

УТВЕРЖДАЮ

Руководитель Федерального государственного бюджетного научного учреждения Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук, доктор биологических наук


В.Б. Мартыненко
« 13 » _____ 2026 г.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

**Федерального государственного бюджетного научного учреждения
Уфимского федерального исследовательского центра
Российской академии наук
Министерства науки и высшего образования
Российской Федерации**

Диссертация Султанова Оскара Анваровича на тему: «Устойчивость и бифуркационные явления в нелинейных системах с затухающими возмущениями» выполнена в отделе дифференциальных уравнений Института математики с вычислительным центром - обособленного структурного подразделения Федерального государственного бюджетного научного учреждения Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук (ИМВЦ УФИЦ РАН).

В период подготовки диссертации Султанов Оскар Анварович работал старшим научным сотрудником отдела дифференциальных уравнений ИМВЦ УФИЦ РАН, где и продолжает работать в настоящее время.

В 2012 году окончил Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Уфимский государственный авиационный технический университет» по специальности «Прикладная математика и информатика» с присуждением квалификации «Математик, системный программист». Диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по научной специальности 01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление на тему «Возмущение и устойчивость моделей авторезонанса» защитил в 2015 году в диссертационном совете Д 002.057.01 на базе ФГБУН Институт математики с вычислительным центром Уфимского научного центра Российской академии наук.

По итогам обсуждения диссертации принято следующее заключение:

1. Цель и актуальность диссертации.

Целью диссертационной работы Султанова О.А. является:

1. Разработка методов исследования качественных и асимптотических свойств решений классов асимптотически автономных систем дифференциальных уравнений, описывающих нелинейные автономные гамильтоновы системы на плоскости под действием детерминированных и стохастических возмущений с затухающей интенсивностью.

2. Исследование бифуркаций, связанных с изменением устойчивости равновесия по Ляпунову и появлением новых притягивающих или отталкивающих состояний.

3. Изучение условий сохранения и нарушения бифуркации типа центр-седло под действием возмущений с затухающей интенсивностью.

4. Изучение устойчивости равновесия и асимптотические режимы для решений гамильтоновых систем под действием осциллирующих возмущений с асимптотически постоянной резонансной частотой.

5. Изучение эффектов типа нелинейный резонанс и появления устойчивых состояний, близких к периодическим, в системах с затухающими возмущениями.

6. Исследование возникновения и устойчивости резонансных решений с неограниченно растущей амплитудой в нелинейных системах под действием затухающих возмущений с чирпированной частотой.

7. Изучение устойчивости динамических систем по вероятности при постоянно действующих случайных возмущениях типа белый шум на асимптотически больших временных интервалах.

8. Анализ бифуркаций, вызванных шумом и связанных с изменением устойчивости равновесия по вероятности или с появлением новых притягивающих состояний в системах, близких к гамильтоновым.

9. Изучение совместного влияние шума и возмущений с асимптотически постоянной резонансной частотой на устойчивость гамильтоновых систем.

10. Исследование возникновения резонансных решений с неограниченно растущей амплитудой и их стохастической устойчивости в системах с затухающими чирпированными возмущениями и белым шумом.

Многие современные задачи нелинейной математической физики сводятся к изучению дифференциальных уравнений с возмущениями, интенсивность которых затухает со временем. В частности, такие воздействия могут быть связаны с переходными процессами, внешними импульсами, реакциями на кратковременные изменения параметров или исчерпанием ресурсов. Известно, что затухающие возмущения могут существенно повлиять на качественные и асимптотические свойства решений предельных уравнений. Поэтому изучаемый в диссертации круг задач является **актуальным**. Асимптотика решений на бесконечности для

