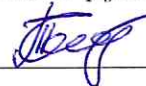


На правах рукописи



Захарова Татьяна Анатольевна

**КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ
С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ
И ДРОБНЫЕ СТЕПЕНИ ОПЕРАТОРОВ**

1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Челябинск — 2026

Работа выполнена на кафедре математического анализа Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Челябинский государственный университет»

Научный руководитель: **Федоров Владимир Евгеньевич**

доктор физико-математических наук, профессор

Официальные оппоненты: **Ситник Сергей Михайлович**

доктор физико-математических наук, доцент, ФГАОУ ВО «Белгородский государственный национальный исследовательский университет», профессор кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования

Фалалеев Михаил Валентинович

доктор физико-математических наук, профессор, ФГБОУ ВО «Иркутский государственный университет», заведующий кафедрой математического анализа и дифференциальных уравнений

Ведущая организация:

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Новосибирский национальный исследовательский государственный университет», г. Новосибирск

Защита диссертации состоится «28» сентября 2026 года в 15⁰⁰ на заседании объединённого диссертационного совета 99.0.110.02, созданного на базе ФГБНУ Уфимский федеральный исследовательский центр Российской академии наук, ФГБОУ ВО «Уфимский университет науки и технологий», по адресу: 450008, г. Уфа, ул. К. Маркса, д. 12.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБОУ ВО «Уфимский университет науки и технологий» и на сайте <http://uust.ru/>.

Автореферат разослан

«____» _____ 2026 г.

Ученый секретарь диссертационного совета

доктор физико-математических наук



Исаев Константин Петрович

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования и степень ее разработанности.

Методы дробного интегро-дифференциального исчисления все чаще используются в задачах математического моделирования реальных процессов в средах со сложной структурой, когда возникают эффекты памяти, нелокального взаимодействия, в частности, в задачах теории вязкоупругости. Теория дробных дифференциальных уравнений активно развивается, при этом важное место занимают уравнения с дробными производными в банаховых пространствах. Развитие теории дробных дифференциальных уравнений в банаховых пространствах дает новые инструменты для изучения линейных и нелинейных задач математической физики. Путем редукции к таким уравнениям исследуются целые классы начально-краевых задач для уравнений в частных производных. В связи с этим тема исследования настоящей диссертационной работы является актуальной.

Теория дифференциальных уравнений с дробными производными активно развивается начиная с середины XX века. Значительный вклад в это развитие внесли работы А. Н. Герасимова, М. Caputo, К. В. Oldham, J. Spanier, С. Г. Самко, А. А. Килбаса, О. И. Маричева, К. Nishimoto, К. S. Miller, В. Ross, I. Podlubny, А. М. Нахушева, А. В. Псху, В. В. Учайкина, Р. К. Газизова, А. А. Касаткина, С. Ю. Лукащук, К. Diethelm, М. О. Мамчуева, С. М. Ситника, Э. Л. Шишкиной и многих других исследователей. В последние годы активно исследуются уравнения с дробными производными в банаховых пространствах, поскольку результаты, полученные в этой области, позволяют применять их к начально-краевым задачам для широких классов уравнений и систем уравнений в частных производных.

Для линейных уравнений первого порядка в банаховых пространствах построена теория полугрупп операторов, в работах Э. Хилле, Р. Филлипса, К. Йосиды, С. Г. Крейна. Важную роль в ней, в частности, играют секториальные операторы, порождающие аналитические полугруппы операторов, и их дробные степени, позволяющие исследовать вопросы однозначной разрешимости задачи Коши для квазилинейных уравнений в частных производных, в которых нелинейность зависит от производных по пространственным переменным (см. работы А. Разу, Д. Хенри).

Разрешающие семейства различных интегральных и интегро-дифференциальных уравнений, являющиеся обобщением разрешающих полугрупп операторов, исследовались в работах J. Prüss, G. Da Prato и M. Iannelli, М. Костича, В. Е. Федорова и А. Д. Годовой.

Для уравнений с дробной производной Герасимова — Капуто в банаховых пространствах теория разрешающих семейств операторов была построена в работах Э. Бажлековой. В них введён в рассмотрение класс секториальных операторов, порождающих аналитическое в секторе разрешающее семейство операторов, что позволило распространить методы теории полугрупп операторов на уравнения дробного порядка. В работах В. Е. Федорова, М. В. Плехановой и их учеников методы теории разрешающих семейств операторов, в том числе аналитических, были распространены на разрешенные относительно старшей производной линейные и нелинейные уравнения в банаховых пространствах с дробными производными Герасимова — Капуто, Римана — Лиувилля, Джрбашяна — Нерсисяна.

Уравнения с вырожденным оператором при старшей производной будем называть вырожденными эволюционными уравнениями. Исследованию

вырожденных эволюционных уравнений первого порядка, называемых также уравнениями соболевского типа, посвящены работы С. Л. Соболева и его учеников и последователей, а также W. R. Carroll, R. E. Showalter, Н. А. Сидорова, Б. В. Логинова, М. В. Фалалеева, Г. В. Демиденко, С. В. Успенского, Ю. Е. Бояринцева, В. Ф. Чистякова, М. В. Булатова, А. И. Кожанова, С. Г. Пяткова, И. Е. Егорова, С. В. Попова, А. Г. Свешникова, М. О. Корпусова, А. Б. Альшина, Ю. Д. Плетнера, И. А. Шишмарева, Е. И. Кайкиной, П. И. Наумкина. Разрешающие полугруппы операторов таких уравнений исследовали в своих работах А. Favini, А. Yagi, И. В. Мельникова, А. Филинков, Г. А. Свиридюк, В. Е. Федоров. Для линейных и квазилинейных вырожденных эволюционных уравнений с дробными производными в последние годы получены результаты о разрешающих семействах операторов, о существовании и единственности решения начальных задач в работах М. Костича, В. Е. Федорова, М. В. Плехановой и их учеников.

Цели и задачи. Целью диссертационной работы является исследование вопросов существования и единственности решения начальных задач для квазилинейных уравнений с дробными производными Герасимова — Капуто или Римана — Лиувилля.

В задачи диссертационной работы входит получение условий однозначной разрешимости задачи Коши для квазилинейных уравнений, разрешенных относительно старшей дробной производной Герасимова — Капуто, в случае секториальности оператора в линейной части уравнения, а также исследование вопросов однозначной разрешимости задачи Шоуолтера — Сидорова для квазилинейных уравнений с вырожденным оператором при старшей производной Герасимова — Капуто в предположении, что пара линейных замкнутых операторов в уравнении (при дробной производной и при искомой функции) секториальна. Еще одной задачей является применение абстрактных результатов к исследованию начально-краевых задач для уравнений и систем уравнений в частных производных.

Методология и методы исследования. При проведении исследований в данной диссертации используются методы теории дифференциальных уравнений, функционального анализа, дробного интегро-дифференциального исчисления.

Предполагается, что линейная часть рассматриваемых квазилинейных уравнений порождает аналитическое разрешающее семейство операторов. Начальные задачи для таких уравнений методами теории разрешающих семейств операторов редуцируются к уравнениям вида $z = Fz$ в специально подобранном функциональном пространстве, где нелинейный оператор F является суммой решения линейного однородного уравнения и свертки дробной производной порядка $1 - \alpha$, где α — порядок уравнения, от разрешающего семейства операторов и нелинейного оператора, зависящего от нескольких младших дробных производных и от дробных интегралов функции z . С помощью теоремы Банаха о неподвижной точке сжимающего отображения в полном метрическом пространстве получаем условия сжимаемости оператора F в случае локальной липшицевости нелинейного оператора или условия сжимаемости оператора F^p при достаточно большой степени $p \in \mathbb{N}$ в случае равномерной липшицевости нелинейного оператора. В результате получены теоремы о локальной однозначной разрешимости и глобальной однозначной разрешимости квазилинейных уравнений соответственно.

