750002.

249. *Sultanov, O.* Stability and asymptotic analysis of the autoresonant capture in oscillating systems with combined excitation / O. Sultanov // SIAM Journal of Applied Mathematics. — 2018. — Vol. 78, № 6. — P. 3103–3118.

250. *Sultanov, O.* Lyapunov functions and asymptotic analysis of a complex analogue of the second Painlevé equation / O. Sultanov // Journal of Physics: Conference Series. — 2019. — Vol. 1205. — P. 012056.

251. *Sultanov, O. A.* Stochastic perturbations of stable dynamical systems: trajectory-wise approach / O. A. Sultanov // Journal of Mathematical Sciences. — 2019. — Vol. 241, № 3. — P. 340–353.

252. *Sultanov, O.* Capture into parametric autoresonance in the presence of noise / O. Sultanov // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. — 2019. — Vol. 75. — P. 14–21.

253. *Sultanov, O. A.* Bifurcations of autoresonant modes in oscillating systems with combined excitation / O. A. Sultanov // Studies in Applied Mathematics. —

2020. — Vol. 144, № 2. — P. 213–241.

254. *Sultanov, O. A.* Autoresonance in oscillating systems with combined excitation and weak dissipation / O. A. Sultanov // Physica D: Nonlinear Phenomena. — 2021. — Vol. 417. — P. 132835.

255. *Sultanov, O. A.* On the almost sure stability of dynamical systems with respect to white noise / O. A. Sultanov // Journal of Mathematical Sciences. — 2021. — Vol. 252, № 2. — P. 242–246.

256. *Sultanov, O. A.* Decaying oscillatory perturbations of Hamiltonian systems in the plane / O. A. Sultanov // Journal of Mathematical Sciences. — 2021. — Vol. 257, № 5. — P. 705–719.

257. *Sultanov, O. A.* Lyapunov functions and asymptotics at infinity of solutions of equations that are close to Hamiltonian equations / O. A. Sultanov // Journal of Mathematical Sciences. — 2021. — Vol. 258, № 1. — P. 97–109.

258. *Sultanov, O. A.* Bifurcations in asymptotically autonomous Hamiltonian systems under oscillatory perturbations / O. A. Sultanov // Discrete and Continuous Dynamical Systems. — 2021. — Vol. 41, № 12. — P. 5943–5978.

259. *Sultanov, O. A.* Damped perturbations of systems with center-saddle bifurcation / O. A. Sultanov // International Journal of Bifurcation and Chaos. — 2021. — Vol. 31, № 9. — P. 2150137.

260. *Sultanov, O. A.* Bifurcations in asymptotically autonomous Hamiltonian systems subject to multiplicative noise / O. A. Sultanov // International Journal of Bifurcation and Chaos. — 2022. — Vol. 32, № 11. — P. 2250164.

261. *Sultanov, O. A.* Stability and bifurcation phenomena in asymptotically Hamiltonian systems / O. A. Sultanov // Nonlinearity. — 2022. — Vol. 35, № 5. — P. 2513–2534.

262. *Sultanov, O. A.* Capture into resonance in nonlinear oscillatory systems with decaying perturbations / O. A. Sultanov // Journal of Mathematical Sciences. — 2022. — Vol. 262, № 3. — P. 374–389.

263. *Sultanov, O. A.* Long-term behaviour of asymptotically autonomous

Hamiltonian systems with multiplicative noise / O. A. Sultanov // SIAM Journal on Applied Dynamical Systems. — 2023. — Vol. 22, № 3. — P. 1818–1851.

264. *Sultanov, O. A.* Asymptotic analysis of systems with damped oscillatory perturbations / O. A. Sultanov // Journal of Mathematical Sciences. — 2023. — Vol. 269, № 1. — P. 111–128.

265. *Sultanov, O. A.* Resonances in asymptotically autonomous systems with a decaying chirped-frequency excitation / O. A. Sultanov // Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B. — 2023. — Vol. 28, № 3. — P. 1719–1749.

266. *Sultanov, O. A.* Resonance in isochronous systems with decaying oscillatory perturbations / O. A. Sultanov // Qualitative Theory of Dynamical Systems. — 2024. — Vol. 23. — P. 295.

267. *Sultanov, O. A.* Stability of asymptotically Hamiltonian systems with damped oscillatory and stochastic perturbations / O. A. Sultanov // Communications on Pure and Applied Analysis. — 2024. — Vol. 23, № 4. — P. 432–462.

268. *Sultanov, O. A.* Asymptotic regimes in oscillatory systems with damped non-resonant perturbations / O. A. Sultanov // Nonlinear Dynamics. — 2024. — Vol. 112, № 4. — P. 2589–2609.

269. *Sultanov, O. A.* Resonance modes in isochronous systems with a decaying combined excitation / O. A. Sultanov // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2025. — Vol. 46, № 7. — P. 3198–3211.

270. *Sultanov, O. A.* Resonances in nonlinear systems with a decaying chirped-frequency excitation and noise / O. A. Sultanov // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. — 2025. — Vol. 145. — P. 108713.

271. *Sultanov, O. A.* Nonlinear resonance in oscillatory systems with decaying perturbations / O. A. Sultanov // Discrete and Continuous Dynamical Systems. — 2025. — Vol. 45, № 5. — P. 1691–1719.

272. *Strauss, A.* Perturbing uniform asymptotically stable nonlinear systems /

A. Strauss, J.A. Yorke // J. Differ. Equ. — 1969. — Vol. 6. — P. 452–483.

273. Time-dependent damping effect for the dynamics of DNA transcription / S. F. Rohmah, I. A. Ramadhan, S. Latifah, D. Dwiputra, W. Hidayat, F. P. Zen // J. Phys.: Conf. Ser. — 2019. — Vol. 1204. — P. 012012.

274. *Thieme, H.* Asymptotically autonomous differential equations in the plane / H. Thieme // Rocky Mountain J. Math. — 1994. — Vol. 24. — P. 351–380.

275. *Treschev, D. V.* Normalization flow / D. V. Treschev // Regul. Chaotic Dyn. — 2023. — Vol. 28, № 4. — P. 781–804.

276. *Utz, W. R.* Asymptotic almost periodicity of solutions of a system of differential equations / W. R. Utz, P. Waltman // Proc. Am. Math. Soc. — 1967. — Vol. 18, № 4. — P. 597–601.

277. Vibrational resonance in an asymmetric Duffing oscillator / S. Jeyakumari, V. Chinnathambi, S. Rajasekar, M. A. F. Sanjuan // Internat. J. Bifur. Chaos. — 2011. — Vol. 21. — P. 275–286.

278. *Vorotnikov, V. I.* Partial stability and control / V. I. Vorotnikov. — Boston, Basel, Berlin : Birkhäuser, 1998.

279. *Wasow, W.* Asymptotic expansions for ordinary differential equations. — New York : John Wiley and Sons Inc., 1966.

280. *Wintner, A.* Small perturbations / A. Wintner // Amer. J. Math. — 1945. — Vol. 67, № 3. — P. 417–430.

281. *Wintner, A.* Asymptotic integrations of the adiabatic oscillator / A. Wintner // Amer. J. Math. — 1947. — Vol. 69, № 2. — P. 251–272.

282. *Wong, J. S. W.* Some properties of solutions of $u''(t) + a(t)f(u)g(u') = 0$, II / J. S. W. Wong, T. A. Burton // Monatsh. Math. — 1965. — Vol. 69. — P. 368–374.

283. *Yoshizawa, T.* Stability theory by Lyapunov's second method / T. Yoshizawa. — Tokyo : Gakujutsutosho Printing Co., 1966.

284. *Zeidler, E.* Nonlinear functional analysis and its applications / E. Zeidler. — New York : Springer-Verlag, 1986.

285. Zero-dispersion nonlinear resonance / S. M. Soskin, D. G. Luchinsky, R. Mannella, A. B. Neiman, P. V. E. McClintock // Internat. J. Bifur. Chaos. — 1997. — Vol. 7. — P. 923–936.