линейных уравнений и близкие задачи о спектре соответствующих дифференциальных операторов рассматривались в работах О. Перрона, Н. Левинсона, А. Винтнера, Ф.В. Аткинсона, П. Хартмана, А. Девинаца, У.А. Хариса и Д.А. Латса, Дж.С. Кассела, М. Пинто, В.Ш. Бурда, А. Самойленко, Ю.А. Коняева, П.Н. Нестерова, Н.Ф. Валеева и Я.Т. Султанаева, М.А. Наймарка, Б. Саймона, М.В. Федорюка, Дж.Д. Долларда и Ч.Н. Фридмана, М. Бен-Арци, М. Истхэма, А. Киселева, С. Денисова и М. Лукича. Асимптотика решений на бесконечности для нелинейных неавтономных систем исследовалась в работах П. Бутру, А.Д. Брюно, В.В. Козлова и С.Д. Фурты, И.В. Горючкиной, Л.А. Калякина. Качественное исследование асимптотически автономных систем проводилось в работах Л. Маркуса, Р. Беллмана, Х. Тиме, Л.Д. Пустыльникова, А.А. Мартынюка, Д. Като, А.А. Шестакова, Дж.А. Ланги, Дж.С. Робинсона, А. Суареса, П.Е. Клодена, С. Зигмунда., М. Расмуссена, К. Пёцше, И.Ю. Полехина. А. Фортунати, С. Виггинса, М. Канаделла, Р. де ла Льява и Д. Скарселлы. Влияние стохастических возмущений с затухающей интенсивностью на устойчивость и асимптотическое поведение решений на бесконечности обсуждалось в работах Т. Чана, Д. Уильямса, А.П. Коростелева, С. Мао, Дж.А.Д. Эпплби, А. Родкиной, О.И. Клесова и О.А. Тимошенко.

2. Личное участие соискателя ученой степени в получении результатов, изложенных в диссертации.

Содержание диссертации и положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Все представленные результаты получены лично автором.

3. Степень достоверности результатов проведенных соискателем исследований.

Достоверность результатов обеспечивается строгими доказательствами на основе фундаментальных положений качественной теории дифференциальных уравнений, теории устойчивости и теории стохастических дифференциальных уравнений. Основные результаты, изложенные в диссертации, опубликованы в работах [1]-[22] в рецензируемых научных журналах, включенных в базы Web of Science и Scopus, и в работах [23]-[29] в рецензируемых научных журналах, входящих в Scopus.

Список публикаций соискателя по теме диссертации

[1] Султанов, О. А. Устойчивость авторезонанса в диссипативных системах / О. А. Султанов // Уфимский математический журнал. — 2015. — Т. 7, № 1. — С. 59–71.

- [2] Sultanov, O. Random perturbations of parametric autoresonance / O. Sultanov // *Nonlinear Dynamics*. — 2017. — Vol. 89, № 4. — P. 2785–2793.
- [3] Sultanov, O. White noise perturbation of locally stable dynamical systems / O. Sultanov // *Stochastics and Dynamics*. — 2017. — Vol. 17, № 1. — P. 1750002.
- [4] Султанов, О. А. Стохастическая устойчивость динамической системы, возмущенной белым шумом / О. А. Султанов // *Матем. заметки*. — 2017. — Т. 101, № 1. — С. 130–139.
- [5] Sultanov, O. Stability and asymptotic analysis of the autoresonant capture in oscillating systems with combined excitation / O. Sultanov // *SIAM Journal of Applied Mathematics*. — 2018. — Vol. 78, № 6. — P. 3103–3118.
- [6] Sultanov, O. Lyapunov functions and asymptotic analysis of a complex analogue of the second Painlevé equation / O. Sultanov // *Journal of Physics: Conference Series*. — 2019. — Vol. 1205. — P. 012056.
- [7] Sultanov, O. Capture into parametric autoresonance in the presence of noise / O. Sultanov // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. — 2019. — Vol. 75. — P. 14–21.
- [8] Sultanov, O. A. Bifurcations of autoresonant modes in oscillating systems with combined excitation / O. A. Sultanov // *Studies in Applied Mathematics*. — 2020. — Vol. 144, № 2. — P. 213–241.
- [9] Sultanov, O. A. Autoresonance in oscillating systems with combined excitation and weak dissipation / O. A. Sultanov // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. — 2021. — Vol. 417. — P. 132835.
- [10] Sultanov, O. A. Bifurcations in asymptotically autonomous Hamiltonian systems under oscillatory perturbations / O. A. Sultanov // *Discrete and Continuous Dynamical Systems*. — 2021. — Vol. 41, № 12. — P. 5943–5978.
- [11] Sultanov, O. A. Damped perturbations of systems with center-saddle bifurcation / O. A. Sultanov // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. — 2021. — Vol. 31, № 9. — P. 2150137.
- [12] Sultanov, O. A. Bifurcations in asymptotically autonomous Hamiltonian systems subject to multiplicative noise / O. A. Sultanov // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. — 2022. — Vol. 32, № 11. — P. 2250164.
- [13] Sultanov, O. A. Stability and bifurcation phenomena in asymptotically Hamiltonian systems / O. A. Sultanov // *Nonlinearity*. — 2022. — Vol. 35, № 5. — P. 2513–2534.
- [14] Sultanov, O. A. Long-term behaviour of asymptotically autonomous Hamiltonian systems with multiplicative noise / O. A. Sultanov // *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*. — 2023. — Vol. 22, № 3. — P. 1818–1851.
- [15] Sultanov, O. A. Resonances in asymptotically autonomous systems with a decaying chirped-frequency excitation / O. A. Sultanov // *Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B*. — 2023. — Vol. 28, № 3. — P. 1719–1749.

