

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
"ЧЕЛЯБИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ"

На правах рукописи



Захарова Татьяна Анатольевна

КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ
С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ
И ДРОБНЫЕ СТЕПЕНИ ОПЕРАТОРОВ

1.1.2 — Дифференциальные уравнения и математическая физика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор В.Е. Федоров

ЧЕЛЯБИНСК — 2026

Содержание

Введение	4
Актуальность темы исследования	4
Степень разработанности темы исследования	4
Цели и задачи	6
Научная новизна	6
Теоретическая и практическая значимость работы	7
Методология и методы исследования	8
Положения выносимые на защиту	9
Степень достоверности и апробация результатов	10
Структура и краткое содержание диссертации	12
1 Дробные степени секториального оператора и квазилинейные уравнения	17
1.1 Комплексные степени секториального оператора	17
1.2 Аналитические семейства разрешающих операторов и дробные степени секториального оператора	22
1.3 Локальная разрешимость уравнения с дробной производной Герасимова — Капуто	28
1.4 Глобальная разрешимость уравнения с дробной производной Герасимова — Капуто	42
1.5 Пример нелинейной начально-краевой задачи	45
1.6 Дробное по времени уравнение Кана — Хиллиарда	46
1.7 Квазилинейные уравнения с дробными производными Римана — Лиувилля	50
1.8 Начально-краевая задача для нелинейного уравнения	58
2 Квазилинейные уравнения с липшицевой нелинейностью	60
2.1 Локальная разрешимость квазилинейного уравнения	60

2.2	Глобальная разрешимость квазилинейного уравнения	66
2.3	Существование и единственность обобщённого решения	69
2.4	Дробное по времени уравнение Аллена — Кана	75
2.5	Один класс краевых задач в \mathbb{R}^d	76
3	Вырожденные квазилинейные уравнения	79
3.1	Локальная разрешимость вырожденного уравнения	79
3.2	Глобальная разрешимость вырожденного уравнения	85
3.3	Обобщенные решения уравнений с ограничением на образ нелинейного оператора	88
3.4	Обобщенные решения уравнений с нелинейным оператором, не зависящим от элементов подпространства вырождения	92
3.5	Начально-краевая задача для вырожденного нелинейного уравнения	95
3.6	Начально-краевые задачи для дробных квазистационарных систем уравнений фазового поля	96
3.7	Одна дробная модель термоконвекции вязкоупругой жидкости	100
	Заключение	105
	Обозначения и соглашения	107
	Список литературы	108

Введение

Актуальность темы исследования

В современной математической физике всё более востребованными становятся модели, учитывающие эффекты памяти и пространственной нелокальности. Классические методы целочисленного дифференцирования не всегда позволяют описать такие явления, тогда как дробное интегро-дифференциальное исчисление служит естественным аппаратом. В частности, задачи гидродинамики, математической биологии, теории вязкоупругости [8, 56, 74, 90] успешно исследуются в терминах уравнений с дробными производными.

Теория дробных дифференциальных уравнений в банаховых пространствах [28, 31, 34, 71, 87] позволяет сводить начально-краевые задачи для уравнений в частных производных к абстрактным эволюционным уравнениям [39, 49, 54, 70, 94]. Особый интерес представляют квазилинейные уравнения, в которых нелинейность зависит не только от искомой функции и ее производных по времени, но и от её производных по пространственным переменным. Для анализа таких уравнений нужны новые инструменты, в частности, теория дробных степеней операторов, обобщающая классические результаты теории аналитических полугрупп.

В настоящей диссертации строится теория комплексных степеней секториальных операторов, порождающих разрешающие аналитические семейства для линейных уравнений дробного порядка, и полученные результаты применяются к новым классам квазилинейных эволюционных уравнений. Тема работы актуальна как с теоретической точки зрения, так и ввиду востребованности математических моделей процессов в средах со сложной структурой.

Степень разработанности темы исследования

Теория дифференциальных уравнений с дробными производными берёт начало в работах XVIII–XIX веков (Лейбниц, Эйлер, Лагранж, Риман, Лиувилль),

однако интенсивное развитие она получила во второй половине XX столетия. Существенный вклад в её становление внесли исследования А. Н. Герасимова [8, 78], М. Caputo [56], С. Г. Самко, А. А. Килбаса, О. И. Маричева [34], I. Podlubny [87], А. М. Нахушева [28], А. В. Псху [31], В. В. Учайкина [39, 95], С. М. Ситника, Э. Л. Шишкиной [37] и многих других авторов (см. также обзорные работы [5, 6, 27, 59, 68, 76, 77, 79, 91]).

Как известно, важным инструментом исследования линейных уравнений первого порядка в банаховых пространствах является теория полугрупп операторов [16, 24, 50, 51, 80]. В ней важную роль играют секториальные операторы, порождающие аналитические полугруппы, а использование их дробных степеней позволяет исследовать квазилинейные уравнения, в которых нелинейность зависит от производных по пространственным переменным [50, 80].

Для уравнений с дробной производной Герасимова — Капуто в банаховых пространствах теория разрешающих семейств операторов была построена в работах Э. Бажлековой [54], В. Е. Федорова и соавторов (см. [42, 44, 45, 48, 92] и др.). Э. Бажлекова [54] ввела в рассмотрение класс секториальных операторов, порождающих аналитические в секторе разрешающие семейства для уравнений с дробной производной Герасимова — Капуто. Эти результаты распространены на более широкие классы уравнений (в том числе с производными Римана — Лиувилля, Джрбашяна — Нерсесяна, с распределёнными производными) в работах В. Е. Федорова, М. В. Плехановой и их учеников [46, 47, 49, 55, 62–67, 82, 86]. Отметим также исследования J. Prüss [88], G. Da Prato и M. Iannelli [58], M. Kostić [72] разрешающих семейств операторов для интегральных и интегро-дифференциальных уравнений.

Вырожденные эволюционные уравнения (уравнения соболевского типа), в которых оператор при старшей производной необратим, изучались в работах С. Л. Соболева [38], С. А. Гальперна [7], А. Г. Костюченко, Г. И. Эскина [23], А. М. Ильина [12, 13] Н. А. Сидорова, Б. В. Логинова, М. В. Фалалеева [36, 40, 73], Г. В. Демиденко, С. В. Успенского, И. И. Матвеевой [9, 10], А. И. Кожанова [17–19], А. Favini, А. Yagi [60], Г. А. Свиридюка, В. Е. Федо-

рова [93], А. Г. Свешникова, М. О. Корпусова, А. Б. Альшина, Ю. Д. Плетнера [20, 21, 26] и многих других. Для линейных и квазилинейных вырожденных уравнений дробного порядка в последние годы получены результаты о разрешающих семействах операторов и о существовании решений начальных задач [1, 2, 22, 41, 47, 48, 62, 63, 81, 83–85].

Цели и задачи

Целью диссертационной работы является исследование вопросов существования и единственности решения начальных задач для квазилинейных уравнений с дробными производными Герасимова — Капуто или Римана — Ливилля в банаховых пространствах в классическом и обобщённом смысле.

В задачи диссертационной работы входит построение теории комплексных степеней A^γ для секториальных операторов, порождающих аналитические разрешающие семейства для уравнений дробного порядка, получение условий однозначной локальной и глобальной разрешимости задачи Коши для квазилинейных уравнений, разрешённых относительно старшей дробной производной Герасимова — Капуто, исследование задачи Шоуолтера — Сидорова для вырожденных квазилинейных уравнений с секториальной парой операторов (L, M) при старшей производной Герасимова — Капуто и искомой функции и получение условий однозначной разрешимости в смысле классических и обобщённых решений. Еще одной задачей является применение полученных абстрактных результатов к исследованию начально-краевых задач для нелинейных уравнений и систем уравнений в частных производных дробного порядка по времени, включая уравнение Кана — Хиллиарда, уравнение Аллена — Кана, модель термоконвекции вязкоупругой жидкости.

Научная новизна

В диссертации установлены условия однозначной разрешимости задачи Коши для новых классов квазилинейных уравнений в банаховых пространствах, нелинейная часть которых зависит от нескольких дробных производных Гера-

симова —Капуто. Линейная часть таких уравнений порождает аналитическое в секторе разрешающее семейство операторов. Изучены вопросы как локальной, так и глобальной разрешимости, рассмотрены классические и обобщённые решения уравнений, разрешённых относительно старшей производной, и вырожденных эволюционных уравнений. Полученные абстрактные результаты использованы при исследовании новых начально-краевых задач для нелинейных уравнений в частных производных.

Для секториальных операторов (т. е. операторов, порождающих аналитические в секторе разрешающие семейства для уравнений с дробной производной) в работе впервые введено понятие комплексной степени. Это позволило построить шкалу банаховых пространств, совпадающих с областями определения дробных степеней секториального оператора, и при условии липшицевости нелинейного оператора в одном из таких пространств исследовать квазилинейные уравнения с несколькими производными Герасимова — Капуто или Римана — Лиувилля. Полученные результаты о разрешимости дифференциальных уравнений в банаховых пространствах дали возможность изучить новые классы начально-краевых задач для уравнений и систем уравнений в частных производных дробного порядка по времени, в которых нелинейность зависит от производных по пространственным переменным. В частности, исследована начально-краевая задача для дробного по времени уравнения Кана —Хиллиарда.

Теоретическая и практическая значимость работы

Диссертационная работа посвящена развитию методов качественного исследования квазилинейных эволюционных уравнений с дробными производными Герасимова — Капуто в банаховых пространствах. Ключевую роль в исследовании играет введение в рассмотрение комплексных степеней секториального оператора. Использование дробных степеней позволяет построить шкалу банаховых пространств. Нелинейный оператор предполагается заданным и липшицевым в одном из пространств этой шкалы, что дает возмож-

ность использовать полученные абстрактные результаты при исследовании начально-краевых задач для уравнений с дробной производной по времени, нелинейных относительно производных по пространственным переменным. В то же время полученные результаты о дробных степенях операторов являются естественным обобщением аналогичных результатов классической теории аналитических полугрупп операторов.

Практическая значимость работы заключается в возможности применения полученных абстрактных результатов к постановке и изучению начально-краевых задач для нелинейных уравнений в частных производных дробного порядка по времени, возникающих в прикладных задачах теории вязкоупругости, гидродинамики, математической биологии, теории финансов и др. Приведенные в работе примеры, в частности, начально-краевые задачи для дробных по времени уравнения Кана — Хиллиарда, уравнения Аллена — Кана демонстрируют эффективность разработанных методов.

Методология и методы исследования

При проведении исследований в данной диссертации используются методы теории дифференциальных уравнений, функционального анализа, дробного интегро-дифференциального исчисления.

Предполагается, что линейная часть рассматриваемых квазилинейных уравнений порождает аналитическое разрешающее семейство операторов. Начальные задачи для таких уравнений методами теории разрешающих семейств операторов редуцируются к уравнениям вида $z = Fz$ в специально подобранном функциональном пространстве, где нелинейный оператор F является суммой решения линейного однородного уравнения и свертки дробной производной порядка $1 - \alpha$, где α — порядок уравнения, от разрешающего семейства операторов и нелинейного оператора, зависящего от нескольких младших дробных производных и от дробных интегралов функции z . С помощью теоремы Банаха о неподвижной точке сжимающего отображения в полном метрическом пространстве получаем условия сжимаемости операторо-

ра F в случае локальной липшицевости нелинейного оператора или условия сжимаемости оператора F^p при достаточно большой степени $p \in \mathbb{N}$ в случае равномерной липшицевости нелинейного оператора. В результате получены теоремы о локальной однозначной разрешимости и глобальной однозначной разрешимости квазилинейных уравнений соответственно.

Для исследования вырожденных квазилинейных уравнений используется существование пар инвариантных подпространств для секториальной пары операторов из линейной части уравнения, что позволяет редуцировать задачу Шоултера — Сидорова к системе, состоящей из задачи Коши для уравнения, разрешенного относительно старшей дробной производной, на подпространстве без вырождения и уравнения меньшего порядка на подпространстве вырождения. При некоторых дополнительных условиях на нелинейный оператор такую систему удастся разрешить с использованием полученных в диссертационной работе результатов о разрешимости невырожденных квазилинейных уравнений.

Начально-краевые задачи для нелинейных уравнений в частных производных исследуются путем их редукции к начальным задачам для квазилинейных уравнений в банаховых пространствах с последующим применением полученных абстрактных результатов.

Положения выносимые на защиту

1. Построена теория комплексных степеней для операторов, порождающих аналитические разрешающие семейства уравнений с дробной производной. Определена шкала банаховых пространств, совпадающих с областями определения дробных степеней секториального оператора.
2. Доказаны теоремы о локальной и глобальной однозначной разрешимости задачи Коши для квазилинейных уравнений в банаховых пространствах с секториальным оператором в линейной части и с нелинейной частью, зависящей от нескольких дробных производных Герасимова — Капуто.

Рассмотрены случаи классических и обобщенных решений.

3. Получены результаты об однозначной разрешимости задачи Шоултера — Сидорова для вырожденных квазилинейных уравнений с секториальной парой линейных операторов и с нелинейным оператором, зависящим от нескольких дробных производных Герасимова — Капуто. Установлены локальное и глобальное существование и единственность классического и обобщенного решений.
4. Абстрактные результаты использованы при изучении начально-краевых задач для некоторых классов уравнений и систем уравнений в частных производных с дробными производными Герасимова — Капуто по времени, в частности, для уравнений Кана — Хиллиарда, Аллена — Кана дробного порядка по времени.

Степень достоверности и апробация результатов

Строгость применяемых математических методов исследования, корректность использования математического аппарата при доказательстве утверждений в данной диссертации свидетельствуют о достоверности полученных результатов.

Результаты диссертации докладывались и обсуждались на заседаниях научного семинара кафедры математического анализа Челябинского государственного университета (руководитель проф. В. Е. Федоров), на Общегородском семинаре имени А. М. Ильина по дифференциальным уравнениям математической физики (руководители проф. В. Ю. Новокшенов, проф. Л. А. Калякин), на Межгородском семинаре «Неклассические задачи математической физики» (руководитель проф. А. И. Кожанов), на конференциях: Международная научная конференция «Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения», Уфа, 2022, 2023, 2025, 2026; The 9th International Conference on Differential and Functional Differential Equations, Москва, 2022; Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динами-

ческим системам, Суздаль, 2022; О. А. Ladyzhenskaya Centennial Conference on PDE's, Санкт-Петербург, 2022; X Международная конференция по математическому моделированию, посвященная 30-летию Академии наук Республики Саха (Якутия) и памяти первого Президента Академии наук РС(Я), член-корреспондента РАН В. В. Филиппова, Якутск, 2023; Международная научная конференция «Неклассические уравнения математической физики и их приложения», Ташкент, 2022; Международная научная конференция «Уфимская осенняя математическая школа», Уфа, 2023; VII Международная конференция «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики», Нальчик, 2023; Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна, посвященная памяти академика В. П. Маслова, Воронеж, 2024; Летние чтения (воркшоп) «Неклассические дифференциальные уравнения и математическое моделирование», Самара, 2024.

Список публикаций автора включает 19 работ, из которых 5 опубликованы в журналах, входящих в перечень рецензируемых научных изданий списка ВАК или приравненных к ним, поскольку входят в издания, индексируемые международными реферативными базами данных и системами цитирования Web of Science и/или Scopus [97–101]. Также результаты диссертации опубликованы в работах [102–115].

Соавторами соискателя в работах [98–100] внесен следующий вклад. В статье [98] А. В. Авилович предложена идея определения чисто мнимой степени секториального оператора (перед теоремой 2), В. Е. Федоров предложил постановку начальной задачи (10), а именно, ему принадлежит идея использовать величину m^{**} , связанную с дефектом m^* уравнения с несколькими дробными производными Римана — Лиувилля, для того, чтобы гарантировать непрерывность вплоть до точки $t = t_0$ младших дробных производных Римана — Лиувилля решения $D^{\alpha_l} z$, $l = 1, 2, \dots, n$, являющихся аргументами нелинейного оператора в исследуемом уравнении. В работе [99] В. Е. Федоровым предложена идея доказательства леммы 3 о полноте пространства

$C^{m-1, \{\alpha_i\}}([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$, М. Костичем — идея доказательства леммы 4 о гельдеровости функции, имеющей непрерывную на отрезке дробную производную Герасимова — Капуто. В [100] В. Е. Федорову принадлежит идея доказательства леммы 3 об эквивалентности разрешимости интегро-дифференциального уравнения с младшими дробными производными и задачи Коши для квазилинейного уравнения с дробными производными Герасимова — Капуто.

В диссертацию вошли только результаты, принадлежащие лично ее автору.

Структура и краткое содержание диссертации

Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, заключения, списка обозначений и соглашений, а также списка литературы.

В **первой главе** в §1.1 вводятся в рассмотрение комплексные степени A^γ при условии, что оператор $-A$ секториален, т. е. $-A \in \mathcal{A}_\alpha$, и непрерывно обратим, и изучаются их свойства, доказывается теорема о сложении степеней. В §1.2 изучаются свойства A^γ , операторов разрешающего семейства, их дробных производных и интегралов в пространствах $\mathcal{Z}_\gamma = D_{A^\gamma}$.

Далее в §1.3 рассматривается квазилинейное уравнение

$$D^\alpha z(t) + Az(t) = B(t, D^{\alpha_1} z(t), D^{\alpha_2} z(t), \dots, D^{\alpha_n} z(t)) \quad (0.0.1)$$

в банаховом пространстве \mathcal{Z} с дробными производными Герасимова — Капуто $D^\beta z$ при $\beta > 0$ и дробными интегралами Римана — Лиувилля $D^\beta z$ при $\beta \leq 0$. Здесь $m - 1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \alpha$, $-A \in \mathcal{A}_\alpha$. При условии, что оператор B локально липшицев относительно нормы в \mathcal{Z}_γ , доказывается локальное существование единственного классического решения задачи Коши. Раздел §1.4 содержит аналогичный результат о существовании единственного решения на заранее заданном отрезке $[t_0, T]$ задачи Коши для уравнения (0.0.1) с липшицевым по норме в \mathcal{Z}_γ нелинейным оператором B .

В §1.5 полученные абстрактные результаты применяются к исследованию начально-краевой задачи для нелинейного относительно пространствен-

ных производных уравнения второго порядка по пространственным переменным с дробной производной по времени. В §1.6 абстрактные результаты применяются к исследованию начально-краевой задачи для уравнения Кана — Хиллиарда дробного порядка по времени.

В §1.7 изучается квазилинейное уравнение

$${}^R D^\alpha z(t) + Az(t) = B \left({}^R D^{\alpha_1} z(t), \dots, {}^R D^{\alpha_n} z(t), {}^R D^{\alpha-m-r} z(t), \dots, {}^R D^{\alpha-1} z(t) \right) \quad (0.0.2)$$

с дробными производными Римана — Лиувилля ${}^R D^\beta z$ при $\beta > 0$ и дробными интегралами Римана — Лиувилля ${}^R D^\beta z$ при $\beta \leq 0$. Здесь $m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \alpha - 1$, $m_l - 1 < \alpha_l \leq m_l \in \mathbb{Z}$, $\alpha_l - m_l \neq \alpha - m$, $l = 1, 2, \dots, n$, $-A \in \mathcal{A}_\alpha$. Как известно [49], для уравнений с несколькими производными Римана — Лиувилля задача типа Коши требует согласования производных вблизи начальной точки $t = t_0$ ввиду наличия так называемого дефекта. Указанная трудность преодолевается путем рассмотрения неполной задачи типа Коши, когда несколько (в зависимости от величины дефекта) начальных данных для младших по порядку начальных условий рассматриваются нулевыми. Доказаны локальное существование и единственность классического решения неполной задачи типа Коши с нелинейным оператором B , локально липшицевым относительно нормы в \mathcal{Z}_γ , и глобальная однозначная разрешимость такой задачи с липшицевым в \mathcal{Z}_γ нелинейным оператором B . В §1.8 полученные абстрактные результаты применяются к исследованию начально-краевой задачи для нелинейного уравнения с дробными производными Римана — Лиувилля по времени и нелинейностью, содержащей частные производные по пространственным переменным.

Во **второй главе** исследуются вопросы существования и единственности решения задачи Коши

$$D^k z(t_0) = z_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (0.0.3)$$

для квазилинейного уравнения

$$D^\alpha z(t) = Az(t) + B(t, D^{\alpha_1} z(t), D^{\alpha_2} z(t), \dots, D^{\alpha_n} z(t)), \quad (0.0.4)$$

где $t_0 \in \mathbb{R}$, $m - 1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \alpha$, $A \in \mathcal{A}_\alpha$, D^β — дробные производные Герасимова — Капуто при $\beta > 0$ и дробные интегралы Римана — Лиувилля $D^\beta z$ при $\beta \leq 0$. В §2.1 доказывается однозначная локальная разрешимость в смысле классических решений для задачи Коши (0.0.3), (0.0.4) в случае локальной липшицевости нелинейного оператора B , а в §2.2 устанавливается глобальная разрешимость этого уравнения с липшицевым оператором B . При этом используется непрерывность B в норме графика оператора A .

В §2.3 вводится в рассмотрение понятие обобщенного решения задачи Коши (0.0.3), (0.0.4). Для обобщенных решений доказываются теоремы о локальном и глобальном существовании и единственности при ослабленных требованиях на гладкость начальных данных и нелинейного оператора B , в частности уже не используется непрерывность B в норме графика оператора A . В §2.4 получены условия локального и глобального существования обобщенного решения начально-краевой задачи для уравнения Аллена — Кана в ограниченной области. В §2.5 найдены условия локального и глобального существования обобщенного решения задачи Коши для класса уравнений в частных производных с многочленом от дифференциальных операторов первого порядка во всем пространстве.

В **третьей главе** исследуется вырожденное квазилинейное уравнение

$$D^\alpha Lx(t) = Mx(t) + N(t, D^{\alpha_1}x(t), D^{\alpha_2}x(t), \dots, D^{\alpha_n}x(t)), \quad (0.0.5)$$

с произвольными, в том числе отрицательными, α_k , $k = 1, 2, \dots, n$, причем $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n \leq m - 1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$. Здесь, как и прежде, D^β — дробные производные Герасимова — Капуто при $\beta > 0$ и дробные интегралы Римана — Лиувилля $D^\beta z$ при $\beta \leq 0$. Предполагается, что пара линейных замкнутых операторов (L, M) , действующих из банахова пространства \mathcal{X} в банахово пространство \mathcal{Y} , является секториальной, $\ker L \neq 0$, U — открытое множество в $\mathbb{R} \times \mathcal{X}^n$, $N : U \rightarrow \mathcal{Y}$.

В §3.1 для задачи Шоултера — Сидорова

$$(Lx)^{(k)}(t_0) = y_k, \quad k = 0, 1, \dots, m - 1, \quad (0.0.6)$$

для уравнения (0.0.5) доказаны четыре варианта теоремы об однозначной разрешимости. В первых двух вариантах нелинейный оператор действует в подпространство без вырождения, при этом используются условие непрерывности одного из операторов L_1 или M_1 или одного из операторов L_1^{-1} или M_1^{-1} (нижний индекс 1 означает сужение оператора на подпространство без вырождения). В третьем и четвертом вариантах ограничения на образ нелинейного оператора отсутствуют, однако предполагается, что он зависит только от элементов подпространства без вырождения.

В §3.2 получены результаты о глобальной (на всем отрезке $[t_0, T]$) однозначной разрешимости задачи (0.0.5), (0.0.6), аналогичные результатам о локальной разрешимости. При этом условие локальной липшицевости оператора N усилено до условия липшицевости оператора $N : [t_0, T] \times \mathcal{X}^n \rightarrow \mathcal{Y}$.

В §3.3 вводится понятие обобщенного решения для вырожденного уравнения в случае, когда образ нелинейного оператора лежит в подпространстве без вырождения. Для обобщенных решений доказываются теоремы о локальном и глобальном существовании и единственности при ослабленных требованиях на гладкость начальных данных и нелинейного оператора N . В §3.4 получены аналогичные результаты для случая, когда нелинейный оператор не зависит от элементов подпространства вырождения.

Абстрактные результаты применены к исследованию начально-краевых задач для вырожденных нелинейных уравнений в частных производных в §3.5–3.7, в том числе, для дробных по времени квазистационарных систем уравнений фазового поля в §3.6 и для одной дробной по времени системы уравнений термоконвекции вязкоупругой жидкости в §3.7.

В заключении подведены итоги проведенного в диссертационной работе исследования и намечены перспективные задачи для дальнейшего изучения.

Используемые в тексте диссертации обозначения и соглашения перечислены в соответствующем списке.

Список литературы содержит цитированные в работе источники. В конце списка приведены все публикации автора по теме диссертации.

1 Дробные степени секториального оператора и квазилинейные уравнения

1.1 Комплексные степени секториального оператора

Пусть \mathcal{Z} — банахово пространство, $A \in \mathcal{Cl}(\mathcal{Z})$, $\rho(A) := \{\mu \in \mathbb{C} : R_\mu(A) := (\mu I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})\}$ — резольвентное множество оператора A , $\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ — его спектр. Также введем обозначения $\Sigma_\varphi := \{\tau \in \mathbb{C} : |\arg \tau| < \varphi, \tau \neq 0\}$, $\varphi \in (0, \pi/2]$, $S_{\theta_0, a_0} := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg(\lambda - a_0)| < \theta_0, \lambda \neq a_0\}$, $\theta_0 \in (\pi/2, \pi]$, $a_0 \in \mathbb{R}$.

Для $\alpha > 0$, $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$, $a_0 \geq 0$, обозначим через $\mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$ класс операторов $A \in \mathcal{Cl}(\mathcal{Z})$, таких, что выполняются следующие два условия:

(i) для всех $\lambda \in S_{\theta_0, a_0}$ имеем $\lambda^\alpha \in \rho(A)$;

(ii) для каждого $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a > a_0$ существует $K = K(\theta, a) > 0$, такое, что для всех $\lambda \in S_{\theta, a}$

$$\|R_{\lambda^\alpha}(A)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq \frac{K(\theta, a)}{|\lambda|^\alpha}.$$

Обозначим также

$$\mathcal{A}_\alpha := \bigcup_{\substack{\theta_0 \in (\pi/2, \pi] \\ a_0 \geq 0}} \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0).$$

При $\alpha = 1$ оператор A из класса \mathcal{A}_1 часто называют секториальным, он порождает аналитическую в секторе $\Sigma_{\theta_0 - \pi/2}$ полугруппу операторов [16, 50, 51, 80]. Следуя этой традиции, для любого $\alpha \in (0, 2)$ будем также называть оператор из \mathcal{A}_α секториальным.

Пусть $\alpha \in (0, 2)$, $-A \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, 0)$ и $0 \in \rho(A)$, тогда $\rho(-A)$ содержит окрестность нуля в разрезанной вдоль отрицательной полуоси комплексной плоскости, оператор-функция $R_{\lambda^\alpha}(-A)$ ограничена на этой окрестности. Следовательно, для малого $a > 0$ и $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$

$$\exists r_1 > 0 \quad \exists K_1 > 0 \quad \forall \lambda \in S_{\theta, a} \cup \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| < r_1\} \quad \|R_{\lambda^\alpha}(-A)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq \frac{K_1}{1 + |\lambda|^\alpha}.$$

Следовательно, для достаточно малого $\varepsilon > 0$, когда $\alpha\varepsilon < r_1$, и для $\omega \in (\frac{\pi-\theta_0}{\alpha}, \frac{\pi}{2\alpha})$ обозначим контур $\mathcal{C} := \mathcal{C}_+ \cup \mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}_-$, где $\mathcal{C}_\pm := \{z = re^{\pm i\alpha\omega} : r \in (\alpha\varepsilon, \infty)\}$, $\mathcal{C}_0 := \{z = \alpha\varepsilon e^{i\varphi} : \varphi \in [-\alpha\omega, \alpha\omega]\}$, обходимый сверху вниз, и операторы

$$A^{-\gamma} := \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} z^{-\gamma} (zI - A)^{-1} dz, \quad \operatorname{Re}\gamma > 0. \quad (1.1.1)$$

Для степенной функции комплексного переменного здесь и далее берется ее главная ветвь. Поскольку при некотором $K_2 > 0$ для всех $z \in \mathcal{C}$

$$\|z^{-\gamma} (zI - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(z)} \leq \frac{K_1}{|z|^{\operatorname{Re}\gamma}(1 + |z|)} \leq \frac{K_1}{|z|^{1+\operatorname{Re}\gamma}},$$

то интеграл (1.1.1) сходится в операторной норме.