Для исследования вырожденных квазилинейных уравнений использует-

ся существование пар инвариантных подпространств для секториальной пары операторов из линейной части уравнения, что позволяет редуцировать задачу Шоултера — Сидорова к системе, состоящей из задачи Коши для уравнения, разрешенного относительно старшей дробной производной, на подпространстве без вырождения и уравнения меньшего порядка на подпространстве вырождения. При некоторых дополнительных условиях на нелинейный оператор такую систему удастся разрешить с использованием полученных в диссертационной работе результатов о разрешимости невырожденных квазилинейных уравнений.

Начально-краевые задачи для нелинейных уравнений в частных производных исследуются путем их редукции к начальным задачам для квазилинейных уравнений в банаховых пространствах с последующим применением полученных абстрактных результатов.

Научная новизна. Получены условия однозначной разрешимости задачи Коши для новых классов квазилинейных уравнений в банаховых пространствах с нелинейной частью, зависящей от нескольких дробных производных Герасимова — Капуто. Линейная часть рассматриваемых уравнений порождает аналитическое в секторе разрешающее семейство операторов. Рассмотрены случаи локальной и глобальной разрешимости, классических и обобщенных решений, разрешенных относительно старшей производной и вырожденных эволюционных уравнений. Абстрактные результаты применяются при исследовании новых начально-краевых задач для нелинейных уравнений в частных производных.

Для секториальных операторов, т. е. порождающих аналитические в секторе разрешающие семейства операторов для уравнений с дробной производной, в работе введено в рассмотрение понятие комплексной степени. Это позволило построить шкалу банаховых пространств, совпадающих с областями определения дробных степеней секториального оператора, и исследовать квазилинейные уравнения с несколькими производными Герасимова — Капуто или Римана — Лиувилля, в которых нелинейная часть задана и является липшицевой в некотором пространстве из этой шкалы (и не задана на всем пространстве). Полученные результаты о разрешимости дифференциальных уравнений в банаховых пространствах позволили исследовать новые классы начально-краевых задач для уравнений и систем уравнений в частных производных дробного порядка по времени, в которых нелинейная часть зависит от производных по пространственным переменным. В частности, исследована начально-краевая задача для уравнения Кана — Хиллиарда дробного порядка по времени.

Теоретическая и практическая значимость работы. Диссертационная работа посвящена развитию методов качественного исследования квазилинейных эволюционных уравнений с дробными производными Герасимова — Капуто в банаховых пространствах. Ключевую роль в исследовании играет введение в рассмотрение комплексных степеней секториального оператора. Использование дробных степеней позволяет построить шкалу банаховых пространств. Нелинейный оператор предполагается заданным и липшицевым в одном из пространств этой шкалы, что дает возможность использовать полученные абстрактные результаты при исследовании начально-краевых задач для уравнений с дробной производной по времени, нелинейных относительно производных по пространственным переменным. В то же время полученные результаты о дробных степенях операторов являются естественным обобщени-

ем аналогичных результатов классической теории аналитических полугрупп операторов.

Практическая значимость работы заключается в возможности применения полученных абстрактных результатов к постановке и изучению начально-краевых задач для нелинейных уравнений в частных производных дробного порядка по времени, возникающих в прикладных задачах теории вязкоупругости, гидродинамики, математической биологии, теории финансов и др. Приведенные в работе примеры, в частности, начально-краевые задачи для дробных по времени уравнений Кана — Хиллиарда, Аллена — Кана демонстрируют эффективность разработанных методов.

Положения, выносимые на защиту.

1. Построена теория комплексных степеней для операторов, порождающих аналитические разрешающие семейства уравнений с дробной производной. Определена шкала банаховых пространств, совпадающих с областями определения дробных степеней секториального оператора.
2. Доказаны теоремы о локальной и глобальной однозначной разрешимости задачи Коши для разрешенных относительно старшей производной квазилинейных уравнений в банаховых пространствах с секториальным оператором в линейной части и с нелинейной частью, зависящей от нескольких младших дробных производных Герасимова — Капуто. Рассмотрены случаи классических и обобщенных решений.
3. Получены результаты об однозначной разрешимости задачи Шоултера — Сидорова для вырожденных квазилинейных уравнений с секториальной парой линейных операторов и с нелинейным оператором, зависящим от нескольких младших дробных производных Герасимова — Капуто. Установлены локальное и глобальное существование и единственность классического и обобщенного решений.
4. Абстрактные результаты использованы при изучении начально-краевых задач для некоторых классов уравнений и систем уравнений в частных производных с дробными производными Герасимова — Капуто по времени, в частности, для уравнений Кана — Хиллиарда, Аллена — Кана дробного порядка по времени.

Степень достоверности и апробация результатов. Строгость применяемых математических методов исследования, корректность использования математического аппарата при доказательстве утверждений в данной диссертации свидетельствуют о достоверности полученных результатов.

Результаты диссертации докладывались и обсуждались на заседаниях научного семинара кафедры математического анализа Челябинского государственного университета (руководитель проф. В. Е. Федоров), на Общегородском семинаре имени А. М. Ильина по дифференциальным уравнениям математической физики (руководители проф. В. Ю. Новокшенов, проф. Л. А. Калякин), на Межгородском семинаре «Неклассические задачи математической физики» (руководитель проф. А. И. Кожанов), на конференциях: Международная научная конференция «Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения» (Уфа, 2022 г., 2023 г., 2025 г., 2026 г.); «The 9th International Conference on Differential and Functional Differential Equations» (Москва, 2022 г.); Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Суздаль, 2022 г.); «О. А. Ladyzhenskaya

Centennial Conference on PDE's» (Санкт-Петербург, 2022 г.); Международная научная конференция «Неклассические уравнения математической физики и их приложения» (Ташкент, 2022 г.); X Международная конференция по математическому моделированию, посвященная 30-летию Академии наук Республики Саха (Якутия) и памяти первого Президента Академии наук РС(Я), член-корреспондента РАН В. В. Филиппова (Якутск, 2023 г.); Международная научная конференция «Уфимская осенняя математическая школа» (Уфа, 2023 г.); VII Международная конференция «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики» (Нальчик, 2023 г.); Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна, посвященная памяти академика В. П. Маслова (Воронеж, 2024 г.); Летние чтения (воркшоп) «Неклассические дифференциальные уравнения и математическое моделирование» (Самара, 2024 г.).

Публикации. Список публикаций автора включает 19 работ, из которых 5 опубликованы в журналах, входящих в Перечень рецензируемых научных изданий списка ВАК или приравненных к ним, поскольку входят в издания, индексируемые международными реферативными базами данных и системами цитирования Web of Science и/или Scopus [1–5]. Также результаты диссертации опубликованы в работах [6–19].

Личный вклад автора. Соавторами соискателя в работах [1–3] внесен следующий вклад. В статье [1] А. В. Авилович предложена идея определения чисто мнимой степени секториального оператора (перед теоремой 2), В. Е. Федоров предложил постановку начальной задачи (10), а именно, ему принадлежит идея использовать величину m^{**} , связанную с дефектом m^* уравнения с несколькими дробными производными Римана — Лиувилля, для того, чтобы гарантировать непрерывность вплоть до точки $t = t_0$ младших дробных производных Римана — Лиувилля решения $D^{\alpha_l} z$, $l = 1, 2, \dots, n$, являющихся аргументами нелинейного оператора в исследуемом уравнении. В работе [2] В. Е. Федоровым предложена идея доказательства леммы 3 о полноте пространства $C^{m-1, \{\alpha_l\}}([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$, М. Костичем — идея доказательства леммы 4 о гельдеровости функции, имеющей непрерывную на отрезке дробную производную Герасимова — Капуто. В [3] В. Е. Федорову принадлежит идея доказательства леммы 3 об эквивалентности разрешимости интегро-дифференциального уравнения с младшими дробными производными и задачи Коши для квазилинейного уравнения с дробными производными Герасимова — Капуто.