- [16] Sultanov, O. A. Resonance in isochronous systems with decaying oscillatory perturbations / O. A. Sultanov // *Qualitative Theory of Dynamical Systems*. — 2024. — Vol. 23. — P. 295.
- [17] Sultanov, O. A. Stability of asymptotically Hamiltonian systems with damped oscillatory and stochastic perturbations / O. A. Sultanov // *Communications on Pure and Applied Analysis*. — 2024. — Vol. 23, № 4. — P. 432–462.
- [18] Sultanov, O. A. Asymptotic regimes in oscillatory systems with damped nonresonant perturbations / O. A. Sultanov // *Nonlinear Dynamics*. — 2024. — Vol. 112, № 4. — P. 2589–2609.
- [19] Султанов, О. А. Стохастическая устойчивость модели авторезонанса с бифуркацией типа центр-седло / О. А. Султанов // *Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика*. — 2024. — Т. 32, № 2. — С. 147–159.
- [20] Sultanov, O. A. Resonance modes in isochronous systems with a decaying combined excitation / O. A. Sultanov // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. — 2025. — Vol. 46, № 7. — P. 3198–3211.
- [21] Sultanov, O. A. Resonances in nonlinear systems with a decaying chirped frequency excitation and noise / O. A. Sultanov // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. — 2025. — Vol. 145. — P. 108713.
- [22] Sultanov, O. A. Nonlinear resonance in oscillatory systems with decaying perturbations / O. A. Sultanov // *Discrete and Continuous Dynamical Systems*. — 2025. — Vol. 45, № 5. — P. 1691–1719.
- [23] Sultanov, O. A. Random perturbations of autoresonance in oscillating systems with small dissipation / O. A. Sultanov // *Journal of Mathematical Sciences*. — 2016. — Vol. 219, № 2. — P. 267–274.
- [24] Sultanov, O. A. Stochastic perturbations of stable dynamical systems: trajectory-wise approach / O. A. Sultanov // *Journal of Mathematical Sciences*. — 2019. — Vol. 241, № 3. — P. 340–353.
- [25] Sultanov, O. A. On the almost sure stability of dynamical systems with respect to white noise / O. A. Sultanov // *Journal of Mathematical Sciences*. — 2021. — Vol. 252, № 2. — P. 242–246.
- [26] Sultanov, O. A. Decaying oscillatory perturbations of Hamiltonian systems in the plane / O. A. Sultanov // *Journal of Mathematical Sciences*. — 2021. — Vol. 257, № 5. — P. 705–719.
- [27] Sultanov, O. A. Lyapunov functions and asymptotics at infinity of solutions of equations that are close to Hamiltonian equations / O. A. Sultanov // *Journal of Mathematical Sciences*. — 2021. — Vol. 258, № 1. — P. 97–109.
- [28] Sultanov, O. A. Capture into resonance in nonlinear oscillatory systems with decaying perturbations / O. A. Sultanov // *Journal of Mathematical Sciences*. — 2022. — Vol. 262, № 3. — P. 374–389.
- [29] Sultanov, O. A. Asymptotic analysis of systems with damped oscillatory perturbations / O. A. Sultanov // *Journal of Mathematical Sciences*. — 2023. — Vol. 269, № 1. — P. 111–128.

