

Утверждаю
Директор ИИМех РАН
д.ф.-м.н., член-корр. РАН
С. Е. Якуш
«21» _____ 2026 г.



ОТЗЫВ

ведущей организации ФГБУН Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук на диссертацию Султанова Оскара Анваровича «Устойчивость и бифуркационные явления в нелинейных системах с затухающими возмущениями», представленную на соискание учёной степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика.

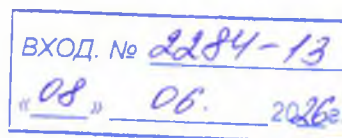
Актуальность темы диссертации.

Работа посвящена актуальной проблеме качественной теории дифференциальных уравнений – анализу влияния возмущений, интенсивность которых убывает со временем, на поведение нелинейных систем. Такие модели возникают при описании процессов в математической физике, космологии, динамике ДНК и в задачах стабилизации движений. Исследование критических случаев, когда классические методы линеаризации не работают, придает теме особую научную значимость.

Новизна полученных результатов и выводов.

Автором впервые разработаны методы исследования бифуркаций и асимптотического поведения для классов асимптотически автономных систем, не обладающих гамильтоновой структурой возмущений или линейностью. Ключевые новые результаты включают:

- Введены коэффициенты, которые вычисляются через параметры затухающих возмущений и определяют, станет ли нейтрально устойчивое равновесие типа «центр» асимптотически устойчивым или потеряет устойчивость.



- Доказано, что в зависимости от соотношения скорости затухания возмущений и нелинейности системы, равновесие может быть как экспоненциально, так и полиномиально устойчивым.
- Установлены условия, при которых классическая бифуркация центр-седло сохраняется или исчезает под влиянием малых, убывающих во времени добавок.
- Особое внимание уделено осциллирующим возмущениям, частота которых близка к собственной частоте системы. Описаны условия возникновения фазового захвата, когда система «подстраивается» под внешнее воздействие, и фазового дрейфа, когда синхронизация невозможна.
- Для систем с меняющейся частотой доказано существование резонансных решений с неограниченно растущей амплитудой. Построена их асимптотика на бесконечности.
- Выявлено, что даже затухающие возмущения способны существенно смещать границы устойчивости за счет эффектов параметрического резонанса.
- Разработана конструкция стохастических функций Ляпунова, позволяющая гарантировать, что траектории системы не покинут окрестность равновесия на асимптотически больших интервалах времени (вплоть до бесконечности).
- Обнаружено, что мультипликативный шум может выступать фактором стабилизации или, наоборот, приводить к разрушению резонансного захвата.
- Определены критические уровни интенсивности шума, при превышении которых динамика системы качественно меняется (например, происходит выход из резонанса).
- Главным результатом является создание единого подхода, сочетающего метод усреднения с построением специальных функций Ляпунова и Четаева для систем, где параметры меняются во времени.

Теоретическая и практическая значимость.

Результаты работы носят теоретический характер. Разработанные методы находят применение при анализе уравнений Пенлеве, стабилизации резонансных режимов и исследовании осцилляторов Дуффинга. Работа закладывает теоретическую базу для прогнозирования долгосрочного поведения сложных нелинейных систем в условиях затухающих внешних воздействий.

Обоснованность и достоверность выводов.

Достоверность научных результатов не вызывает сомнений и базируется на следующем. Все основные положения и выводы работы оформлены в виде математических теорем и лемм, снабженных полными и строгими доказательствами. Автор опирается на классический аппарат качественной теории дифференциальных уравнений, теории устойчивости по Ляпунову и теории стохастических дифференциальных уравнений Ито. В работе успешно развит и применен комплексный подход, сочетающий методы асимптотического анализа и усреднения с оригинальными конструкциями функций Ляпунова (включая стохастические аналоги). Это позволило автору получить надежные оценки поведения систем на бесконечно больших временных интервалах, где стандартные методы (например, метод первого приближения) оказываются неэффективными. Теоретические выводы о режимах фазового захвата, дрейфа и условиях потери устойчивости подтверждаются результатами численного анализа конкретных моделей, таких как осциллятор Дуффинга и уравнения Пенлеве.

Структура и содержание диссертации.