В диссертацию вошли только результаты, принадлежащие лично ее автору.

Объем и структура диссертации. Диссертационная работа объемом в 121 страницы содержит введение, 3 главы, заключение, список обозначений и соглашений, список литературы, состоящий из 115 источников.

Краткое содержание работы

Во **введении** обоснована актуальность темы диссертации, проанализирована степень разработанности темы исследования, определены цели и задачи, сформулированы научная новизна, теоретическая и практическая значимость работы, методология и методы исследования, положения, выносимые на защиту, а также приведены сведения о степени достоверности, апробации результатов и публикациях автора.

Первая глава посвящена построению теории комплексных степеней секториальных операторов и ее применению к исследованию квазилинейных урав-

нений с дробными производными Герасимова — Капуто и Римана — Лиувилля.

Пусть $\mathcal{Z}$ — банахово пространство. Для $t_0 \in \mathbb{R}$, $h : (t_0, \infty) \rightarrow \mathcal{Z}$ интеграл Римана — Лиувилля порядка $\beta > 0$ имеет вид

$$J^\beta h(t) := \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_{t_0}^t (t-s)^{\beta-1} h(s) ds, \quad t > t_0,$$

$J^0 h(t) := h(t)$. Дробная производная Римана — Лиувилля порядка $\alpha \in (m-1, m]$, $m \in \mathbb{N}$, имеет вид ${}^R D^\alpha h(t) = D^m J^{m-\alpha} h(t)$, где D^m — обычная производная целого порядка m .

Пусть $m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, D^α — дробная производная Герасимова — Капуто, т. е.

$$D^\alpha h(t) := D^m J^{m-\alpha} \left(h(t) - \sum_{k=0}^{m-1} h^{(k)}(t_0) \frac{(t-t_0)^k}{k!} \right).$$

Для $\beta \leq 0$ обозначим $D^\beta h(t) := J^{-\beta} h(t)$.

Через $\mathcal{L}(\mathcal{Z})$ обозначим банахову алгебру линейных ограниченных операторов в пространстве $\mathcal{Z}$, а через $\mathcal{Cl}(\mathcal{Z})$ — множество линейных замкнутых плотно определенных в $\mathcal{Z}$ операторов. В §1.1 вводится понятие секториального оператора, т. е. оператора класса $\mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$, определяемого следующим образом.

Для $\alpha > 0$, $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$, $a_0 \geq 0$ обозначим через $\mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$ класс операторов $A \in \mathcal{Cl}(\mathcal{Z})$, таких, что выполняются следующие два условия:

(i) для всех $\lambda \in S_{\theta_0, a_0} := \{\mu \in \mathbb{C} : |\arg(\mu - a_0)| < \theta_0, \mu \neq a_0\}$ имеем $\lambda^\alpha \in \rho(A) := \{\mu \in \mathbb{C} : R_\mu(A) := (\mu I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})\}$;

(ii) для каждого $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a > a_0$ существует $K = K(\theta, a) > 0$, такое, что для всех $\lambda \in S_{\theta, a}$

$$\|R_{\lambda^\alpha}(A)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq \frac{K(\theta, a)}{|\lambda|^\alpha}.$$

Обозначим также

$$\mathcal{A}_\alpha := \bigcup_{\substack{\theta_0 \in (\pi/2, \pi) \\ a_0 \geq 0}} \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0).$$

При $-A \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, 0)$, $0 \in \rho(A)$ и $\operatorname{Re} \gamma > 0$ определяются комплексные степени оператора A

$$A^{-\gamma} := \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} z^{-\gamma} (zI - A)^{-1} dz,$$

где $\mathcal{C} := \mathcal{C}_+ \cup \mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}_-$, $\mathcal{C}_\pm := \{z = re^{\pm i\alpha\omega} : r \in (\alpha\varepsilon, \infty)\}$, $\mathcal{C}_0 := \{z = \alpha\varepsilon e^{i\varphi} : \varphi \in [-\alpha\omega, \alpha\omega]\}$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$ и $\omega \in (\frac{\pi-\theta_0}{\alpha}, \frac{\pi}{2\alpha})$. Для $0 < \operatorname{Re} \gamma < 1$ получено следующее интегральное представление

$$A^{-\gamma} = \frac{\sin \pi \gamma}{\pi} \int_0^\infty t^{-\gamma} (tI + A)^{-1} dt.$$

Доказана теорема 1.1.1 о том, что семейство операторов $\{A^{-\gamma} : \operatorname{Re} \gamma > 0\}$ образует аналитическую полугруппу.

Для $\operatorname{Re} \gamma > 0$ определим оператор $A^\gamma := (A^{-\gamma})^{-1}$ на D_{A^γ} , $D_{A^\gamma} = \operatorname{im} A^{-\gamma} := \{y = A^{-\gamma}x : x \in \mathcal{Z}\}$, $A^0 := I$. Установлены основные свойства комплексных степеней: замкнутость, вложения их областей определения, свойство сложения степеней (теорема 1.1.2). В теореме 1.1.3 получено интегральное представление для положительных степеней

$$A^\gamma z = \frac{\sin \pi \gamma}{\pi} \int_0^\infty t^{\gamma-1} A(tI + A)^{-1} z dt, \quad 0 < \operatorname{Re} \gamma < 1.$$

В §1.2 вводятся разрешающие семейства операторов для уравнений дробного порядка. Известно¹, что при $\alpha > 0$, $a_0 \geq 0$, $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$, $-A \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$, $\beta \in \mathbb{R}$ определены операторы

$$Z_\beta(t) := \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \mu^{\alpha-1+\beta} R_{\mu^\alpha}(-A) e^{\mu t} d\mu, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

где $\Gamma := \Gamma_+ \cup \Gamma_- \cup \Gamma_0$, $\Gamma_\pm := \{\mu \in \mathbb{C} : \mu = a + re^{\pm i\theta}, r \in (\delta, \infty)\}$, $\Gamma_0 := \{\mu \in \mathbb{C} : \mu = a + \delta e^{i\varphi}, \varphi \in [-\theta, \theta]\}$ для $\delta > 0$, $a > a_0$, $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$. Отметим, что при $\alpha = 1$ операторы $Z_0(t)$ образуют аналитическую полугруппу. Для $Z_\beta(t)$ справедливы оценки

$$\|Z_\beta(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq C_\beta e^{at} (t^{-1} + a)^\beta \quad (\beta \geq 0), \quad \|Z_\beta(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq C_\beta e^{at} t^{-\beta} \quad (\beta < 0).$$

В теореме 1.2.2 устанавливается связь разрешающих семейств $Z_\beta(t)$ с дробными степенями оператора A .

Теорема 1.2.2. Пусть $\alpha > 0$, $-A \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, 0)$, $0 \in \rho(A)$. Тогда

- (i) $Z_\beta(t) : \mathcal{Z} \rightarrow D_{A^\gamma}$ для всех $\beta \in \mathbb{R}$, $\operatorname{Re} \gamma \in [0, 1)$, $t > 0$;
- (ii) $Z_\beta(t) A^\gamma z = A^\gamma Z_\beta(t) z$ для $\beta \in \mathbb{R}$, $\gamma \in \mathbb{C}$, $z \in D_{A^\gamma}$;
- (iii) для $\beta \in \mathbb{R}$, $\operatorname{Re} \gamma < 1$, $t > 0$ оператор $A^\gamma Z_\beta(t)$ ограничен;
- (iv) для $\operatorname{Re} \gamma \in (0, 1)$, $-\alpha \operatorname{Re} \gamma < \beta < 1 - \alpha \operatorname{Re} \gamma$

$$A^{-\gamma} = \frac{\alpha \sin \pi \gamma}{\sin(\pi(\alpha \gamma + \beta)) \Gamma(\alpha \gamma + \beta)} \int_0^\infty t^{\alpha \gamma + \beta - 1} Z_\beta(t) dt;$$

