

Отзыв официального оппонента
на диссертационную работу Султанова Оскара Анваровича «Устойчивость и
бифуркационные явления в нелинейных системах с затухающими возмущениями»,
представленную на соискание ученой степени доктора физико-математических наук
по специальности 1.1.2 – дифференциальные уравнения и математическая физика.

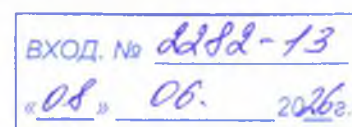
Диссертация О.А. Султанова в самом широком смысле посвящена теории неавтономных динамических систем. Это направление исследований начало активно развиваться не очень давно. При зарождении теории дифференциальных уравнений не было деления на автономные системы и неавтономные. Тогда основной задачей было решить полученное дифференциальное уравнение. Однако, когда стало ясно, благодаря работам Лиувилля, что эти уравнения, вообще говоря, решить невозможно в явном виде, то стали изучать поведение решений, существование которых было до этого было доказано Коши, а задачи небесной механики привели к необходимости изучения долговременного поведения решений. Постановка Пуанкаре задачи о качественном исследовании поведения решений и развитие качественной теории дифференциальных уравнений в работах самого Пуанкаре, Ляпунова, а затем Биркгофа, Адамара и многих других привели к пониманию существенного различия в исследовании автономных и неавтономных систем. Ляпунов, по-видимому, был первым, кто осознал, поставил и получил первые результаты в теории неавтономных систем. Затем важные результаты о локальном поведении неавтономных систем были получены Перроном.

Следующий важный шаг в глобальном исследовании неавтономных систем был сделан Бебутовым, который ввел динамическую систему сдвигов правых частей и тем самым заложил основы теории косых произведений, которые в важных случаях позволяют эффективно использовать при исследовании неавтономных систем методы автономных систем, т.е. теорию динамических систем. Однако, вскоре стало понятно, что в общем случае построенное косое произведение приводит к топологически слишком сложным фазовым пространствам и работать с ними крайне неудобно. Стали изучаться некоторые классы неавтономных систем, например с почти периодической зависимостью от времени (Селл, Сакер, Жиков, Левитан, Мейер и многие другие). Следует также отметить пионерскую работу Маркуса об асимптотически автономных системах, которая поставила вопрос об их асимптотических свойствах, динамике решений и т.д.

Другой важный вклад в теорию неавтономных систем восходит к работам ван дер Поля и созданию на этой идее метода усреднения Крыловым и Боголюбовым, который также позволил эффективно исследовать свойства неавтономных систем с рекуррентной зависимостью от времени через изучение свойств усредненной автономной системы.

Изучение воздействия случайных возмущений на поведение динамических систем началось с пионерской работы Андронова, Витта и Понтрягина 1933 г., которая была надолго забыта. Интерес к этой проблеме возродился только через 50 лет в работах Вентцель и Фрейдлина, Хасьминского и др.

При исследовании асимптотически автономных систем возникают важные вопросы о качественных свойствах решений неавтономной системы, если известны какие-то свойства решений предельной системы и скорость убывания возмущений. И один из таких тонких вопросов здесь – как влияет скорость убывания возмущения при стремлении t к бесконечности на свойства неавтономной системы, что при этом сохраняется и какие новые явления могут возникать, которых нет у предельной системы. Это и есть основная тема диссертации и отсюда ясна ее актуальность. В диссертации изучаются асимптотически автономные двумерные системы, предельные системы которых являются двумерными гамильтоновыми, а асимптотика убывания является дробно-степенной.



Перейдем к содержанию диссертации. Она содержит 391 стр. и состоит из введения и 9 глав, заключения и списка литературы, содержащего 285 ссылок. Во введении представлен обзор развития тематики и приведены основные результаты, касающиеся темы диссертации, указаны цели и задачи диссертации, положения, выносимые на защиту, методология и методы исследования, приведен список семинаров, конференций и школ, где автор представлял свои результаты, приведен список публикаций. Каждая глава содержит большое количество рисунков, иллюстрирующих результаты компьютерного счета моделей, в которых наблюдаются эффекты, подтверждающие полученные результаты. Диссертация разбита на две большие части, в одной изучаются неавтономные детерминированные возмущения гамильтоновых систем на плоскости, а в другой – стохастические возмущения типа белого шума таких систем. Соответственно, в первой части развивается теория неавтономных дифференциальных уравнений, а во второй части – теория стохастических дифференциальных уравнений Ито.