По теореме Коши мы можем изменить контур \mathcal{C} на $\mathcal{C}_1 := \{te^{i\pi} : t \in (\infty, 0)\} \cup \{te^{-i\pi} : t \in (0, \infty)\}$. Тогда

$$\begin{aligned} A^{-\gamma} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_1} z^{-\gamma} (zI - A)^{-1} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\infty}^0 t^{-\gamma} e^{-i\pi\gamma} (te^{i\pi} I - A)^{-1} e^{i\pi} dt + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} t^{-\gamma} e^{i\pi\gamma} (te^{-i\pi} I - A)^{-1} e^{-i\pi} dt = -\frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} t^{-\gamma} e^{-i\pi\gamma} (tI + A)^{-1} dt + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} t^{-\gamma} e^{i\pi\gamma} (tI + A)^{-1} dt = \frac{\sin \pi\gamma}{\pi} \int_0^{\infty} t^{-\gamma} (tI + A)^{-1} dt, \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

$0 < \operatorname{Re}\gamma < 1$. Следовательно, для $\mathcal{Z} = \mathbb{C}$, $A = I$ получим равенство

$$\int_0^{\infty} \frac{t^{-\gamma} dt}{1+t} = \frac{\pi}{\sin \pi\gamma}, \quad 0 < \operatorname{Re}\gamma < 1. \quad (1.1.3)$$

Кроме того,

$$\|A^{-\gamma}\|_{\mathcal{L}(z)} \leq \frac{K_1 |\sin \pi\gamma|}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{t^{-\operatorname{Re}\gamma} dt}{1+t} = \frac{K_1 |\sin \pi\gamma|}{\sin(\pi\operatorname{Re}\gamma)}, \quad 0 < \operatorname{Re}\gamma < 1. \quad (1.1.4)$$

Лемма 1.1.1. Пусть $\alpha \in (0, 2)$, $-A \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, 0)$, $0 \in \rho(A)$. Тогда для $\operatorname{Re}\gamma, \operatorname{Re}\beta > 0$ $A^{-(\gamma+\beta)} = A^{-\gamma} A^{-\beta}$.

Доказательство. Возьмем контур $\tilde{\mathcal{C}}$ той же формы, что и \mathcal{C} , который можно получить из \mathcal{C} малым сдвигом вправо в комплексной плоскости, тогда

$$\begin{aligned}
A^{-\gamma}A^{-\beta} &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\mathcal{C}} z^{-\gamma}(zI - A)^{-1}dz \int_{\tilde{\mathcal{C}}} u^{-\beta}(uI - A)^{-1}du = \\
&= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\mathcal{C}} z^{-\gamma}(zI - A)^{-1}dz \int_{\tilde{\mathcal{C}}} \frac{u^{-\beta}}{u - z} du - \\
&\quad - \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\mathcal{C}} \frac{z^{-\gamma}}{u - z} dz \int_{\tilde{\mathcal{C}}} u^{-\beta}(uI - A)^{-1}du = \\
&= 0 + \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} z^{-\gamma-\beta}(zI - A)^{-1}dz = A^{-(\gamma+\beta)}.
\end{aligned}$$

□

Теорема 1.1.1. Пусть $\alpha \in (0, 2)$, $-A \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, 0)$, $0 \in \rho(A)$. Тогда семейство операторов $\{A^{-\gamma} \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}) : \operatorname{Re}\gamma > 0\}$ образует аналитическую полугруппу. При этом для любого $\theta \in (0, \pi/2)$, $z \in \mathcal{Z}$ мы имеем равенство

$$\lim_{\substack{\gamma \rightarrow 0 \\ |\arg \gamma| \leq \theta}} A^{-\gamma}z = z. \quad (1.1.5)$$

Доказательство. Интеграл (1.1.1) сходится абсолютно и равномерно по параметру γ из произвольного компактного подмножества правой полуплоскости $\{\operatorname{Re}\gamma > 0\}$, следовательно, он определяет аналитическую в $\{\operatorname{Re}\gamma > 0\}$ функцию от γ . Полугрупповое свойство доказано в предыдущей лемме.

Пусть $z \in D_A$, с учетом (1.1.3) имеем при $0 < \operatorname{Re}\gamma < 1$

$$\begin{aligned}
A^{-\gamma}z - z &= \frac{\sin \pi\gamma}{\pi} \int_0^\infty t^{-\gamma}((tI + A)^{-1}z - (t + 1)^{-1}z)dt = \\
&= \frac{\sin \pi\gamma}{\pi} \int_0^\infty \frac{t^{-\gamma}}{1 + t} (tI + A)^{-1}(I - A)z dt, \\
\|A^{-\gamma}z - z\|_{\mathcal{Z}} &\leq \frac{K_1 |\sin \pi\gamma|}{\pi} \int_0^\infty \frac{t^{-\operatorname{Re}\gamma}}{(1 + t)^2} dt \|(I - A)z\|_{\mathcal{Z}} \rightarrow 0
\end{aligned}$$

при $\gamma \rightarrow 0$, $|\arg \gamma| \leq \theta \in (0, \pi/2)$.

При $0 < \operatorname{Re} \gamma < 1/2$, $|\arg \gamma| \leq \theta$

$$\begin{aligned} \frac{|\sin \pi \gamma|}{|\sin(\pi \operatorname{Re} \gamma)|} &\leq \frac{|\sin(\pi \operatorname{Re} \gamma)| |\cos(i\pi \operatorname{Im} \gamma)| + |\cos(\pi \operatorname{Re} \gamma)| |\sin(\pi \operatorname{Im} \gamma)|}{|\sin(\pi \operatorname{Re} \gamma)|} \leq \\ &\leq e^{\pi |\operatorname{Im} \gamma|} + C_1 \frac{|\operatorname{Im} \gamma|}{\operatorname{Re} \gamma} \leq e^{\frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \theta} + C_1 \operatorname{tg} \theta \end{aligned} \quad (1.1.6)$$

Так как D_A плотно в пространстве \mathcal{Z} и семейство операторов

$$\{A^{-\gamma} : 0 < \operatorname{Re} \gamma < 1/2, |\arg \gamma| \leq \theta\}$$

равномерно ограничено в силу (1.1.4) и (1.1.6), равенство (1.1.5) справедливо для любого $z \in \mathcal{Z}$. \square

Лемма 1.1.2. Пусть $\alpha > 0$, $-A \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, 0)$, $0 \in \rho(A)$. Тогда для $\operatorname{Re} \gamma > 0$ оператор $A^{-\gamma}$ является инъективным.

Доказательство. Поскольку $0 \in \rho(A)$, оператор A^{-1} инъективен. Следовательно, для каждого $n \in \mathbb{N}$ оператор A^{-n} также инъективен. Пусть $A^{-\gamma}x = 0$. Возьмем натуральное $n > \operatorname{Re} \gamma$, тогда $\operatorname{Re}(n - \gamma) > 0$, $A^{-n}x = A^{-(n-\gamma)}A^{-\gamma}x = 0$. Следовательно, $x = 0$ и оператор $A^{-\gamma}$ является инъективным. \square

Для $\operatorname{Re} \gamma > 0$ определим оператор $A^\gamma := (A^{-\gamma})^{-1}$ на D_{A^γ} , $D_{A^\gamma} = \operatorname{im} A^{-\gamma} := \{y = A^{-\gamma}x : x \in \mathcal{Z}\}$. Также определим оператор $A^0 := I$.

Для $\operatorname{Re} \gamma = 0$ определим $A^\gamma := A^{\gamma-\beta}A^\beta$ с областью определения $D_{A^\gamma} := D_{A^\beta}$ для некоторого $\beta > 0$. Независимость этого определения от $\beta > 0$ будет доказана в следующей теореме.

Теорема 1.1.2. Пусть $\alpha > 0$, $-A \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, 0)$, $0 \in \rho(A)$. Тогда

- (i) для $\gamma \in \mathbb{C}$ A^γ является замкнутым оператором;
- (ii) если $\operatorname{Re} \gamma > \operatorname{Re} \beta \geq 0$, то $D_{A^\gamma} \subset D_{A^\beta}$;
- (iii) $\overline{D_{A^\gamma}} = \mathcal{Z}$ для каждого $\operatorname{Re} \gamma \geq 0$;
- (iv) если $\gamma, \beta \in \mathbb{C}$, то $A^{\gamma+\beta}z = A^\gamma A^\beta z$ для каждого $z \in D_{A^\gamma} \cap D_{A^\beta} \cap D_{A^{\gamma+\beta}}$.

Доказательство. Для $\operatorname{Re}\gamma < 0$ и для $\gamma = 0$ утверждение (i) очевидно. Если $\operatorname{Re}\gamma > 0$, то A^γ является замкнутым оператором, как обратный к замкнутому оператору. Если $\operatorname{Re}\gamma = 0$, то A^γ — замкнутый оператор как композиция ограниченного оператора $A^{\gamma-\beta}$ и замкнутого оператора A^β .

Для $\operatorname{Re}\gamma > \operatorname{Re}\beta > 0$ $A^{-\gamma} = A^{-\beta}A^{-(\gamma-\beta)}$, поэтому, $\operatorname{im}A^{-\gamma} = D_{A^\gamma} \subset \operatorname{im}A^{-\beta} = D_{A^\beta}$.

Поскольку D_A является плотным в \mathcal{Z} и резольвентное множество оператора A не пусто, то $\overline{D_{A^n}} = \mathcal{Z}$ для всех $n \in \mathbb{N}$ (см., например, [24, с. 30]), в то же время для $\gamma \leq n$ $D_{A^n} \subset D_{A^\gamma}$. Следовательно, утверждение (iii) справедливо при $\operatorname{Re}\gamma > 0$.

Если одно из чисел $\gamma, \beta, \gamma + \beta$ равно нулю, утверждение (iv) очевидно. Если $\operatorname{Re}\gamma < 0, \operatorname{Re}\beta < 0$, то оно доказано в лемме 1.1.1. Для $\operatorname{Re}\gamma > 0, \operatorname{Re}\beta > 0$ $A^{\gamma+\beta}z = (A^{-\beta-\gamma})^{-1}z = (A^{-\gamma})^{-1}(A^{-\beta})^{-1}z = A^\gamma A^\beta z$.

Теперь пусть $\operatorname{Re}\gamma > \operatorname{Re}\beta > 0$, тогда в соответствии с доказанным $A^{\gamma-\beta}A^\beta x = A^\gamma x = y, x = A^{-\gamma}y$, следовательно, $A^\beta A^{-\gamma}y = A^{\beta-\gamma}y, A^{\gamma-\beta}z = A^\gamma A^{-\beta}z$. Отсюда следует также, что $A^{-\gamma}A^\beta x = A^{-\gamma}A^{\beta-\gamma}A^\gamma x = A^{\beta-\gamma}A^{-\gamma}A^\gamma x = A^{\beta-\gamma}x, A^{-\beta}A^\gamma x = A^{-\beta}A^{\gamma-\beta}A^\beta x = A^{-\beta}A^\beta A^{\gamma-\beta}x = A^{\gamma-\beta}x$.

Пусть $\operatorname{Re}\gamma = 0, \beta > \delta > 0$, тогда в силу леммы 1.1.1 и согласно доказанному $A^{\gamma-\beta}A^\beta x = A^{\gamma-\delta}A^{\delta-\beta}A^\beta x = A^{\gamma-\delta}A^\delta x$, следовательно, $D_{A^\gamma} = \bigcup_{\delta>0} D_{A^\delta}, \overline{D_{A^\gamma}} = \mathcal{Z}$ и определение оператора A^γ для $\operatorname{Re}\gamma = 0$ не зависит от $\beta > 0$. Это также показывает, что когда $\operatorname{Re}\beta > \operatorname{Re}\gamma = 0$, выполняется утверждение (ii).

Для $\operatorname{Re}\gamma = 0, \operatorname{Re}(\gamma + \beta) \neq 0$ возьмем $\delta > 0, \delta \neq \pm \operatorname{Re}\beta$, тогда $A^\gamma A^\beta x = A^{\gamma-\delta}A^\delta A^\beta x = A^{\gamma-\delta}A^{\delta+\beta}x = A^{\gamma+\beta}x, A^\beta A^\gamma x = A^\beta A^{\gamma-\delta}A^\delta x = A^{\gamma-\delta+\beta}A^\delta x = A^{\gamma+\beta}x$.

Если $\operatorname{Re}\gamma = \operatorname{Re}\beta = 0$, то для $\delta > 0$ $A^\gamma A^\beta x = A^{\gamma-2\delta}A^{2\delta}A^{\beta-\delta}A^\delta x = A^{\gamma-2\delta}A^{\beta+\delta}A^\delta x = A^{\gamma+\beta-\delta}A^\delta x = A^{\gamma+\beta}x$. Наконец, пусть $\operatorname{Re}\gamma \neq 0, \operatorname{Re}(\gamma + \beta) = 0$, тогда для $\delta > 0, \delta \neq \operatorname{Re}\gamma$ $A^{\gamma+\beta}x = A^{\gamma+\beta-\delta}A^\delta x = A^\beta A^{\gamma-\delta}A^\delta x = A^\beta A^\gamma x$. Итак, утверждение (iv) справедливо для всех $\beta, \gamma \in \mathbb{C}$. \square

Теорема 1.1.3. Пусть $\alpha > 0, -A \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, 0), 0 \in \rho(A), 0 < \operatorname{Re}\gamma < 1$,

$z \in D_A$. Тогда

$$A^\gamma z = \frac{\sin \pi \gamma}{\pi} \int_0^\infty t^{\gamma-1} A(tI + A)^{-1} z dt.$$

Доказательство. Имеем $-1 < \operatorname{Re}(\gamma-1) < 0$. Следовательно, согласно (1.1.2)

имеем

$$A^{\gamma-1} z = \frac{\sin \pi \gamma}{\pi} \int_0^\infty t^{\gamma-1} (tI + A)^{-1} z dt.$$

Подынтегральное выражение в правой части равенства при $z \in D_A$ принадлежит D_A для любого $t > 0$ и интегрируемо на \mathbb{R}_+ , поскольку

$$\|t^{\gamma-1} (tI + A)^{-1} z\|_{\mathcal{Z}} \leq \frac{t^{\operatorname{Re} \gamma - 1} K_1 \|z\|_{\mathcal{Z}}}{1+t},$$

$$\int_0^\infty t^{\gamma-1} A(tI + A)^{-1} z dt = \int_0^\infty t^{\gamma-1} (tI + A)^{-1} A z dt.$$

Наконец, так как $z \in D_A \subset D_{A^\gamma}$, то $A^{\gamma-1} z = A^{-1} A^\gamma z \in D_A$ и из замкнутости оператора A получаем

$$A^\gamma z = A(A^{\gamma-1} z) = \frac{\sin \pi \gamma}{\pi} \int_0^\infty t^{\gamma-1} A(tI + A)^{-1} z dt = \frac{\sin \pi \gamma}{\pi} \int_0^\infty t^{\gamma-1} (tI + A)^{-1} A z dt.$$

□

1.2 Аналитические семейства разрешающих операторов и дробные степени секториального оператора

Для $t_0 \in \mathbb{R}$, $h : (t_0, \infty) \rightarrow \mathcal{Z}$ интеграл Римана — Лиувилля порядка $\beta > 0$ имеет вид

$$J^\beta h(t) := \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_{t_0}^t (t-s)^{\beta-1} h(s) ds, \quad t > t_0,$$

$J^0 h(t) := h(t)$. Пусть $m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, D^m — обычная производная целого порядка $m \in \mathbb{N}$, D^α — дробная производная Герасимова — Капуто, т. е.

$$D^\alpha h(t) := D^m J^{m-\alpha} \left(h(t) - \sum_{k=0}^{m-1} h^{(k)}(t_0) \frac{(t-t_0)^k}{k!} \right).$$

При достаточно гладком h $D^\alpha h(t) = J^{m-\alpha} D^m h(t)$. Для $\beta \leq 0$ обозначим $D^\beta h(t) := J^{-\beta} h(t)$.

Для функций $h \in L_1(t_0, T; \mathcal{Z})$, таких, что $J^{m-\alpha} h \in W_1^m(t_0, T; \mathcal{Z})$, выполняется тождество [54, Теорема 1.5]

$$J^\alpha D^\alpha h(t) = h(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{D^k h(t_0) t^k}{k!}. \quad (1.2.1)$$

Кроме того, для $h \in L_1(t_0, T; \mathcal{Z})$ выполняется $D^\alpha J^\alpha h(t) = h(t)$.

Для $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{Z}$, $\omega \in \mathbb{R}$, $H : \{\mu \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \mu > \omega\} \rightarrow \mathcal{Z}$ обозначим преобразование Лапласа через $\mathfrak{L}[h]$ и обратное преобразование Лапласа — $\mathfrak{L}^{-1}[H]$. Известны равенства [71, 87]

$$\mathfrak{L}[J^\alpha h](\mu) = \mu^{-\alpha} \mathfrak{L}[h](\mu), \quad \mathfrak{L}[D^\alpha h](\mu) = \mu^\alpha \mathfrak{L}[h](\mu) - \sum_{k=0}^{m-1} \mu^k D^{\alpha-k-1} h(t_0),$$

где $m - 1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$.

В [41] показано, что при $\alpha > 0$, $a_0 \geq 0$, $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$, $-A \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$, $\beta \in \mathbb{R}$ определены операторы

$$Z_\beta(t) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \mu^{\alpha-1+\beta} R_{\mu^\alpha}(-A) e^{\mu t} d\mu, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

где $\Gamma := \Gamma_+ \cup \Gamma_- \cup \Gamma_0$, $\Gamma_\pm := \{\mu \in \mathbb{C} : \mu = a + r e^{\pm i\theta}, r \in (\delta, \infty)\}$, $\Gamma_0 := \{\mu \in \mathbb{C} : \mu = a + \delta e^{i\varphi}, \varphi \in [-\theta, \theta]\}$ для $\delta > 0$, $a > a_0$, $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$. При этом для каждого $a > a_0$ справедливы неравенства

$$\|Z_\beta(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq C_\beta(\theta, a) e^{at} (t^{-1} + a)^\beta, \quad t > 0, \quad \beta \geq 0, \quad (1.2.2)$$

$$\|Z_\beta(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq C_\beta(\theta, a) e^{at} t^{-\beta}, \quad t > 0, \quad \beta < 0. \quad (1.2.3)$$

Замечание 1.2.1. Из вида операторов $Z_\beta(t)$ следует, что оператор-функция $Z_\beta(\cdot)$ представляет собой обратное преобразование Лапласа от оператор-функции $\mu^{\alpha-1+\beta} R_{\mu^\alpha}(-A)$, поэтому $\mathfrak{L}[Z_\beta(\cdot)] = \mu^{\alpha-1+\beta} R_{\mu^\alpha}(-A)$ при всех $\beta < 1$, когда $Z_\beta(\cdot)$ интегрируема в нуле.

Теорема 1.2.1. Пусть $\alpha > 0$, $-A \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$. Тогда для всех $\beta < 1$, $\delta < 1$, $t, s > 0$

$$\begin{aligned} Z_\beta(s)Z_\delta(t) &= -\frac{1}{\alpha}Z_{\beta+\delta}(s+t) + \frac{t^{-\delta}}{2\pi i} \int_{\Gamma} \mu^{\alpha-1+\beta} R_{\mu^\alpha}(-A) E_{\alpha,1-\delta}(\mu^\alpha t^\alpha) e^{\mu s} d\mu + \\ &\quad + \frac{s^{-\beta}}{2\pi i} \int_{\Gamma} \mu^{\alpha-1+\delta} R_{\mu^\alpha}(-A) E_{\alpha,1-\beta}(\mu^\alpha s^\alpha) e^{\mu t} d\mu. \end{aligned}$$

Доказательство. Здесь контур Γ имеет ту же форму, что и выше, для $a > a_0 \geq 0$. Возьмем для малого $\varepsilon > 0$ контур $\Gamma + \varepsilon := \{\mu \in \mathbb{C} : \mu = \lambda + \varepsilon, \lambda \in \Gamma\} \subset \rho(-A)$ и для $\lambda \in \Gamma$ круг $\Gamma_{\varepsilon,\lambda} := \{\mu \in \mathbb{C} : \mu = \lambda + \varepsilon e^{i\varphi}, \varphi \in [0, 2\pi)\} \subset \rho(-A)$, тогда

$$\begin{aligned} Z_\beta(s)Z_\delta(t) &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma+\varepsilon} \lambda^{\alpha-1+\beta} R_{\lambda^\alpha}(-A) e^{\lambda s} d\lambda \int_{\Gamma} \mu^{\alpha-1+\delta} R_{\mu^\alpha}(-A) e^{\mu t} d\mu = \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma+\varepsilon} \lambda^{\alpha-1+\beta} R_{\lambda^\alpha}(-A) e^{\lambda s} d\lambda \int_{\Gamma} \frac{\mu^{\alpha-1+\delta} e^{\mu t}}{\mu^\alpha - \lambda^\alpha} d\mu - \\ &\quad - \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma+\varepsilon} \frac{\lambda^{\alpha-1+\beta} e^{\lambda s} d\lambda}{\mu^\alpha - \lambda^\alpha} \int_{\Gamma} \mu^{\alpha-1+\delta} R_{\mu^\alpha}(-A) e^{\mu t} d\mu. \end{aligned}$$

С помощью зависящего от $|\mu|$ сдвига, гарантирующего, что на новом контуре для всех λ выполняется $|\lambda| > |\mu|$, по теореме Коши и формуле Ганкеля получим

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma+\varepsilon} \frac{\lambda^{\alpha-1+\beta} e^{\lambda s} d\lambda}{\mu^\alpha - \lambda^\alpha} &= \int_{\Gamma+|\mu|+2(a+\delta)} \frac{\lambda^{\alpha-1+\beta} e^{\lambda s} d\lambda}{\mu^\alpha - \lambda^\alpha} = - \int_{\Gamma+|\mu|+2(a+\delta)} \sum_{n=0}^{\infty} \mu^{\alpha n} \lambda^{\beta-\alpha n-1} e^{\lambda s} d\lambda = \\ &= -2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu^{\alpha n} s^{\alpha n-\beta}}{\Gamma(\alpha n + 1 - \beta)} = -2\pi i s^{-\beta} E_{\alpha,1-\beta}(\mu^\alpha s^\alpha), \\ \int_{\Gamma} \frac{\mu^{\alpha-1+\delta} e^{\mu t}}{\mu^\alpha - \lambda^\alpha} d\mu &= \int_{\Gamma+|\lambda|+2(a+\delta)} \frac{\mu^{\alpha-1+\delta} e^{\mu t}}{\mu^\alpha - \lambda^\alpha} d\mu - \int_{\Gamma_{|\lambda|+2(a+\delta),\lambda}} \frac{\mu^{\alpha-1+\delta} e^{\mu t}}{\mu^\alpha - \lambda^\alpha} d\mu = \\ &= \int_{\Gamma+|\lambda|+2(a+\delta)} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{\alpha n} \mu^{\delta-\alpha n-1} e^{\mu t} d\mu - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Gamma_{|\lambda|+2(a+\delta),\lambda}} \frac{\mu^{\alpha-1+\delta} e^{\mu t} d\mu}{(\mu - \lambda)(\alpha\lambda^{\alpha-1} + \alpha(\alpha - 1)\lambda^{\alpha-2}(\mu - \lambda) + \dots)} = \\
& = 2\pi i t^{-\delta} E_{\alpha,1-\delta}(\lambda^\alpha t^\alpha) - 2\pi i \frac{\lambda^\delta e^{\lambda t}}{\alpha}.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
Z_\beta(s)Z_\delta(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma+\varepsilon} \lambda^{\alpha-1+\beta} R_{\lambda^\alpha}(-A) \left(t^{-\delta} E_{\alpha,1-\delta}(\lambda^\alpha t^\alpha) - \frac{\lambda^\delta e^{\lambda t}}{\alpha} \right) e^{\lambda s} d\lambda + \\
&+ \frac{s^{-\beta}}{2\pi i} \int_{\Gamma} \mu^{\alpha-1+\delta} R_{\mu^\alpha}(-A) E_{\alpha,1-\beta}(\mu^\alpha s^\alpha) e^{\mu t} d\mu.
\end{aligned}$$

□

Замечание 1.2.2. Известно, что для $\alpha = 1$ семейство операторов $\{Z_0(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}) : t \in \mathbb{R}_+\}$ является аналитической полугруппой операторов [16, 50, 51, 80]. Возьмем в теореме 1.2.1 $\alpha = 1$, $\beta = \delta = 0$ и получим полугрупповое свойство $Z_0(t)Z_0(s) = Z_0(t + s)$, $t, s > 0$. Таким образом, теорема 1.2.1 дает некоторое обобщение полугруппового свойства для разрешающих семейств операторов, которые порождаются оператором из класса $\mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$.

Теорема 1.2.2. Пусть $\alpha > 0$, $-A \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, 0)$, $0 \in \rho(A)$. Тогда

- (i) $Z_\beta(t) : \mathcal{Z} \rightarrow D_{A^\gamma}$ для всех $\beta \in \mathbb{R}$, $\operatorname{Re} \gamma \in [0, 1)$, $t > 0$;
- (ii) $Z_\beta(t)A^\gamma z = A^\gamma Z_\beta(t)z$ для $\beta \in \mathbb{R}$, $\gamma \in \mathbb{C}$, $z \in D_{A^\gamma}$;
- (iii) для $\beta \in \mathbb{R}$, $\operatorname{Re} \gamma < 1$, $t > 0$ оператор $A^\gamma Z_\beta(t)$ ограничен;
- (iv) для $\operatorname{Re} \gamma \in (0, 1)$, $-\alpha \operatorname{Re} \gamma < \beta < 1 - \alpha \operatorname{Re} \gamma$

$$A^{-\gamma} = \frac{\alpha \sin \pi \gamma}{\sin(\pi(\alpha \gamma + \beta))\Gamma(\alpha \gamma + \beta)} \int_0^\infty t^{\alpha \gamma + \beta - 1} Z_\beta(t) dt;$$

- (v) для $\beta \in \mathbb{R}$, $t > 0$ $\|AZ_\beta(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq Ct^{-\alpha-\beta}$;
- (vi) для $\operatorname{Re} \gamma \in (0, 1)$, $\beta > -\alpha \operatorname{Re} \gamma$, $t > 0$ $\|A^\gamma Z_\beta(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq C_\gamma t^{-\alpha \operatorname{Re} \gamma - \beta}$;
- (vii) для $\beta < 1$, $\operatorname{Re} \gamma \in (0, 1)$, $z \in D_{A^\gamma}$

$$\|D^{-\beta} Z_\beta(t)z - z\|_{\mathcal{Z}} \leq C_\gamma t^{\alpha \operatorname{Re} \gamma} \|A^\gamma z\|_{\mathcal{Z}}.$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} AZ_\beta(t) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \mu^{2\alpha-1+\beta} R_{\mu^\alpha}(-A) e^{\mu t} d\mu + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \mu^{\alpha-1+\beta} e^{\mu t} d\mu I = \\ &= -Z_{\alpha+\beta}(t) + \frac{t^{-\alpha-\beta}}{2\pi i} \int_{t\Gamma} \lambda^{\alpha-1+\beta} e^{\lambda} d\lambda I = -Z_{\alpha+\beta}(t) + \frac{t^{-\alpha-\beta} I}{\Gamma(1-\alpha-\beta)}, \end{aligned}$$

для $\alpha + \beta \in \mathbb{N}$ последний член равен нулю. Тогда $Z_\beta(t) : \mathcal{Z} \rightarrow D_A \subset D_{A^\gamma}$ в силу теоремы 1.1.2. Следовательно, утверждение (i) и утверждение (v) с учетом (1.2.2), (1.2.3) доказаны.

Для $\operatorname{Re} \gamma < 0$ или $\gamma \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ утверждение (ii) очевидно с учетом построения операторов $Z_\beta(t)$ и A^γ . Пусть $\operatorname{Re} \gamma > 0$, $z \in D_{A^\gamma}$, тогда $z = A^{-\gamma} y$ для некоторого $y \in \mathcal{Z}$ и $Z_\beta(t)z = Z_\beta(t)A^{-\gamma}y = A^{-\gamma}Z_\beta(t)y = A^{-\gamma}Z_\beta(t)A^\gamma z$, это влечет равенство из утверждения (ii).

Для $\operatorname{Re} \gamma = 0$, $\operatorname{Im} \gamma \neq 0$ мы получаем аналогично при $\delta > 0$, $z \in D_{A^\gamma}$ $A^\gamma Z_\beta(t)z := A^{\gamma-\delta} A^\delta Z_\beta(t)z = Z_\beta(t)A^{\gamma-\delta} A^\delta z := Z_\beta(t)A^\gamma z$.

Так как $A^\gamma \in \mathcal{Cl}(\mathcal{Z})$, $\operatorname{Re} \gamma \in [0, 1)$, оператор $A^\gamma Z_\beta(t)$ замкнут, в силу утверждения (i) оператор $A^\gamma Z_\beta(t)$ определен на всем \mathcal{Z} , следовательно, он ограничен.