- (v) для $\beta \in \mathbb{R}$, $t > 0$ $\|AZ_\beta(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq Ct^{-\alpha-\beta}$;
- (vi) для $\operatorname{Re} \gamma \in (0, 1)$, $\beta > -\alpha \operatorname{Re} \gamma$, $t > 0$ $\|A^\gamma Z_\beta(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq C_\gamma t^{-\alpha \operatorname{Re} \gamma - \beta}$;
- (vii) для $\beta < 1$, $\operatorname{Re} \gamma \in (0, 1)$, $z \in D_{A^\gamma}$

$$\|D^{-\beta} Z_\beta(t) z - z\|_{\mathcal{Z}} \leq C_\gamma t^{\alpha \operatorname{Re} \gamma} \|A^\gamma z\|_{\mathcal{Z}}.$$

В §1.3 рассматривается задача Коши

$$D^k z(t_0) = z_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (1)$$

для квазилинейного уравнения

$$D^\alpha z(t) + Az(t) = B(t, D^{\alpha_1} z(t), D^{\alpha_2} z(t), \dots, D^{\alpha_n} z(t)), \quad (2)$$

¹Федоров В. Е., Авилов А. С. Задача типа Коши для вырожденного уравнения с производной Римана — Лиувилля в секториальном случае // Сиб. мат. журн. 2019. Т. 60, № 2. С. 461–477.

где $m - 1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \alpha$, оператор $-A \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, 0)$, $0 \in \rho(A)$, D^β — дробная производная Гerasимова — Капуто при $\beta > 0$ и дробный интеграл Римана — Лиувилля при $\beta \leq 0$.

Вводятся пространства $\mathcal{Z}_\gamma := D_{A^\gamma}$ с нормой $\|\cdot\|_\gamma := \|A^\gamma \cdot\|_Z$, которые образуют шкалу банаховых пространств. Нелинейный оператор B определен на открытом множестве $U \subset \mathbb{R} \times \mathcal{Z}_\gamma^n$ и для каждой точки $(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \in U$ существует окрестность $V \subset U$ и константы $q > 0$, $\delta \in (0, 1]$, такие, что для всех $(t, y_1, \dots, y_n), (s, v_1, \dots, v_n) \in V$

$$\|B(t, y_1, y_2, \dots, y_n) - B(s, v_1, v_2, \dots, v_n)\|_Z \leq q \left(|t - s|^\delta + \sum_{l=1}^n \|y_l - v_l\|_\gamma \right). \quad (3)$$

Классическим решением задачи Коши (1), (2) на отрезке $[t_0, t_1]$ называется функция $z \in C((t_0, t_1]; D_A) \cap C^{m-1}([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$, такая, что $D^\alpha z \in C((t_0, t_1]; \mathcal{Z})$, $D^{\alpha_l} z \in C([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$, $l = 1, 2, \dots, n$, выполняются начальные условия (1), включение $(t, D^{\alpha_1} z(t), D^{\alpha_2} z(t), \dots, D^{\alpha_n} z(t)) \in U$ при всех $t \in [t_0, t_1]$ и равенство (2) при всех $t \in (t_0, t_1]$.

Используя начальные данные задачи Коши, определим

$$\tilde{z}(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(t - t_0)^k}{k!} z_k, \quad \tilde{z}_l = D^{\alpha_l} \tilde{z}(t_0), \quad l = 1, 2, \dots, n.$$

Если при некотором $l \in \{1, 2, \dots, n\}$ $\alpha_l = k \in \{0, 1, \dots, m - 1\}$, то $\tilde{z}_l = z_k$, иначе $\tilde{z}_l = 0$.

Теорема 1.3.3. Пусть $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n \leq 1 < \alpha < 2$, $-A \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, 0)$, $0 \in \rho(A)$, отображение $B : U \rightarrow \mathcal{Z}$ удовлетворяет условию (3) при $\gamma \in [0, 1 - \frac{1}{\alpha})$, $z_0, z_1 \in \mathcal{Z}_{\gamma+1}$, $(t_0, \tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \dots, \tilde{z}_n) \in U$. Тогда для некоторого $t_1 > t_0$ существует единственное решение задачи Коши $z(t_0) = z_0$, $D^1 z(t_0) = z_1$ для уравнения (2) на отрезке $[t_0, t_1]$.

Теорема 1.3.4. Пусть $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n \leq 0 < \alpha \leq 1$, $-A \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, 0)$, $0 \in \rho(A)$, отображение $B : U \rightarrow \mathcal{Z}$ удовлетворяет условию (3) при $\gamma \in [0, 1]$, $z_0 \in \mathcal{Z}_{1+\gamma}$, $(t_0, \tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \dots, \tilde{z}_n) \in U$. Тогда для некоторого $t_1 > t_0$, существует единственное решение задачи Коши $z(t_0) = z_0$ для уравнения (2) на $[t_0, t_1]$.

В §1.4 получены аналогичные результаты о глобальной разрешимости на заранее заданном отрезке $[t_0, T]$ при условии, что нелинейный оператор определен на $[t_0, T] \times \mathcal{Z}_\gamma^n$ и константы $q > 0$ и $\delta \in (0, 1]$ в условии (3) можно выбрать сразу для всех $(t, y_1, \dots, y_n), (s, v_1, \dots, v_n) \in [t_0, T] \times \mathcal{Z}_\gamma^n$.

В §1.5 полученные абстрактные результаты применяются к исследованию начально-краевой задачи

$$D^\alpha v(\xi, t) = \Delta v(\xi, t) + \sum_{l=1}^n D_t^{\alpha_l} v(\xi, t) \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial \xi_i} D_t^{\alpha_i} v(\xi, t), \quad \xi \in \Omega, \quad t > t_0,$$

$$v(\xi, t_0) = v_0(\xi), \quad \xi \in \Omega,$$

$$v(\xi, t) = 0, \quad \xi \in \partial\Omega, \quad t > t_0,$$

в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Показано, что оператор $-A = \Delta$ с граничным условием Дирихле секториален, а нелинейный оператор удовлетворяет условиям теоремы 1.3.4 при $\gamma > 3/4$.

В §1.6 в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ исследована начально-краевая задача для уравнения Кана — Хиллиарда дробного порядка $\alpha \in (0, 1)$ по времени

$$\begin{aligned} D_t^\alpha v(\xi, t) &= \nu \Delta (v^3(\xi, t) - v(\xi, t) - \mu \Delta v(\xi, t)) = \\ &= \nu (6v|\nabla v|^2 + (3v^2 - 1)\Delta v - \mu \Delta^2 v), \quad (\xi, t) \in \Omega \times (t_0, t_1], \end{aligned} \quad (4)$$

$$v(\xi, t) = \Delta v(\xi, t) = 0, \quad (\xi, t) \in \partial\Omega \times (0, t_1], \quad (5)$$

$$v(\xi, 0) = v_0, \quad \xi \in \Omega. \quad (6)$$

Показано, что оператор $A = \mu\nu\Delta^2$ с краевыми условиями (5) является секториальным, а нелинейный оператор из уравнения (4) удовлетворяет условию (3) при $\gamma \in (\frac{d}{d+2}, 1)$, $\gamma \geq \frac{1}{2}$.

Теорема 1.6.1. Пусть $0 < \alpha < 1$, $\gamma \in (\frac{d}{d+2}, 1)$, $\gamma \geq \frac{1}{2}$, $v_0 \in \mathcal{Z}_{\gamma+1}$. Тогда для некоторого $t_1 > t_0$ существует единственное решение задачи (4)–(6).