В первой главе диссертации изучаются асимптотические при $t \rightarrow \infty$ решения двумерной гамильтоновой неавтономной системы с негамильтоновым возмущением, которая асимптотически стремится к гамильтоновой системе с одной степенью свободы, имеющей центр в начале координат. Предполагается, что возмущенная система сохраняет это нулевое решение. Основные полученные результаты – условия на возмущения, при которых нулевое решение устойчиво по Ляпунову с различной скоростью стремления к нему, условия его неустойчивости и возможного появления решений, асимптотически стремящихся к периодическому на бесконечности, т.е. неавтономный аналог бифуркации Андронова-Хопфа. Для обоснования развивается неавтономный аналог метода усреднения и находятся условия на первые нетривиальные члены усредненной системы.

Во второй главе рассматриваются неавтономные, убывающие со степенной асимптотикой на бесконечности, возмущения автономной гамильтоновой системы, зависящей от параметра λ , и предполагается, что гамильтонова система меняется таким образом, что некоторое ее состояние равновесия претерпевает при критическом (нулевом) значении параметра бифуркацию перехода через параболическую точку (автор называет ее бифуркацией центр-седло). Как известно, в такой системе состояние равновесия исчезает при одном знаке параметра ($\lambda < 0$) и распадается на седло и центр при другом знаке ($\lambda > 0$). В главе изучаются возможные типы предельного поведения решений возмущенной системы, зависящие от свойств возмущения и значений параметра. Основные результаты главы: существование пары частных решений исходной системы, стремящихся к состояниям равновесия при $\lambda > 0$, решение, стремящееся к седлу, неустойчиво, решение, стремящееся к центру, может иметь разный тип устойчивости и даже быть неустойчивым. При его устойчивости существует целый пучок решений, стремящихся к нему. Наиболее интересным является исследование при $\lambda = 0$. Здесь удастся показать при различных условиях на возмущение существование пары решений, стремящихся к параболической точке на бесконечности, одно из которых неустойчиво, а второе может иметь различные свойства устойчивости: устойчивость, неустойчивость и нечто промежуточное – метастабильность.

Третья глава посвящена изучению влияния убывающих осциллирующих возмущений с асимптотически постоянной частотой на двумерную неавтономную асимптотически автономную гамильтонову систему в окрестности ее состояния равновесия типа центр, частота которого находится в резонансе с асимптотической частотой возмущения. Основная задача – определить, какие асимптотические режимы могут реализоваться при различных условиях на возмущения. Найдены условия на возмущения, при которых имеет

место асимптотическая устойчивость предельного состояния равновесия, а также некоторые условия реализации неустойчивости.

Четвертая глава расширяет область исследования третьей главы и при близких исходных условиях ставится задача о нелинейном резонансе вблизи периодической траектории предельной гамильтоновой системы. Периодические негамильтоновы возмущения двумерной гамильтоновой системы в кольце, заполненном периодическими траекториями, подробно изучались в работах Морозова-Шильникова, Морозова и многих других. Были описаны резонансные уровни и их строение, обнаружены проходимые и непроходимые уровни и многое другое. В этой главе исследуется близкая по постановке задача, но для убывающих со степенной асимптотикой осциллирующих возмущений с асимптотически постоянной частотой, находящейся в резонансе с периодом одной из предельных периодических траекторий. Получено приближенное модельное уравнение усредненной динамики вблизи резонанса и не удивительно, что оно оказалось уравнением маятникового типа, но с дополнительными убывающими по времени членами. При этом были найдены решения, асимптотически стремящиеся к резонансным периодическим решениям (фазовый захват), также режимы ухода от резонанса.

Последняя глава первой детерминистской части – пятая, в которой изучается влияние осциллирующих убывающих со степенной асимптотикой возмущений на двумерную гамильтонову систему в области, заполненной периодическими траекториями. В отличие от предыдущих глав, здесь предполагается, что частота осцилляций растет по степенному закону («чирпированная частота»). Показано, что такие возмущения могут приводить, при соответствующих ограничениях, к существованию решений, у которых движение по угловой переменной в асимптотике мало отличается от предельного периодического, но значение предельного гамильтониана может значительно возрастать (фазовый захват), причем эти решения могут иметь различный тип устойчивости. Другим возможным типом движения, реализуемым на примерах, являются решения, у которых имеет место дрейф по угловой переменной и ограниченность предельного гамильтониана. На мой взгляд, наличие таких решений подсказывает возможную стохастизацию предельного поведения системы.

Следует отметить, что каждая глава сопровождается рассмотрением содержательных примеров, которые иногда служат просто для иллюстрации полученных результатов, но иногда -- для описания новых явлений, например, как в главе 2.