В силу замечания 1.2.1 $\mathfrak{L}[Z_\beta](\lambda) = \lambda^{\alpha-1+\beta} R_{\lambda^\alpha}(-A)$ для $\beta < 1$, $\operatorname{Re} \lambda > 0$, следовательно, для $\operatorname{Re} \gamma \in (0, 1)$, $\beta < 1 - \alpha \operatorname{Re} \gamma$ в силу (1.1.2)

$$\begin{aligned} A^{-\gamma} &= \frac{\sin \pi \gamma}{\pi} \int_0^\infty t^{-\gamma} (tI + A)^{-1} dt = \frac{\alpha \sin \pi \gamma}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{\alpha-1-\alpha\gamma} (\lambda^\alpha I + A)^{-1} d\lambda = \\ &= \frac{\alpha \sin \pi \gamma}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{-\alpha\gamma-\beta} \int_0^\infty e^{-\lambda t} Z_\beta(t) dt d\lambda = \\ &= \frac{\alpha \sin \pi \gamma}{\pi} \int_0^\infty s^{-\alpha\gamma-\beta} e^{-s} ds \int_0^\infty t^{\alpha\gamma+\beta-1} Z_\beta(t) dt = \\ &= \frac{\alpha \sin \pi \gamma \Gamma(1-\alpha\gamma-\beta)}{\pi} \int_0^\infty t^{\alpha\gamma+\beta-1} Z_\beta(t) dt = \end{aligned}$$

$$= \frac{\alpha \sin \pi \gamma}{\sin(\pi(\alpha \gamma + \beta)) \Gamma(\alpha \gamma + \beta)} \int_0^{\infty} t^{\alpha \gamma + \beta - 1} Z_{\beta}(t) dt. \quad (1.2.4)$$

Здесь использовано тождество

$$\Gamma(z) \Gamma(-z) = -\frac{\pi}{z \sin(\pi z)}.$$

По теореме 1.2.1

$$\begin{aligned} AZ_{\beta}(s) Z_{\delta}(t) &= -\frac{1}{\alpha} AZ_{\beta+\delta}(s+t) + \frac{t^{-\delta}}{2\pi i} \int_{\Gamma} \mu^{\alpha-1+\beta} E_{\alpha,1-\delta}(\mu^{\alpha} t^{\alpha}) e^{\mu s} d\mu - \\ &- \frac{t^{-\delta}}{2\pi i} \int_{\Gamma} \mu^{2\alpha-1+\beta} R_{\mu^{\alpha}}(-A) E_{\alpha,1-\delta}(\mu^{\alpha} t^{\alpha}) e^{\mu s} d\mu + \frac{s^{-\beta}}{2\pi i} \int_{\Gamma} \mu^{\alpha-1+\delta} E_{\alpha,1-\beta}(\mu^{\alpha} s^{\alpha}) e^{\mu t} d\mu - \\ &- \frac{s^{-\beta}}{2\pi i} \int_{\Gamma} \mu^{2\alpha-1+\delta} R_{\mu^{\alpha}}(-A) E_{\alpha,1-\beta}(\mu^{\alpha} s^{\alpha}) e^{\mu t} d\mu, \end{aligned}$$

следовательно, для некоторых $\beta < 1$, $\delta < 1$

$$\begin{aligned} \|AZ_{\beta}(s) Z_{\delta}(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} &\leq \frac{1}{\alpha} \|AZ_{\beta+\delta}(s+t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} + \frac{t^{-\delta}}{2\pi} \int_{\Gamma} |\mu|^{\alpha-1+\beta} |E_{\alpha,1-\delta}(\mu^{\alpha} t^{\alpha}) e^{\mu s}| |d\mu| + \\ &+ \frac{K_1 t^{-\delta}}{2\pi} \int_{\Gamma} |\mu|^{\alpha-1+\beta} |E_{\alpha,1-\delta}(\mu^{\alpha} t^{\alpha}) e^{\mu s}| |d\mu| + \frac{s^{-\beta}}{2\pi} \int_{\Gamma} |\mu|^{\alpha-1+\delta} |E_{\alpha,1-\beta}(\mu^{\alpha} s^{\alpha}) e^{\mu t}| |d\mu| + \\ &+ \frac{K_1 s^{-\beta}}{2\pi} \int_{\Gamma} |\mu|^{\alpha-1+\delta} |E_{\alpha,1-\beta}(\mu^{\alpha} s^{\alpha}) e^{\mu t}| |d\mu| \leq \frac{1}{\alpha} \|Z_{\alpha+\beta+\delta}(s+t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} + \\ &+ K_2 \int_{\Gamma} |\mu|^{\alpha-1+\beta+\delta} |e^{\mu(s+t)}| |d\mu| + K_2 \int_{\Gamma} |\mu|^{\alpha-1+\beta+\delta} |e^{\mu(s+t)}| |d\mu| + \\ &+ K_2 \int_{\Gamma} |\mu|^{\alpha-1+\beta+\delta} |e^{\mu(s+t)}| |d\mu| \leq K_3 (s+t)^{-\alpha-\beta-\delta}. \quad (1.2.5) \end{aligned}$$

Здесь мы использовано неравенство $|E_{\alpha,1-\beta}(\mu^{\alpha} s^{\alpha})| \leq C |\mu|^{\beta} s^{\beta} e^{s \operatorname{Re} \mu}$ для $s > 0$, $\mu \in \Gamma$, следующее из асимптотики функции Миттаг-Леффлера (см., например, [69, т. 3, гл. 18]).

Для $\operatorname{Re} \gamma \in (0, 1)$ возьмем $\beta \in (-\alpha \operatorname{Re} \gamma, 1)$, $\delta \in (\alpha(\operatorname{Re} \gamma - 1), 1 + \alpha(\operatorname{Re} \gamma - 1))$, тогда в силу (1.2.4) и (1.2.5)

$$\|A^{\gamma} Z_{\beta}(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} = \|A^{\gamma-1} AZ_{\beta}(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{\alpha |\sin \pi \gamma|}{\Gamma(\alpha(1-\gamma)+\delta) |\sin(\pi(\alpha(1-\gamma)+\delta))|} \int_0^\infty s^{\alpha(1-\operatorname{Re}\gamma)+\delta-1} \|AZ_\delta(s)Z_\beta(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} ds \leq \\
&\leq \frac{K_4 \alpha |\sin \pi \gamma|}{\Gamma(\alpha(1-\gamma)+\delta) |\sin(\pi(\alpha(1-\gamma)+\delta))|} \int_0^\infty s^{\alpha(1-\operatorname{Re}\gamma)+\delta-1} (s+t)^{-\alpha-\beta-\delta} ds = \\
&= \frac{K_5 \alpha |\sin \pi \gamma| t^{-\alpha \operatorname{Re}\gamma - \beta}}{\Gamma(\alpha(1-\gamma)+\delta) |\sin(\pi(\alpha(1-\gamma)+\delta))|} \int_0^\infty y^{\alpha(1-\operatorname{Re}\gamma)+\delta-1} (1+y)^{-\alpha-\beta-\delta} dy.
\end{aligned}$$

Последний интеграл сходится благодаря выбору β и δ . Тем самым доказано утверждение (vi).

Докажем последний пункт этой теоремы. Для $\beta = 0$, $\operatorname{Re}\gamma \in (0, 1)$ имеем

$$\begin{aligned}
\|Z_0(t)z - z\|_{\mathcal{Z}} &= \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \mu^{\alpha-1} R_{\mu^\alpha}(-A) e^{\mu t} z d\mu - z \right\|_{\mathcal{Z}} = \\
&= \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \mu^{-1} A R_{\mu^\alpha}(-A) e^{\mu t} z d\mu \right\|_{\mathcal{Z}} = \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \mu^{-1} A^{1-\gamma} R_{\mu^\alpha}(-A) e^{\mu t} A^\gamma z d\mu \right\|_{\mathcal{Z}} = \\
&= \|A^{1-\gamma} Z_{-\alpha}(t) A^\gamma z\|_{\mathcal{Z}} \leq C_{1-\gamma} t^{\alpha \operatorname{Re}\gamma} \|A^\gamma z\|_{\mathcal{Z}}.
\end{aligned}$$

Для $\beta < 1$, используя преобразование Лапласа, получим

$$\begin{aligned}
\|D^{-\beta} Z_\beta(t)z - z\|_{\mathcal{Z}} &= \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \mu^{\alpha-1} R_{\mu^\alpha}(-A) e^{\mu t} z d\mu - z \right\|_{\mathcal{Z}} = \\
&= \|Z_0(t)z - z\|_{\mathcal{Z}} \leq C_{1-\gamma} t^{\alpha \operatorname{Re}\gamma} \|A^\gamma z\|_{\mathcal{Z}}.
\end{aligned}$$

□

1.3 Локальная разрешимость уравнения с дробной производной Герасимова — Капуто

Функция $f : [a, b] \rightarrow \mathcal{Z}$, где $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, \mathcal{Z} — банахово пространство, называется абсолютно непрерывной на $[a, b]$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любого конечного набора непересекающихся интервалов $\{(a_i, b_i) \subset [a, b], i = 1, 2, \dots, p\}$, удовлетворяющего неравенству

$\sum_{i=1}^p (b_i - a_i) < \delta$, выполняется $\sum_{i=1}^p \|f(b_i) - f(a_i)\|_{\mathcal{Z}} < \varepsilon$. Множество всех абсолютно непрерывных функций на $[a, b]$ со значениями в \mathcal{Z} обозначим $AC([a, b]; \mathcal{Z})$.

Известно, что абсолютно непрерывная скалярная функция ($\mathcal{Z} = \mathbb{C}$) почти всюду дифференцируема. В общем случае это верно только для банаховых пространств \mathcal{Z} , обладающих свойством Радона — Никодима, в частности для рефлексивных банаховых пространств [96, следствие 1.2.7]. Но если $f \in AC([a, b]; \mathcal{Z})$ имеет производную почти всюду на $[a, b]$, то (см. [96, предложение 1.2.3]) f интегрируема по Бохнеру и

$$f(t) = f(a) + \int_a^t f'(s) ds.$$

Обратно, если g интегрируема по Бохнеру на $[a, b]$, то (см. [96, предложение 1.2.2])

$$\int_a^t g(s) ds \in AC([a, b]; \mathcal{Z}).$$

Через $AC^m([a, b]; \mathcal{Z})$ обозначим пространство функций из $C^{m-1}([a, b]; \mathcal{Z})$, у которых производная порядка $m - 1$ абсолютно непрерывна.

Через $C^\gamma([t_0, T]; \mathcal{Z})$ при $\gamma \in (0, 1]$ обозначим множество таких функций f , что

$$\exists c > 0 \quad \forall t, s \in [t_0, T] \quad \|f(t) - f(s)\|_{\mathcal{Z}} \leq c|t - s|^\gamma.$$

Рассмотрим задачу Коши

$$D^k z(t_0) = z_k, \quad k = 0, 1, \dots, m - 1, \quad (1.3.1)$$

для линейного неоднородного уравнения

$$D^\alpha z(t) + Az(t) = f(t), \quad t \in (t_0, T], \quad (1.3.2)$$

где $T > t_0$, $f : [t_0, T] \rightarrow \mathcal{Z}$. Ее решением будем называть такую функцию $z \in C((t_0, T]; D_A) \cap AC^m([t_0, T]; \mathcal{Z})$, что $D^\alpha z \in C((t_0, T]; \mathcal{Z})$, выполняются условия (1.3.1) и равенство (1.3.2).

Теорема 1.3.1. [47, 61]. Пусть $\alpha > 0$, $-A \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$, $f \in C([t_0, T]; D_A) \cup C^\gamma([t_0, T]; \mathcal{Z})$, $\gamma \in (0, 1]$. Тогда для всех $z_0, z_1, \dots, z_{m-1} \in D_A$ функция

$$z(t) = \sum_{k=0}^{m-1} Z_{-k}(t - t_0)z_k + \int_{t_0}^t Z_{1-\alpha}(t - s)f(s)ds, \quad t \in [t_0, T],$$

является единственным решением задачи (1.3.1), (1.3.2).

Рассмотрим задачу Коши (1.3.1) для квазилинейного уравнения

$$D^\alpha z(t) + Az(t) = B(t, D^{\alpha_1} z(t), D^{\alpha_2} z(t), \dots, D^{\alpha_n} z(t)), \quad (1.3.3)$$

где $m - 1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \alpha$, $m_l - 1 < \alpha_l \leq m_l \in \mathbb{Z}$, $l = 1, 2, \dots, n$. Некоторые из α_l могут быть неположительными, тогда $D^{\alpha_l} z(t) := J^{-\alpha_l} z(t)$.

При $\alpha > 0$, $-A \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, 0)$, $0 \in \rho(A)$ введем в рассмотрение пространства $Z_\gamma := D_{A^\gamma}$, $\gamma \geq 0$, с нормой $\|\cdot\|_\gamma := \|A^\gamma \cdot\|_{\mathcal{Z}}$. При этом $A^0 := I$, $\|\cdot\|_0 := \|\cdot\|_{\mathcal{Z}}$.

Пусть U открытое подмножество в $\mathbb{R} \times \mathcal{Z}_\gamma^n$, задано отображение $B : U \rightarrow \mathcal{Z}$. Предположим, что для каждой точки $(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \in U$ существует окрестность $V \subset U$ и константы $q > 0$, $\delta \in (0, 1]$, такие, что для всех $(t, y_1, \dots, y_n), (s, v_1, \dots, v_n) \in V$

$$\begin{aligned} & \|B(t, y_1, y_2, \dots, y_n) - B(s, v_1, v_2, \dots, v_n)\|_{\mathcal{Z}} \leq \\ & \leq q \left(|t - s|^\delta + \sum_{l=1}^n \|y_l - v_l\|_\gamma \right). \end{aligned} \quad (1.3.4)$$

Функция $z \in C((t_0, t_1]; D_A)$, такая, что $z \in C^{m-1}([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$, $D^\alpha z \in C((t_0, t_1]; \mathcal{Z})$, $D^{\alpha_1} z, D^{\alpha_2} z, \dots, D^{\alpha_n} z \in C([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$, называется решением задачи Коши (1.3.1), (1.3.3) на отрезке $[t_0, t_1]$, если она удовлетворяет условиям (1.3.1), для всех $t \in [t_0, t_1]$ $(t, D^{\alpha_1} z(t), D^{\alpha_2} z(t), \dots, D^{\alpha_n} z(t)) \in U$ и для всех $t \in (t_0, t_1]$ выполняется равенство (1.3.3).

Лемма 1.3.1. [71, Следствие 2.3]. Пусть $p - 1 < \beta \leq p \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\forall h \in C^p([t_0, T]; \mathcal{Z}) \quad \|D^\beta h\|_{C([t_0, T]; \mathcal{Z})} \leq \frac{(t_1 - t_0)^{p-\beta}}{\Gamma(p - \beta + 1)} \|h\|_{C^p([t_0, T]; \mathcal{Z})}.$$

Лемма 1.3.2. Пусть $\beta \in (0, 1)$, $h \in AC([t_0, T]; \mathcal{Z})$, $D^\beta h \in C([t_0, T]; \mathcal{Z})$. Тогда $h \in C^\beta([t_0, T]; \mathcal{Z})$, более того, для всех $t, \tau \in [t_0, T]$

$$\|h(t) - h(\tau)\|_{\mathcal{Z}} \leq \frac{\|D^\beta h\|_{C([t_0, T]; \mathcal{Z})}}{\Gamma(\beta + 1)} |t - \tau|^\beta.$$

Доказательство. Для $t_0 \leq \tau < t \leq T$,

$$\begin{aligned} \|h(t) - h(\tau)\|_{\mathcal{Z}} &= \|J^\beta D^\beta h(t) - J^\beta D^\beta h(\tau)\|_{\mathcal{Z}} \leq \\ &\leq \frac{(t - t_0)^\beta - (\tau - t_0)^\beta}{\Gamma(\beta + 1)} \|D^\beta h\|_{C([t_0, t_1]; \mathcal{Z})} \leq \frac{(t - \tau)^\beta}{\Gamma(\beta + 1)} \|D^\beta h\|_{C([t_0, t_1]; \mathcal{Z})}. \end{aligned}$$

Здесь использован тот факт, что функция

$$\frac{(t - t_0)^\beta - (\tau - t_0)^\beta}{(t - \tau)^\beta}$$

от $\tau \in [t_0, t)$ при $\beta \in (0, 1)$ убывает, а значит, имеет значения меньше значения в точке $\tau = t_0$, равного 1. \square

Теорема 1.3.2. Пусть $\alpha \geq 2$, $-A \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$. Тогда $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$.

Доказательство. При $\alpha > 2$ утверждение теоремы доказано в [54, Теорема 2.6] для случая, когда существует сильно непрерывное разрешающее семейство операторов уравнения $D^\alpha z(t) + Az(t) = 0$. Тем более это верно, когда это семейство аналитично в секторе, содержащем положительную полуось. При этом использован тот факт, что возведение правой комплексной полуплоскости в степень более 2 дает всю комплексную полуплоскость за исключением ограниченного множества лежащей в $\rho(-A)$.

Заметим, что при $\alpha = 2$, $-A \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$ возведение в степень 2 множества S_{θ_0, a_0} также дает всю комплексную полуплоскость за исключением ограниченного множества. Дословно повторяя рассуждения из доказательства теоремы 2.6 [54], получим требуемое утверждение при $\alpha = 2$. \square

Замечание 1.3.1. Понятно, что при $\alpha \geq 2$, $A \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$ также получим $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$.

Замечание 1.3.2. С учетом теоремы 1.3.2 далее будем рассматривать $\alpha \in (0, 2)$.

Пусть $\alpha \in (1, 2)$, используя начальные данные z_0, z_1 задачи Коши, определим $\tilde{z}(t) = z_0 + (t - t_0)z_1$, $\tilde{z}_l = D^{\alpha_l}\tilde{z}(t_0)$, $l = 1, 2, \dots, n$. Если при некотором $l \in \{1, 2, \dots, n\}$ $\alpha_l = m_l = k \in \{0, 1\}$, то $\tilde{z}_l = z_k$, иначе, $\tilde{z}_l = 0$.

Теорема 1.3.3. Пусть $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n \leq 1 < \alpha < 2$, $-A \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, 0)$, $0 \in \rho(A)$, отображение $B : U \rightarrow \mathcal{Z}$ удовлетворяет условию (1.3.4) при $\gamma \in [0, 1 - \frac{1}{\alpha}]$, $z_0, z_1 \in \mathcal{Z}_{\gamma+1}$, $(t_0, \tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \dots, \tilde{z}_n) \in U$. Тогда для некоторого $t_1 > t_0$ существует единственное решение задачи Коши

$$z(t_0) = z_0, \quad D^1 z(t_0) = z_1 \quad (1.3.5)$$

для уравнения (1.3.3) на отрезке $[t_0, t_1]$.

Доказательство. Для $(t_0, \tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \dots, \tilde{z}_n) \in U$ выберем $t_1 > t_0$ и $\varepsilon > 0$, такие, что на множестве

$$V := \{(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R} \times \mathcal{Z}_\gamma^n : t \in [t_0, t_1], \|x_l - \tilde{z}_l\|_\gamma \leq \varepsilon, l = 1, 2, \dots, n\}$$

неравенство (1.3.4) выполняется при некоторых $q > 0$, $\delta > 0$.

Пусть $\alpha_n \in (0, 1]$, $x \in C^1([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$, тогда в силу леммы 1.3.1

$$\|D^{\alpha_l} x\|_{C([t_0, t_1]; \mathcal{Z})} \leq C \|x\|_{C^1([t_0, t_1]; \mathcal{Z})}, \quad l = 1, 2, \dots, n. \quad (1.3.6)$$

Поэтому подмножество

$$S_{t_1} := \{x \in C^1([t_0, t_1]; \mathcal{Z}) : D^{\alpha_l} x(t_0) = A^\gamma \tilde{z}_l,$$

$$\|D^{\alpha_l} x(t) - A^\gamma \tilde{z}_l\|_{\mathcal{Z}} \leq \varepsilon, t \in [t_0, t_1], l = 1, 2, \dots, n\}$$

банахова пространства $C^1([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$ является замкнутым. Следовательно, множество S_{t_1} является полным метрическим пространством, на котором задана метрика $d(x, y) = \|x - y\|_{C^1([t_0, t_1]; \mathcal{Z})}$. Для $x \in S_{t_1}$, определим отображение

$$Fx(t) := Z_0(t - t_0)A^\gamma z_0 + Z_{-1}(t - t_0)A^\gamma z_1 + \int_{t_0}^t A^\gamma Z_{1-\alpha}(t - s)B^x(s)ds,$$

где $B^x(s) := B(s, A^{-\gamma}D^{\alpha_1}x(s), A^{-\gamma}D^{\alpha_2}x(s), \dots, A^{-\gamma}D^{\alpha_n}x(s))$.

Имеем при $x \in S_{t_1}$, $s \in [t_0, t_1]$

$$\|B^x(s) - B(s, \tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \dots, \tilde{z}_n)\|_{\mathcal{Z}} \leq Cn\varepsilon$$

в силу (1.3.4) и вида пространства S_{t_1} . Поэтому

$$\begin{aligned} & \left\| \int_{t_0}^t A^\gamma Z_{1-\alpha+\alpha_l}(t-s)B^x(s)ds \right\|_{\mathcal{Z}} \leq \\ & \leq \left\| \int_{t_0}^t A^{-\delta_l} A^{\gamma+\delta_l} Z_{1-\alpha+\alpha_l}(t-s)B(s, \tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \dots, \tilde{z}_n)ds \right\|_{\mathcal{Z}} + \\ & + \left\| \int_{t_0}^t A^{-\delta_l} A^{\gamma+\delta_l} Z_{1-\alpha+\alpha_l}(t-s)(B^x(s) - B(s, \tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \dots, \tilde{z}_n))ds \right\|_{\mathcal{Z}} \leq \\ & \leq C_1 \left(\sup_{s \in [t_0, t_1]} \|B(s, \tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \dots, \tilde{z}_n)\|_{\mathcal{Z}} + qn\varepsilon \right) (t-t_0)^{\alpha(1-\gamma-\delta_l)-\alpha_l} \end{aligned}$$

при $\delta_l \in (\max\{0, 1 - \gamma - \frac{\alpha_l+1}{\alpha}\}, 1 - \gamma - \frac{\alpha_l}{\alpha})$. Здесь используется утверждение теоремы 1.2.2 (vi) и тот факт, что при выбранном δ_l выполняется включение $1 - \alpha + \alpha_l \in (-\alpha(\gamma + \delta_l), 1 - \alpha(\gamma + \delta_l))$.

Для $z_0, z_1 \in Z_{\gamma+1}$, $x \in \mathcal{S}_{t_1}$, $l = 1, 2, \dots, n$, $\alpha_l < 0$

$$\begin{aligned} D^{\alpha_l} Fx(t)|_{t=t_0} &= Z_{\alpha_l}(0)A^\gamma z_0 + Z_{\alpha_l-1}(0)A^\gamma z_1 + \\ &+ \int_{t_0}^t A^\gamma Z_{1-\alpha+\alpha_l}(t-s)B^x(s)ds|_{t=t_0} = 0. \end{aligned}$$

Аналогично при $\alpha_l = 0$ $D^{\alpha_l} Fx(t)|_{t=t_0} = Fx(t)|_{t=t_0} = A^\gamma z_0$, при $\alpha_l \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} D^{\alpha_l} Fx(t)|_{t=t_0} &= D^1 J^{1-\alpha_l}(Z_0(t-t_0)A^\gamma z_0 - A^\gamma z_0)|_{t=t_0} + \\ &+ D^1 J^{1-\alpha_l} Z_{-1}(t-t_0)A^\gamma z_1|_{t=t_0} + D^1 \int_{t_0}^t A^\gamma Z_{-\alpha+\alpha_l}(t-s)B^x(s)ds|_{t=t_0} = \\ &= -D^1 J^{1-\alpha_l} Z_{-\alpha}(t-t_0)A^{\gamma+1} z_0|_{t=t_0} + Z_{\alpha_l-1}(0)A^\gamma z_1 + A^\gamma Z_{-\alpha+\alpha_l}(0)B^x(t_0) + \\ &+ \int_{t_0}^t A^\gamma Z_{1-\alpha+\alpha_l}(t-s)B^x(s)ds|_{t=t_0} = -Z_{-\alpha+\alpha_l}(0)A^{\gamma+1} z_0 = 0, \end{aligned}$$

при $\alpha_l = 1$

$$D^1 Fx(t_0) = A^\gamma z_1 + A^\gamma Z_{1-\alpha}(0)B^x(t_0) + \int_{t_0}^t A^\gamma Z_{2-\alpha}(t-s)B^x(s)ds|_{t=t_0} = A^\gamma z_1,$$

при $\alpha_l \in (1, \alpha)$

$$\begin{aligned} D^{\alpha_l} Fx(t)|_{t=t_0} &= D^2 J^{2-\alpha_l}(Z_0(t-t_0)A^\gamma z_0 - A^\gamma z_0)|_{t=t_0} + \\ &+ D^2 J^{2-\alpha_l}(Z_{-1}(t-t_0)A^\gamma z_1 - (t-t_0)A^\gamma z_1)|_{t=t_0} + \\ &+ D^2 \int_{t_0}^t A^\gamma Z_{-\alpha+\alpha_l-1}(t-s)B^x(s)ds|_{t=t_0} = \\ &= -D^2 J^{2-\alpha_l} Z_{-\alpha}(t-t_0)A^{\gamma+1}z_0|_{t=t_0} - D^2 J^{2-\alpha_l} Z_{-\alpha-1}(t-t_0)A^{\gamma+1}z_1|_{t=t_0} + \\ &+ D^1 A^\gamma Z_{-\alpha+\alpha_l-1}(0)B^x(t)|_{t=t_0} + D^1 \int_{t_0}^t A^\gamma Z_{-\alpha+\alpha_l}(t-s)B^x(s)ds|_{t=t_0} = \\ &= -Z_{-\alpha+\alpha_l}(0)A^{\gamma+1}z_0 - Z_{-\alpha+\alpha_l-1}(0)A^{\gamma+1}z_1 + \\ &+ A^\gamma Z_{-\alpha+\alpha_l}(0)B^x(t_0) + \int_{t_0}^t A^\gamma Z_{1-\alpha+\alpha_l}(t-s)B^x(s)ds|_{t=t_0} = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, для всех $l = 1, 2, \dots, n$ $D^{\alpha_l} Fx(t_0) = A^\gamma \tilde{z}_l$. Таким образом, для каждого $x \in S_{t_1}$, имеем $Fx \in S_{t_1}$, если t_1 достаточно близко к t_0 . Обратим внимание, что мы можем выбрать t_1 независимо от $x \in S_{t_1}$, поскольку норма $\|Fx(t) - Fx(t_0)\|_{\mathcal{Z}}$ может быть оценена через нормы операторов и сверточных интегралов с их участием, использованных выше.

Для $x, y \in S_{t_1}$, $t \in (t_0, t_1]$, в силу (1.3.6)

$$\begin{aligned} \|Fx(t) - Fy(t)\|_{\mathcal{Z}} &\leq \int_{t_0}^t \|A^{-\delta_{00}} A^{\gamma+\delta_{00}} Z_{1-\alpha}(t-s)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \|B^x(s) - B^y(s)\|_{\mathcal{Z}} ds \leq \\ &\leq C_1 (t_1 - t_0)^{\alpha(1-\gamma-\delta_{00})} d(x, y) \leq \frac{1}{3} d(x, y), \quad \delta_{00} \in \left(\max \left\{ 0, 1 - \gamma - \frac{1}{\alpha} \right\}, 1 - \gamma \right), \\ \|D^1 Fx(t) - D^1 Fy(t)\|_{\mathcal{Z}} &\leq \int_{t_0}^t \|A^{-\delta_{01}} A^{\gamma+\delta_{01}} Z_{2-\alpha}(t-s)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \|B^x(s) - B^y(s)\|_{\mathcal{Z}} ds \leq \end{aligned}$$

$$\leq C_1(t_1 - t_0)^{\alpha(1-\gamma-\delta_{01})-1}d(x, y) \leq \frac{1}{3}d(x, y),$$

$$\delta_{01} \in \left(\max \left\{ 0, 1 - \gamma - \frac{2}{\alpha} \right\}, 1 - \gamma - \frac{1}{\alpha} \right).$$

Поэтому $d(Fx, Fy) \leq \frac{2}{3}d(x, y)$ и по теореме Банаха, существует единственный элемент $y \in S_{t_1}$, такой, что $y(t) = Fy(t)$, $t \in [t_0, t_1]$.