В §1.7 изучается квазилинейное уравнение с дробными производными Римана — Лиувилля

$${}^R D^\alpha z(t) + Az(t) = B({}^R D^{\alpha_1} z(t), \dots, {}^R D^{\alpha_n} z(t), {}^R D^{\alpha-m-r} z(t), \dots, {}^R D^{\alpha-1} z(t)), \quad (7)$$

где $m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \alpha-1$, $m_k-1 < \alpha_k \leq m_k \in \mathbb{Z}$, $\alpha_k - m_k \neq \alpha - m$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Для корректной постановки задачи типа Коши для уравнения (7) необходимо учитывать ее дефект² m^* , показывающий, сколько начальных условий младшего порядка необходимо рассмотреть с нулевыми начальными данными, чтобы задача была разрешима. Более того, чтобы гарантировать существование конечных пределов $\lim_{t \rightarrow t_0} {}^R D^{\alpha_l} z(t) := {}^R D^{\alpha_l} z(t_0)$, $l = 1, 2, \dots, n$, в аргументах нелинейного оператора, определим величину $m^{**} := m^* + 1$ и будем рассматривать неполную задачу типа Коши

$$\begin{aligned} {}^R D^{\alpha-m+k} z(t_0) &= 0, \quad k = 0, 1, \dots, m^{**} - 1, \\ {}^R D^{\alpha-m+k} z(t_0) &= z_k, \quad k = m^{**}, m^{**} + 1, \dots, m-1. \end{aligned} \quad (8)$$

Пусть U — открытое подмножество $\mathbb{R} \times \mathcal{Z}_\gamma^{n+m+r}$ и задано отображение $B : U \rightarrow \mathcal{Z}$, удовлетворяющее условию (3).

Теорема 1.7.2. Пусть $\alpha > 0$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \alpha-1$, $-A \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, 0)$, $0 \in \rho(A)$, отображение $B : U \rightarrow \mathcal{Z}$ удовлетворяет условию (3), $\gamma \in (\min\{0, 1 - \frac{1}{\alpha}\}, 1)$, $(t_0, 0, \dots, 0, z_{m^{**}}, z_{m^{**}+1}, \dots, z_{m-1}) \in U$, $z_k \in \mathcal{Z}_{1+\gamma}$, $k = m^{**}, m^{**} + 1, \dots, m-1$. Тогда для некоторого $t_1 > t_0$ существует единственное решение задачи (7), (8) на $[t_0, t_1]$.

В §1.8 полученные результаты применены к начально-краевой задаче для нелинейного уравнения с дробными производными Римана — Лиувилля по времени.

Вторая глава посвящена исследованию квазилинейных уравнений с липшицевой нелинейностью в норме исходного пространства $\mathcal{Z}$.

В §2.1 рассматривается задача Коши

$$D^k z(t_0) = z_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (9)$$

²Федоров В. Е., Туров М. М. Дефект задачи типа Коши для линейных уравнений с несколькими производными Римана — Лиувилля // Сиб. мат. журн. 2021. Т. 62, № 5. С. 1143–1162.

для квазилинейного уравнения

$$D^\alpha z(t) = Az(t) + B(t, D^{\alpha_1} z(t), D^{\alpha_2} z(t), \dots, D^{\alpha_n} z(t)). \quad (10)$$

Теорема 2.1.1. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n \leq m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{A}_\alpha$, $z_k \in D_A$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, U — открытое множество в $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}^n$, отображение $B \in C(U; D_A)$ локально липшицево по фазовым переменным, $(t_0, \tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \dots, \tilde{z}_n) \in U$. Тогда при некотором $t_1 > t_0$ задача (9), (10) имеет единственное решение на отрезке $[t_0, t_1]$.

В §2.2 получен результат о глобальной разрешимости при условии равномерной липшицевости оператора B .

Теорема 2.2.1. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n \leq m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{A}_\alpha$, $z_k \in D_A$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, отображение $B \in C([t_0, T] \times \mathbb{Z}^n; D_A)$ липшицево по фазовым переменным. Тогда задача (9), (10) имеет единственное решение на отрезке $[t_0, T]$.

В §2.3 введено понятие обобщенного решения задачи Коши. Функция z называется обобщенным решением задачи (9), (10), если $z, D^{\alpha_1} z, \dots, D^{\alpha_n} z \in C([t_0, T]; Z)$ и для всех $t \in [t_0, T]$ выполняется равенство

$$z(t) = \sum_{k=0}^{m-1} Z_{-k}(t-t_0)z_k + \int_{t_0}^t Z_{1-\alpha}(t-s)B(s, D^{\alpha_1} z(s), \dots, D^{\alpha_n} z(s)) ds.$$

Такое определение позволяет ослабить требования на гладкость начальных данных и нелинейного оператора.

Теорема 2.3.1. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n \leq m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $m_n - 1 < \alpha_n \leq m_n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{A}_\alpha$, отображение $B \in C([t_0, T] \times \mathbb{Z}^n; Z)$ липшицево по фазовым переменным, $z_k \in D_A$, $k = 0, 1, \dots, m_n$, $z_l \in Z$, $l = m_n+1, m_n+2, \dots, m-1$. Тогда существует единственное обобщённое решение задачи (9), (10) на отрезке $[t_0, T]$.

Теорема 2.3.2. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n \leq m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{A}_\alpha$, $z_k \in D_A$, $k = 0, 1, \dots, m_n$, $z_l \in Z$, $l = m_n+1, m_n+2, \dots, m-1$, U — открытое множество в $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}^n$, отображение $B \in C(U; Z)$ локально липшицево по фазовым переменным, $(t_0, \tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \dots, \tilde{z}_n) \in U$. Тогда существует такое $t_1 > t_0$, что задача (9), (10) имеет единственное обобщенное решение на $[t_0, t_1]$.

В §2.4 полученные результаты применены к исследованию начально-краевой задачи для уравнения Аллена — Кана дробного порядка $\alpha \in (m-1, m)$, $m \in \{1, 2\}$, по времени

$$D_t^\alpha v(\xi, t) = \nu \Delta v(\xi, t) + h(\xi, v(\xi, t)), \quad (\xi, t) \in \Omega \times (0, T], \quad (11)$$

$$v(\xi, t) = 0, \quad (\xi, t) \in \partial\Omega \times (0, T], \quad (12)$$

$$v(\xi, 0) = v_0, \quad (m-1) \frac{\partial v}{\partial \xi} = (m-1)v_1(\xi), \quad \xi \in \Omega. \quad (13)$$

Теорема 2.4.2. Пусть $\alpha \in (0, 2)$, $h \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$, $l > d/2$, $v_0 \in D_A$, при $\alpha \in (1, 2)$ $v_1 \in H^l(\Omega)$. Тогда для некоторого $t_1 > t_0$ существует единственное обобщенное решение задачи (11)–(13) на $\Omega \times [0, t_1]$. Если при этом все частные производные функции h до порядка $l+1$ ограничены, то существует единственное обобщенное решение задачи (11)–(13) на $\Omega \times [0, T]$.

В §2.5 рассмотрен класс краевых задач в $\mathbb{R}^d$ для уравнения с нелинейностью, зависящей от дробных производных Герасимова — Капуто по времени, и с многочленом от дифференциальных операторов первого порядка по пространственным переменным в линейной части. Для оператора $A = Q_q(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \xi_1}, \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \xi_2}, \dots, \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \xi_d})$ при условии, что значения многочлена $Q_q(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_d)$ лежат вне некоторого сектора $S_{\theta, a}$, доказано, что $A \in \mathcal{A}_\alpha$, и получены условия разрешимости задачи Коши для соответствующего уравнения.

В **третьей главе** исследуются квазилинейные уравнения, в которых линейный оператор при старшей дробной производной Герасимова — Капуто имеет нетривиальное ядро, называемые далее вырожденными. Для такого уравнения классическая задача Коши некорректна, поэтому вместо неё рассматривается задача Шоуолтера — Сидорова. Ключевую роль при ее исследовании играет условие секториальности пары операторов в линейной части уравнения, позволяющее построить инвариантные пары подпространств. Основная идея исследования состоит в редукции исходного вырожденного уравнения к системе двух уравнений на двух подпространствах, в которой одно уравнение разрешимо относительно старшей производной, а другое решается явно.