4. Апробация результатов.

Результаты работы обсуждались на

1. общегородских семинарах им. А.М. Ильина по дифференциальным уравнениям математической физики ИМВЦ УФИЦ РАН (Уфа, 2016-2025);
2. семинарах по теории вероятностей и случайным процессам кафедры математики УГАТУ (2016-2018);
3. семинаре «Нелинейный анализ» факультета математики Потсдамского университета (Потсдам, 2018);
4. коллоквиуме Междисциплинарной исследовательской лаборатории им. П.Л. Чебышева СПбГУ (Санкт-Петербург, 2020);
5. семинаре Международной лаборатории динамических систем и приложений ВШЭ (Нижний Новгород, 2026);
6. международной конференции EquaDiff (Лион, 2015);
7. Уфимской международной математической конференции (Уфа, БашГУ, 2016);
8. Международной конференции по теории функций, посвящённой столетию А.Ф. Леонтьева (Уфа, БашГУ, 2017);
9. Международных конференциях «Проблемы математической физики и математическое моделирование» (Москва, МИФИ, 2017, 2018);
10. Международных конференциях по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям (DFDE) (Москва, РУДН, 2017, 2022);
11. Международной конференции «Спектральная теория и смежные вопросы» (Уфа, БГПУ, 2018);
12. Международных конференциях «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы», посвящённых выдающемуся математику И.Г. Петровскому (Москва, МГУ, 2021, 2025);
13. Международной конференции «Дифференциальные уравнения и оптимальное управление», посвящённая 100-летию со дня рождения академика Е.Ф. Мищенко (Москва, МИАН, 2022);
14. Международных конференциях «Нелинейные уравнения и комплексный анализ» (Р. Башкортостан, 2022, 2023, 2025);
15. Международной Воронежской весенней математической школе «Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения» (Воронеж, 2023);
16. Всероссийской конференции «Нелинейные дни» (Саратов, СГУ, 2023);
17. IV Конференции математических центров России (Санкт-Петербург, СПбГУ, 2024);
18. Международных научных конференциях «Уфимская осенняя математическая школа» (Уфа, УУНиТ, 2024, 2025);
19. Международной конференции «Динамические системы: устойчивость, управление, дифференциальные игры», посвящённая 100-

летию со дня рождения академика Н.Н. Красовского (Екатеринбург, ИММ УрО РАН, 2024);

20. VIII Международной конференции «Topological methods in dynamics and related topics» (Нижний Новгород, ВШЭ, 2025).

5. Новизна проведенных исследований.

Результаты диссертации являются новыми. Новизна работы заключается в разработке методов и получении результатов для задач, в которых не предполагаются линейность уравнений, гамильтонова структуры возмущений, наличие глобальных оценок правых частей уравнений и заранее заданных функций Ляпунова для возмущённых систем. Основные предположения, используемые в работе, связаны с локальным поведением предельной системы в окрестности равновесия и заданного асимптотического разложения возмущений на бесконечности.

6. Теоретическая и практическая значимость.

Результаты диссертационной работы носят теоретический характер и могут быть использованы при исследовании различных неавтономных систем обыкновенных и стохастических дифференциальных уравнений. Предложенная теория и разработанные методы применялись в задачах о стабилизации резонансных режимов, при исследовании решений возмущённых уравнений Пенлеве и уравнений, описывающих процесс самофокусировки.

7. Структура работы.

Диссертация состоит из введения, 9 глав, заключения и библиографии. В каждой главе выделены параграфы, содержащие постановку задач, формулировку результатов, их доказательства и примеры. Общий объём диссертации составляет 391 страницу. Список использованной литературы включает 285 наименований и содержит работы, опубликованные автором по теме диссертации.

8. Научная специальность, которой соответствует диссертация: 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика, а именно пункту 4 – «Качественная теория дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений», 6 – «Нелинейные дифференциальные уравнения и системы нелинейных дифференциальных уравнений»; 12 – «Асимптотическая теория дифференциальных уравнений и систем».