Кроме того, для $t_0 \leq \tau < t \leq t_1$, $\alpha_l \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} & \|D^{\alpha_l}y(t) - D^{\alpha_l}y(\tau)\|_{\mathcal{Z}} = \|D^{\alpha_l}Fy(t) - D^{\alpha_l}Fy(\tau)\|_{\mathcal{Z}} \leq \\ & \leq \|Z_{\alpha_l-\alpha}(t-t_0)A^{\gamma+1}z_0 - Z_{\alpha_l-\alpha}(\tau-t_0)A^{\gamma+1}z_0\|_{\mathcal{Z}} + \\ & + \|Z_{\alpha_l-1}(t-t_0)A^{\gamma}z_1 - Z_{\alpha_l-1}(\tau-t_0)A^{\gamma}z_1\|_{\mathcal{Z}} + \\ & + \left\| \int_{t_0}^t A^{\gamma}Z_{1-\alpha+\alpha_l}(t-s)B^y(s)ds - \int_0^{\tau} A^{\gamma}Z_{1-\alpha+\alpha_l}(\tau-s)B^y(s)ds \right\|_{\mathcal{Z}} \leq \\ & \leq \max_{s \in [t_0, t_1]} \|D^{\frac{\alpha-\alpha_l}{2}}Z_{\alpha_l-\alpha}(s-t_0)A^{\gamma+1}z_0\|_{\mathcal{Z}}|t-\tau|^{\frac{\alpha-\alpha_l}{2}} + \\ & + \max_{s \in [t_0, t_1]} \|D^{\frac{1-\alpha_l}{2}}Z_{\alpha_l-1}(s-t_0)A^{\gamma}z_1\|_{\mathcal{Z}}|t-\tau|^{\frac{1-\alpha_l}{2}} + \\ & + \max_{r \in [t_0, t_1]} \left\| D^{\beta_l} \int_{t_0}^r A^{\gamma}Z_{1-\alpha+\alpha_l}(r-s)B^y(s)ds \right\|_{\mathcal{Z}} |t-\tau|^{\beta_l} \leq \\ & \leq \max_{s \in [t_0, t_1]} \|Z_{-\frac{\alpha-\alpha_l}{2}}(s-t_0)A^{\gamma+1}z_0\|_{\mathcal{Z}}|t-\tau|^{\frac{\alpha-\alpha_l}{2}} + \\ & + \max_{s \in [t_0, t_1]} \|Z_{-\frac{1-\alpha_l}{2}}(s-t_0)A^{\gamma}z_0\|_{\mathcal{Z}}|t-\tau|^{\frac{1-\alpha_l}{2}} + \\ & + \max_{r \in [t_0, t_1]} \left\| \int_{t_0}^r A^{-\delta_l}A^{\gamma+\delta_l}Z_{1-\alpha+\alpha_l+\beta_l}(r-s)B^y(s)ds \right\|_{\mathcal{Z}} |t-\tau|^{\beta_l} \leq \\ & \leq C_1|t-\tau|^{\frac{1-\alpha_l}{2}} + C_2(t_1-t_0)^{\alpha(1-\gamma-\delta_l)-\alpha_l-\beta_l}|t-\tau|^{\beta_l} \leq C_3|t-\tau|^{\beta_l}, \end{aligned}$$

если взять $\beta_l < (1-\gamma)\alpha - \alpha_l$, $\beta_l \leq \frac{1-\alpha_l}{2}$, $\delta_l \in (\max\{0, 1 - \gamma - \frac{\alpha_l+\beta_l+1}{\alpha}\}, 1 - \gamma - \frac{\alpha_l+\beta_l}{\alpha})$. Здесь мы использовали неравенства (1.2.3) и лемму 1.3.2. Для этого

было замечено, что при $\delta > 0$ $D^1 Z_{-\delta} = Z_{1-\delta} \in L_1(t_0, t_1; \mathcal{L}(\mathcal{Z}))$ в силу (1.2.2), поэтому $Z_{-\delta} \in AC([t_0, t_1]; \mathcal{L}(\mathcal{Z}))$; в силу теоремы 1.2.2 (vi)

$$\left\| \int_{t_0}^t A^\gamma Z_{1-\alpha+\alpha_l}(t-s) B^y(s) ds \right\|_{\mathcal{Z}} \leq C t^{-\alpha\gamma+\alpha-\alpha_l}.$$

Так как $-\alpha\gamma + \alpha - \alpha_l > 0$ по выбору γ , имеем

$$\int_{t_0}^t A^\gamma Z_{1-\alpha+\alpha_l}(t-s) B^y(s) ds|_{t=t_0} = 0,$$

$$D^1 \int_{t_0}^t A^\gamma Z_{1-\alpha+\alpha_l}(t-s) B^y(s) ds = \int_{t_0}^t A^\gamma Z_{2-\alpha+\alpha_l}(t-s) B^y(s) ds \in L_1(t_0, t_1; \mathcal{Z}),$$

ПОЭТОМУ

$$\int_{t_0}^t A^\gamma Z_{1-\alpha+\alpha_l}(t-s) B^y(s) ds \in AC([t_0, t_1]; \mathcal{Z}).$$

Если $\alpha_l = 0$, то

$$\begin{aligned} & \|D^{\alpha_l} y(t) - D^{\alpha_l} y(\tau)\|_{\mathcal{Z}} = \|Fy(t) - Fy(\tau)\|_{\mathcal{Z}} \leq \\ & \leq \|Z_{-\alpha}(t-t_0)A^{\gamma+1}z_0 - Z_{-\alpha}(\tau-t_0)A^{\gamma+1}z_0\|_{\mathcal{Z}} + \\ & \quad + \|Z_{-1}(t-t_0)A^\gamma z_1 - Z_{-1}(\tau-t_0)A^\gamma z_1\|_{\mathcal{Z}} + \\ & + \left\| \int_{t_0}^t A^\gamma Z_{1-\alpha}(t-s) B^y(s) ds - \int_0^\tau A^\gamma Z_{1-\alpha}(\tau-s) B^y(s) ds \right\|_{\mathcal{Z}} \leq \\ & \leq \max_{s \in [t_0, t_1]} \|D^{1/2} Z_{-\alpha}(s-t_0) A^{\gamma+1} z_0\|_{\mathcal{Z}} |t-\tau|^{1/2} + \\ & \quad + \max_{s \in [t_0, t_1]} \|D^{1/2} Z_{-1}(s-t_0) A^\gamma z_1\|_{\mathcal{Z}} |t-\tau|^{1/2} + \\ & \quad + \max_{r \in [t_0, t_1]} \left\| D^{\beta_{00}} \int_{t_0}^r A^\gamma Z_{1-\alpha}(r-s) B^y(s) ds \right\|_{\mathcal{Z}} |t-\tau|^{\beta_{00}} \leq \\ & \leq \max_{s \in [t_0, t_1]} \|Z_{\frac{1}{2}-\alpha}(s-t_0) A^{\gamma+1} z_0\|_{\mathcal{Z}} |t-\tau|^{1/2} + \max_{s \in [t_0, t_1]} \|Z_{-\frac{1}{2}}(s-t_0) A^\gamma z_1\|_{\mathcal{Z}} |t-\tau|^{1/2} + \\ & \quad + \max_{r \in [t_0, t_1]} \left\| \int_{t_0}^r A^{-\delta_{00}} A^{\delta_{00}+\gamma} Z_{1-\alpha+\beta_{00}}(r-s) B^y(s) ds \right\|_{\mathcal{Z}} |t-\tau|^{\beta_{00}} \leq C_3 |t-\tau|^{\beta_{00}}, \end{aligned}$$

где $\beta_{00} < (1 - \gamma)\alpha$, $\beta_{00} \leq \frac{1}{2}$, $\delta_{00} \in (\max\{0, 1 - \gamma - \frac{\beta_{00}+1}{\alpha}\}, 1 - \gamma - \frac{\beta_{00}}{\alpha})$.

При $\alpha_l = 1$

$$\begin{aligned}
& \|D^{\alpha_l}y(t) - D^{\alpha_l}y(\tau)\|_{\mathcal{Z}} = \|D^1Fy(t) - D^1Fy(\tau)\|_{\mathcal{Z}} \leq \\
& \leq \sum_{k=0}^1 \|Z_{-k+1-\alpha}(t-t_0)A^{\gamma+1}z_k - Z_{-k+1-\alpha}(\tau-t_0)A^{\gamma+1}z_k\|_{\mathcal{Z}} + \\
& + \left\| \int_{t_0}^t A^\gamma Z_{2-\alpha}(t-s)B^y(s)ds - \int_0^\tau A^\gamma Z_{2-\alpha}(\tau-s)B^y(s)ds \right\|_{\mathcal{Z}} \leq \\
& \leq \sum_{k=0}^1 \max_{s \in [t_0, t_1]} \|D^{\frac{\alpha-1}{2}} Z_{1-k-\alpha}(s-t_0)A^{\gamma+1}z_k\|_{\mathcal{Z}} |t-\tau|^{\frac{\alpha-1}{2}} + \\
& + \max_{r \in [t_0, t_1]} \left\| D^{\beta_{01}} \int_{t_0}^r A^\gamma Z_{2-\alpha}(r-s)B^y(s)ds \right\|_{\mathcal{Z}} |t-\tau|^{\beta_{01}} \leq \\
& \leq \max_{s \in [t_0, t_1]} \|Z_{-\frac{\alpha-1}{2}}(s-t_0)A^\gamma z_1\|_{\mathcal{Z}} |t-\tau|^{\frac{\alpha-1}{2}} + \\
& + \max_{s \in [t_0, t_1]} \|Z_{-1-\frac{\alpha-1}{2}}(s-t_0)A^{\gamma+1}z_0\|_{\mathcal{Z}} |t-\tau|^{\frac{\alpha-1}{2}} + \\
& + \max_{r \in [t_0, t_1]} \left\| \int_{t_0}^r A^{-\delta_{01}} A^{\delta_{01}+\gamma} Z_{2-\alpha+\beta_{01}}(r-s)B^y(s)ds \right\|_{\mathcal{Z}} |t-\tau|^{\beta_{01}} \leq C_3 |t-\tau|^{\beta_{01}}
\end{aligned}$$

при $\beta_{01} < (1 - \gamma)\alpha - 1$, $\beta_{01} \leq \frac{\alpha-1}{2}$, $\delta_{01} \in (\max\{0, 1 - \gamma - \frac{2+\beta_{01}}{\alpha}\}, 1 - \gamma - \frac{1+\beta_{01}}{\alpha})$.

При этом также используется, что в силу теоремы 1.2.2 (vi)

$$\left\| \int_{t_0}^t A^\gamma Z_{2-\alpha}(t-s)B^y(s)ds \right\|_{\mathcal{Z}} \leq Ct^{-\alpha\gamma+\alpha-1},$$

$-\alpha\gamma + \alpha - 1 > 0$ по выбору γ , поэтому

$$\int_{t_0}^t A^\gamma Z_{2-\alpha}(t-s)B^y(s)ds \in AC([t_0, t_1]; \mathcal{Z}),$$

а значит можно воспользоваться леммой 1.3.2.

Если $\alpha_l < 0$, возьмем $\beta_l = \min\{1, -\alpha_l\}$, тогда

$$\|D^{\alpha_l}y(t) - D^{\alpha_l}y(\tau)\|_{\mathcal{Z}} = \|D^{\alpha_l}Fy(t) - D^{\alpha_l}Fy(\tau)\|_{\mathcal{Z}} \leq$$

$$\begin{aligned}
& \leq \sum_{k=0}^1 \|Z_{\alpha_l-k}(t-t_0)A^\gamma z_k - Z_{\alpha_l-k}(\tau-t_0)A^\gamma z_k\|_{\mathcal{Z}} + \\
& + \left\| \int_{t_0}^t A^\gamma Z_{1-\alpha+\alpha_l}(t-s)B^y(s)ds - \int_0^\tau A^\gamma Z_{1-\alpha+\alpha_l}(\tau-s)B^y(s)ds \right\|_{\mathcal{Z}} \leq \\
& \leq \sum_{k=0}^1 \max_{s \in [t_0, t_1]} \|D^{\beta_l} Z_{\alpha_l-k}(s-t_0)A^\gamma z_k\|_{\mathcal{Z}} |t-\tau|^{\beta_l} + \\
& + \max_{r \in [t_0, t_1]} \left\| D^{\beta_l} \int_{t_0}^r A^\gamma Z_{1-\alpha+\alpha_l}(r-s)B^y(s)ds \right\|_{\mathcal{Z}} |t-\tau|^{\beta_l} \leq \\
& \leq \sum_{k=0}^1 \max_{s \in [t_0, t_1]} \|Z_{\alpha_l+\beta_l-k}(s-t_0)A^\gamma z_k\|_{\mathcal{Z}} |t-\tau|^{\beta_l} + \\
& + \max_{r \in [t_0, t_1]} \left\| \int_{t_0}^r A^{-\delta_l} A^{\gamma+\delta_l} Z_{1-\alpha+\alpha_l+\beta_l}(r-s)B^y(s)ds \right\|_{\mathcal{Z}} |t-\tau|^{\beta_l} \leq \\
& \leq C_1 |t-\tau|^{\beta_l} + C_2 (t_1-t_0)^{\alpha(1-\gamma-\delta_l)-\alpha_l-\beta_l} |t-\tau|^{\beta_l} \leq C_3 |t-\tau|^{\beta_l},
\end{aligned}$$

$$\delta_l \in (\max\{0, 1 - \gamma - \frac{\alpha_l+\beta_l+1}{\alpha}\}, 1 - \gamma - \frac{\alpha_l+\beta_l}{\alpha}).$$

Таким образом, для неподвижной точки y отображения F имеем $B^y \in C^\nu([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$ для некоторого $\nu \in (0, \delta]$ в силу условия (1.3.4). Действительно,

$$\begin{aligned}
& \|B(t, A^{-\gamma} D^{\alpha_1} y(t), \dots, A^{-\gamma} D^{\alpha_n} y(t)) - B(s, A^{-\gamma} D^{\alpha_1} y(s), \dots, A^{-\gamma} D^{\alpha_n} y(s))\|_{\mathcal{Z}} \leq \\
& \leq q \left(|t-s|^\delta + \sum_{l=1}^n \|A^{-\gamma} D^{\alpha_l} y(t) - A^{-\gamma} D^{\alpha_l} y(s)\|_{\gamma} \right) = \\
& = q \left(|t-s|^\delta + \sum_{l=1}^n \|A^\gamma A^{-\gamma} D^{\alpha_l} y(t) - A^\gamma A^{-\gamma} D^{\alpha_l} y(s)\|_{\mathcal{Z}} \right) = \\
& = q \left(|t-s|^\delta + \sum_{l=1}^n \|D^{\alpha_l} y(t) - D^{\alpha_l} y(s)\|_{\mathcal{Z}} \right) \leq C_1 |t-s|^\nu.
\end{aligned}$$

Из теоремы 1.3.1 следует, что решением задачи Коши (1.3.3), (1.3.5) является функция $z \in C^1([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$, такая, что

$$z(t) = \sum_{k=0}^1 Z_{-k}(t-t_0)z_k + \int_{t_0}^t Z_{1-\alpha}(t-s)B^{A^\gamma z}(s)ds = A^{-\gamma} F A^\gamma z(t), \quad (1.3.7)$$

поэтому $y(t) = A^\gamma z(t)$ является неподвижной точкой отображения F . С другой стороны, если функция $z \in C^1([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$ удовлетворяет уравнению (1.3.7), то $B^{A^\gamma z}(s) = B^y(s) = B^{Fy}(s)$ удовлетворяет условию Гёльдера, как показано выше, поэтому согласно теореме 1.3.1 z является решением задачи (1.3.3), (1.3.5). Таким образом, функция $z \in C^1([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$ является решением задачи Коши (1.3.3), (1.3.5) тогда и только тогда, когда $y = A^\gamma z$ является неподвижной точкой отображения F в пространстве $C^1([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$, существование и единственность которой доказаны выше.

При $\alpha_n \leq 0$ те же рассуждения проводятся в пространстве $C([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$. □

Для $\alpha \in (0, 1]$ определим $\tilde{z}(t) = z_0$, $\tilde{z}_l = D^{\alpha_l} \tilde{z}(t_0)$, $l = 1, 2, \dots, n$. Если при некотором $l \in \{1, 2, \dots, n\}$ $\alpha_l = m_l = 0$, то $\tilde{z}_l = z_0$, иначе, $\tilde{z}_l = 0$.

Теорема 1.3.4. Пусть $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n \leq 0 < \alpha \leq 1$, $-A \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, 0)$, $0 \in \rho(A)$, отображение $B : U \rightarrow \mathcal{Z}$ удовлетворяет условию (1.3.4) при $\gamma \in [0, 1)$, $z_0 \in \mathcal{Z}_{1+\gamma}$, $(t_0, \tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \dots, \tilde{z}_n) \in U$. Тогда для некоторого $t_1 > t_0$, существует единственное решение задачи Коши

$$z(t_0) = z_0 \tag{1.3.8}$$

для уравнения (1.3.3) на $[t_0, t_1]$.

Доказательство. Возьмем такие $t_1 > t_0$ и $\varepsilon > 0$, что на множестве

$$V := \{(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R} \times \mathcal{Z}_\gamma^n : t \in [t_0, t_1], \|x_l - \tilde{z}_l\|_\gamma \leq \varepsilon, l = 1, 2, \dots, n\}$$

выполняется неравенство (1.3.4) с некоторыми $C > 0$, $\delta > 0$. Множество

$$S_{t_1} := \{x \in C([t_0, t_1]; \mathcal{Z}) : D^{\alpha_l} x(t_0) = A^\gamma \tilde{z}_l,$$

$$\|D^{\alpha_l} x(t) - A^\gamma \tilde{z}_l\|_{\mathcal{Z}} \leq \varepsilon, t \in [t_0, t_1], l = 1, 2, \dots, n\}$$

является полным метрическим пространством с метрикой

$$d(x, y) = \|x - y\|_{C([t_0, t_1]; \mathcal{Z})}.$$

Для $x \in S_{t_1}$, определим отображение

$$Fx(t) := Z_0(t - t_0)A^\gamma z_0 + \int_{t_0}^t A^\gamma Z_{1-\alpha}(t - s)B^x(s)ds,$$

где $B^x(s) := B(s, A^{-\gamma}D^{\alpha_1}x(s), A^{-\gamma}D^{\alpha_2}x(s), \dots, A^{-\gamma}D^{\alpha_n}x(s))$.

Рассуждая, как при доказательстве предыдущей теоремы, получим при $x \in S_{t_1}$, $s \in [t_0, t_1]$

$$\begin{aligned} & \|B^x(s) - B(s, \tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \dots, \tilde{z}_n)\|_{\mathcal{Z}} \leq qn\varepsilon, \\ & \left\| \int_{t_0}^t A^\gamma Z_{1-\alpha+\alpha_l}(t - s)B^x(s)ds \right\|_{\mathcal{Z}} \leq \\ & \leq \left\| \int_{t_0}^t A^{-\delta_l} A^{\gamma+\delta_l} Z_{1-\alpha+\alpha_l}(t - s)B(s, \tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \dots, \tilde{z}_n)ds \right\|_{\mathcal{Z}} + \\ & + \left\| \int_{t_0}^t A^{-\delta_l} A^{\gamma+\delta_l} Z_{1-\alpha+\alpha_l}(t - s)(B^x(s) - B(s, \tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \dots, \tilde{z}_n))ds \right\|_{\mathcal{Z}} \leq \\ & \leq C_1 \left(\sup_{s \in [t_0, t_1]} \|B(s, \tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \dots, \tilde{z}_n)\|_{\mathcal{Z}} + qn\varepsilon \right) (t - t_0)^{\alpha(1-\gamma-\delta_l)-\alpha_l} \end{aligned}$$

при $\delta_l \in (\max\{0, 1 - \gamma - \frac{\alpha_l+1}{\alpha}\}, 1 - \gamma - \frac{\alpha_l}{\alpha})$. Отсюда следует, что для $x \in S_{t_1}$ $Fx(t_0) = A^\gamma z_0$.

Для $l = 1, 2, \dots, n$ в случае $\alpha_l < 0$ имеем

$$D^{\alpha_l} Fx(t) = Z_{\alpha_l}(t - t_0)A^\gamma z_0 + \int_{t_0}^t A^\gamma Z_{1-\alpha+\alpha_l}(t - s)B^x(s)ds,$$

и $D^{\alpha_l} Fx(t_0) = 0 = A^\gamma \tilde{z}_l$. Таким образом, $Fx \in S_{t_1}$ для каждого $x \in S_{t_1}$, если t_1 достаточно близко к t_0 .

Если $x, y \in S_{t_1}$, $t \in (t_0, t_1]$, тогда

$$\|Fx(t) - Fy(t)\|_{\mathcal{Z}} \leq \int_{t_0}^t \|A^\gamma Z_{1-\alpha}(t - s)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \|B^x(s) - B^y(s)\|_{\mathcal{Z}} ds \leq$$

$$\leq C_1(t_1 - t_0)^{\alpha(1-\gamma-\delta_0)}d(x, y) \leq \frac{1}{2}d(x, y), \delta_0 \in \left(\max \left\{ 0, 1 - \gamma - \frac{1}{\alpha} \right\}, 1 - \gamma \right).$$

Отсюда следует, что $d(Fx, Fy) \leq \frac{1}{2}d(x, y)$ при достаточно малом $t_1 - t_0$, поэтому существует единственная в S_{t_1} неподвижная точка отображения F , т. е. $y(t) = Fy(t)$ для всех $t \in [t_0, t_1]$.

Далее для $t_0 \leq \tau < t \leq t_1$, $\alpha_l < 0$ возьмем $\beta_l = \min\{1, -\alpha_l\}$

$$\begin{aligned} & \|D^{\alpha_l}y(t) - D^{\alpha_l}y(\tau)\|_{\mathcal{Z}} = \|D^{\alpha_l}Fy(t) - D^{\alpha_l}Fy(\tau)\|_{\mathcal{Z}} \leq \\ & \leq \|Z_{\alpha_l}(t - t_0)A^\gamma z_0 - Z_{\alpha_l}(\tau - t_0)A^\gamma z_0\|_{\mathcal{Z}} + \\ & + \left\| \int_{t_0}^t A^\gamma Z_{1-\alpha+\alpha_l}(t-s)B^y(s)ds - \int_0^\tau A^\gamma Z_{1-\alpha+\alpha_l}(\tau-s)B^y(s)ds \right\|_{\mathcal{Z}} \leq \\ & \leq \max_{s \in [t_0, t_1]} \|D^{\beta_l} Z_{\alpha_l}(s - t_0)A^\gamma z_0\|_{\mathcal{Z}} |t - \tau|^{\beta_l} + \\ & + \max_{r \in [t_0, t_1]} \left\| D^{\beta_l} \int_{t_0}^r A^\gamma Z_{1-\alpha+\alpha_l}(r-s)B^y(s)ds \right\|_{\mathcal{Z}} |t - \tau|^{\beta_l} \leq \\ & \leq \max_{s \in [t_0, t_1]} \|Z_{\alpha_l+\beta_l}(s - t_0)A^\gamma z_0\|_{\mathcal{Z}} |t - \tau|^{\beta_l} + \\ & + \max_{r \in [t_0, t_1]} \left\| \int_{t_0}^r A^{-\delta_l} A^{\gamma+\delta_l} Z_{1-\alpha+\alpha_l+\beta_l}(r-s)B^y(s)ds \right\|_{\mathcal{Z}} |t - \tau|^{\beta_l} \leq \\ & \leq C_1 |t - \tau|^{\beta_l} + C_2 (t_1 - t_0)^{\alpha(1-\gamma-\delta_l)-\alpha_l-\beta_l} |t - \tau|^{\beta_l} \leq C_3 |t - \tau|^{\beta_l}, \end{aligned}$$

где $\delta_l \in (\max\{0, 1 - \gamma - \frac{\alpha_l+\beta_l+1}{\alpha}\}, 1 - \gamma - \frac{\alpha_l+\beta_l}{\alpha})$.

Кроме того, при $\beta \in (0, \alpha(1 - \gamma))$

$$\begin{aligned} & \|y(t) - y(\tau)\|_{\mathcal{Z}} = \|Fy(t) - Fy(\tau)\|_{\mathcal{Z}} \leq \|Z_0(t - t_0)A^\gamma z_0 - Z_0(\tau - t_0)A^\gamma z_0\|_{\mathcal{Z}} + \\ & + \left\| \int_{t_0}^t A^\gamma Z_{1-\alpha}(t-s)B^y(s)ds - \int_0^\tau A^\gamma Z_{1-\alpha}(\tau-s)B^y(s)ds \right\|_{\mathcal{Z}} \leq \\ & \leq \max_{s \in [t_0, t_1]} \|D^\beta Z_{-\alpha}(s - t_0)A^{\gamma+1}z_0\|_{\mathcal{Z}} |t - \tau|^\beta + \\ & + \max_{r \in [t_0, t_1]} \left\| D^\beta \int_{t_0}^r A^\gamma Z_{1-\alpha}(r-s)B^y(s)ds \right\|_{\mathcal{Z}} |t - \tau|^\beta \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \max_{s \in [t_0, t_1]} \|Z_{-\alpha+\beta}(s-t_0)A^{\gamma+1}z_0\|_{\mathcal{Z}} |t-\tau|^\beta + \\
&+ \max_{r \in [t_0, t_1]} \left\| \int_{t_0}^r A^{-\delta_0} A^{\gamma+\delta_0} Z_{1-\alpha+\beta}(r-s) B^y(s) ds \right\|_{\mathcal{Z}} |t-\tau|^\beta \leq \\
&\leq C_1 |t-\tau|^\beta + C_2 (t_1-t_0)^{\alpha(1-\gamma-\delta_0)-\beta} |t-\tau|^\beta \leq C_3 |t-\tau|^\beta,
\end{aligned}$$

где $\delta_0 \in (\max\{0, 1 - \gamma - \frac{\beta+1}{\alpha}\}, 1 - \gamma - \frac{\beta}{\alpha})$.

Следовательно, $y, D^{\alpha_l} y \in C^\nu([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$ для всех $l = 1, 2, \dots, n$ и с учетом (1.3.4) $B^y \in C^\nu([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$ для некоторого $\nu \in (0, \delta]$.

Рассуждая так же, как в конце доказательства теоремы 1.3.3, получим, что $z \in C([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$ является решением задачи (1.3.3), (1.3.5) тогда и только тогда, когда $y = A^\gamma z$ — неподвижная точка отображения F в пространстве $C([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$. \square

1.4 Глобальная разрешимость уравнения с дробной производной Герасимова — Капуто

Теперь исследуем вопросы существования и единственности решения задачи Коши

$$D^k z(t_0) = z_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (1.4.1)$$

для квазилинейного уравнения

$$D^\alpha z(t) + Az(t) = B(t, D^{\alpha_1} z(t), D^{\alpha_2} z(t), \dots, D^{\alpha_n} z(t)) \quad (1.4.2)$$

на наперед заданном отрезке $[t_0, T]$. Здесь, как и прежде, $m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \alpha$, $m_l - 1 < \alpha_l \leq m_l \in \mathbb{Z}$, $l = 1, 2, \dots, n$. Некоторые или все α_l могут быть отрицательными.

Пусть задано отображение $B : [t_0, T] \times \mathcal{Z}_\gamma^n \rightarrow \mathcal{Z}$, существуют константы $q > 0$, $\delta \in (0, 1]$, такие, что для всех $(s, x_1, x_2, \dots, x_n), (t, y_1, y_2, \dots, y_n) \in [t_0, T] \times \mathcal{Z}_\gamma^n$

$$\begin{aligned}
&\|B(s, x_1, x_2, \dots, x_n) - B(t, y_1, y_2, \dots, y_n)\|_{\mathcal{Z}} \leq \\
&\leq q \left(|s-t|^\delta + \sum_{l=1}^n \|x_l - y_l\|_\gamma \right), \quad (1.4.3)
\end{aligned}$$

где, как и прежде, $\|\cdot\|_\gamma := \|\cdot\|_{\mathcal{Z}_\gamma} = \|A^\gamma \cdot\|_{\mathcal{Z}}$, $\mathcal{Z}_\gamma = D_{A^\gamma}$.

Теорема 1.4.1. Пусть $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n \leq 1 < \alpha < 2$, $-A \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, 0)$, $0 \in \rho(A)$, отображение $B : [t_0, T] \times \mathcal{Z}_\gamma^n \rightarrow \mathcal{Z}$ удовлетворяет условию (1.4.3) для $\gamma \in (0, 1 - \frac{1}{\alpha})$, $z_0, z_1 \in \mathcal{Z}_{1+\gamma}$. Тогда, существует единственное решение задачи Коши

$$z(t_0) = z_0, \quad D^1 z(t_0) = z_1 \quad (1.4.4)$$

для уравнения (1.4.2) на $[t_0, T]$.

Доказательство. Рассмотрим отображение

$$Fx(t) := \sum_{k=0}^1 Z_{-k}(t-t_0)A^\gamma z_k + \int_{t_0}^t A^\gamma Z_{1-\alpha}(t-s)B^x(s)ds,$$

с $B^x(s) := B(s, A^{-\gamma}D^{\alpha_1}x(s), A^{-\gamma}D^{\alpha_2}x(s), \dots, A^{-\gamma}D^{\alpha_n}x(s))$. Рассуждая, как при доказательстве теоремы 1.3.3, нетрудно показать, что включение $Fx \in C^1([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$ справедливо для каждого $x \in C^1([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$.

Возьмем $\delta_{00} \in (1 - \gamma - \frac{1}{\alpha}, 1 - \gamma)$, $\delta_{01} \in (\max\{0, 1 - \gamma - \frac{2}{\alpha}\}, 1 - \gamma - \frac{1}{\alpha})$, $\delta_l \in (1 - \gamma - \frac{\alpha_l+1}{\alpha}, 1 - \gamma - \frac{\alpha_l}{\alpha})$, $l = 1, 2, \dots, n$. Для $x, y \in C^1([t_0, t]; \mathcal{Z})$ и для всех $t \in (t_0, T]$

$$\begin{aligned} \|Fx(t) - Fy(t)\|_{\mathcal{Z}} &\leq \int_{t_0}^t \|A^{-\delta_{00}}A^{\gamma+\delta_{00}}Z_{1-\alpha}(t-s)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \|B^x(s) - B^y(s)\|_{\mathcal{Z}} ds \leq \\ &\leq C_1(t-t_0)^{\alpha(1-\gamma-\delta_{00})} \|x-y\|_{C^1([t_0, t]; \mathcal{Z})} \leq C_2(t-t_0)^\chi \|x-y\|_{C^1([t_0, t]; \mathcal{Z})}, \\ \|D^1 Fx(t) - D^1 Fy(t)\|_{\mathcal{Z}} &\leq \int_{t_0}^t \|A^{-\delta_{01}}A^{\gamma+\delta_{01}}Z_{2-\alpha}(t-s)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \|B^x(s) - B^y(s)\|_{\mathcal{Z}} ds \leq \\ &\leq C_3(t-t_0)^{\alpha(1-\gamma-\delta_{01})-1} \|x-y\|_{C^1([t_0, t]; \mathcal{Z})} \leq C_4(t-t_0)^\chi \|x-y\|_{C^1([t_0, t]; \mathcal{Z})}, \end{aligned}$$

где $\chi = \min\{\alpha(1 - \gamma - \delta_{00}), \alpha(1 - \gamma - \delta_{01}) - 1\} > 0$. В таком случае

$$\|Fx - Fy\|_{C^1([t_0, t]; \mathcal{Z})} \leq C_5(t-t_0)^\chi \|x-y\|_{C^1([t_0, t]; \mathcal{Z})},$$

где $C_5 = C_2 + C_4$.