Пусть $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ — банаховы пространства. Через $\mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$ обозначим банахово пространство линейных ограниченных операторов из $\mathcal{X}$ в $\mathcal{Y}$, а через $Cl(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$ — множество линейных замкнутых плотно определенных в $\mathcal{X}$ операторов, действующих в пространство $\mathcal{Y}$. В §3.1 вводится класс $\mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$ секториальных пар операторов, т. е. пар операторов $L, M \in Cl(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$, для которых

- (i) существуют такие $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$ и $a_0 \geq 0$, что при всех $\lambda \in S_{\theta_0, a_0}$ выполняется включение $\lambda^\alpha \in \rho^L(M) := \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} L \in \mathcal{L}(\mathcal{X}), L(\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y})\}$;
- (ii) при любых $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a > a_0$ существует такая постоянная $K = K(\theta, a) > 0$, что при всех $\lambda \in S_{\theta, a}$

$$\max\{\|(\lambda^\alpha L - M)^{-1} L\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})}, \|L(\lambda^\alpha L - M)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Y})}\} \leq \frac{K(\theta, a)}{|\lambda|^\alpha}.$$

Введем обозначения $L_k = L|_{\mathcal{X}^k \cap D_L}$, $M_k = M|_{\mathcal{X}^k \cap D_M}$, $k = 0, 1$.

Теорема 3.1.1.³ Пусть банаховы пространства $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ рефлексивны, $(L, M) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$. Тогда выполняются следующие утверждения:

- (i) $\mathcal{X} = \mathcal{X}^0 \oplus \mathcal{X}^1$, $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}^0 \oplus \mathcal{Y}^1$;
- (ii) проектор P (Q) на подпространство $\mathcal{X}^1$ ($\mathcal{Y}^1$) вдоль $\mathcal{X}^0$ ($\mathcal{Y}^0$) имеет вид $P = s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} n R_n^L(M)$ ($Q = s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} n L_n^L(M)$);
- (iii) $L_0 = 0$, $M_0 \in Cl(\mathcal{X}^0; \mathcal{Y}^0)$, $L_1, M_1 \in Cl(\mathcal{X}^1; \mathcal{Y}^1)$;
- (iv) существуют обратные операторы $L_1^{-1} \in Cl(\mathcal{Y}^1; \mathcal{X}^1)$, $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^0; \mathcal{X}^0)$;
- (v) для всех $x \in D_L$ имеем $Px \in D_L$ и $LPx = QLx$;
- (vi) для всех $x \in D_M$ имеем $Px \in D_M$ и $MPx = QMx$;
- (vii) пусть $S := L_1^{-1} M_1 : D_S \rightarrow \mathcal{X}^1$, тогда $D_S := \{x \in D_{M_1} : M_1 x \in \text{im} L_1\}$ плотно в $\mathcal{X}$;
- (viii) пусть $R := M_1 L_1^{-1} : D_R \rightarrow \mathcal{Y}^1$, тогда $D_R := \{y \in \text{im} L_1 : L_1^{-1} y \in D_{M_1}\}$ плотно в $\mathcal{Y}$;

³Федоров В. Е., Романова Е. А., Дебуш А. Аналитические в секторе разрешающие семейства операторов вырожденных эволюционных уравнений дробного порядка // Сиб. журн. чистой и приклад. математики. 2016. Т. 16, № 2. С. 93–107.

- (ix) если $L_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1; \mathcal{Y}^1)$ или $M_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1; \mathcal{Y}^1)$, то $S \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$;
 (x) если $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1; \mathcal{X}^1)$ или $M_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1; \mathcal{X}^1)$, то $R \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$.

Рассматривается задача Шоултера — Сидорова

$$(Lx)^{(k)}(t_0) = y_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (14)$$

для квазилинейного уравнения

$$D^\alpha Lx(t) = Mx(t) + N(t, D^{\alpha_1}x(t), D^{\alpha_2}x(t), \dots, D^{\alpha_n}x(t)) + f(t) \quad (15)$$

Решением задачи (14), (15) на отрезке $[t_0, T]$ будем называть такую функцию $x : [t_0, T] \rightarrow D_M \cap D_L$, для которой $Lx \in C^{m-1}([t_0, T]; \mathcal{Y})$, $D^\alpha Lx \in C([t_0, T]; \mathcal{Y})$, $Mx \in C([t_0, T]; \mathcal{Y})$, $D^{\alpha_l}x \in C([t_0, T]; \mathcal{Y})$, $l = 1, 2, \dots, n$, выполняются условия (14), при всех $t \in [t_0, T]$ $(t, D^{\alpha_1}x(t), D^{\alpha_2}x(t), \dots, D^{\alpha_n}x(t)) \in U$ и при всех $t \in [t_0, T]$ выполняется равенство (15).

Используя начальные данные $y_0, y_1, \dots, y_{m-1}$, определим

$$\tilde{y}(t) = y_0 + \frac{(t - t_0)}{1!}y_1 + \dots + \frac{(t - t_0)^{m-1}}{(m-1)!}y_{m-1}, \quad \tilde{y}_k = D^{\alpha_k}\tilde{y}(t_0), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Теорема 3.1.2. Пусть банаховы пространства $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ рефлексивны, $(L, M) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$, $L_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1; \mathcal{Y}^1)$ или $M_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1; \mathcal{Y}^1)$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n \leq m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, U — открытое множество в $\mathbb{R} \times \mathcal{X}^n$, $N : U \rightarrow \text{im}L$, отображение $L_1^{-1}N \in C(U; D_S)$ локально липшицево по фазовым переменным, $f \in C([t_0, T]; \mathcal{Y})$ при некотором $T > t_0$, $f : [t_0, T] \rightarrow \mathcal{Y}^0 + \text{im}L$, $L_1^{-1}Qf \in C([t_0, T]; D_S)$, $D^{\alpha_l}M_0^{-1}(I - Q)f \in C([t_0, T]; \mathcal{X})$, $l = 1, 2, \dots, n$, $y_k \in L[D_S]$ при $k = 0, \dots, m-1$,

$$(t_0, L_1^{-1}\tilde{y}_1 - D^{\alpha_1}M_0^{-1}(I - Q)f(t_0), \dots, L_1^{-1}\tilde{y}_n - D^{\alpha_n}M_0^{-1}(I - Q)f(t_0)) \in U.$$

Тогда существует единственное решение задачи (14), (15) на отрезке $[t_0, t_1]$ при некотором $t_1 \in (t_0, T]$.

Теорема 3.1.3. Пусть банаховы пространства $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ рефлексивны, $(L, M) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$, $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1; \mathcal{X}^1)$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n \leq m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, U — открытое множество в $\mathbb{R} \times \mathcal{X}^n$, $N : U \rightarrow \mathcal{Y}^1$, отображение $N \in C(U; D_R)$ локально липшицево по фазовым переменным, $f \in C([t_0, T]; \mathcal{Y})$ при некотором $T > t_0$, $Qf \in C([t_0, T]; D_R)$, $D^{\alpha_l}M_0^{-1}(I - Q)f \in C([t_0, T]; \mathcal{X})$, $l = 1, 2, \dots, n$, $y_k \in D_R$, $k = 0, 1, \dots, m-1$,

$$(t_0, L_1^{-1}\tilde{y}_1 - D^{\alpha_1}M_0^{-1}(I - Q)f(t_0), \dots, L_1^{-1}\tilde{y}_n - D^{\alpha_n}M_0^{-1}(I - Q)f(t_0)) \in U.$$

Тогда существует единственное решение задачи (14), (15) на отрезке $[t_0, t_1]$ при некотором $t_1 \in (t_0, T]$.