Во второй стохастической части диссертации в шестой главе рассматривается общая задача об устойчивости динамических систем относительно постоянно действующих стохастических возмущений типа белого шума. Предполагается, что невозмущенная детерминированная система имеет локально устойчивое равновесие, устойчивость которого обеспечивается наличием локальной функции Ляпунова. Возмущенная система рассматривается в форме стохастических дифференциальных уравнений Ито и не сохраняет равновесие. Малый параметр и детерминированная матрица-функция в стохастическом интеграле используются для контроля интенсивности возмущений. Из известных результатов следует, что устойчивость в таких системах встречается только при достаточно жестких ограничениях на поведение коэффициентов матрицы возмущений и на поведение траекторий невозмущенной системы. В главе рассматривается более слабая задача об устойчивости на конечном временном интервале и описываются классы матриц, при которых гарантируется устойчивость тривиального решения по вероятности относительно шума на асимптотически больших временных интервалах. Основные результаты содержатся в параграфе 6.5, где показано, что если скорость затухания возмущений согласована со оценкой для производной функции Ляпунова на траекториях невозмущенной системы, то устойчивость тривиального решения в возмущенной системе

имеет место на любом полиномиально большом интервале. Если матрица возмущений имеет оценку $O(t^{-1/2})$ при $t \rightarrow \infty$, то устойчивость сохраняется на экспоненциально большом интервале. В случае оценки $o(t^{-1/2})$, гарантируется устойчивость решения на полуоси. Таким образом, полученные результаты обобщают известные ранее результаты об устойчивости при постоянно действующих возмущениях типа белого шума на случай локально устойчивых динамических систем. Следует отметить предложенную в работе конструкцию стохастической функции Ляпунова, позволяющую обосновать полученные результаты.

В следующих главах исследуются бифуркационные явления под действием затухающих стохастических возмущений типа белого шума. Следует отметить, что в существующей литературе задачи с затухающими стохастическими возмущениями рассматривались преимущественно для скалярных уравнений. Результаты, полученные в этих главах для двумерных гамильтоновых систем, являются новыми и значительно расширяют соответствующую теорию.

В седьмой главе предполагается, что возмущения сохраняют равновесие предельной системы и исследуются локальные бифуркации, связанные с изменениями устойчивости равновесия и с появлением новых устойчивых состояний. Строится замена переменных, усредняющая коэффициенты сноса, и выводится модельная детерминированная система, описывающая возмущенную динамику. При дополнительных предположениях на коэффициенты усредненной системы описываются возможные бифуркации в исходной возмущенной системе. С помощью построения стохастических функций Ляпунова показано, что возмущения могут приводить как к сохранению устойчивости равновесия по вероятности, так и к потере устойчивости. Изучены также условия, при которых в возмущенных уравнениях появляются устойчивые режимы, близкие к периодическим. Основные результаты главы содержатся в параграфе 7.3.

В восьмой главе рассматривается класс затухающих стохастических возмущений с осциллирующими коэффициентами с асимптотически постоянной частотой. Исследуется влияние таких возмущений на устойчивость системы. Используемая техника --- сочетание метода усреднения с построением стохастических функций Ляпунова --- позволяет получить строгие оценки для решений возмущенных уравнений. Результаты главы сформулированы в параграфе 8.3, где показано, что в возмущенной системе возможны режимы фазового захвата и фазового дрейфа, и стохастическая устойчивость равновесия зависит от реализованного режима. Важным результатом в этой части является доказательство устойчивой фазовой синхронизации благодаря затухающим стохастическим возмущениям.

В девятой главе исследуется влияние стохастических возмущений с чирпированной частотой на захват нелинейных колебательных систем в резонанс. Рассматриваются резонансные решения с растущей амплитудой и фазой, синхронизированной с возбуждением. Асимптотика резонансных решений на бесконечности определяется из резонансного соотношения между собственной частотой невозмущенной системы и частотой возбуждения. Основные результаты главы изложены в параграфе 9.4, где выведена и исследована усеченная модельная система для переменных амплитуды невязки и сдвига фазы, а также доказана устойчивость резонансных режимов в полной системе на бесконечных и асимптотически больших временных интервалах в зависимости от скорости затухания стохастических возмущений. Предложенная теория применяется к осциллятору Дюффинга с затухающим чирпированным возмущением и шумом.

Перечислю новые результаты, полученные в диссертации.