Далее

$$\begin{aligned}
\|F^2x(t) - F^2y(t)\|_{\mathcal{Z}} &\leq \int_{t_0}^t \|A^{-\delta_{00}} A^{\gamma+\delta_{00}} Z_{1-\alpha}(t-s)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \|B^{Fx}(s) - B^{Fy}(s)\|_{\mathcal{Z}} ds \leq \\
&\leq C_1 \int_{t_0}^t (t-s)^{\alpha(1-\gamma-\delta_{00})-1} \|Fx - Fy\|_{C^1([t_0,s];\mathcal{Z})} ds \leq \\
&\leq C_2 C_5 \int_{t_0}^t (t-s)^{\chi-1} (s-t_0)^{\chi} ds \leq C_2 C_5 (t-t_0)^{2\chi} B(\chi, \chi+1) \|x-y\|_{C^1([t_0,t];\mathcal{Z})} = \\
&= C_2 C_5 (t-t_0)^{2\chi} \|x-y\|_{C^1([t_0,t];\mathcal{Z})} \frac{\Gamma(\chi)\Gamma(\chi+1)}{\Gamma(2\chi+1)} = \\
&= C_2 C_5 (t-t_0)^{2\chi} \|x-y\|_{C^1([t_0,t];\mathcal{Z})} \frac{\Gamma(\chi)^2}{2\Gamma(2\chi)}, \\
\|D^1 F^2 x(t) - D^1 F^2 y(t)\|_{\mathcal{Z}} &\leq C_4 C_5 (t-t_0)^{2\chi} \|x-y\|_{C^1([t_0,t];\mathcal{Z})} \frac{\Gamma(\chi)^2}{2\Gamma(2\chi)}, \\
\|F^2 x - F^2 y\|_{C^1([t_0,t];\mathcal{Z})} &\leq C_5^2 (t-t_0)^{2\chi} \|x-y\|_{C^1([t_0,t];\mathcal{Z})} \frac{\Gamma(\chi)^2}{2\Gamma(2\chi)}.
\end{aligned}$$

Аналогично мы можем получить неравенства

$$\begin{aligned}
\|F^3 x - F^3 y\|_{C^1([t_0,t];\mathcal{Z})} &\leq C_5^3 (t-t_0)^{3\chi} \|x-y\|_{C^1([t_0,t];\mathcal{Z})} \frac{\Gamma(\chi)^2}{2\Gamma(2\chi)} B(\chi, 2\chi+1) = \\
&= C_5^3 (t-t_0)^{3\chi} \|x-y\|_{C^1([t_0,t];\mathcal{Z})} \frac{\Gamma(\chi)^3}{3\Gamma(3\chi)}, \quad \dots, \\
\|F^p x - F^p y\|_{C^1([t_0,T];\mathcal{Z})} &\leq C_5^p (T-t_0)^{p\chi} \|x-y\|_{C^1([t_0,t];\mathcal{Z})} \frac{\Gamma(\chi)^p}{p\Gamma(p\chi)}, \quad p \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Заметим, что

$$\frac{\Gamma(\chi)^p}{p\Gamma(p\chi)} \leq C_6 \left(\frac{2\pi}{\chi}\right)^{\frac{p-1}{2}} p^{-\chi p - \frac{1}{2}} \rightarrow 0, \quad p \rightarrow \infty.$$

Поэтому для достаточно большого $p \in \mathbb{N}$ оператор F^p является сжимающим, и существует единственный элемент $y \in C^1([t_0, t]; \mathcal{Z})$, такой, что $y(t) = Fy(t)$, $t \in [t_0, T]$. Как при доказательстве теоремы 1.3.3, можно показать, что $B^y \in C^\nu([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$, $\nu \in (0, \delta]$, и что $z \in C^1(t_0, t_1; \mathcal{Z})$ является решением задачи (1.4.2), (1.4.4) тогда и только тогда, когда $y = A^\gamma z$ является неподвижной точкой отображения F . \square

Теорема 1.4.2. Пусть $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n \leq 0 < \alpha \leq 1$, $-A \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, 0)$, $0 \in \rho(A)$, отображение $B : [t_0, T] \times \mathcal{Z}_\gamma^n \rightarrow \mathcal{Z}$ удовлетворяет условию (1.4.3) с $\gamma \in (0, 1)$, $z_0 \in \mathcal{Z}_{1+\gamma}$. Тогда существует единственное решение задачи Коши

$$z(t_0) = z_0 \quad (1.4.5)$$

для уравнения (1.4.2) на $[t_0, T]$.

Доказательство. Как при доказательстве теоремы 1.4.1, можно показать, что отображение

$$Fx(t) := Z_0(t-t_0)A^\gamma z_0 + \int_{t_0}^t A^\gamma Z_{1-\alpha}(t-s)B(s, A^{-\gamma}D^{\alpha_1}x(s), \dots, A^{-\gamma}D^{\alpha_n}x(s)) ds$$

имеет единственную неподвижную точку y в пространстве $C([t_0, T]; \mathcal{Z})$, и z является решением задачи (1.4.2), (1.4.5) тогда и только тогда, когда $z = A^{-\gamma}y$. \square

1.5 Пример нелинейной начально-краевой задачи

В ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с гладкой границей $\partial\Omega$ рассмотрим задачу с начальным условием

$$v(\xi, t_0) = v_0(\xi), \quad \xi \in \Omega, \quad (1.5.1)$$

и с граничным условием

$$v(\xi, t) = 0, \quad \xi \in \partial\Omega, \quad t > t_0, \quad (1.5.2)$$

для уравнения

$$D^\alpha v(\xi, t) = \Delta v(\xi, t) + \sum_{l=1}^n D_t^{\alpha_l} v(\xi, t) \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial \xi_i} D_t^{\alpha_i} v(\xi, t), \quad \xi \in \Omega, \quad t > t_0, \quad (1.5.3)$$

где $\alpha \in (0, 1]$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n \leq 0 < \alpha$, $D_t^{\alpha_l} v$ — частные дробные интегралы Римана — Лиувилля порядка $-\alpha_l \geq 0$ по переменной t . Возьмем $\mathcal{Z} = L_2(\Omega)$, $A = -\Delta$, $D_A = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, тогда $-A \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, 0)$ при $\alpha \in (0, 1]$, $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$ (см. теорему 4 в [65] для $n = 0$, $P_0 \equiv 1$, $p = 1$, $Q_1(\lambda) = \lambda$).

Рассуждая как в теореме 8.3.5 из [80], получим, что нелинейный оператор вида

$$f(v_1, v_2, \dots, v_n) = \sum_{l=1}^n v_l \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial \xi_i} v_l$$

удовлетворяет условиям теоремы 1.3.4 при $\gamma > 3/4$. Следовательно, при $\gamma \in (3/4, 1)$ для всех $v_0 \in D_{A^{1+\gamma}}$ существует единственное решение задачи (1.5.1)–(1.5.3) в цилиндре $\Omega \times [t_0, t_1]$ с некоторым $t_1 > t_0$.

1.6 Дробное по времени уравнение Кана — Хиллиарда

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \{1, 2, 3\}$, — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$. При $\alpha \in (0, 1)$ рассмотрим начально-краевую задачу для уравнения Кана — Хиллиарда

$$\begin{aligned} D_t^\alpha v(\xi, t) &= \nu \Delta(v^3(\xi, t) - v(\xi, t) - \mu \Delta v(\xi, t)) = \\ &= \nu(6v|\nabla v|^2 + (3v^2 - 1)\Delta v - \mu \Delta^2 v), \quad (\xi, t) \in \Omega \times (0, T], \end{aligned} \quad (1.6.4)$$

$$v(\xi, t) = \Delta v(\xi, t) = 0, \quad (\xi, t) \in \partial\Omega \times (0, T], \quad (1.6.5)$$

$$v(\xi, 0) = v_0, \quad \xi \in \Omega. \quad (1.6.6)$$

Определим оператор Лапласа $\Lambda w = \Delta w$ с областью определения $D_\Lambda = \{w \in H^2(\Omega) : w(\xi) = 0, \xi \in \partial\Omega\}$. Тогда оператор $Aw = \mu\nu\Lambda^2 w = \mu\nu\Delta^2 w$ имеет область определения $D_A = \{w \in H^4(\Omega) : w(\xi) = \Delta w(\xi) = 0, \xi \in \partial\Omega\}$. Через $\{\lambda_k\}$ обозначим собственные значения оператора Лапласа Λ , занумерованные по невозрастанию с учетом их кратности, а через $\{\varphi_k\}$ — соответствующие собственные функции.

Далее через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ будем обозначать скалярное произведение в $L_2(\Omega)$, через $\|\cdot\|_2$ — норму в $L_2(\Omega)$, а через $\|\cdot\|_\infty$ — норму в $L_\infty(\Omega)$.

Возьмем $\theta_0 \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, $a_0 = 0$, тогда при $\lambda \in S_{\theta_0, a_0}$, $w \in L_2(\Omega)$

$$\|(\lambda^\alpha I + A)^{-1} w\|_{L_2(\Omega)}^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\langle w, \varphi_k \rangle|^2}{|\lambda^\alpha + \mu\nu\lambda_k^2|^2} \leq \frac{\|w\|_2^2}{\sin^2(\alpha\theta_0)|\lambda|^{2\alpha}}.$$

Таким образом, $-A \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, 0)$. Кроме того, имеем

$$\langle Aw, w \rangle = \langle \mu\nu\Lambda^2 w, w \rangle = \mu\nu \langle \Lambda w, \Lambda w \rangle = \mu\nu \|\Lambda w\|_2^2 \geq \delta \|w\|_2^2 \quad (1.6.7)$$

при некотором $\delta > 0$ в силу непрерывной обратимости оператора Лапласа Λ с заданной выше областью определения D_Λ .

Заметим, что в силу (1.1.2)

$$\begin{aligned} A^{-1/2}w &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty t^{-1/2} (tI + A)^{-1} w dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty t^{-1/2} \sum_{k=1}^\infty \frac{\langle u, \varphi_k \rangle \varphi_k}{t + \mu\nu\lambda_k^2} dt = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sum_{k=1}^\infty \frac{\langle u, \varphi_k \rangle \varphi_k}{\tau^2 + \mu\nu\lambda_k^2} d\tau = -\frac{1}{\sqrt{\mu\nu}} \sum_{k=1}^\infty \lambda_k^{-1} \langle u, \varphi_k \rangle \varphi_k, \\ A^{-1/4}w &= \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \int_0^\infty t^{-1/4} (tI + A)^{-1} w dt = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \int_0^\infty t^{-1/4} \sum_{k=1}^\infty \frac{\langle u, \varphi_k \rangle \varphi_k}{t + \mu\nu\lambda_k^2} dt = \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^\infty \tau^2 \sum_{k=1}^\infty \frac{\langle u, \varphi_k \rangle \varphi_k}{\tau^4 + \mu\nu\lambda_k^2} d\tau = \frac{1}{\sqrt[4]{\mu\nu}} \sum_{k=1}^\infty (-\lambda_k)^{-1/2} \langle u, \varphi_k \rangle \varphi_k. \end{aligned}$$

Поэтому $A^{1/2}w = -\sqrt{\mu\nu}\Lambda$, $A^{1/4}w = \sqrt[4]{\mu\nu}(-\Lambda)^{1/2}$.

Лемма 1.6.1. *Существует такое $C > 0$, что для всех $w \in D_A$*

$$\|w\|_\infty^{2+d} \leq C \|w\|_{D_A}^d \|w\|_2^2.$$

Доказательство. Обозначим для $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d)$

$$|\xi|_d = \sqrt{\sum_{j=1}^d |\xi_j|^2}.$$

Для $w \in D_A$ имеем $|w(\xi) - w(\eta)| \leq \|w\|_{C^1(\bar{\Omega})} |\xi - \eta|_d \leq C_1 \|w\|_{D_A} |\xi - \eta|_d$, поскольку в силу теоремы вложения Соболева $D_A \subset C^2(\bar{\Omega})$ при $d \in \{1, 2, 3\}$.

Если $w \equiv 0$, то утверждение леммы выполняется. Пусть $w(\xi_0) \neq 0$ при некотором $\xi_0 \in \Omega$. При $|\xi - \xi_0|_d < R := |w(\xi_0)|/C_1 \|w\|_{D_A}$ получим

$$|w(\xi)| \geq |w(\xi_0)| - |w(\xi) - w(\xi_0)| \geq |w(\xi_0)| - C_1 \|w\|_{D_A} |\xi - \xi_0|_d > 0.$$

Поскольку $w(\xi) = 0$ при $\xi \in \partial\Omega$, то $B_R(\xi_0) := \{\xi \in \mathbb{R} : |\xi - \xi_0|_d < R\} \subset \Omega$ и для $\xi \in B_R(\xi_0)$ $|w(\xi)| \geq |w(\xi_0)| - C_1 \|w\|_{D_A} |\xi - \xi_0|_d$. Поэтому при $d = 3$ переходя к сферическим координатам (r, φ, θ) , получим

$$\|w\|_2^2 \geq \int_{B_R(\xi_0)} |w(\xi)|^2 d\xi \geq \int_{B_R(\xi_0)} (|w(\xi_0)| - C_1 \|w\|_{D_A} |\xi - \xi_0|_d)^2 d\xi \geq$$

$$\begin{aligned}
&\geq |w(\xi_0)|^2 \int_{B_R(\xi_0)} \left(1 - \frac{r}{R}\right)^2 r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta = \\
&= |w(\xi_0)|^2 R^3 \int_{B_1(\xi_0)} (1-r)^2 r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta = C_2 |w(\xi_0)|^5 / \|w\|_{D_A}^3.
\end{aligned}$$

В случаях $d = 1$ и $d = 2$ доказательство аналогично. \square

Лемма 1.6.2. Пусть $\gamma \in (\frac{d}{2+d}, 1)$. Тогда существует такое $C > 0$, что для всех $w \in D_A$ $\|w\|_\infty \leq C \|A^\gamma w\|_2$.

Доказательство. Обозначим $u = A^\gamma w$, тогда надо показать, что $\|A^{-\gamma} u\|_\infty \leq C \|u\|_2$. Имеем

$$A^{-\gamma} u = \frac{\sin \pi \gamma}{\pi} \int_0^\infty t^{-\gamma} (tI + A)^{-1} u dt,$$

В силу (1.6.7) при $t \geq 0$

$$\begin{aligned}
\|(tI + A)^{-1} u\|_2^2 &= \sum_{k=1}^\infty \frac{|\langle u, \varphi_k \rangle|^2}{(t + \mu\nu\lambda_k^2)^2} \leq \frac{1}{(t + \delta)^2} \sum_{k=1}^\infty |\langle u, \varphi_k \rangle|^2 = \frac{\|u\|_2^2}{(t + \delta)^2}, \\
\|A(tI + A)^{-1} u\|_2^2 &= \sum_{k=1}^\infty \frac{(\mu\nu\lambda_k^2)^2 |\langle u, \varphi_k \rangle|^2}{(t + \mu\nu\lambda_k^2)^2} \leq \|u\|_2^2.
\end{aligned}$$

Так как $(tI + A)^{-1} u \in D_A$, по лемме 1.6.1

$$\|(tI + A)^{-1} u\|_\infty^{2+d} \leq C \|(tI + A)^{-1} u\|_{D_A}^d \|(tI + A)^{-1} u\|_2^2.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
&\|A^{-\gamma} u\|_\infty \leq C_1 \int_0^\infty t^{-\gamma} \|(tI + A)^{-1} u\|_\infty dt \leq \\
&\leq C_2 \int_0^\infty t^{-\gamma} \|(tI + A)^{-1} u\|_{D_A}^{\frac{d}{2+d}} \|(tI + A)^{-1} u\|_2^{\frac{2}{2+d}} dt \leq C_2 \int_0^\infty t^{-\gamma} \|(tI + A)^{-1} u\|_2 dt + \\
&+ C_2 \int_0^\infty t^{-\gamma} \|A(tI + A)^{-1} u\|_2^{\frac{d}{2+d}} \|(tI + A)^{-1} u\|_2^{\frac{2}{2+d}} dt \leq
\end{aligned}$$

$$\leq C_2 \int_0^\infty t^{-\gamma} (t + \delta)^{-1} \|u\|_2 dt + C_2 \int_0^\infty t^{-\gamma} (t + \delta)^{\frac{-2}{2+d}} \|u\|_2 dt.$$

При $\gamma \in (\frac{d}{2+d}, 1)$ последние два интеграла сходятся и получаем требуемое. \square

Лемма 1.6.3. Пусть $B(w) = \nu(6w|\nabla w|^2 + (3w^2 - 1)\Delta w)$, $\gamma \in (\frac{d}{2+d}, 1)$, $\gamma_m = \max\{\gamma, \frac{1}{2}\}$. Тогда существует такое $C_1 > 0$, что для всех $w \in D_{A^{\gamma_m}}$

$$\|B(w)\|_2 \leq C_1 \|A^\gamma w\|_2 \|A^{1/4} w\|_2^2 + (3C^2 \|A^\gamma w\|_2^2 + 1) \|A^{1/2} w\|_2.$$

и такое $C_2 > 0$, что для всех $u, w \in D_{A^{\gamma_m}}$

$$\begin{aligned} \|B(u) - B(w)\|_2 &\leq C_2 (\|A^{1/4} u\|_2^2 + \|A^\gamma w\|_2 \|A^{1/4} u + A^{1/4} w\|_\infty + \\ &+ \|A^\gamma u + A^\gamma w\|_2 \|A^{1/2} u\|_2 + (\|A^\gamma w\|_2^2 + 1)) \|A^{\gamma_m} u - A^{\gamma_m} w\|_2, \end{aligned}$$

Доказательство. В силу непрерывности вложений $D_A \subset C^2(\bar{\Omega}) \subset L_\infty(\Omega)$, $D_A \subset W_4^1(\Omega)$ и леммы 1.6.2 для $u, w \in D_A$

$$\begin{aligned} \|B(w)\|_2 &\leq 6\nu \|w\|_\infty \| |\nabla w|^2 \|_2 + (3\|w\|_\infty^2 + 1) \|\Delta w\|_2 \leq \\ &\leq C_1 \|A^\gamma w\|_2 \|A^{1/4} w\|_2^2 + (3C^2 \|A^\gamma w\|_2^2 + 1) \|A^{1/2} w\|_2, \\ B(u) - B(w) &= \nu(6u|\nabla u|^2 + (3u^2 - 1)\Delta u) - \nu(6w|\nabla w|^2 + (3w^2 - 1)\Delta w) = \\ &= \nu(6(u-w)|\nabla u|^2 + 6w(|\nabla u|^2 - |\nabla w|^2) + 3(u^2 - w^2)\Delta u + (3w^2 - 1)(\Delta u - \Delta w)), \\ \|B(u) - B(w)\|_2 &\leq 6\nu \|u-w\|_\infty \| |\nabla u|^2 \|_2 + 6\nu \sum_{j=1}^3 \|w\|_\infty \|u_{\xi_j} + w_{\xi_j}\|_\infty \|u_{\xi_j} - w_{\xi_j}\|_2 + \\ &+ 3\nu \|u+w\|_\infty \|u-w\|_\infty \|\Delta u\|_2 + \nu(3\|w\|_\infty^2 + 1) \|\Delta u - \Delta w\|_2 \leq \\ &\leq C_3 \|A^\gamma u - A^\gamma w\|_2 \|A^{1/4} u\|_2^2 + C_3 \|A^\gamma w\|_2 \|A^{1/4} u + A^{1/4} w\|_\infty \|A^{1/4} u - A^{1/4} w\|_2 + \\ &+ C_3 \|A^\gamma u + A^\gamma w\|_2 \|A^\gamma u - A^\gamma w\|_2 \|A^{1/2} u\|_2 + C_3 (\|A^\gamma w\|_2^2 + 1) \|A^{1/2} u - A^{1/2} w\|_2 \leq \\ &\leq C_2 (\|A^{1/4} u\|_2^2 + \|A^\gamma w\|_2 \|A^{1/4} u + A^{1/4} w\|_\infty + \\ &+ \|A^\gamma u + A^\gamma w\|_2 \|A^{1/2} u\|_2 + (\|A^\gamma w\|_2^2 + 1)) \|A^{\gamma_m} u - A^{\gamma_m} w\|_2. \end{aligned}$$

Здесь использован тот факт, что для $u \in D_A$ выполняется включение $A^{1/4} u \in H^3(\Omega)$, а значит, и включение $A^{1/4} u \in C^1(\bar{\Omega}) \subset L_\infty(\Omega)$.

В силу плотности и непрерывности вложения $D_A \subset D_{A^{\gamma_m}}$ полученные неравенства можно распространить на $u, w \in D_{A^{\gamma_m}}$. \square

Теорема 1.6.1. Пусть $0 < \alpha < 1$, $\gamma \in (\frac{d}{d+2}, 1)$, $\gamma \geq \frac{1}{2}$, $v_0 \in D_{A^{\gamma+1}}$. Тогда для некоторого $t_1 > t_0$ существует единственное решение задачи (1.6.4)–(1.6.6) при $T = t_1$.

Доказательство. Возьмем $\mathcal{Z} = L_2(\Omega)$, определенный в этом параграфе оператор A и оператор $B : D_{A^{\gamma m}} \rightarrow \mathcal{Z}$, определенный равенством

$$B(w) = \nu(6w|\nabla w|^2 + (3w^2 - 1)\Delta w),$$

$z_0 = v_0(\cdot)$. Тогда в силу теоремы 1.3.4 и леммы 1.6.3 получим требуемое. \square

1.7 Квазилинейные уравнения с дробными производными Римана — Лиувилля

Дробная производная Римана — Лиувилля порядка $\alpha \in (m - 1, m]$, $m \in \mathbb{N}$, имеет вид ${}^R D^\alpha h(t) = D^m J^{m-\alpha} h(t)$.

Для функций $h \in L_1(t_0, T; \mathcal{Z})$, таких, что $J^{m-\alpha} h \in AC^m([t_0, T]; \mathcal{Z})$, выполняется тождество [34, Теорема 2.4]

$$J^\alpha {}^R D^\alpha h(t) = h(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(D^k J^{m-\alpha} h)(t_0) t^{\alpha-m+k}}{\Gamma(\alpha - m + k + 1)}. \quad (1.7.1)$$

Кроме того, для $h \in L_1(t_0, T; \mathcal{Z})$ выполняется равенство ${}^R D^\alpha J^\alpha h(t) = h(t)$.

Решением задачи типа Коши

$${}^R D^{\alpha-m+k} z(t_0) = z_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (1.7.2)$$

для линейного неоднородного уравнения

$${}^R D^\alpha z(t) + Az(t) = f(t), \quad t \in (t_0, T], \quad (1.7.3)$$

с $f : (t_0, T] \rightarrow \mathcal{Z}$ называется такая функция $z \in C((t_0, t_1]; D_A)$, что $J^{m-\alpha} z \in C^{m-1}([t_0, t_1]; \mathcal{Z}) \cap AC^m([t_0, t_1]; \mathcal{Z}) \cap C^m((t_0, t_1]; \mathcal{Z})$, выполняются условия (1.7.2) и равенство (1.7.3) для всех $t \in (t_0, T]$.

Теорема 1.7.1. [1, 41]. Пусть $\alpha > 0$, $-A \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$, $f \in C([t_0, T]; D_A) \cup C^\gamma([t_0, T]; \mathcal{Z})$, $\gamma \in (0, 1]$. Тогда для всех $z_0, z_1, \dots, z_{m-1} \in D_A$ функция

$$z(t) = \sum_{k=0}^{m-1} Z_{m-\alpha-k}(t-t_0)z_k + \int_{t_0}^t Z_{1-\alpha}(t-s)f(s)ds, \quad t \in [t_0, T],$$

является единственным решением задачи типа Коши (1.7.2), (1.7.3).

Рассмотрим квазилинейное уравнение

$${}^R D^\alpha z(t) + Az(t) = B \left({}^R D^{\alpha_1} z(t), \dots, {}^R D^{\alpha_n} z(t), {}^R D^{\alpha-m-r} z(t), \dots, {}^R D^{\alpha-1} z(t) \right), \quad (1.7.4)$$

где $m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \alpha-1$, $m_k-1 < \alpha_k \leq m_k \in \mathbb{Z}$, $\alpha_k - m_k \neq \alpha - m$, $k = 1, 2, \dots, n$. Пусть $k_0 := \min\{k \in \{1, 2, \dots, n\} : \alpha_k > 0\}$, если $\{k \in \{1, 2, \dots, n\} : \alpha_k > 0\}$ не пусто. Если $\{k \in \{1, 2, \dots, n\} : \alpha_k > 0\}$ пусто, положим $k_0 = n+1$. Максимум пустого множества будем считать равным нулю. Как в [49], обозначим $\underline{\alpha} := \max\{\alpha_k : \alpha_k - m_k < \alpha - m, k = k_0, k_0 + 1, \dots, n\}$, $\underline{m} := \lceil \underline{\alpha} \rceil$, $\bar{\alpha} := \max\{\alpha_k : \alpha_k - m_k > \alpha - m, k = k_0, k_0 + 1, \dots, n\}$, $\bar{m} := \lceil \bar{\alpha} \rceil$, $m^* := \max\{\underline{m} - 1, \bar{m}, 0\}$ называется дефектом неполной задачи типа Коши для уравнения (1.7.4) (см. [49]). В силу следствий 1–4 [49] для этой задачи задаются условия

$${}^R D^{\alpha-m+k} z(t_0) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, m^* - 1.$$

Для изучения квазилинейного уравнения (1.7.4) нам необходимо существование конечных пределов $\lim_{t \rightarrow t_0} {}^R D^{\alpha_l} z(t) := {}^R D^{\alpha_l} z(t_0)$, $l = 1, 2, \dots, n$, поэтому при $\alpha_n > \alpha - m$ определим величину $m^{**} := m^* + 1$, на единицу большую индекса дефекта, и будем рассматривать неполную задачу типа Коши вида

$$\begin{aligned} {}^R D^{\alpha-m+k} z(t_0) &= 0, \quad k = 0, 1, \dots, m^{**} - 1, \\ {}^R D^{\alpha-m+k} z(t_0) &= z_k, \quad k = m^{**}, m^{**} + 1, \dots, m - 1. \end{aligned} \quad (1.7.5)$$

Поскольку $\alpha_n < \alpha - 1$, $m^* \leq m - 2$, при $\alpha_n > \alpha - m$ имеем $\alpha > 1$, $m^{**} \leq m - 1$, следовательно, (1.7.5) содержит по крайней мере одно ненулевое условие. В случае $\alpha_n \leq \alpha - m$ возьмем $m^{**} := 0$ и тем самым будем рассматривать полную задачу типа Коши.

Пусть $\gamma \in (0, 1)$, $\mathcal{Z}_\gamma := D_{A^\gamma}$ нормированное пространство с нормой $\|\cdot\|_\gamma := \|A^\gamma \cdot\|_{\mathcal{Z}}$. Поскольку A^γ — непрерывно обратимый замкнутый оператор, \mathcal{Z}_γ является банаховым пространством.

Пусть U — открытое подмножество $\mathbb{R} \times \mathcal{Z}_\gamma^{n+m+r}$, задано такое отображение $B : U \rightarrow \mathcal{Z}$, что для каждого элемента $(t, x_1, x_2, \dots, x_{n+m+r}) \in U$

существует окрестность $V \subset U$ и константы $q > 0$, $\delta \in (0, 1]$, такие, что для всех $(t, y_1, y_2, \dots, y_{n+m+r}), (s, v_1, v_2, \dots, v_{n+m+r}) \in V$

$$\begin{aligned} & \|B(t, y_1, y_2, \dots, y_{n+m+r}) - B(s, v_1, v_2, \dots, v_{n+m+r})\|_{\mathcal{Z}} \leq \\ & \leq q \left(|t - s|^\delta + \sum_{k=1}^{n+m+r} \|y_k - v_k\|_\gamma \right). \end{aligned} \quad (1.7.6)$$

Функция $z \in C((t_0, t_1]; D_A)$, такая, что $J^{m-\alpha}z \in C^{m-1}([t_0, t_1]; \mathcal{Z}) \cap AC^m([t_0, t_1]; \mathcal{Z}) \cap C^m((t_0, t_1]; \mathcal{Z})$, ${}^R D^{\alpha_1}z, {}^R D^{\alpha_2}z, \dots, {}^R D^{\alpha_n}z \in C([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$, называется решением задачи типа Коши (1.7.4), (1.7.5) на отрезке $[t_0, t_1]$, если она удовлетворяет условиям (1.7.5), $({}^R D^{\alpha_1}z(t), {}^R D^{\alpha_2}z(t), \dots, {}^R D^{\alpha_{n-1}}z(t)) \in U$ для всех $t \in [t_0, t_1]$ и выполняется равенство (1.7.4) для всех $t \in (t_0, t_1]$.

Лемма 1.7.1. *Линейное пространство*

$$C_\alpha(t_0, T; \mathcal{Z}) := \{x \in C((t_0, T]; \mathcal{Z}) \cap L_1(t_0, T; \mathcal{Z}) :$$

$$J^{m-\alpha}x \in C^{m-1}([t_0, T]; \mathcal{Z}) \cap C^m((t_0, T]; \mathcal{Z}), (t - t_0)^{m-\alpha} {}^R D^\alpha x(t) \in C([t_0, T]; \mathcal{Z})\}$$

с нормой $\|x\|_{C_\alpha(t_0, T; \mathcal{Z})} := \|J^{m-\alpha}x\|_{C^{m-1}([t_0, T]; \mathcal{Z})} + \|(t - t_0)^{m-\alpha} {}^R D^\alpha x(t)\|_{C([t_0, T]; \mathcal{Z})}$ является банаховым. При этом для $x \in C_\alpha(t_0, T; \mathcal{Z})$ выполняется включение $J^{m-\alpha}x \in AC^m([t_0, T]; \mathcal{Z})$.

Доказательство. Легко проверить все аксиомы нормы. В частности, если $\|x\|_{C_\alpha(t_0, T; \mathcal{Z})} = 0$, то $J^{m-\alpha}x(t) \equiv 0$, $x(t) \equiv {}^R D^{m-\alpha} J^{m-\alpha}x(t) \equiv 0$, поскольку $C_\alpha(t_0, T; \mathcal{Z}) \subset L_1(t_0, T; \mathcal{Z})$.

Заметим, что ${}^R D^\alpha x = D^m J^{m-\alpha}x$, $\|{}^R D^\alpha x(t)\|_{\mathcal{Z}} \leq \|x\|_{C_\alpha(t_0, T; \mathcal{Z})} (t - t_0)^{\alpha-m}$, поэтому ${}^R D^\alpha x \in L_1(t_0, T; \mathcal{Z})$, $J^{m-\alpha}x \in AC^m([t_0, T]; \mathcal{Z})$.

Докажем полноту пространства. Пусть последовательность $\{x_k\}$ является фундаментальной в пространстве $C_\alpha(t_0, T; \mathcal{Z})$, в таком случае существуют пределы $y = \lim_{k \rightarrow \infty} J^{m-\alpha}x_k \in C^{m-1}([t_0, T]; \mathcal{Z})$, $y_1(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} (t - t_0)^{m-\alpha} {}^R D^\alpha x_k(t) \in C([t_0, T]; \mathcal{Z})$. Имеем

$$\begin{aligned} & \lim_{k \rightarrow \infty} ((t - t_0) {}^R D^{\alpha-1} x_k(t))' = \lim_{k \rightarrow \infty} ({}^R D^{\alpha-1} x_k(t) + (t - t_0) {}^R D^\alpha x_k(t)) = \\ & = D^{m-1}y(t) + (t - t_0)^{1-m+\alpha} y_1(t) \in C([t_0, T]; \mathcal{Z}). \end{aligned}$$

Поэтому $(t - t_0)^R D^{\alpha-1} x_k(t)$ имеет предел в $C^1([t_0, T]; \mathcal{Z})$, это есть функция $(t - t_0) D^{m-1} y(t)$. Тогда $((t - t_0) D^{m-1} y(t))' = D^{m-1} y(t) + (t - t_0) D^m y(t) = D^{m-1} y(t) + (t - t_0)^{1-m+\alpha} y_1(t)$, а значит, $D^m y(t) = (t - t_0)^{\alpha-m} y_1(t) \in L_1(t_0, T; \mathcal{Z})$, так как $y_1 \in C([t_0, T]; \mathcal{Z})$. Положим

$$x(t) = {}^R D^{m-\alpha} y(t) = \frac{(t - t_0)^{\alpha-m} y(t_0)}{\Gamma(\alpha - m + 1)} + J^{\alpha-m+1} y'(t) \in C((t_0, T]; \mathcal{Z}) \cap L_1(t_0, T; \mathcal{Z}),$$

тогда $J^{m-\alpha} x = y(t_0) + J^1 y' = y \in C^{m-1}([t_0, T]; \mathcal{Z})$, при этом $(t - t_0)^{m-\alpha} {}^R D^\alpha x(t) = (t - t_0)^{m-\alpha} D^m y(t) = y_1(t) \in C([t_0, T]; \mathcal{Z})$, $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$ в $C_\alpha(t_0, T; \mathcal{Z})$. Таким образом, $C_\alpha(t_0, T; \mathcal{Z})$ является банаховым пространством. \square

Теорема 1.7.2. Пусть $\alpha > 0$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \alpha - 1$, $-A \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, 0)$, $0 \in \rho(A)$, отображение $B : U \rightarrow \mathcal{Z}$ удовлетворяет условию (1.7.6), $\gamma \in (\min\{0, 1 - \frac{1}{\alpha}\}, 1)$, $(t_0, 0, \dots, 0, z_{m^{**}}, z_{m^{**}+1}, \dots, z_{m-1}) \in U$, $z_k \in \mathcal{Z}_{1+\gamma}$, $k = m^{**}, m^{**} + 1, \dots, m - 1$. Тогда для некоторого $t_1 > t_0$ существует единственное решение задачи (1.7.4), (1.7.5) на $[t_0, t_1]$.

Доказательство. Для $(t_0, 0, 0, \dots, 0, z_{m^{**}}, z_{m^{**}+1}, \dots, z_{m-1}) \in U$ возьмем такие $t_1 > t_0$, $\varepsilon > 0$, что в окрестности

$$V := \{(t, x_1, \dots, x_{n+m+r}) \in \mathbb{R} \times \mathcal{Z}_\gamma^{n+m+r} : t \in [t_0, t_1], \|x_k\|_\gamma \leq \varepsilon, \\ k = 1, 2, \dots, n + r + m^{**}, \|x_{n+r+m^{**}+k} - z_k\|_\gamma \leq \varepsilon, k = m^{**}, \dots, m - 1\}$$

неравенство (1.7.6) выполняется при некоторых $C > 0$, $\delta > 0$.

Возьмем $t > \tau \geq t_0$, тогда в силу равенства (1.7.1) и леммы 1.7.1 для $x \in C_\alpha(t_0, t_1; \mathcal{Z})$

$$\|{}^R D^{\alpha-1} x(t) - {}^R D^{\alpha-1} x(\tau)\|_{\mathcal{Z}} \leq \int_\tau^t \|{}^R D^\alpha x(s)\|_{\mathcal{Z}} ds \leq \int_\tau^t C(s - t_0)^{\alpha-m} ds \leq \\ \leq \int_\tau^t C(s - \tau)^{\alpha-m} ds \leq \frac{C|t - \tau|^{1+\alpha-m}}{1 + \alpha - m}.$$

Следовательно, ${}^R D^{\alpha-1} x$ при $x \in C_\alpha(t_0, t_1; \mathcal{Z})$ является локально гельдеровой функцией степени $1 + \alpha - m > 0$ на отрезке $t \in [t_0, t_1]$. То же самое со

степенью 1 справедливо для ${}^R D^{\alpha-m+k}x$, $k = -r, -r+1, \dots, m-2$, поскольку эти функции лежат в $C^1([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$.

Обозначим $C_{\alpha; m^{**}}(t_0, t_1; \mathcal{Z}) := \{x \in C_{\alpha}(t_0, t_1; \mathcal{Z}) : D^{\alpha-m+k}x(t_0) = 0, k = 0, 1, \dots, m^{**} - 1\}$.

В силу условия $\alpha_n < \alpha$ из того, что $k_0 \leq n$, следует неравенство $\alpha > 1$.

Пусть $x \in C_{\alpha; m^{**}}(t_0, t_1; \mathcal{Z})$, $l \in \{k_0, k_0+1, \dots, n\}$, $m_l - \alpha_l > m - \alpha$, тогда

$$\begin{aligned} {}^R D^{\alpha_l}x(t) &= D^{m_l} J^{m_l - \alpha_l}x(t) = D^{m_l} J^{m_l - \alpha_l - m + \alpha} J^{m - \alpha}x(t) = \\ &= \sum_{k=m^{**}}^{m_l - 1} {}^R D^{\alpha - m + k}x(t_0) \frac{(t - t_0)^{-\alpha_l - m + \alpha + k}}{\Gamma(1 - \alpha_l - m + \alpha + k)} + \\ &+ J^{m_l - \alpha_l - m + \alpha} D^{m_l} J^{m - \alpha}x(t) = J^{m_l - \alpha_l - m + \alpha} D^{m_l} J^{m - \alpha}x(t) \in C([t_0, t_1]; \mathcal{Z}), \end{aligned}$$

поскольку $m_l \leq m^{**}$ и сумма пуста, $\alpha_l < \alpha - 1$, $m_l \leq m - 1$. Отсюда следует, что

$$\|{}^R D^{\alpha_l}x\|_{C([t_0, t_1]; \mathcal{Z})} \leq \frac{(t_1 - t_0)^{m_l - \alpha_l - m + \alpha}}{\Gamma(m_l - \alpha_l - m + \alpha + 1)} \|x\|_{C_{\alpha}(t_0, t_1; \mathcal{Z})}.$$

Более того, для $t > \tau \geq t_0$

$$\begin{aligned} \|{}^R D^{\alpha_l}x(t) - {}^R D^{\alpha_l}x(\tau)\|_{\mathcal{Z}} &\leq \int_{\tau}^t \|{}^R D^{\alpha_l + 1}x(s)\|_{\mathcal{Z}} ds = \\ &= \int_{\tau}^t \left\| \sum_{k=m^{**}}^{m_l} {}^R D^{\alpha - m + k}x(t_0) \frac{(s - t_0)^{-\alpha_l - m + \alpha + k - 1}}{\Gamma(-\alpha_l - m + \alpha + k)} + \right. \\ &\quad \left. + J^{m_l - \alpha_l - m + \alpha} D^{m_l + 1} J^{m - \alpha}x(s) \right\|_{\mathcal{Z}} ds \leq \\ &\leq \int_{\tau}^t \left(\frac{C_1}{|s - \tau|^{1+m-\alpha-m_l+\alpha_l}} + \frac{C_1}{|s - \tau|^{2(m-\alpha)-m_l+\alpha_l}} \right) ds \leq C_2 |t - \tau|^{m_l - \alpha_l - m + \alpha}, \end{aligned}$$

здесь сумма содержит не более одного слагаемого. При этом используем те же рассуждения, что и выше, а также тот факт, что в худшем случае имеем $D^{m_l+1} J^{m-\alpha}x(t) = D^m J^{m-\alpha}x(t) = {}^R D^{\alpha}x(t)$, поэтому для $x \in C_{\alpha; m^{**}}(t_0, t_1; \mathcal{Z})$ выполняется неравенство $\|D^{m_l+1} J^{m-\alpha}x(t)\|_{\mathcal{Z}} \leq C(t - t_0)^{\alpha - m}$.

Если $x \in C_{\alpha; m^{**}}(t_0, t_1; \mathcal{Z})$, $l \in \{k_0, k_0+1, \dots, n\}$, $m_l - \alpha_l < m - \alpha$, то

$${}^R D^{\alpha_l}x = D^{m_l} J^{m_l - \alpha_l}x = D^{m_l+1} J^{m_l - \alpha_l - m + \alpha + 1} J^{m - \alpha}x =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=m^{**}}^{m_l} {}^R D^{\alpha-m+k} x(t_0) \frac{(t-t_0)^{-\alpha_l-m+\alpha+k}}{\Gamma(1-\alpha_l-m+\alpha+k)} + \\
&+ J^{m_l-\alpha_l-m+\alpha+1} D^{m_l+1} J^{m-\alpha} x = J^{m_l-\alpha_l-m+\alpha+1} D^{m_l+1} J^{m-\alpha} x \in C([t_0, t_1]; \mathcal{Z})
\end{aligned}$$

поскольку $m_l \leq m^{**} - 1 \leq m - 2$. Отсюда следует, что

$$\|{}^R D^{\alpha_l} x\|_{C([t_0, t_1]; \mathcal{Z})} \leq \frac{(t_1 - t_0)^{m_l - \alpha_l - m + \alpha + 1}}{\Gamma(m_l - \alpha_l - m + \alpha + 2)} \|x\|_{C_\alpha(t_0, t_1; \mathcal{Z})}.$$

Для $t > \tau \geq t_0$ с учетом леммы 1.7.1 имеем

$$\begin{aligned}
&\|{}^R D^{\alpha_l} x(t) - {}^R D^{\alpha_l} x(\tau)\|_{\mathcal{Z}} \leq \int_{\tau}^t \|{}^R D^{\alpha_l+1} x(s)\|_{\mathcal{Z}} ds = \\
&= \int_{\tau}^t \left\| \sum_{k=m^{**}}^{m_l+1} {}^R D^{\alpha-m+k} x(t_0) \frac{(s-t_0)^{-\alpha_l-m+\alpha+k-1}}{\Gamma(-\alpha_l-m+\alpha+k)} + \right. \\
&\quad \left. + J^{m_l-\alpha_l-m+\alpha+1} D^{m_l+2} J^{m-\alpha} x(s) \right\|_{\mathcal{Z}} ds \leq \\
&\leq \int_{\tau}^t \left(\frac{C_1}{|s-\tau|^{m-\alpha-m_l+\alpha_l}} + \frac{C_1}{|s-\tau|^{2(m-\alpha)-m_l+\alpha_l-1}} \right) ds \leq C_2 |t-\tau|^{1+m_l-\alpha_l-m+\alpha}.
\end{aligned}$$

Аналогично для $x \in C_\alpha(t_0, t_1; \mathcal{Z})$, $l \in \{1, 2, \dots, k_0 - 1\}$, $-\alpha_l > m - \alpha$ имеем ${}^R D^{\alpha_l} x = J^{-\alpha_l-m+\alpha} J^{m-\alpha} x \in C([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$,

$$\|{}^R D^{\alpha_l} x\|_{C([t_0, t_1]; \mathcal{Z})} \leq \frac{(t_1 - t_0)^{-\alpha_l - m + \alpha}}{\Gamma(-\alpha_l - m + \alpha + 1)} \|x\|_{C_\alpha(t_0, t_1; \mathcal{Z})}.$$

Если $-\alpha_l > m - \alpha + 1$, то ${}^R D^{\alpha_l} x \in C^1([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$, в случае $-\alpha_l - m + \alpha \in (0, 1)$ имеем

$$\begin{aligned}
&\|{}^R D^{\alpha_l} x(t) - {}^R D^{\alpha_l} x(\tau)\|_{\mathcal{Z}} \leq \int_{\tau}^t \|{}^R D^{\alpha_l+1} x(s)\|_{\mathcal{Z}} ds \leq \\
&\leq \int_{\tau}^t \left\| J^{m-\alpha} x(t_0) \frac{(s-t_0)^{-\alpha_l-m+\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha_l-m+\alpha)} + J^{-\alpha_l-m+\alpha} D^1 J^{m-\alpha} x(s) \right\|_{\mathcal{Z}} ds \leq \\
&\leq \int_{\tau}^t \left(\frac{C_1}{|s-\tau|^{1+m-\alpha+\alpha_l}} + \frac{C_1}{|s-\tau|^{2(m-\alpha)+\alpha_l}} \right) ds \leq C |t-\tau|^{-\alpha_l-m+\alpha}.
\end{aligned}$$

Пусть $l \in \{1, 2, \dots, k_0 - 1\}$, $-\alpha_l < m - \alpha$, т.е. $\alpha_l \in (\alpha - m, 0]$. В силу неравенства $\alpha_n < \alpha - 1$ это возможно только при $\alpha > 1$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} {}^R D^{\alpha_l} x &= D^1 J^{1-\alpha_l-m+\alpha} J^{m-\alpha} x = \frac{J^{m-\alpha} x(t_0)(t-t_0)^{-\alpha_l-m+\alpha}}{\Gamma(1-\alpha_l-m+\alpha)} + \\ &+ J^{1-\alpha_l-m+\alpha} D^1 J^{m-\alpha} x = J^{1-\alpha_l-m+\alpha} D^1 J^{m-\alpha} x \in C([t_0, t_1]; \mathcal{Z}), \\ \|{}^R D^{\alpha_l} x\|_{C([t_0, t_1]; \mathcal{Z})} &\leq \frac{(t_1 - t_0)^{1-\alpha_l-m+\alpha}}{\Gamma(-\alpha_l - m + \alpha + 2)} \|x\|_{C_\alpha(t_0, t_1; \mathcal{Z})}. \\ \|{}^R D^{\alpha_l} x(t) - {}^R D^{\alpha_l} x(\tau)\|_{\mathcal{Z}} &\leq \\ &\leq \int_{\tau}^t \left\| {}^R D^{\alpha-m+1} x(t_0) \frac{(s-t_0)^{-\alpha_l-m+\alpha}}{\Gamma(1-\alpha_l-m+\alpha)} + J^{1-\alpha_l-m+\alpha} D^2 J^{m-\alpha} x(s) \right\|_{\mathcal{Z}} ds \leq \\ &\leq \int_{\tau}^t \left(\frac{C_1}{|s-\tau|^{m-\alpha+\alpha_l}} + \frac{C_1}{|s-\tau|^{2(m-\alpha)+\alpha_l-1}} \right) ds \leq C_2 |t-\tau|^{1-\alpha_l-m+\alpha}. \end{aligned}$$

Итак, видим что для $x \in C_{\alpha; m^{**}}(t_0, t_1; \mathcal{Z})$ функции ${}^R D^{\alpha_l} x$, $l = 1, 2, \dots, n$, $D^{\alpha-m+k} x$, $k = -r, -r+1, \dots, m-1$, удовлетворяют условию Гельдера на отрезке $t \in [t_0, t_1]$. Кроме того, $\|{}^R D^{\alpha_l} x\|_{C([t_0, t_1]; \mathcal{Z})} \leq C \|x\|_{C_\alpha(t_0, t_1; \mathcal{Z})}$, $l = 1, 2, \dots, n$, $\|{}^R D^{\alpha-m+k} x\|_{C([t_0, t_1]; \mathcal{Z})} \leq C \|x\|_{C_\alpha(t_0, t_1; \mathcal{Z})}$, $k = -r, -r+1, \dots, m-1$. Следовательно, подмножество

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{t_1} &:= \{x \in C_{\alpha; m^{**}}(t_0, t_1; \mathcal{Z}) : {}^R D^{\alpha-m+k} x(t) = 0, \\ &\|{}^R D^{\alpha-m+k} x(t)\|_{\mathcal{Z}} \leq \varepsilon, k = 0, 1, \dots, m^{**} - 1, \\ &D^{\alpha-m+k} x(t_0) = A^\gamma z_k, \|D^{\alpha-m+k} x(t) - A^\gamma z_k\|_{\mathcal{Z}} \leq \varepsilon, k = m^{**}, m^{**} + 1, \dots, m-1\} \end{aligned}$$

из банахова пространства $C_{\alpha; m^{**}}(t_0, t_1; \mathcal{Z})$ замкнуто. Следовательно, \mathcal{S}_{t_1} — полное метрическое пространство с метрикой $d(x, y) = \|x - y\|_{C_\alpha(t_0, t_1; \mathcal{Z})}$.

Для $x \in \mathcal{S}_{t_1}$ определим отображение

$$Fx(t) := \sum_{k=m^{**}}^{m-1} Z_{m-\alpha-k}(t-t_0) A^\gamma z_k + \int_{t_0}^t A^\gamma Z_{1-\alpha}(t-s) B^x(s) ds,$$

где отображение $s \rightarrow B^x(s) := B(s, A^{-\gamma} {}^R D^{\alpha_1} x(s), \dots, A^{-\gamma} {}^R D^{\alpha-1} x(s))$ гильдерово в силу (1.7.6) и доказанной выше гильдеровости всех фазовых аргументов сложной функции B^x . Заметим, что в соответствии с теоремой 1.2.2 (vi)

для $\gamma \in (1 - \frac{1}{\alpha}, 1)$, $t \in (t_0, t_1]$, $x \in \mathcal{S}_{t_1}$, из ограниченности $A^{-\gamma}$ следует, что

$$\begin{aligned} & \left\| \int_{t_0}^t A^\gamma Z_{1-\alpha}(t-s) B^x(s) ds \right\|_{\mathcal{Z}} \leq \\ & \leq \left\| \int_{t_0}^t A^\gamma Z_{1-\alpha}(t-s) (B^x(s) - B(s, 0, \dots, 0, z_{m^{**}}, \dots, z_{m-1})) ds \right\|_{\mathcal{Z}} + \\ & + \left\| \int_{t_0}^t A^\gamma Z_{1-\alpha}(t-s) B(s, 0, \dots, 0, z_{m^{**}}, \dots, z_{m-1}) ds \right\|_{\mathcal{Z}} \leq \\ & \leq C_\gamma (q\varepsilon(m+n+r) + C_1) \int_{t_0}^t (t-s)^{\alpha(1-\gamma)-1} ds = C_2 (t_1 - t_0)^{\alpha(1-\gamma)} \leq \varepsilon/2 \end{aligned}$$

для t_1 достаточно близкого к t_0 независимо от выбора $x \in \mathcal{S}_{t_1}$, поскольку B непрерывен и $\|B(s, 0, \dots, 0, z_{m^{**}}, \dots, z_{m-1})\|_{\mathcal{Z}} \leq C_1$ при $s \in [t_0, t_1]$.

Далее для $l = -r, -r+1, \dots, m^{**}-1$

$$\begin{aligned} {}^R D^{\alpha-m+l} Fx(t_0) &= \sum_{k=m^{**}}^{m-1} Z_{l-k}(0) A^\gamma z_k + D^l J^{m-\alpha} \int_{t_0}^t A^\gamma Z_{1-\alpha}(t-s) B^x(s) ds|_{t=t_0} = \\ &= D^l \int_{t_0}^t A^\gamma Z_{1-m}(t-s) B^x(s) ds|_{t=t_0} = \int_{t_0}^t A^\gamma Z_{l+1-m}(t-s) B^x(s) ds|_{t=t_0} = 0, \end{aligned}$$

так как $l-k < 0$, $l+1-m \leq 0$. Аналогично при $l = m^{**}, m^{**}+1, \dots, m-1$, $z_l \in \mathcal{Z}_{1+\gamma}$

$$\begin{aligned} {}^R D^{\alpha-m+l} Fx(t_0) &= \sum_{k=m^{**}}^{m-1} Z_{l-k}(0) A^\gamma z_k + D^l \int_{t_0}^t A^\gamma Z_{1-m}(t-s) B^x(s) ds|_{t=t_0} = \\ &= A^\gamma z_l + \sum_{k=m^{**}}^{l-1} Z_{l-k-\alpha}(0) A^\gamma z_k + \int_{t_0}^t A^\gamma Z_{l+1-m}(t-s) B^x(s) ds|_{t=t_0} = A^\gamma z_l. \end{aligned}$$

Для $l = 1, 2, \dots, n$, $k = m^{**}, m^{**}+1, \dots, m-1$, имеем $m - \alpha - k + \alpha_l \leq m - \alpha - m^{**} + \alpha_l < 0$, $1 - \alpha + \alpha_l < 0$. Поэтому

$${}^R D^{\alpha_l} Fx(t_0) = \sum_{k=m^{**}}^{m-1} Z_{m-\alpha-k+\alpha_l}(0) A^\gamma z_k + \int_{t_0}^t A^\gamma Z_{1-\alpha+\alpha_l}(t-s) B^x(s) ds|_{t=t_0} = 0.$$

Повторяя доказательство теоремы 1.7.1, получаем $Fx \in \mathcal{S}_{t_1}$ для $x \in \mathcal{S}_{t_1}$, так что, $F : \mathcal{S}_{t_1} \rightarrow \mathcal{S}_{t_1}$. Кроме того, для $x, y \in \mathcal{S}_{t_1}$ и для достаточно малого $t_1 - t_0$

$$\begin{aligned} \|Fx(t) - Fy(t)\|_{\mathcal{Z}} &\leq \int_{t_0}^t \|A^\gamma Z_{1-\alpha}(t-s)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \|B^x(s) - B^y(s)\|_{\mathcal{Z}} ds \leq \\ &\leq \frac{C_1 C_\gamma (t_1 - t_0)^{\alpha(1-\gamma)}}{\alpha(1-\gamma)} d(x, y) \leq \frac{1}{2} d(x, y). \end{aligned}$$

Следовательно, существует единственное $y \in \mathcal{S}_{t_1}$, такое, что $y(t) = Fy(t)$, $t \in (t_0, t_1]$.

Из теоремы 1.7.1 следует, что решением задачи (1.7.4), (1.7.5) является функция $z \in C_{\alpha; m^{**}}(t_0, t_1; \mathcal{Z})$, такая, что

$$z(t) = \sum_{k=m^{**}}^{m-1} Z_{m-\alpha-k}(t-t_0) z_k + \int_{t_0}^t Z_{1-\alpha}(t-s) B^{A^\gamma z}(s) ds = A^{-\gamma} y(t), \quad (1.7.7)$$

где y является неподвижной точкой F . Обратное тоже выполняется: если функция $z \in C_{\alpha; m^{**}}(t_0, t_1; \mathcal{Z})$ удовлетворяет уравнению (1.7.7), то $B^{A^\gamma z}(s)$ удовлетворяет условию Гельдера и согласно теореме 1.7.1 z является решением (1.7.4), (1.7.5). Таким образом, функция $z \in C_{\alpha; m^{**}}(t_0, t_1; \mathcal{Z})$ является решением (1.7.4), (1.7.5), тогда и только тогда, когда $y = A^\gamma z$ является неподвижной точкой F , существование и единственность которой доказаны выше. \square

Замечание 1.7.1. Утверждение теоремы 1.7.2 верно и при $\alpha \geq 2$, при этом утверждение и доказательство можно существенно упростить, так как оператор A и любые его степени в этом случае являются ограниченными операторами в силу теоремы (1.3.2).

1.8 Начально-краевая задача для нелинейного уравнения

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$. Рассмотрим начально-краевую задачу

$${}^R D_t^{\alpha-m+k} v(\xi, t_0) = 0, \quad k = 0, \dots, m^{**} - 1, \quad \xi \in \Omega, \quad (1.8.1)$$

$${}^R D_t^{\alpha-m+k} v(\xi, t_0) = v_k(\xi), \quad k = m^{**}, \dots, m-1, \quad \xi \in \Omega, \quad (1.8.2)$$

$$v(\xi, t) = 0, \quad \xi \in \partial\Omega, \quad t > t_0, \quad (1.8.3)$$

для уравнения

$$\begin{aligned} {}^R D_t^\alpha v(\xi, t) = & \Delta v(\xi, t) + \sum_{l=1}^n {}^R D_t^{\alpha_l} v(\xi, t) \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial \xi_i} {}^R D_t^{\alpha_l} v(\xi, t) + \\ & + \sum_{k=-r}^{m-1} {}^R D_t^{\alpha-m+k} v(\xi, t) \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial \xi_i} {}^R D_t^{\alpha-m+k} v(\xi, t), \quad \xi \in \Omega, \quad t > t_0, \end{aligned} \quad (1.8.4)$$

где ${}^R D_t^\beta v$ являются частными дробными производными Римана — Лиувилля для $\beta > 0$ или дробными интегралами Римана — Лиувилля для $\beta \leq 0$ по переменной t , m^{**} определяется по числам $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ (см. предыдущий параграф). Возьмем $\mathcal{Z} = L_2(\Omega)$, $A = -\Delta$, $D_A = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, тогда $-A \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, 0)$ при $\alpha \in (0, 2)$, $\theta_0 \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ (см. теорему 4 в [65] для $n = 0$, $P_0 \equiv 1$, $p = 1$, $Q_1(\lambda) = \lambda$). Рассуждая, как в [80, §8.8.3], получим, что нелинейный оператор вида

$$f(v_1, v_2, \dots, v_n) = \sum_{l=1}^n v_l \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial \xi_i} v_l$$

удовлетворяет условиям теоремы 1.7.2 при $\gamma \in (\frac{3}{4}, 1)$. Следовательно, для всех $v_k \in D_{A^{1+\gamma}}$, $k = m^{**}, m^{**} + 1, \dots, m-1$, существует единственное решение задачи (1.8.1)–(1.8.4) в $\Omega \times [t_0, t_1]$ для некоторого $t_1 > t_0$.

При $\alpha \in (0, 1]$ задается только одно начальное условие вида (1.8.1) при $m^{**} > 0$ или вида (1.8.2) при $m^{**} = 0$.

При $\alpha \in (1, 2)$ возможны 3 варианта постановки начальных условий: два начальных условия вида (1.8.1) при $m^{**} > 1$; по одному начальному условию вида (1.8.1) и вида (1.8.2) при $m^{**} = 1$; два начальных условия вида (1.8.2) при $m^{**} < 1$.

2 Квазилинейные уравнения с липшицевой нелинейностью

2.1 Локальная разрешимость квазилинейного уравнения

Пусть $m - 1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \alpha$, U — открытое множество в $\mathbb{R} \times \mathcal{Z}^n$, $B : U \rightarrow \mathcal{Z}$, $z_k \in \mathcal{Z}$, $k = 0, 1, \dots, m - 1$, $t_0 \in \mathbb{R}$. Рассмотрим задачу Коши

$$D^k z(t_0) = z_k, \quad k = 0, 1, \dots, m - 1, \quad (2.1.1)$$

для квазилинейного уравнения

$$D^\alpha z(t) = Az(t) + B(t, D^{\alpha_1} z(t), D^{\alpha_2} z(t), \dots, D^{\alpha_n} z(t)). \quad (2.1.2)$$

Решением задачи на отрезке $[t_0, t_1]$ будем называть такую функцию $z \in C((t_0, t_1]; D_A) \cap C^{m-1}([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$, что $D^\alpha z \in C((t_0, t_1]; \mathcal{Z})$, $D^{\alpha_k} z \in C([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$, $k = 1, 2, \dots, n$, выполняются условия (2.1.1), при $t \in [t_0, t_1]$ выполняется включение $(t, D^{\alpha_1} z(t), D^{\alpha_2} z(t), \dots, D^{\alpha_n} z(t)) \in U$ и при $t \in (t_0, t_1]$ — равенство (2.1.2).

Лемма 2.1.1. Пусть $m - 1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{A}_\alpha$, $l, k \in \{0, 1, \dots, m - 1\}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $T > 0$. Тогда

- (i) при $l < k$, $z_k \in \mathcal{Z}$ $D^l Z_{-k}(t)z_k \in C([0, T]; \mathcal{Z})$;
- (ii) при $l \geq k$, $z_k \in D_A$ $D^l Z_{-k}(t)z_k \in C([0, T]; \mathcal{Z})$;
- (iii) при $\beta < k$, $z_k \in \mathcal{Z}$ $D^\beta Z_{-k}(t)z_k \in C([0, T]; \mathcal{Z})$;
- (iv) при $k < \beta < \alpha$, $z_k \in D_A$ $D^\beta Z_{-k}(t)z_k \in C([0, T]; \mathcal{Z})$.

Доказательство. (i) Очевидно, что $D^l Z_{-k}(t)z_k = Z_{l-k}(t)z_k \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0+$ в силу (1.2.3) при любом $z_k \in \mathcal{Z}$ и $l < k$.

(ii) При $l = k$, $z_k \in D_A$

$$\begin{aligned} D^k Z_{-k}(t)z_k &= Z_0(t)z_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \mu^{-1} e^{\mu t} z_k d\mu + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \mu^{-1} R_{\mu^\alpha}(A) e^{\mu t} A z_k d\mu = \\ &= z_k + Z_{-\alpha}(t)A z_k \rightarrow z_k, \quad t \rightarrow 0+; \end{aligned}$$

в случае $l > k$, $z_k \in D_A$

$$\begin{aligned} D^l Z_{-k}(t)z_k &= Z_{l-k}(t)z_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \mu^{l-k-1} e^{\mu t} z_k d\mu + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \mu^{l-k-1} R_{\mu^\alpha}(A) e^{\mu t} A z_k d\mu = \\ &= Z_{l-k-\alpha}(t) A z_k \rightarrow 0, \quad t \rightarrow 0+, \end{aligned}$$

согласно (1.2.3), так как $l - k - \alpha < 0$ при $l, k \in \{0, 1, \dots, m-1\}$.

(iii) При $p-1 < \beta < p \in \mathbb{N}$, $\beta < k$, $z_k \in \mathcal{Z}$ в силу утверждения (i) $D^l Z_{-k}(0)z_k = 0$ при $l = 0, 1, \dots, p-1$, следовательно,

$$D^\beta Z_{-k}(t)z_k = D^p J^{p-\beta} Z_{-k}(t)z_k = D^p Z_{\beta-p-k}(t)z_k = Z_{\beta-k}(t)z_k \in C([0, T]; \mathcal{Z}).$$

(iv) В случае $p-1 < \beta < p \in \mathbb{N}$, $k < \beta < \alpha$, $z_k \in D_A$ в силу утверждений (i) и (ii) $D^l Z_{-k}(0)z_k = 0$ при $l = 0, 1, \dots, k-1$, $D^k Z_{-k}(0)z_k = z_k$, $D^l Z_{-k}(0)z_k = 0$ при $l = k+1, k+2, \dots, p-1$, поэтому

$$D^\beta Z_{-k}(t)z_k = D^p J^{p-\beta} \left(Z_{-k}(t)z_k - \frac{t^k}{k!} z_k \right),$$

$$\begin{aligned} Z_{-k}(t)z_k - \frac{t^k}{k!} z_k &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \mu^{-k-1} e^{\mu t} z_k d\mu + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \mu^{-k-1} R_{\mu^\alpha}(A) e^{\mu t} A z_k d\mu - \frac{t^k}{k!} z_k = \\ &= Z_{-k-\alpha}(t) A z_k, \end{aligned}$$

$$D^\beta Z_{-k}(t)z_k = D^p J^{p-\beta} Z_{-k-\alpha}(t) A z_k = Z_{\beta-k-\alpha}(t) A z_k \in C([0, T]; \mathcal{Z})$$

в силу (1.2.3), так как $\beta - k - \alpha < 0$ при $k \geq 0$. \square

Как и прежде, обозначим $\bar{x} := (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{Z}^n$, $S_\delta(\bar{x}) = \{\bar{y} \in \mathcal{Z}^n : \|y_l - x_l\|_{\mathcal{Z}} \leq \delta, l = 1, 2, \dots, n\}$. Отображение $B : U \rightarrow \mathcal{Z}$ называется локально липшицевым по \bar{x} , если при любом $(t, \bar{x}) \in U$ существуют такие $\delta > 0$, $q > 0$, что $[t - \delta, t + \delta] \times S_\delta(\bar{x}) \subset U$, и при всех $(s, \bar{y}), (s, \bar{v}) \in [t - \delta, t + \delta] \times S_\delta(\bar{x})$ выполняется неравенство

$$\|B(s, \bar{y}) - B(s, \bar{v})\|_{\mathcal{Z}} \leq q \sum_{l=1}^n \|y_l - v_l\|_{\mathcal{Z}}. \quad (2.1.3)$$

Используя начальные данные z_0, z_1 задачи Коши, определим

$$\tilde{z}(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(t - t_0)^k}{k!} z_k, \quad \tilde{z}_l = D^{\alpha_l} \tilde{z}(t_0), \quad l = 1, 2, \dots, n.$$

Если при некотором $l \in \{1, 2, \dots, n\}$ $\alpha_l = m_l = k \in \{0, 1\}$, то $\tilde{z}_l = z_k$, иначе $\tilde{z}_l = 0$.

Лемма 2.1.2. Пусть $A \in \mathcal{A}_\alpha$, $z_k \in D_A$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, U — открытое множество в $\mathbb{R} \times \mathcal{Z}^n$, $B \in C(U; D_A)$, $(t_0, \tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \dots, \tilde{z}_n) \in U$. Тогда функция z является решением задачи (2.1.1), (2.1.2) на отрезке $[t_0, t_1]$, если и только если $D^{\alpha_k} z \in C([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$, $k = 1, 2, \dots, n$, и при всех $t \in (t_0, t_1]$ выполняются включение $(t, D^{\alpha_1} z(t), D^{\alpha_2} z(t), \dots, D^{\alpha_n} z(t)) \in U$ и равенство

$$z(t) = \sum_{k=0}^{m-1} Z_{-k}(t-t_0)z_k + \int_{t_0}^t Z_{1-\alpha}(t-s)B(s, D^{\alpha_1} z(s), D^{\alpha_2} z(s), \dots, D^{\alpha_n} z(s))ds. \quad (2.1.4)$$

Доказательство. Если z — решение задачи (2.1.1), (2.1.2), то отображение

$$t \rightarrow B(t, D^{\alpha_1} z(t), D^{\alpha_2} z(t), \dots, D^{\alpha_n} z(t)) \quad (2.1.5)$$

непрерывно действует из $[t_0, t_1]$ в пространство D_A с нормой графика оператора A . По теореме 1.3.1 выполняется равенство (2.1.4).

Пусть $D^{\alpha_k} z \in C([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$, $k = 1, 2, \dots, n$, при всех $t \in (t_0, t_1]$ выполняется включение $(t, D^{\alpha_1} z(t), D^{\alpha_2} z(t), \dots, D^{\alpha_n} z(t)) \in U$ и z удовлетворяет уравнению (2.1.4). Тогда (2.1.5) принадлежит классу $C([t_0, t_1]; D_A)$. Как при доказательстве теоремы 1.3.1, доказываем (см. [47]), что z — решение задачи (2.1.1), (2.1.2). \square

Теорема 2.1.1. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n \leq m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{A}_\alpha$, $z_k \in D_A$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, U — открытое множество в $\mathbb{R} \times \mathcal{Z}^n$, отображение $B \in C(U; D_A)$ локально липшицево по \bar{x} , $(t_0, \tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \dots, \tilde{z}_n) \in U$. Тогда при некотором $t_1 > t_0$ задача (2.1.1), (2.1.2) имеет единственное решение на отрезке $[t_0, t_1]$.

Доказательство. В силу леммы 2.1.2 и неравенства $\alpha_n \leq m-1$ достаточно доказать, что интегро-дифференциальное уравнение (2.1.4) имеет единственное решение $z \in C^{m-1}([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$ при $t_1 > t_0$.

Выберем такие $t_1 > t_0$ и $\delta > 0$, что $[t_0, t_1] \times S_\delta(\bar{z}) \subset U$, где $\bar{z} = (\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \dots, \tilde{z}_n)$. Обозначим

$$\mathcal{S}_{t_1} := \{x \in C^{m-1}([t_0, t_1]; \mathcal{Z}) : D^{\alpha_l} x(t_0) = \tilde{z}_l,$$

$$\|D^{\alpha_l} x(t) - \tilde{z}_l\|_{\mathcal{Z}} \leq \delta, t \in [t_0, t_1], l = 1, 2, \dots, n\}.$$

Заметим, что $\tilde{z} \in \mathcal{S}_{t_1}$ при малом $t_1 - t_0 > 0$. Определим на \mathcal{S}_{t_1} метрику

$$d(x, y) := \sum_{k=0}^{m-1} \sup_{t \in [t_0, t_1]} \|D^k x(t) - D^k y(t)\|_{\mathcal{Z}} = \|x - y\|_{C^{m-1}([t_0, t_1]; \mathcal{Z})},$$

тогда в силу леммы 1.3.1 \mathcal{S}_{t_1} — полное метрическое пространство.

При $z \in \mathcal{S}_{t_1}$ для $t \in [t_0, t_1]$ определим оператор

$$G(z)(t) := \sum_{k=0}^{m-1} Z_{-k}(t-t_0)z_k + \int_{t_0}^t Z_{1-\alpha}(t-s)B(s, D^{\alpha_1} z(s), D^{\alpha_2} z(s), \dots, D^{\alpha_n} z(s)) ds.$$

Рассуждая, как при доказательстве теоремы 1.3.1, с учетом леммы 2.1.1 получим, что при малом $t_1 - t_0 > 0$ $G(z) \in C^{m-1}([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$, $D^k[G(z)](t_0) = z_k$ для $k = 0, 1, \dots, m-1$.

Обозначим $B^z(t) = B(t, D^{\alpha_1} z(t), D^{\alpha_2} z(t), \dots, D^{\alpha_n} z(t))$. В силу (1.2.3) $\|Z_{1-\alpha+k}(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq C_{1-\alpha+k} e^{at} t^{\alpha-1-k}$. Кроме того, согласно (1.2.2)

$$\|Z_{m-\alpha}(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq C_{m-\alpha} e^{at} (t^{-1} + a)^{m-\alpha} = C_{m-\alpha} e^{at} (1 + at)^{m-\alpha} t^{\alpha-m}.$$

Поэтому $Z_{1-\alpha-k}(0) = 0$ при $k = 0, 1, \dots, m-2$,

$$D^k \int_{t_0}^t Z_{1-\alpha}(t-s)B^z(s)ds = \int_{t_0}^t Z_{1-\alpha+k}(t-s)B^z(s)ds, \quad k = 0, 1, \dots, m-1.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} D^{\alpha_l} \int_{t_0}^t Z_{1-\alpha}(t-s)B^z(s)ds &= D^{m_l} \int_{t_0}^t Z_{1-\alpha-m_l+\alpha_l}(t-s)B^z(s)ds = \\ &= \int_{t_0}^t Z_{1-\alpha+\alpha_l}(t-s)B^z(s)ds, \quad l = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Существование максимумов $b(t) := \sup_{s \in (0, t]} \{(s - t_0)^{1-\alpha+\alpha_l} \|Z_{1-\alpha+\alpha_l}(s - t_0)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}, (s - t_0)^{1-\alpha+k} \|Z_{1-\alpha+k}(s - t_0)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} : l = 1, 2, \dots, n, k = 0, 1, \dots, m-1\}$ следует из (1.2.2), (1.2.3), тогда при $t \in (t_0, t_2]$

$$\begin{aligned} \left\| \int_{t_0}^t Z_{1-\alpha+\alpha_l}(t-s) B^z(s) ds \right\|_{\mathcal{Z}} &\leq b(t_1) \int_{t_0}^t (t-s)^{-1+\alpha-\alpha_l} \|B(s, \tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \dots, \tilde{z}_n)\|_{\mathcal{Z}} ds + \\ &+ b(t_1) \int_{t_0}^t (t-s)^{-1+\alpha-\alpha_l} \|B^z(s) - B(s, \tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \dots, \tilde{z}_n)\|_{\mathcal{Z}} ds \leq \\ &\leq b(t_1) \frac{(t_2 - t_0)^{\alpha-\alpha_l}}{\alpha - \alpha_l} (c(t_1) + qn\delta) \leq \frac{\delta}{m+1} \end{aligned}$$

при $c(t) = \max_{s \in [0, t]} \|B(s, \tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \dots, \tilde{z}_n)\|_{\mathcal{Z}}$,

$$t_2 = \min \left\{ t_0 + 1, t_1, t_0 + \left(\frac{\delta(\alpha - \alpha_n)}{(m+1)b(t_1)(c(t_1) + qn\delta)} \right)^{\frac{1}{\alpha - \alpha_n}} \right\}.$$

Кроме того, возьмем

$a(t) := \sup_{s \in (t_0, t]} \{(s - t_0)^{-k} \|Z_{-k}(s - t_0)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}, (s - t_0)^{-k-\alpha} \|Z_{-k-\alpha}(s - t_0)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}, (s - t_0)^{\alpha_l - k} \|Z_{\alpha_l - k}(s - t_0)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}, (s - t_0)^{\alpha_l - k - \alpha} \|Z_{\alpha_l - k - \alpha}(s - t_0)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} : l = 1, 2, \dots, n, k = 0, 1, \dots, m-1\}$, $\epsilon := \min\{\alpha - m + 1, k - \alpha_l > 0, \alpha + k - \alpha_l < \alpha : k = 0, 1, \dots, m-1, l = 1, 2, \dots, n\}$,

$$t_3 = \min \left\{ t_2, t_0 + \left(\frac{\delta}{(m+1)a(t_2) \max_{k=0,1,\dots,m-1} \|z_k\|_{D_A}} \right)^{1/\epsilon} \right\}.$$

Тогда при $t \in (t_0, t_3]$, $\alpha_l < k$, $\alpha_l \notin \{0, 1, \dots, k-1\}$

$$\|Z_{\alpha_l - k}(t - t_0)z_k - \tilde{z}_l\|_{\mathcal{Z}} = \|Z_{\alpha_l - k}(t - t_0)z_k\|_{\mathcal{Z}} \leq a(t_2)(t - t_0)^{k-\alpha_l} \|z_k\|_{\mathcal{Z}} \leq \frac{\delta}{m+1};$$

при $\alpha_l = k$, $z_k \in D_A$

$$\begin{aligned} \|Z_{\alpha_l - k}(t - t_0)z_k - \tilde{z}_l\|_{\mathcal{Z}} &= \|Z_0(t - t_0)z_k - z_k\|_{\mathcal{Z}} = \|Z_{-\alpha}(t - t_0)Az_k\|_{\mathcal{Z}} \leq \\ &\leq a(t_2)(t - t_0)^\alpha \|z_k\|_{D_A} \leq \frac{\delta}{m+1}, \end{aligned}$$

при $n \in \{0, 1, \dots, k-1\}$

$$\begin{aligned} \|Z_{\alpha_l-n}(t-t_0)z_n\|_{\mathcal{Z}} &= \|Z_{k-n}(t-t_0)z_n\|_{\mathcal{Z}} = \|Z_{k-n-\alpha}(t-t_0)Az_k\|_{\mathcal{Z}} \leq \\ &\leq a(t_2)(t-t_0)^{\alpha+n-k}\|z_k\|_{D_A} \leq \frac{\delta}{m+1}, \end{aligned}$$

при $n \in \{k+1, k+2, \dots, m-1\}$

$$\|Z_{\alpha_l-n}(t-t_0)z_n\|_{\mathcal{Z}} = \|Z_{k-n}(t-t_0)z_n\|_{\mathcal{Z}} \leq a(t_2)(t-t_0)^{n-k}\|z_k\|_{D_A} \leq \frac{\delta}{m+1};$$

при $\alpha_l > k$, $z_k \in D_A$, $\alpha_l \notin \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned} \|Z_{\alpha_l-k}(t-t_0)z_k - \tilde{z}_l\|_{\mathcal{Z}} &= \|Z_{\alpha_l-k}(t-t_0)z_k\|_{\mathcal{Z}} = \|Z_{\alpha_l-k-\alpha}(t-t_0)Az_k\|_{\mathcal{Z}} \leq \\ &\leq a(t_2)(t-t_0)^{\alpha+k-\alpha_l}\|z_k\|_{D_A} \leq \frac{\delta}{m+1}. \end{aligned}$$

При $\alpha_l \in \mathbb{N}_0$ такие неравенства доказываются аналогично с учетом леммы 2.1.1. Таким образом, $\|D^{\alpha_l}z(t) - \tilde{z}_l\|_{\mathcal{Z}} \leq \delta$, $l = 1, 2, \dots, n$, поэтому $G : \mathcal{S}_{t_3} \rightarrow \mathcal{S}_{t_3}$.

Пусть $m_l - 1 < \alpha_l \leq m_l$ при $l = 1, 2, \dots, n$, $r := \min\{m_l - \alpha_l : l = 1, 2, \dots, n\}$. При $x, y \in \mathcal{S}_{t_3}$, $k = 0, 1, \dots, m-1$

$$\begin{aligned} \|D^k[G(x)](t) - D^k[G(y)](t)\|_{\mathcal{Z}} &= \left\| \int_{t_0}^t Z_{1-\alpha+k}(t-s)[B^x(s) - B^y(s)]ds \right\|_{\mathcal{Z}} \leq \\ &\leq b(t_3) \frac{(t_4 - t_0)^{\alpha-k}}{\alpha-k} q \sum_{l=1}^n \sup_{t \in [t_0, t_4]} \|D^{\alpha_l}(x(t) - y(t))\|_{\mathcal{Z}} \leq \\ &\leq b(t_3) \frac{(t_4 - t_0)^{\alpha-m+1}}{\alpha-m+1} nq \|x - y\|_{C^{m-1}([t_0, t_4]; \mathcal{Z})} \max_{l=1, 2, \dots, n} \frac{(t_4 - t_0)^{m_l - \alpha_l}}{\Gamma(m_l - \alpha_l + 1)} \leq \\ &\leq b(t_3) \frac{nq(t_4 - t_0)^{\alpha-m+1+r}}{(\alpha-m+1)\Gamma(r+1)} \|x - y\|_{C^{m-1}([t_0, t_4]; \mathcal{Z})} \leq \frac{d(x, y)}{2m} \end{aligned}$$

при всех $t \in [t_0, t_4]$, где

$$t_4 = \min \left\{ t_3, t_0 + \left(\frac{(\alpha - m + 1)\Gamma(r + 1)}{2mnqb(t_3)} \right)^{\frac{1}{\alpha - m + 1 + r}} \right\}.$$

Таким образом, $d(G(x), G(y)) \leq d(x, y)/2$ и оператор G имеет единственную неподвижную точку z в метрическом пространстве \mathcal{S}_{t_4} . Она и является единственным решением уравнения (2.1.4), а значит, и задачи Коши (2.1.1), (2.1.2) на выбранном отрезке $[t_0, t_4]$. \square

Замечание 2.1.1. Заметим, что t_1 и δ определяются множеством U и векторами $\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \dots, \tilde{z}_n$, а значит, величинами $z_0, z_1, \dots, z_{m-1}, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$; q определяется также отображением B ; величины $a(t), b(t)$ определяются оператором A , $c(t)$ — отображением B ; t_2 зависит от $A, B, U, \alpha, n, \alpha_n$; t_3 зависит еще от z_0, z_1, \dots, z_{m-1} ; t_4 — также от $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

2.2 Глобальная разрешимость квазилинейного уравнения

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n \leq m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $B : [t_0, T] \times \mathcal{Z}^n \rightarrow \mathcal{Z}$, $z_k \in \mathcal{Z}$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, $t_0 \in \mathbb{R}$. Рассмотрим задачу Коши

$$D^k z(t_0) = z_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (2.2.1)$$

для квазилинейного уравнения

$$D^\alpha z(t) = Az(t) + B(t, D^{\alpha_1} z(t), D^{\alpha_2} z(t), \dots, D^{\alpha_n} z(t)) \quad (2.2.2)$$

на заданном отрезке $[t_0, T]$.

Отображение $B : [t_0, T] \times \mathcal{Z}^n \rightarrow \mathcal{Z}$ называется липшицевым по \bar{x} , если существует такое $q > 0$, что при всех $(t, \bar{x}), (t, \bar{y}) \in [t_0, T] \times \mathcal{Z}^n$ выполняется неравенство

$$\|B(t, \bar{x}) - B(t, \bar{y})\|_{\mathcal{Z}} \leq q \sum_{l=1}^n \|x_l - y_l\|_{\mathcal{Z}}.$$

Теорема 2.2.1. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n \leq m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{A}_\alpha$, $z_k \in D_A$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, отображение $B \in C([t_0, T] \times \mathcal{Z}^n; D_A)$ липшицево по \bar{x} . Тогда задача (2.2.1), (2.2.2) имеет единственное решение на отрезке $[t_0, T]$.

Доказательство. В силу леммы 2.1.2 достаточно доказать, что интегро-дифференциальное уравнение (2.1.4) имеет единственное решение в банаховом пространстве $C^{m-1}([t_0, T]; \mathcal{Z})$.

Для $z \in C^{m-1}([t_0, T]; \mathcal{Z})$ определим оператор: для $t \in [t_0, T]$

$$G(z)(t) := \sum_{k=0}^{m-1} Z_{-k}(t-t_0)z_k + \int_{t_0}^t Z_{1-\alpha}(t-s)B(s, D^{\alpha_1} z(s), \dots, D^{\alpha_n} z(s)) ds.$$

Рассуждая, как при доказательстве теоремы 2.1.1, получим, что при $z \in C^{m-1}([t_0, T]; \mathcal{Z})$ $G(z) \in C^{m-1}([t_0, T] \times \mathcal{Z}^n)$.

Через G^j обозначим j -ю степень оператора G , $j \in \mathbb{N}$. Далее везде будем использовать обозначение $T_1 := \max\{T - t_0, 1\}$. Для $t \in [t_0, T]$, $j \in \mathbb{N}$, $x, y \in C^{m-1}([t_0, T]; \mathcal{Z})$ по индукции докажем неравенство

$$\begin{aligned} & \|G^j(x) - G^j(y)\|_{C^{m-1}([t_0, t]; \mathcal{Z})} \leq \\ & \leq c^j (t - t_0)^{j(\alpha - m + 1)} \frac{\Gamma(\alpha - m + 1)^j}{\Gamma(j(\alpha - m + 1) + 1)} \|x - y\|_{C^{m-1}([t_0, t]; \mathcal{Z})} \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

при некотором $c > 0$.

Пусть $m_l - 1 < \alpha_l \leq m_l$ при $l = 1, 2, \dots, n$, будем использовать обозначения из доказательства предыдущей теоремы. Для $j = 1$, $k = 0, 1, \dots, m - 1$ имеем в силу (1.2.2) и леммы 1.3.1

$$\begin{aligned} \|D^k G(x)(t) - D^k G(y)(t)\|_{\mathcal{Z}} & \leq b(T) \int_{t_0}^t (t - s)^{\alpha - k - 1} \|B^x(s) - B^y(s)\|_{\mathcal{Z}} ds \leq \\ & \leq b(T) nq \frac{(t - t_0)^{\alpha - k}}{\alpha - k} \|x - y\|_{C^{m-1}([t_0, t]; \mathcal{Z})} \max_{l=1, 2, \dots, n} \frac{(t - t_0)^{m_l - \alpha_l}}{\Gamma(m_l - \alpha_l + 1)} \leq \\ & \leq \frac{b(T) nq T_1^{m-1+r}}{(\alpha - m + 1) \Gamma(r + 1)} \|x - y\|_{C^{m-1}([t_0, t]; \mathcal{Z})} (t - t_0)^{\alpha - m + 1}. \end{aligned}$$

При этом учитывается, что при $t \in [t_0, T]$ $(t - t_0)^{\alpha - k} (t - t_0)^{-(\alpha - m + 1)} = (t - t_0)^{m-1-k} \leq T_1^{m-1}$, поэтому $(t - t_0)^{\alpha - k} \leq T_1^{m-1} (t - t_0)^{\alpha - m + 1}$, $k = 0, 1, \dots, m - 1$.

Поэтому

$$\|G(x) - G(y)\|_{C^{m-1}([t_0, t]; \mathcal{Z})} \leq \frac{mb(T) nq T_1^{m-1+r}}{(\alpha - m + 1) \Gamma(r)} \|x - y\|_{C^{m-1}([t_0, t]; \mathcal{Z})} (t - t_0)^{\alpha - m + 1}.$$

Далее при $k = 0, 1, \dots, m - 1$

$$\begin{aligned} \|D^k G^2(x)(t) - D^k G^2(y)(t)\|_{\mathcal{Z}} & \leq b(T) \int_{t_0}^t (t - s)^{\alpha - k - 1} \|B^{G(x)}(s) - B^{G(y)}(s)\|_{\mathcal{Z}} ds \leq \\ & \leq \frac{b(T) nq T_1^r}{\Gamma(r + 1)} \int_{t_0}^t (t - s)^{\alpha - k - 1} \|G(x) - G(y)\|_{C^{m-1}([t_0, s]; \mathcal{Z})} ds \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{m(b(T)nq)^2 T_1^{2(m-1+r)}}{(\alpha - m + 1)\Gamma(r + 1)^2} \|x - y\|_{C^{m-1}([t_0, t]; \mathcal{Z})} \int_{t_0}^t (t - s)^{\alpha - m} (s - t_0)^{\alpha - m + 1} ds \leq \\
&\leq \frac{m(b(T)nq)^2 T_1^{2(m-1+r)}}{\Gamma(r + 1)^2} \|x - y\|_{C^{m-1}([t_0, t]; \mathcal{Z})} \frac{\Gamma(\alpha - m + 1)^2}{\Gamma(2(\alpha - m + 1) + 1)} (t - t_0)^{2(\alpha - m + 1)}, \\
&\quad \|G^2(x) - G^2(y)\|_{C^{m-1}([t_0, t]; \mathcal{Z})} \leq \\
&\leq \left(\frac{mb(T)nq T_1^{m-1+r}}{\Gamma(r + 1)} \right)^2 \|x - y\|_{C^{m-1}([t_0, t]; \mathcal{Z})} \frac{\Gamma(\alpha - m + 1)^2}{\Gamma(2(\alpha - m + 1) + 1)} (t - t_0)^{2(\alpha - m + 1)}.
\end{aligned}$$

В предположении, что неравенство (2.2.3) выполнено при константе $c = \frac{mb(T)nq T_1^{m-1+r}}{\Gamma(r+1)}$, $j = p$, получим справедливость такого неравенства при $j = p+1$.

Поэтому при всех $j \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
&\|G^j(y) - G^j(z)\|_{C^{m-1}([t_0, T]; \mathcal{Z})} \leq \\
&\leq c^j (T - t_0)^{j(\alpha - m + 1)} \frac{\Gamma(\alpha - m + 1)^j}{\Gamma(j(\alpha - m + 1) + 1)} \|y - z\|_{C^{m-1}([t_0, T]; \mathcal{Z})}.
\end{aligned}$$

Из асимптотики гамма-функции следует, что если j достаточно велико, то G^j является сжимающим отображением в пространстве $C^{m-1}([t_0, T]; \mathcal{Z})$, а значит, по теореме о неподвижной точке G имеет единственную неподвижную точку в этом пространстве. Она и является обобщённым решением задачи (2.2.1), (2.2.2) на $[t_0, T]$. \square

По сути получен более общий результат.

Следствие 2.2.1. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n \leq m - 1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{A}_\alpha$, отображение $B \in C([t_0, T] \times \mathcal{Z}^n; \mathcal{Z})$ липшицево. Тогда для всякого $g \in C^{m-1}([t_0, T]; \mathcal{Z})$ уравнение

$$w(t) = g(t) + \int_{t_0}^t Z_{1-\alpha}(t-s) B(s, D^{\alpha_1} w(s), D^{\alpha_2} w(s), \dots, D^{\alpha_n} w(s)) ds$$

имеет единственное решение $w \in C^{m-1}([t_0, T]; \mathcal{Z})$.

2.3 Существование и единственность обобщённого решения

Рассмотрим задачу Коши

$$D^k z(t_0) = z_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (2.3.1)$$

для квазилинейного уравнения

$$D^\alpha z(t) = Az(t) + B(t, D^{\alpha_1} z(t), D^{\alpha_2} z(t), \dots, D^{\alpha_n} z(t)), \quad (2.3.2)$$

где $m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{A}_\alpha$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \alpha$. Некоторые α_l могут быть неположительными, им соответствуют дробные интегралы Римана — Лиувилля порядка $-\alpha_l \geq 0$.

Если существует решение задачи (2.3.1), (2.3.2), то, как показано выше, это решение удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению

$$z(t) = \sum_{k=0}^{m-1} Z_{-k}(t-t_0)z_k + \int_{t_0}^t Z_{1-\alpha}(t-s)B(s, D^{\alpha_1} z(s), D^{\alpha_2} z(s), \dots, D^{\alpha_n} z(s)) ds. \quad (2.3.3)$$

Если $z, D^{\alpha_1} z, D^{\alpha_2} z, \dots, D^{\alpha_n} z \in C([t_0, T]; \mathcal{Z})$ и выполняется равенство (2.3.3) при всех $t \in [t_0, T]$, то функцию z будем называть *обобщённым решением* задачи (2.3.1), (2.3.2).