В условиях теоремы 3.1.2 задача Шоултера — Сидорова для вырожденного эволюционного уравнения сводится к системе уравнений

$$x^0(t) = -M_0^{-1}(I - Q)f(t), \quad (16)$$

$$D^\alpha x^1(t) = Sx^1(t) + L_1^{-1}N(t, D^{\alpha_1}x(t), D^{\alpha_2}x(t), \dots, D^{\alpha_n}x(t)) + L_1^{-1}Qf(t), \quad (17)$$

где $x^0(t) := (I - P)x(t)$, $x^1(t) := Px(t)$, а в условиях теоремы 3.1.3 — к аналогичной систем с уравнением

$$D^\alpha y^1(t) = Ry^1(t) +$$

$+N(t, D^{\alpha_1}(L_1^{-1}y^1(t)-M_0^{-1}(I-Q)f(t)), \dots, D^{\alpha_n}(L_1^{-1}y^1(t)-M_0^{-1}(I-Q)f(t))) + Qf(t)$,
вместо уравнения (17), где $y^1(t) = L_1x^1(t)$.

Для случая, когда нелинейный оператор не зависит от элементов подпространства вырождения, доказаны теоремы 3.1.4 и 3.1.5.

В §3.2 получены аналогичные результаты о глобальной разрешимости (теоремы 3.2.1–3.2.4) при условии равномерной липшицевости нелинейного оператора.

В §3.3 введено понятие обобщённого решения для вырожденного уравнения, которое позволяет ослабить требования на гладкость оператора N и начальных данных по сравнению со случаем классических решений. Обобщенным решением задачи (14), (15) на отрезке $[t_0, t_1]$ будем называть функцию $x \in C([t_0, t_1]; \mathcal{X})$, для которой $D^{\alpha_1}x, D^{\alpha_2}x, \dots, D^{\alpha_n}x \in C([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$, при всех $t \in (t_0, t_1]$ выполняется равенство (16), а функция $x^1 := Px$ является обобщенным решением задачи Коши $D^kx^1(t_0) = L_1^{-1}y_k$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, для уравнения

$$D^\alpha x^1(t) = Sx^1(t) + L_1^{-1}Qf(t) + \\ + L_1^{-1}N(t, D^{\alpha_1}(x^1(t) - M_0^{-1}(I - Q)f(t)), \dots, D^{\alpha_n}(x^1(t) - M_0^{-1}(I - Q)f(t)))$$

на $[t_0, t_1]$. Для случая, когда $\text{im}N \subset \text{im}L \subset \mathcal{Y}^1$, доказаны теоремы о локальной и глобальной однозначной разрешимости в смысле обобщенных решений (теоремы 3.3.1–3.3.4). В частности, доказана следующая теорема.

Теорема 3.3.1. Пусть банаховы пространства $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ рефлексивны, $(L, M) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$, $L_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1; \mathcal{Y}^1)$ или $M_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1; \mathcal{Y}^1)$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n \leq m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $m_n - 1 < \alpha_n \leq m_n \in \mathbb{N}$, $N : [t_0, T] \times \mathcal{X}^n \rightarrow \text{im}L$, отображение $L_1^{-1}N \in C([t_0, T] \times \mathcal{X}^n; \mathcal{X})$ липшицево по фазовым переменным, $f \in C([t_0, T]; \mathcal{Y})$ при некотором $T > t_0$, $f : [t_0, T] \rightarrow \mathcal{Y}^0 + \text{im}L$, $L_1^{-1}Qf \in C([t_0, T]; \mathcal{X})$, $D^{\alpha_l}M_0^{-1}(I - Q)f \in C([t_0, T]; \mathcal{X})$, $l = 1, 2, \dots, n$; если $\alpha_n < m_n$, то $y_k \in L[D_S]$ при $k = 0, 1, \dots, m_n - 1$, $y_k \in \text{im}L$ при $k = m_n, m_n + 1, \dots, m - 1$; если $\alpha_n = m_n$, то $y_k \in L[D_S]$ при $k = 0, 1, \dots, m_n$, $y_k \in \text{im}L$ при $k = m_n + 1, m_n + 2, \dots, m - 1$. Тогда существует единственное обобщенное решение $x \in C^{m_n}([t_0, T]; \mathcal{X})$ задачи (14), (15) на отрезке $[t_0, T]$.

В §3.4 получены аналогичные результаты для случая, когда нелинейный оператор не зависит от элементов подпространства вырождения, т.е. когда $N(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = N_1(t, Px_1, Px_2, \dots, Px_n)$ при некотором операторе N_1 . Здесь также доказаны теоремы о существовании и единственности обобщённого решения (теоремы 3.4.1–3.4.4).

В §3.5–3.7 абстрактные результаты применены к исследованию начально-краевых задач. В §3.5 на отрезке $(0, \pi)$ рассматривается начально-краевая задача для вырожденного нелинейного уравнения дробного порядка по времени

$$D_t^\alpha \left(\beta - \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) v(\xi, t) = \sum_{l=0}^2 a_l \frac{\partial^{2l} v}{\partial \xi^{2l}}(\xi, t) + \\ + \left(\beta - \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) F \left(\xi, D_t^{-1/3} v(\xi, t), D_t^{1/2} v(\xi, t) \right), \quad (18)$$

$$\left(\beta - \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) v(\xi, t_0) = v_0(\xi), \quad D_t^1 \left(\beta - \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) v(\xi, t_0) = v_1(\xi), \quad \xi \in (0, \pi), \quad (19)$$

$$v(0, t) = v(\pi, t) = \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}(0, t) = \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}(\pi, t) = 0, \quad t > t_0. \quad (20)$$

Теорема 3.5.1. Пусть $\alpha \in (1, 2)$, $F \in C^\infty((0, \pi) \times \mathbb{R}^2; \mathbb{R})$, $\beta = -k_1^2$ для некоторого $k_1 \in \mathbb{N}$, $a_2 > 0$, $a_0 + a_1\beta + a_2\beta^2 \neq 0$, $v_k = \left(\beta - \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\right) w_k$ при некоторых $w_k \in \{x \in H^4(0, \pi) : x^{(2l)}(0) = x^{(2l)}(\pi) = 0, l = 0, 1\}$, $k = 0, 1$. Тогда задача (18)–(20) имеет единственное решение на отрезке $[t_0, t_1]$ при некотором $t_1 > t_0$.

В §3.6 исследованы начально-краевые задачи для модификаций квазистационарной системы уравнений фазового поля дробного порядка по времени:

$$D_t^\alpha u(\xi, t) = \Delta u(\xi, t) - \Delta v(\xi, t) + F(D_t^{\alpha_1} u, D_t^{\alpha_1} v, \dots, D_t^{\alpha_n} u, D_t^{\alpha_n} v),$$

$$\Delta v(\xi, t) + \beta u(\xi, t) + \gamma v(\xi, t) = 0,$$

где нелинейный оператор удовлетворяет условию $\text{im} N \subset \text{im} L$, и

$$D_t^\alpha u(\xi, t) = \Delta u(\xi, t) - \Delta v(\xi, t) + F(D_t^{\alpha_1} u, \dots, D_t^{\alpha_n} u),$$

$$\Delta v(\xi, t) + \beta u(\xi, t) + \gamma v(\xi, t) + G(D_t^{\alpha_1} u, \dots, D_t^{\alpha_n} u) = 0,$$

где нелинейный оператор не зависит от элементов подпространства вырождения. Для этих систем доказана секториальность пары операторов (L, M) и получены условия локального и глобального существования единственного обобщенного решения.

В §3.7 изучена дробная модель термоконвекции вязкоупругой жидкости

$$D^\alpha(I - \kappa \Delta)v = \nu \Delta v - r + F(\xi, D^{\alpha_1} v, \dots, D^{\alpha_n} v, D^{\alpha_1} \theta, \dots, D^{\alpha_n} \theta, \nabla D^{\alpha_1} \theta, \dots, \nabla D^{\alpha_n} \theta),$$

$$\nabla \cdot v = 0,$$

$$D^\alpha \theta = \chi \Delta \theta + G(\xi, D^{\beta_1} v, \dots, D^{\beta_n} v, D^{\beta_1} \theta, \dots, D^{\beta_n} \theta, \nabla D^{\beta_1} \theta, \dots, \nabla D^{\beta_n} \theta).$$

Построены операторы L и M в подходящих пространствах, доказана секториальность пары (L, M) и получены условия однозначной разрешимости начально-краевой задачи.