1. Развитие неавтономного аналога метода усреднения для асимптотически убывающих возмущений двумерных гамильтоновых систем.
2. Обоснование условий устойчивости (нейтральной, асимптотической) для гамильтоновых систем в окрестности центра при действии асимптотически убывающих возмущений и обнаружение неустойчивости, приводящей к появлению решений, близких к периодическим (неавтономный аналог бифуркации Андронова-Хопфа).
3. При асимптотически убывающих возмущениях гамильтоновой системы, проходящей через бифуркацию «центр-седло» обнаружены асимптотические режимы системы и исследованы условия их устойчивости, включая условия существования асимптотических решений в момент бифуркации.
4. При действии осциллирующих убывающих возмущений с асимптотически постоянной резонансной частотой обнаружены режимы фазового захвата и фазового дрейфа, получена система, описывающая динамику усредненной системы.
5. Для нелинейных гамильтоновых систем, под действием асимптотически убывающих осциллирующих возмущений с частотой со степенным ростом по времени, доказано существование решений с растущей энергией и фазой, синхронизованной с возмущением, исследована их устойчивость. Изучены резонансные режимы уравнения типа Дюффинга под действием убывающих возмущений.
6. Развитие неавтономной версии метода усреднения для двумерных гамильтоновых систем с затухающими стохастическими возмущениями и обоснование близости решений исходных и усредненных модельных систем на длительных временных интервалах.
7. Разработаны критерии устойчивости по вероятности для неавтономных стохастических систем, подверженных воздействию затухающих случайных возмущений.
8. Предложены специальные конструкции стохастических функций Ляпунова, адаптированные к изменяющейся во времени интенсивности шума.

Общее впечатление о диссертации: она представляет собой существенный вклад в теорию асимптотически автономных систем и развивает фактически новое направление исследований в этой теории – теорию асимптотически убывающих со степенной асимптотикой возмущений двумерных гамильтоновых систем, как детерминистских, так и стохастических.

Тем не менее, в работе имеются некоторые недостатки, которые следует отметить.

1. Во всех главах, когда речь идет о предельном поведении функций, задающих правые части системы, говорится просто о стремлении функций к нулю, но не говорится в какой топологии: функция от пространственных переменных и времени задает кривую от t в функциональном пространстве бесконечно гладких функций, эта кривая стремится к нулевой функции, но как?
2. Фразы типа «асимптотические решения возмущенной системы, стремящиеся к неподвижным точкам предельной гамильтоновой системы» более корректно писать так: «решения возмущенной системы, асимптотически стремящиеся к состояниям равновесия предельной гамильтоновой системы», т.к. нет термина «асимптотическое решение возмущенной системы».

3. В диссертации порядка 60 теорем. Когда видишь такое количество теорем, возникает естественный вопрос: а все ли эти утверждения следует называть теоремами, иначе они теряют значение. Более правильно было бы разделить утверждения по их значимости для получения результатов на леммы (что делается), предложения и теоремы.
4. В некоторых главах используется термин «асимптотический режим», причем не всегда понятно, то ли это приближенное решение, то ли настоящее.
5. В нескольких главах говорится о корнях характеристического уравнения, при этом матрица зависит от времени (обычно с постоянной предельной матрицей на бесконечности). Этот термин выглядит странным и следовало бы привести какие-то замечания-разъяснения при их использовании (например, экспоненциальную дихотомию в седловых случаях).
6. В главе 4 результаты близко примыкают к полученным Морозовым и Шильниковым о периодических возмущениях двумерных гамильтоновых систем, но ссылки на их работы отсутствуют.

Сделанные замечания, тем не менее, не умаляют достоинств работы и не влияют на ее положительную оценку. Диссертация Султанова Оскара Анваровича является законченным научным исследованием, направленным на решение важной научной проблемы, имеющей как теоретическое, так и практическое значение. Основные результаты диссертации опубликованы в 29 работах в ведущих рецензируемых российских и международных журналах, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ. Автореферат полностью отражает содержание диссертации. Тематика и содержание диссертации соответствует пп. 3,5,9,10 паспорта специальности 1.1.2. Обоснованность научных положений и выводов не вызывает сомнений. Диссертация «Устойчивость и бифуркационные явления в нелинейных системах с затухающими возмущениями» соответствует требованиям, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени доктора физико-математических наук в пп. 9, 10, 11, 13, 14 Положения о присуждении ученых степеней, утвержденного постановлением Правительства Российской Федерации от 24 сентября 2013 года № 842 (ред. от 01.10.2018, с изм. от 26.05.2020), а ее автор Султанов Оскар Анварович заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.2 Дифференциальные уравнения и математическая физика.

Официальный оппонент:

Лерман Лев Михайлович

доктор физико-математических наук
по специальности 01.01.02 – Дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление, профессор,
главный научный сотрудник лаборатории топологических методов в динамике
ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики» в Нижнем Новгороде

Дата: 02.06.2026

Даю согласие на обработку персональных данных.

Адрес основного места работы:

603155, г. Нижний Новгород, Б. Печерская ул., д. 25/12

Интернет-адрес учреждения: www.nnov.hse.ru

Телефон: +7(831)419-55-81

E-mail: lberman@hse.ru

Подпись Лермана Льва Михайловича заверяю:

