

ОТЗЫВ
официального оппонента
о диссертации Султанова Оскара Анваровича
«Устойчивость и бифуркационные явления в нелинейных
системах с затухающими возмущениями»,
представленной на соискание ученой степени доктора
физико-математических наук по специальности
1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика

Актуальность темы диссертации

Исследование устойчивости и бифуркационных явлений в нелинейных неавтономных системах является актуальной задачей современной теории дифференциальных уравнений и математической физики. В отличие от классических постановок, где возмущения предполагаются постоянными или периодическими, влияние возмущений с затухающей интенсивностью изучено значительно меньше. Возмущения такого типа возникают в задачах самофокусировки, при изучении уравнений Пенлеве, в моделях формирования планет, при исследовании синхронизации осцилляторов, процессов стабилизации, а также при моделировании распространения эпидемий и во многих других областях. Несмотря на затухание, такие воздействия могут приводить к потере устойчивости, смене режимов и переходам между аттракторами. Таким образом, актуальность темы обоснована как фундаментальными задачами теории дифференциальных уравнений, так и возможными приложениями.

Обзор основных результатов диссертации

В работе изучается влияние затухающих детерминированных и стохастических возмущений на автономные гамильтоновы системы на плоскости. Предполагается, что возмущения допускают степенное асимптотическое разложение на бесконечности, причем коэффициенты разложений могут быть осциллирующими. Основное внимание уделяется изучению устойчивости равновесий, режимов, близких к периодическим, и растущих решений в возмущенных системах. Исследуются критерии устойчивости, учитывающие нелинейные эффекты и характер затухания возмущений. В частности, устанавливаются критические значения параметров, при которых возмущенная динамика не сохраняет свойства исходной системы.

Работа состоит из введения, девяти глав, заключения и библиографии. Во введении обоснована актуальность темы, показана степень ее разработанности, сформулированы цели и задачи, раскрыты научная новизна и зна-

чимость результатов. Автор корректно помещает свою работу в современный контекст качественной теории дифференциальных уравнений, теории устойчивости, асимптотического анализа и стохастических дифференциальных уравнений.

Первая глава посвящена исследованию асимптотически автономных гамильтоновых систем на плоскости в окрестности равновесия типа центр при наличии детерминированных затухающих возмущений. Исследуются локальные бифуркации, связанные с изменением свойств устойчивости равновесия по Ляпунову и с возникновением новых притягивающих или отталкивающих состояний. Автор строит специальную замену переменных, в которой функция Ляпунова используется как новая зависимая переменная, и выводит усредненные уравнения, позволяющие описывать долговременную динамику. Основным результатом главы являются условия, при которых нейтрально устойчивое равновесие предельной системы сохраняет устойчивость, становится асимптотически устойчивым либо теряет устойчивость под действием затухающих возмущений. Также показана возможность появления устойчивых и неустойчивых режимов, близких к периодическим. Важным выводом главы является демонстрация неэффективности метода линеаризации для рассматриваемого класса асимптотически автономных систем.

Во второй главе изучается влияние затухающих возмущений на системы, у которых предельная гамильтонова структура допускает бифуркацию типа центр-седло. Исследуется зависимость асимптотических режимов и их устойчивости от бифуркационного параметра предельной системы и структуры возмущений. Автор строит асимптотические решения в виде степенных рядов и исследует их устойчивость методом функций Ляпунова. Особое внимание уделено критическому случаю, соответствующему бифуркационному значению параметра, при котором характер динамики определяется структурой старших членов возмущений. Описаны условия, при которых бифуркация центр-седло сохраняется либо происходит качественная перестройка динамики.

В третьей главе рассматриваются гамильтоновы системы под действием затухающих осциллирующих возмущений с асимптотически постоянной резонансной частотой. Исследуется устойчивость равновесия и изучается роль резонанса в локальных бифуркациях. Автор проводит усреднение и выводит модельную систему, позволяющую выделить два различных режима — фазовый захват и фазовый дрейф. На основе анализа модельной системы выводятся критерии экспоненциальной, полиномиальной устойчивости и неустой-

чивости равновесия. Показано, что затухающие осциллирующие возмущения способны смещать границы устойчивости вследствие резонансных эффектов.

В четвертой главе изучаются резонансные явления вдали от равновесия в системах с осциллирующими возмущениями с асимптотически постоянной частотой. В отличие от предыдущей главы, здесь исследуется не устойчивость равновесия, а механизм возникновения устойчивых состояний, близких к периодическим, что интерпретируется как проявление нелинейного резонанса. Автор анализирует усредненную динамику и получает условия существования и устойчивости резонансных режимов. Данный раздел расширяет исследование от локальных эффектов к нелокальным режимам, имеющим самостоятельный физический смысл.

Пятая глава посвящена резонансным решениям с неограниченно растущей амплитудой в нелинейных системах с затухающими возмущениями и чирпированной частотой. Исследуется явление типа авторезонанса, при котором происходит синхронизация фазы решения с внешним воздействием и одновременно наблюдается рост энергии. Доказывается существование таких решений, строится их асимптотика на бесконечности и исследуется устойчивость. В качестве приложения рассматривается осциллятор Дуффинга.

В шестой главе автор переходит к стохастическим задачам и исследует влияние постоянно действующего белого шума на локально устойчивые динамические системы. Исследуется длина временных интервалов, на которых детерминированная устойчивость может сохраняться по вероятности при наличии случайных возмущений. На основе локальной функции Ляпунова строятся стохастические функции Ляпунова, позволяющие получить оценки устойчивости на асимптотически больших временных промежутках, а при более быстром затухании коэффициентов шума — и на всей полуоси. Глава играет методологически важную роль, поскольку закладывает инструментарий, используемый далее в задачах о бифуркациях и резонансных режимах в стохастических системах.