Заключение

Основным результатом данной диссертационной работы стали теоремы о существовании и единственности классического и обобщенного решений для начальных задач для широких классов квазилинейных уравнений в банаховых пространствах с несколькими дробными производными Герасимова — Капуто в нелинейной части, разрешенных относительно старшей производной Герасимова — Капуто или с вырожденным оператором при ней. При этом построена теория комплексных степеней секториального, т. е. порождающего аналитическое разрешающее семейство, оператора. Она использована для исследования уравнений, в которых нелинейный оператор задан и липшицев в норме графика дробной степени секториального оператора, что позволяет применять полученные результаты при изучении уравнений в частных производных, нелинейных относительно производных по пространственным переменным. Такой подход использован также и для квазилинейных уравнений с дробными производными Римана — Лиувилля.

Общие результаты использованы при исследовании вопросов существования и единственности классического или обобщенного решения для ряда

начально-краевых задач для нелинейных уравнений и систем уравнений в частных производных, как разрешимых, так и не разрешимых относительно старшей дробной производной по времени.

Полученные результаты могут стать основой для дальнейших исследований в следующих направлениях:

1) исследование вопросов существования и единственности сильных решений аналогичных задач для квазилинейных уравнений с производными Герасимова — Капуто или Римана — Лиувилля и с секториальным оператором (или парой операторов в вырожденном случае) в линейной части;

2) исследование вопросов управляемости и приближенной управляемости квазилинейных уравнений с производными Герасимова — Капуто или Римана — Лиувилля и с секториальным оператором (или парой операторов) в линейной части;

3) исследование различных задач оптимального управления для систем, динамика которых описывается квазилинейными уравнениями с производными Герасимова — Капуто или Римана — Лиувилля и с секториальным оператором (или парой операторов) в линейной части.

Список работ автора по теме диссертации в журналах, входящих в перечень ВАК, базы данных Web of Science и Scopus

1. Fedorov, V. E. Complex powers of fractional sectorial operators and quasilinear equations with Riemann–Liouville derivatives / V. E. Fedorov, A. S. Avilovich, T. A. Zakharova // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2023. — Vol. 44, no. 2. — P. 580–593.
2. Fedorov, V. E. Quasilinear fractional order equations and fractional powers of sectorial operators / V. E. Fedorov, M. Kostić, T. A. Zakharova // Fractal and Fractional. — 2023. — Vol. 7, no. 5. — P. 385.
3. Fedorov, V. E. Nonlocal solvability of quasilinear degenerate equations with Gerasimov–Caputo derivatives / V. E. Fedorov, T. A. Zakharova // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2023. — Vol. 44, no. 2. — P. 594–606.
4. Захарова, Т. А. Обобщенные решения квазилинейных уравнений с производными Герасимова — Капуто и секториальным оператором // Челяб. физ.-мат. журн. — 2025. — Т. 10, вып. 3. — С. 431–444.
5. Zakharova, T. A.. Mild solutions of degenerate quasilinear equations with Gerasimov–Caputo derivatives / T. A. Zakharova // Computational Mathematics and Modeling. — 2026. — <https://doi.org/10.1007/s10598-026-09698-4>.

Публикации по теме диссертации в других изданиях

6. Федоров, В. Е. Квазилинейные уравнения с дробной производной Герасимова — Капуто. Секториальный случай / В. Е. Федоров, Т. А. Захарова // Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее приложения. Темат. обзоры. — 2023. — Т. 226. — С. 127–137.
7. Захарова, Т. А. Неполная задача типа Коши для квазилинейного дробного уравнения / Т. А. Захарова, В. Е. Федоров // Мат. заметки СВФУ. — 2025. — Т. 32, № 1. — С. 113–114.
8. Захарова, Т. А. Локальная однозначная разрешимость квазилинейного уравнения с производной Герасимова — Капуто / Т. А. Захарова, В. Е. Федоров // Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения: тез. докл. Междунар. конф., оз. Банное, Башкортостан. — Уфа : Аэтерна, 2022. — С. 35–36.

9. Захарова, Т. А. Начальная задача для вырожденного квазилинейного уравнения с производными Герасимова — Капуто / Т. А. Захарова, В. Е. Федоров // 9-я междунар. конф. по дифференц. и функционал.-дифференц. уравнениям, Москва. — М.: РУДН, 2022. — С. 143–144.
10. Захарова, Т. А. О локальной разрешимости вырожденного квазилинейного уравнения с производными Герасимова — Капуто / Т. А. Захарова, В. Е. Федоров // Междунар. конф. по дифференц. уравнениям и динамическим системам: тез. докл. Суздаль, — Владимир : Аркаим, 2022. — С. 122–123.
11. Fedorov, V. E. Incomplete Cauchy type problem for quasilinear equations with Riemann–Liouville derivatives / V. E. Fedorov, T. A. Zakharova // O.A. Ladyzhenskaya centennial conference on PDE's: Book of abstracts. St. Petersburg. — St. Petersburg, 2022. — P. 26.
12. Захарова, Т. А. О разрешимости вырожденного квазилинейного уравнения с производными Герасимова — Капуто / Т. А. Захарова, В. Е. Федоров // Неклассич. уравнения мат. физики и их приложения: тез. докл. Междунар. науч. конф., Ташкент, Узбекистан. — Ташкент : Университет, 2022. — С. 96–97.
13. Захарова, Т. А. Об однозначной нелокальной разрешимости квазилинейного уравнения с производными Герасимова — Капуто / Т. А. Захарова, В. Е. Федоров // Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения: тез. докл. Междунар. конф., оз. Банное, Башкортостан. — Уфа : Аэтерна, 2023. — С. 52–53.
14. Захарова, Т. А. Квазилинейные вырожденные эволюционные уравнения / Т. А. Захарова, В. Е. Федоров // X Междунар. конф. по мат. моделированию, посвящ. 30-летию Академии наук Республики Саха (Якутия) и памяти первого Президента Академии наук РС(Я), член-корр. РАН В. В. Филиппова, Якутск, 2023. — С. 43.
15. Захарова, Т. А. Однозначная разрешимость задачи Коши для квазилинейного уравнения дробного порядка / Т. А. Захарова, В. Е. Федоров // Уфимская осенняя мат. школа: материалы Междунар. науч. конф., Уфа. — Уфа : РИЦ БашГУ, 2023. — С. 53–55.
16. Захарова, Т. А. Нелокальная разрешимость квазилинейного уравнения / Т. А. Захарова, В. Е. Федоров // Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики: материалы VII Междунар. науч. конф., Нальчик. — Нальчик : ИПМА КБНЦ РАН, 2023. — С. 115–116.
17. Федоров, В. Е. Квазилинейные уравнения с дробными производными в банаховых пространствах / В. Е. Федоров, Т. А. Захарова // Воронеж. зимн. мат. шк. С. Г. Крейна: материалы междунар. Воронеж. зимн. мат. шк., посвящ. памяти академика В. П. Маслова, Воронеж. — Воронеж: Издат. дом ВГУ, 2024. — С. 268–271.
18. Захарова, Т. А. Локальная разрешимость вырожденного квазилинейного уравнения / Т. А. Захарова // Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения: тез. докл. Междунар. конф., Павловка, Башкортостан. — Уфа, 2025. — С. 23–24.
19. Захарова, Т. А. Дробные степени оператора в теории разрешимости эволюционных уравнений дробного порядка / Т. А. Захарова, В. Е. Федоров // Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения: тез. докл. Междунар. конф., Павловка, Башкортостан. — Уфа, 2026. — С. 25.