Выводы:

Диссертация является научно-квалификационной работой, в которой на основании выполненных автором исследований разработаны теоретические положения, совокупность которых можно квалифицировать как серьёзное научное достижение в области качественной теории дифференциальных уравнений, теории устойчивости и асимптотического анализа.

В частности, в работе:

1. Разработаны методы исследования качественных и асимптотических свойств решений для асимптотически автономных систем дифференциальных уравнений, близких к гамильтоновым, под действием детерминированных и стохастических возмущений с затухающей интенсивностью.

2. Описаны бифуркации в гамильтоновых системах под действием затухающих возмущений. Найдены условия, при которых равновесие системы остаётся нейтрально устойчивым, становится асимптотически устойчивым, либо теряет устойчивость с возникновением устойчивых решений, близких к периодическим. Показана неэффективность метода линеаризации для асимптотически автономных систем.

3. Установлены условия, при которых сохраняется или исчезает бифуркация центр-седло в системах с затухающими возмущениями. Описаны асимптотические режимы для решений и условия их устойчивости при различных значениях бифуркационного параметра предельной системы.

4. Описаны режимы фазового захвата и фазового дрейфа для решений нелинейных систем, возникающих под действием затухающих осциллирующих возмущений с асимптотически постоянной резонансной частотой. Выявлена роль возмущений в смещении границы устойчивости равновесия.

5. Найдены условия существования и устойчивости захвата осциллирующих систем в нелинейный резонанс под действием затухающих возмущений. Выведена и исследована модельная система, описывающая усреднённую динамику.

6. Доказано существование и устойчивость резонансных решений с неограниченно растущей энергией в нелинейных системах с затухающими возмущениями с чирпированной частотой. Построена асимптотика для общих резонансных решений на бесконечности по времени.

7. Определены классы стохастических возмущений типа белый шум, при которых гарантируется устойчивость динамических систем по вероятности на асимптотически больших временных интервалах и на полуоси. Предложена конструкция стохастических функций Ляпунова на основе локальной функции Ляпунова невозмущённой детерминированной системы.

8. Найдены условия на структуру и параметры шума, при которых равновесие в стохастических системах, близких к гамильтоновым, либо становится асимптотически устойчивым по вероятности, либо теряет устойчивость. Доказана устойчивость равновесия по вероятности на асимптотически больших временных интервалах в некоторых промежуточных случаях. Показана неэффективность метода линеаризации при анализе устойчивости асимптотически автономных стохастических систем.

9. Описаны условия устойчивости равновесия по вероятности в режимах фазового захвата и фазового дрейфа в нелинейных гамильтоновых

системах под действием шума и резонансных возмущений. Выведена и исследована модельная система обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающая усреднённую динамику.

10. Найдены условия существования и устойчивости резонансных решений с неограниченно растущей амплитудой и фазой, синхронизированной с чирпированными возмущениями, при наличии белого шума. Определены пороговые значения и их зависимость от параметров возмущений.

Диссертация Султанова Оскара Анваровича на тему «Устойчивость и бифуркационные явления в нелинейных системах с затухающими возмущениями» удовлетворяет п. 9-11, 13, 14 постановления Правительства Российской Федерации от 24 сентября 2013 г. № 842 «О порядке присуждения ученых степеней» (в редакции от 16.10.2024 г.) и рекомендуется к защите на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по научной специальности 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика.

Заключение принято на расширенном заседании отдела дифференциальных уравнений Института математики с вычислительным центром – обособленного структурного подразделения Федерального государственного бюджетного научного учреждения Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук.

На заседании присутствовало 15 человек, в том числе 8 докторов наук, 7 кандидатов наук. Результаты голосования: «за» - 15 чел., «против» - 0 чел., «воздержалось» - 0 чел. (протокол № 1 от 27 января 2026 г.).

Председатель заседания
д.ф.-м.н., главный научный сотрудник,
заведующий отделом
дифференциальных уравнений
ИМВЦ УФИЦ РАН

Д.И. Борисов

Подпись Борисова Д.И. заверяю:
Ученый секретарь ИМВЦ УФИЦ РАН
кандидат физико-математических наук



В.Ф. Вильданова