В седьмой главе исследуется влияние мультипликативного белого шума на бифуркации в асимптотически автономных системах, исследованных в первой главе. Автор переносит разработанный ранее аппарат на стохастические системы и показывает, что шум может качественно перестроить локальную динамику. Найдены условия, при которых равновесие становится асимптотически устойчивым по вероятности либо теряет устойчивость. Также исследовано возникновение устойчивых режимов, близких к периодическим. Разработанная теория применяется к возмущенному третьему уравнению Пенлеве,

что демонстрирует содержательность и применимость полученных результатов.

Восьмая глава объединяет два нетривиальных механизма — резонанс и случайные воздействия. Здесь изучается совместное влияние резонансных затухающих возмущений и белого шума на устойчивость равновесия в гамильтоновых системах. Сочетание методов стохастического анализа и усреднения позволяет исследовать устойчивость как в режимах фазового захвата, так и в режиме фазового дрейфа. Важными результатами главы являются описание смещения границы устойчивости равновесия и условия, при которых возможна устойчивая фазовая синхронизация в стохастической системе.

В девятой главе исследуется влияние белого шума на резонансный захват в системах с затухающими чирпированными возмущениями. Рассматриваются решения с растущей энергией и синхронизированной фазой, то есть стохастические аналоги авторезонансных режимов. Описываются необходимые условия захвата, определяются пороговые значения параметров и исследуется устойчивость резонансных решений на асимптотически больших временных интервалах. В качестве примера анализируется возмущенный осциллятор Дуффинга.

В заключении подведены итоги исследования и обозначены открытые вопросы. К диссертации прилагается список литературы, содержащий 285 позиций, что практически исчерпывает все сколь-нибудь значимые работы в данной области. Обсуждение предметной области и достигнутых ранее результатов в сочетании с обширным списком литературы представляет собой весьма полезный материал для понимания комплекса полученных результатов.

Среди положений, выносимых на защиту, выделю несколько наиболее интересных с моей точки зрения результатов.

1. Для гамильтоновых систем под действием затухающих возмущений найдены условия, при которых равновесие системы может оказаться нейтрально устойчивым, асимптотически устойчивым, либо неустойчивым. При этом метод линеаризации для асимптотически автономных систем может оказаться неэффективным.

2. В системах с затухающими возмущениями в зависимости от бифуркационного параметра предельной системы найдены условия исчезновения или сохранения бифуркации центр-седло.

3. Исследованы явления фазового захвата и фазового дрейфа в системах с затухающими осциллирующими возмущениями, найдены условия существо-

вания и устойчивости захвата осциллирующих систем в нелинейный резонанс под действием затухающих возмущений. Доказано существование и устойчивость резонансных решений с неограниченно растущей энергией в нелинейных системах с затухающими возмущениями с чирпированной частотой.

4. Описаны бифуркационные явления в стохастических системах, близких к гамильтоновым.

В качестве замечания, или точнее пожелания, к работе хотелось бы отметить, что автором рассматриваются в значительной степени динамические системы на плоскости. Представляет большой интерес, насколько теория, развитая автором может быть распространена на системы большей размерности и, в частности, на уравнения с запаздыванием.

Выводы

Методологическую основу исследования составляет оригинальное сочетание подходов асимптотического анализа и прямого метода Ляпунова. В частности, автором разработаны алгоритмы построения усредняющих замен переменных, позволяющие исключить из уравнений быстро осциллирующие составляющие и выделить главную часть динамики. Последующий анализ устойчивости базируется на конструировании детерминированных и стохастических функций Ляпунова, учитывающих специфику затухающих возмущений. Теоретические выводы подтверждены результатами численного моделирования.

Теоретическая значимость работы обоснована тем, что развитые методы могут быть применены к широкому классу неавтономных и стохастических систем, возникающих в нелинейной математической физике. Практическая значимость результатов подтверждается приложением к уравнениям Пенлеве, самофокусировке и осцилляторам Дуффинга.

Таким образом, диссертация представляет собой завершенное и цельное исследование, в котором разработан единый подход к анализу качественных и асимптотических свойств решений асимптотически автономных систем с затухающими детерминированными и стохастическими возмущениями. Несомненным достоинством работы является сочетание общей теории, строгого доказательного аппарата и анализа содержательных модельных примеров. Оформление диссертации отвечает современным требованиям. Результаты исследований прошли апробацию на многочисленных международных и российских конференциях, а также на семинарах. Основные положения исследования опубликованы автором в 29 статьях в рецензируемых научных журналах. Важно отметить, что все приведенные в автореферате работы выполне-

ны соискателем без соавторов, тем самым отсутствует проблема выяснения степени самостоятельности полученных результатов.

Автореферат соответствует содержанию диссертации.

Считаю, что диссертационная работа О.А. Султанова на тему «Устойчивость и бифуркационные явления в нелинейных системах с затухающими возмущениями» удовлетворяет пунктам 9–11, 13, 14 Положения о присуждении ученых степеней, утвержденного постановлением Правительства Российской Федерации от 24 сентября 2013 г. № 842 «О порядке присуждения ученых степеней», а ее автор, Султанов Оскар Анварович, заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика.

Официальный оппонент:

доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой компьютерных сетей
ФГБОУ ВО «Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова»



Глызин Сергей Дмитриевич.

Докторская степень защищена по специальности 01.01.02. Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
Факультет информатики и вычислительной техники,
150003, г. Ярославль, ул. Советская, д. 14,
тел.: +79109626236,
e-mail: glyzin@uniyar.ac.ru

«01» 06 2026 г.



Подпись заверяю:
Заместитель начальника управления
директор центра кадровой политики
 Л.Н. Куфирина