Диссертация является логически завершенным научным трудом. Структура работы (введение, 9 глав, заключение и список литературы из 285 источников) адекватна поставленным целям и задачам. Единство работы обеспечивается последовательным развитием методологии, основанной на сочетании метода усреднения и построения специфических функций Ляпунова для асимптотически автономных систем. Содержание глав можно разделить на три ключевых блока, которые формируют целостную концепцию исследования.

1. Бифуркационный анализ (Главы 1-2): Автор закладывает фундамент исследования, описывая бифуркации в гамильтоновых системах под действием затухающих возмущений. Особое внимание уделено критическим случаям и бифуркации центр-седло, где метод линеаризации оказывается неэффективным.

2. Резонансные явления (Главы 3-5): В этом блоке исследуются эффекты фазового захвата и дрейфа. Важным достижением является доказательство существования и устойчивости резонансных решений с растущей амплитудой в

системах с чирпированной частотой (на примере осциллятора ДUFFинга), что имеет прямые аналогии в задачах небесной механики и нелинейной оптики.

3. Стохастический анализ (Главы 6-9): Завершающий блок расширяет полученные результаты на системы с возмущениями типа белого шума. Автор предлагает оригинальную конструкцию стохастических функций Ляпунова, позволяющую обосновать устойчивость по вероятности на асимптотически больших интервалах времени.

Завершенность работы подтверждается тем, что для каждого рассматриваемого класса систем автором получены строгие условия устойчивости, которые проиллюстрированы численным моделированием и примерами. Диссертация представляет собой глубокое теоретическое обобщение и решение крупной научной проблемы качественной теории дифференциальных уравнений.

Замечания по работе

Текст диссертации написан достаточно ясно, каких-либо серьезных замечаний по математическим исследованиям нет. Однако есть такое замечание общего характера. В диссертации перечислены области науки, в которых полученные математические результаты могут найти применение, но практически не обсуждаются их приложения к конкретным задачам из этих областей, например, к физическим задачам, к задачам возникающим в научно технических областях, в биологии и медицине. Это замечание можно рассматривать как пожелание к дальнейшей научной деятельности автора.

Апробация работы и публикации

Основные результаты диссертации опубликованы автором лично в 29 научных работах, большая часть из которых содержится в высокорейтинговых журналах, индексируемых в международных наукометрических базах Web of Science и Scopus. Среди них такие авторитетные издания, как Nonlinearity, Physica D, Discrete and Continuous Dynamical Systems, Nonlinear Dynamics, Studies in Applied Mathematics, SIAM Journal on Applied Dynamical Systems и Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. Основные положения работы представлялись в виде докладов на международных конференциях (EquaDiff, DFDE и конференциях И.Г. Петровского).

Соответствие содержания диссертации автореферату и указанной специальности

Автореферат полностью соответствует основным положениям, выводам и результатам, изложенным в диссертации. Он адекватно отражает содержание и структуру работы, ключевые результаты и степень личного вклада.

Научный уровень и значимость диссертации полностью соответствует требованиям, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика.

Общее заключение

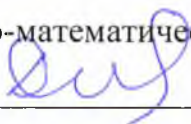
Диссертация Султанова Оскара Анваровича на тему «Устойчивость и бифуркационные явления в нелинейных системах с затухающими возмущениями» соответствует критериям, установленным пп. 9-14 "Положения о присуждении ученых степеней", утвержденного постановлением Правительства Российской Федерации № 842 от 24 сентября 2013 г., а ее автор – Султанов Оскар Анварович заслуживает присуждения ему ученой степени доктора физико-математических наук по научной специальности 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика. Доклад по диссертации заслушан на семинаре ИПМех РАН «Асимптотические методы в математической физике» 07 апреля 2026 г. Отзыв обсужден и утвержден на заседании лаборатории механики природных катастроф « 07 » апреля 2026 г., протокол №2

Отзыв составил

главный научный сотрудник,

заведующий лабораторией механики природных катастроф ИПМех РАН,

доктор физико-математических наук,

профессор,  Доброхотов Сергей Юрьевич

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН

119526, Москва, пр-т Вернадского, д. 101, корп. 1

e-mail.: s.dobrokhotov@gmail.com

тел.: 8-495-433-75-44