Теорема 2.3.1. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n \leq m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $m_n - 1 < \alpha_n \leq m_n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{A}_\alpha$, отображение $B \in C([t_0, T] \times \mathcal{Z}^n; \mathcal{Z})$ липшицево, $z_k \in D_A$, $k = 0, 1, \dots, m_n$, $z_l \in \mathcal{Z}$, $l = m_n + 1, m_n + 2, \dots, m-1$. Тогда существует единственное обобщённое решение задачи (2.3.1), (2.3.2) на отрезке $[t_0, T]$.

Доказательство. При $\alpha_n > 0$ докажем, что интегро-дифференциальное уравнение (2.3.3) имеет единственное решение в пространстве $C^{m_n}([t_0, T]; \mathcal{Z})$.

Для $z \in C^{m_n}([t_0, T]; \mathcal{Z})$ имеем $D^{\alpha_l} z \in C([t_0, T]; \mathcal{Z})$, $l = 1, 2, \dots, n$, в силу леммы 1.3.1, так как $\alpha_l \leq m_n \leq m-1$. Определим оператор $G : C^{m_n}([t_0, T]; \mathcal{Z}) \rightarrow C^{m_n}([t_0, T]; \mathcal{Z})$ равенством

$$G(z)(t) := \sum_{k=0}^{m-1} Z_{-k}(t-t_0)z_k + \int_{t_0}^t Z_{1-\alpha}(t-s)B(s, D^{\alpha_1} z(s), \dots, D^{\alpha_n} z(s)) ds,$$

$t \in [t_0, T]$. Заметим, что в силу леммы 2.1.1 $\sum_{k=0}^{m-1} Z_{-k}(t-t_0)z_k \in C^{m_n}([t_0, T]; \mathcal{Z})$ при $z_k \in D_A$, $k = 0, 1, \dots, m_n$, $z_l \in \mathcal{Z}$, $l = m_n+1, m_n+2, \dots, m-1$. Обозначим $B^z(t) := B(t, D^{\alpha_1}z(t), D^{\alpha_2}z(t), \dots, D^{\alpha_n}z(t))$, $c(t) := \max_{s \in [t_0, t]} \|B(s, 0, 0, \dots, 0)\|_{\mathcal{Z}}$, существование максимума $b(t) := \max_{l=0,1,\dots,m_n} \sup_{s \in (0,t]} \|Z_{1-\alpha+l}(s-t_0)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} (s-t_0)^{1-\alpha+l}$ следует из (1.2.3). Тогда при $l = 0, 1, \dots, m_n$

$$\begin{aligned} \left\| \int_{t_0}^t Z_{1-\alpha+l}(t-s)B^z(s) ds \right\|_{\mathcal{Z}} &\leq \left\| \int_{t_0}^t Z_{1-\alpha+l}(t-s)(B^z(s) - B(s, 0, 0, \dots, 0)) ds \right\|_{\mathcal{Z}} \\ &\quad + \left\| \int_{t_0}^t Z_{1-\alpha+l}(t-s)B(s, 0, 0, \dots, 0) ds \right\|_{\mathcal{Z}} \leq \\ &\leq b(t) \left(q \sum_{l=1}^n \|D^{\alpha_l}z(t)\|_{C([t_0, T]; \mathcal{Z})} + c(t) \right) T_1^{m_n} \frac{(t-t_0)^{\alpha-m_n}}{\alpha-m_n}. \end{aligned}$$

При этом учитывается тот факт, что при $t \in [t_0, T]$ $(t-t_0)^{\alpha-l}(t-t_0)^{-(\alpha-m_n)} = (t-t_0)^{m_n-l} \leq T_1^{m_n}$, где $T_1 := \max\{1, T-t_0\}$, поэтому $(t-t_0)^{\alpha-l} \leq T_1^{m_n}(t-t_0)^{\alpha-m_n}$, $l = 1, 2, \dots, m_n$. Таким образом, $G(z) \in C^{m_n}([t_0, T]; \mathcal{Z})$. Сжимаемость оператора G в пространстве $C^{m_n}([t_0, T]; \mathcal{Z})$ доказывается так же, как в теореме 2.2.1 для пространства $C^{m-1}([t_0, T]; \mathcal{Z})$.

Если $\alpha_n \leq 0$, аналогичные рассуждения проводятся в пространстве $C([t_0, T]; \mathcal{Z})$. \square

Замечание 2.3.1. Заметим, что при $\alpha_n < m_n$ можно ослабить условия на начальные данные: достаточно потребовать, чтобы $z_k \in D_A$, $k = 0, 1, \dots, m_n-1$, $z_l \in \mathcal{Z}$, $l = m_n, m_n+1, \dots, m-1$.

Следствие 2.3.1. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n \leq m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{A}_\alpha$, отображение $B \in C([t_0, T] \times \mathcal{Z}^n; \mathcal{Z})$ липшицево. Тогда для всякого $g \in C^{m_n}([t_0, T]; \mathcal{Z})$ уравнение

$$w(t) = g(t) + \int_{t_0}^t Z_{1-\alpha}(t-s)B(s, D^{\alpha_1}w(s), D^{\alpha_2}w(s), \dots, D^{\alpha_n}w(s)) ds$$

имеет единственное решение $w \in C^{m_n}([t_0, T]; \mathcal{Z})$.

Замечание 2.3.2. Единственность решения доказана в пространстве функций $C^{m_n}([t_0, T]; \mathcal{Z})$. Однако в случае $\alpha_n < m_n$ обобщенное решение по определению не обязано принадлежать этому пространству и остается вопрос о единственности обобщенного решения вообще. Можно показать единственность решения при $\alpha \geq 1$.

Пусть y — обобщённое решение задачи (2.3.1), (2.3.2) на $[t_0, T]$ с начальными данными $y_k \in D_A$, $k = 0, 1, \dots, m_n$, $y_l \in \mathcal{Z}$, $l = m_n + 1, m_n + 2, \dots, m - 1$, а z — обобщённое решение этой задачи на $[t_0, T]$ с начальными данными $z_k \in D_A$, $k = 0, 1, \dots, m_n$, $z_l \in \mathcal{Z}$, $l = m_n + 1, m_n + 2, \dots, m - 1$. Возьмём при $\alpha_l < k$ $a_{kl}(t) := \max\{\|Z_{\alpha_l - k}(s - t_0)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} : s \in [t_0, t]\}$, при $\alpha_l \geq k$ $a_{kl}(t) := \max\{\|Z_{\alpha_l - k - \alpha}(s - t_0)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} : s \in [t_0, t]\}$ для $k = 0, 1, \dots, m - 1$, $l = 1, 2, \dots, n$, $a(t) := \max\{a_{kl}(t) : k = 0, 1, \dots, m - 1, l = 1, 2, \dots, n\}$; $a_0(t) := \max\{\|Z_{1-m}(s-t_0)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}, \|Z_{2-m}(s-t_0)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}, \dots, \|Z_0(s-t_0)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}, \|Z_{-\alpha}(s-t_0)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}, \|Z_{1-\alpha}(s-t_0)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}, \dots, \|Z_{m-1-\alpha}(s-t_0)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} : s \in [t_0, t]\}$. Тогда при $l = 1, 2, \dots, n$

$$\begin{aligned}
D^{\alpha_l} y(t) &= \sum_{k=0}^{m-1} Z_{\alpha_l - k}(t - t_0) y_k + \int_{t_0}^t Z_{1-\alpha+\alpha_l}(t-s) B^y(s) ds, \quad t \in [t_0, T], \\
\|y(t) - z(t)\|_{\mathcal{Z}} &\leq a_0(T) \left(\sum_{k=0}^{m_n} \|y_k - z_k\|_{D_A} + \sum_{k=m_n+1}^{m-1} \|y_k - z_k\|_{\mathcal{Z}} \right) + \\
&\quad + b(T) (T - t_0)^{\alpha-1} q \int_{t_0}^t \sum_{k=1}^n \|D^{\alpha_k} y(s) - D^{\alpha_k} z(s)\|_{\mathcal{Z}} ds, \\
\|D^{\alpha_l} y(t) - D^{\alpha_l} z(t)\|_{\mathcal{Z}} &\leq a(T) \left(\sum_{k=0}^{m_n} \|y_k - z_k\|_{D_A} + \sum_{k=m_n+1}^{m-1} \|y_k - z_k\|_{\mathcal{Z}} \right) + \\
&\quad + b(T) T_1^{\alpha_n - \alpha_l} (T - t_0)^{\alpha-1-\alpha_n} q \int_{t_0}^t \sum_{k=1}^n \|D^{\alpha_k} y(s) - D^{\alpha_k} z(s)\|_{\mathcal{Z}} ds, \\
\|y(t) - z(t)\|_{\mathcal{Z}} &+ \sum_{l=1}^n \|D^{\alpha_l} y(t) - D^{\alpha_l} z(t)\|_{\mathcal{Z}} \leq
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq (a_0(T) + na(T)) \left(\sum_{k=0}^{m_n} \|y_k - z_k\|_{D_A} + \sum_{k=m_n+1}^{m-1} \|y_k - z_k\|_{\mathcal{Z}} \right) + \\ &\quad + b(T)q((T - t_0)^{\alpha-1} + nT_1^{\alpha_n-\alpha_1}(T - t_0)^{\alpha-\alpha_n-1}) \times \\ &\quad \times \left(\int_{t_0}^t \|y(s) - z(s)\|_{\mathcal{Z}} ds + \int_{t_0}^t \sum_{l=1}^n \|D^{\alpha_l} y(s) - D^{\alpha_l} z(s)\|_{\mathcal{Z}} ds \right). \end{aligned}$$

Поэтому в силу неравенства Гронуолла

$$\begin{aligned} &\|y(t) - z(t)\|_{C([t_0, T]; \mathcal{Z})} + \sum_{l=1}^n \|D^{\alpha_l} y(t) - D^{\alpha_l} z(t)\|_{C([t_0, T]; \mathcal{Z})} \leq \\ &\leq (a_0(T) + na(T)) e^{b(T)q((T-t_0)^\alpha + nT_1^{\alpha_n-\alpha_1}(T-t_0)^{\alpha-\alpha_n})} \times \\ &\quad \times \left(\sum_{k=0}^{m_n} \|y_k - z_k\|_{D_A} + \sum_{k=m_n+1}^{m-1} \|y_k - z_k\|_{\mathcal{Z}} \right). \end{aligned}$$

Отсюда следует единственность обобщенного решения задачи (2.3.1), (2.3.2) при $\alpha \geq 1$.

Замечание 2.3.3. Если $z_k \in D_A$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, $B \in C([t_0, T] \times \mathcal{Z}^n; D_A)$, то в силу теоремы 2.2.1 существует и классическое решение задачи (2.3.1), (2.3.2) на отрезке $[t_0, T]$.

Теорема 2.3.2. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n \leq m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{A}_\alpha$, $z_k \in D_A$, $k = 0, 1, \dots, m_n$, $z_l \in \mathcal{Z}$, $l = m_n + 1, m_n + 2, \dots, m-1$, U — открытое множество в $\mathbb{R} \times \mathcal{Z}^n$, отображение $B \in C(U; \mathcal{Z})$ локально липшицево по \bar{x} , $(t_0, \tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \dots, \tilde{z}_n) \in U$. Тогда существует такое $t_1 > t_0$, что задача (2.3.1), (2.3.2) имеет единственное обобщенное решение на $[t_0, t_1]$.

Доказательство. Пусть $\alpha_n > 0$. Выберем такие $t_1 > t_0$ и $\delta > 0$, что $[t_0, t_1] \times S_\delta(\bar{z}) \subset U$, где $\bar{z} = (\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \dots, \tilde{z}_n)$, и на $[t_0, t_1] \times S_\delta(\bar{z}) \subset U$ выполняется (2.1.3). Обозначим через \mathcal{S}_{t_1} множество функций $z \in C^{m_n}([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$, таких, что $\|D^{\alpha_l} z(t) - \tilde{z}_l\|_{\mathcal{Z}} \leq \delta$ при $t_0 \leq t \leq t_1$, $l = 1, 2, \dots, n$. Определим на множестве \mathcal{S}_{t_1} метрику $d(y, v) := \|y - v\|_{C^{m_n}([t_0, t_1]; \mathcal{Z})}$, тогда (\mathcal{S}_{t_1}, d) — полное метрическое пространство.

Для $z \in \mathcal{S}_{t_1}$ рассмотрим оператор

$$G(z)(t) := \sum_{k=0}^{m-1} Z_{-k}(t-t_0)z_k + \int_{t_0}^t Z_{1-\alpha}(t-s)B^z(s) ds, \quad t \in [t_0, t_1],$$

где $B^z(s) := B(s, D^{\alpha_1}z(s), D^{\alpha_2}z(s), \dots, D^{\alpha_n}z(s))$. При доказательстве теоремы 2.3.1 было показано, что $G(z) \in C^{m_n}([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$ при $z \in C^{m_n}([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$. Покажем, что для достаточно малого $t_1 - t_0 > 0$ $G(z) \in \mathcal{S}_{t_1}$ при любом $z \in \mathcal{S}_{t_1}$, т. е. при всех $t \in [t_0, t_1]$ $\|D^{\alpha_l}G(z)(t) - \tilde{z}_l\|_{\mathcal{Z}} \leq \delta$, $l = 1, 2, \dots, n$.

При $l = 0, 1, \dots, m_n$

$$D^l G(z)(t) = \sum_{k=0}^{m-1} Z_{l-k}(t-t_0)z_k + \int_{t_0}^t Z_{1-\alpha+l}(t-s)B^z(s) ds,$$

так как $m_n \leq m - 1$. Возьмем

$$B^z(s) = (B^z(s) - B(s, \tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \dots, \tilde{z}_n)) + B(s, \tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \dots, \tilde{z}_n),$$

тогда

$$\begin{aligned} & \left\| \int_{t_0}^t Z_{1-\alpha+l}(t-s)B^z(s) ds \right\|_{\mathcal{Z}} \leq \\ & \leq b(t_1) \int_{t_0}^t (t-s)^{\alpha-l-1} \|B^z(s) - B(s, \tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \dots, \tilde{z}_n)\|_{\mathcal{Z}} ds + \\ & + b(t_1) \int_{t_0}^t (t-s)^{\alpha-l-1} \|B(s, \tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \dots, \tilde{z}_n)\|_{\mathcal{Z}} ds \leq \\ & \leq T_1^{m_n} b(t_1) \frac{(t-t_0)^{\alpha-m_n}}{\alpha-m_n} (nq\delta + c(t_1)), \end{aligned}$$

где $T_1 := \max\{1, t_1 - t_0\}$ и $(t-t_0)^{\alpha-l} \leq T_1^{m_n} (t-t_0)^{\alpha-m_n}$, $l = 1, 2, \dots, m_n$. Здесь используются функции $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, определённые при доказательстве теоремы 2.1.1. Возьмём

$$t_2 := \min \left\{ t_1, t_0 + \left(\frac{\delta(\alpha - m_n) T_1^{-m_n}}{2b(t_1)(nq\delta + c(t_1))} \right)^{\frac{1}{\alpha - m_n}} \right\},$$

тогда при $t \in [t_0, t_2]$

$$\left\| \int_{t_0}^t Z_{1-\alpha+l}(t-s)B^z(s) ds \right\|_{\mathcal{Z}} < \frac{\delta}{2}.$$

В силу (1.2.3) при достаточно малом $t_3 - t_0$, $t_3 \in (t_0, t_2]$, при $t \in [t_0, t_2]$, $l = 0, 1, \dots, m_n$

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=0}^{m-1} Z_{l-k}(t-t_0)z_k - \tilde{z}_l \right\|_{\mathcal{Z}} &\leq \sum_{k=0}^{l-1} \|Z_{l-k-\alpha}(t-t_0)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \|z_k\|_{D_A} + \\ &+ \|Z_0(t-t_0)z_l - z_l\|_{\mathcal{Z}} + \sum_{k=l+1}^{m_n} \|Z_{l-k}(t-t_0)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \|z_k\|_{\mathcal{Z}} < \frac{\delta}{2}. \end{aligned}$$

Следовательно, оператор G отображает \mathcal{S}_{t_3} в себя.

Пусть $m_l - 1 < \alpha_l \leq m_l$, $l = 1, 2, \dots, n$, $r_1 := \min\{m_1 - \alpha_1, m_2 - \alpha_2, \dots, m_n - \alpha_n\}$, $r_2 := \max\{m_1 - \alpha_1, m_2 - \alpha_2, \dots, m_n - \alpha_n\}$, $T_3 := \max\{1, t_3 - t_0\}$,

$$t_4 := \min \left\{ t_3, t_0 + \left(\frac{(\alpha - m_n)\Gamma(r_1 + 1)}{2nmqb(t_2)T_3^{m_n+r_2-r_1}} \right)^{\frac{1}{\alpha-m_n+r_1}} \right\}.$$

При $x, y \in \mathcal{S}_{t_4}$, $k = 0, 1, \dots, m_n$ получим при всех $t \in [t_0, t_4]$

$$\begin{aligned} \|D^k G(x)(t) - D^k G(y)(t)\|_{\mathcal{Z}} &= \left\| \int_{t_0}^t Z_{1-\alpha+k}(t-s)[B^x(s) - B^y(s)] ds \right\|_{\mathcal{Z}} \leq \\ &\leq T_3^{m_n} b(t_3) \frac{(t_4 - t_0)^{\alpha-m_n}}{\alpha - m_n} q \sum_{l=1}^n \sup_{t \in [t_0, t_4]} \|D^{\alpha_l}(x(t) - y(t))\|_{\mathcal{Z}} \leq \\ &\leq T_3^{m_n} b(t_3) \frac{(t_4 - t_0)^{\alpha-m_n}}{\alpha - m_n} q \sum_{l=1}^n \frac{(t_4 - t_0)^{m_l - \alpha_l}}{\Gamma(m_l - \alpha_l + 1)} \|x - y\|_{C^{m_l}([t_0, t_4]; \mathcal{Z})} \leq \\ &\leq \frac{T_3^{m_n+r_2-r_1}}{\Gamma(r_1 + 1)} b(t_3) \frac{(t_4 - t_0)^{\alpha-m_n+r_1}}{\alpha - m_n} qn \|x - y\|_{C^{m_n}([t_0, t_4]; \mathcal{Z})} \leq \frac{1}{2m} d(x, y). \end{aligned}$$

Суммируя по $k = 0, 1, \dots, m_n$, получим неравенство $d(G(x), G(y)) \leq \frac{1}{2}d(x, y)$.

Следовательно, отображение $G : \mathcal{S}_{t_4} \rightarrow \mathcal{S}_{t_4}$ является сжимающим, и по теореме Банаха о неподвижной точке существует единственная функция $z \in \mathcal{S}_{t_4}$, такая, что $G(z) = z$. Это и есть обобщённое решение задачи Коши

(2.3.1), (2.3.2) на полученном отрезке $[t_0, t_4]$. Отсюда же следует единственность решения в пространстве $C^{m_n}([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$.

При $\alpha_n \leq 0$ аналогичные рассуждения проводятся в пространстве функций $C([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$. \square

Замечание 2.3.4. Если $z_k \in D_A$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, $B \in C(U; D_A)$, то в силу теоремы 2.1.1 существует и локальное классическое решение задачи (2.3.1), (2.3.2).

2.4 Дробное по времени уравнение Аллена — Кана

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \{1, 2, 3\}$, — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$. При $\alpha \in (0, 2)$, $m-1 < \alpha \leq m \in \{1, 2\}$, рассмотрим начально-краевую задачу для уравнения Аллена — Кана

$$D_t^\alpha v(\xi, t) = \nu \Delta v(\xi, t) + h(\xi, v(\xi, t)), \quad (\xi, t) \in \Omega \times (0, T], \quad (2.4.1)$$

$$v(\xi, t) = 0, \quad (\xi, t) \in \partial\Omega \times (0, T], \quad (2.4.2)$$

$$v(\xi, 0) = v_0, \quad (m-1) \frac{\partial v}{\partial \xi} = (m-1)v_1(\xi), \quad \xi \in \Omega. \quad (2.4.3)$$

При $\alpha \in (0, 1]$ имеем $m = 1$, в таком случае второе из условий в (2.4.3) становится тривиальным.

Теорема 2.4.1. [52]. Пусть Ω — ограниченная область в \mathbb{R}^d с гладкой границей, $F \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R})$, $l > d/2$, отображение B действует по правилу

$$B(v_1, v_2, \dots, v_d) = F(\cdot, v_1(\cdot), v_2(\cdot), \dots, v_d(\cdot)). \quad (2.4.4)$$

Тогда $B \in C^\infty((H^l(\Omega))^d; H^l(\Omega))$.

Обозначим через l наименьшее натуральное число, превосходящее $d/2$, $\mathcal{Z} = H^l(\Omega)$, $Aw = \Delta w$ с областью определения $D_A = \{w \in H^{l+2}(\Omega) : w(\xi) = 0, \xi \in \partial\Omega\}$

Теорема 2.4.2. Пусть $\alpha \in (0, 2)$, $h \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$, $l > d/2$, $v_0 \in D_A$, при $\alpha \in (1, 2)$ $v_1 \in H^l(\Omega)$. Тогда для некоторого $t_1 > t_0$ существует единственное обобщенное решение задачи (2.4.1)–(2.4.3) на $\Omega \times [0, t_1]$. Если при этом

все частные производные функции h до порядка $l + 1$ ограничены, то существует единственное обобщенное решение задачи (2.4.1)–(2.4.3) на $\Omega \times [0, T]$.

Доказательство. Равенством $B(w) = h(\cdot, w(\cdot))$ определим нелинейный оператор. В силу теоремы 2.4.1 $B \in C^\infty(H^l(\Omega); H^l(\Omega))$. По теореме 2.3.2 при $z_0 = v_0(\cdot)$, $z_1 = v_1(\cdot)$ получим существование решения при некотором $t_1 > 0$. В случае ограниченности всех частных производных функции h до порядка $l + 1$ получим липшицевость нелинейного оператора и требуемое утверждение в силу теоремы 2.3.1. \square

2.5 Один класс краевых задач в \mathbb{R}^d

Пусть $p, q \in \mathbb{N}_0$, задан многочлен $Q_q(\delta) := \sum_{|\beta| \leq q} d_\beta \delta^\beta$, где $\delta = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_d) \in \mathbb{R}^d$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_d) \in \mathbb{N}_0^d$ — мультииндексы, $|\beta| = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_d$, $\delta^\beta = \delta_1^{\beta_1} \delta_2^{\beta_2} \dots \delta_d^{\beta_d}$, $d_\beta \in \mathbb{C}$ при $|\beta| \leq d$. Существует такой мультииндекс β^1 , что $|\beta^1| = q$, $d_{\beta^1} \neq 0$. При $m - 1 < \alpha \leq m \in \{1, 2\}$ редуцируем задачу Коши

$$v(\xi, 0) = v_0(\xi), \quad (m - 1)D_t^1 v(\xi, 0) = (m - 1)v_1(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^d, \quad (2.5.5)$$

$$D_t^\alpha v(\xi, t) = Q_q \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) v(\xi, t) + F(D_t^{\alpha_1} v(\xi, t), \dots, D_t^{\alpha_n} v(\xi, t)) \quad (2.5.6)$$

в цилиндре $\mathbb{R}^d \times [0, T]$ к задаче (2.3.1), (2.3.2). Для этого возьмём пространство $\mathcal{Z} = L_2(\mathbb{R}^d)$ и оператор $A = Q_q \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \in \mathcal{Cl}(\mathcal{Z})$, $D_A = H^q(\mathbb{R}^d)$.

Лемма 2.5.1. Пусть в условиях данного параграфа $\alpha \in (1, 2]$ и

$$\exists \theta_1 \in \left(\frac{\pi \alpha}{2}, \pi \right) \quad \exists a_1 \geq 0 \quad \forall \delta = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_d) \in \mathbb{R}^d \quad Q_q(\delta) \in \mathbb{C} \setminus S_{\theta_1, a_1}. \quad (2.5.7)$$

Тогда $A \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, (2a_1)^{1/\alpha})$ при $\theta_0 \in (\frac{\pi}{2}, \frac{\theta_1}{\alpha})$.

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{F}_\xi w(\delta)$, $\delta = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_d)$, преобразование Фурье по переменным $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d)$ функции $w(\xi)$. Подействуем на уравнение $\lambda^\alpha w(\xi) - Q_q \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) w(\xi) = g(\xi)$ в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$ преобразованием Фурье и получим $\lambda^\alpha \mathcal{F}_\xi w(\delta) - Q_q(\delta) \mathcal{F}_\xi w(\delta) = \mathcal{F}_\xi g(\delta)$.

Возьмем $\theta_0 \in (\frac{\pi}{2}, \frac{\theta_1}{\alpha})$, $a_0 = (2a_1)^{1/\alpha}$ и для $\lambda \in S_{\theta_0, a_0}$, $\delta \in \mathbb{R}^d$ в силу (2.5.7)

получим

$$|\mathcal{F}_\xi w(\delta)|^2 \leq \frac{|\mathcal{F}_\xi g(\delta)|^2}{|\lambda^\alpha - Q_q(\delta)|^2} \leq \frac{C_1 |\mathcal{F}_\xi g(\delta)|^2}{\sin^2(\theta_1 - \alpha\theta_0) |\lambda^\alpha - 2a_1|^2} \leq \frac{C_2 |\mathcal{F}_\xi g(\delta)|^2}{|\lambda|^{2\alpha}}.$$

В силу равенства Парсеваля отсюда следует, что

$$\|w\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 = \|(\lambda^\alpha - A)^{-1}g\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq C_2 \|g\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 |\lambda|^{-2\alpha}.$$

□

Аналогично доказывается следующее утверждение.

Лемма 2.5.2. Пусть в условиях данного параграфа $\alpha \in (0, 1]$ и

$$\exists \theta_1 \in \left(\frac{\pi\alpha}{2}, \pi\right) \quad \exists a_1 \geq 0 \quad \forall \delta = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_d) \in \mathbb{R}^d \quad Q_q(\delta) \in \mathbb{C} \setminus S_{\theta_1, a_1}. \quad (2.5.8)$$

Тогда $A \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, (2a_1)^{1/\alpha})$ при $\theta_0 \in (\frac{\pi}{2}, \frac{\theta_1}{\alpha})$.

Используя леммы 2.5.1 и 2.5.2 и теорему 2.3.1, получаем следующий результат.

Теорема 2.5.1. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n \leq m - 1 < \alpha \leq m \in \{1, 2\}$, выполняется условие (2.5.7) при $\alpha \in (1, 2)$ или (2.5.8) при $\alpha \in (0, 1]$; $v_0 \in H^q(\mathbb{R}^d)$ при $\alpha_n > -1$ и $v_0 \in L_2(\mathbb{R}^d)$ в противном случае; при $\alpha \in (1, 2]$ $v_1 \in H^q(\mathbb{R}^d)$ при $\alpha_n > 0$ и $v_0 \in L_2(\mathbb{R}^d)$ в противном случае; отображение $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ липшицево и существует такое $(u_1, u_2, \dots, u_n) \in L_2(\mathbb{R}^d)$, что $F(u_1(\xi), u_2(\xi), \dots, u_n(\xi)) \in L_2(\mathbb{R})$. Тогда существует единственное обобщенное решение задачи (2.5.5), (2.5.6).

Доказательство. Отображение $B : (w_1, w_2, \dots, w_n) \rightarrow F(w_1, w_2, \dots, w_n)$ в силу свойств F действует из $L_2(\mathbb{R}^d)^n$ в $L_2(\mathbb{R}^d)$, при этом оно липшицево.

Действительно,

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} |F(u_1(\xi), u_2(\xi), \dots, u_n(\xi)) - F(w_1(\xi), w_2(\xi), \dots, w_n(\xi))|^2 d\xi \leq \\ & \leq C^2 \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}} |u_j(\xi) - w_j(\xi)|^2 d\xi = C^2 \|(u_1, u_2, \dots, u_n) - (w_1, w_2, \dots, w_n)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2. \end{aligned}$$

Если $F(u_1(\cdot), u_2(\cdot), \dots, u_n(\cdot)) \in L_2(\mathbb{R})$, то при любом $(w_1, w_2, \dots, w_n) \in L_2(\mathbb{R}^d)$

$$\|F(w_1(\cdot), w_2(\cdot), \dots, w_n(\cdot))\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq C\|(u_1, u_2, \dots, u_n) - (w_1, w_2, \dots, w_n)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} +$$

$$+ \|F(u_1(\cdot), u_2(\cdot), \dots, u_n(\cdot))\|_{L_2(\mathbb{R})},$$

а значит, $F(w_1(\cdot), w_2(\cdot), \dots, w_n(\cdot)) \in L_2(\mathbb{R})$. По теореме 2.3.1 получаем требуемое. \square

Пусть $Q_q(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_d) = \lambda - \nu(\delta_1^{2k} + \delta_2^{2k} + \dots + \delta_d^{2k})$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, тогда выполняются условия (2.5.7) и (2.5.8) с $a_1 = \lambda$ и любым $\theta_1 \in (\frac{\pi\alpha}{2}, \pi)$. Соответствующее уравнение имеет вид

$$D_t^\alpha v(\xi, t) = (-1)^{k+1} \nu \left(\frac{\partial^{2k}}{\partial \xi_1^{2k}} v(\xi, t) + \frac{\partial^{2k}}{\partial \xi_2^{2k}} v(\xi, t) + \dots + \frac{\partial^{2k}}{\partial \xi_d^{2k}} v(\xi, t) \right) +$$

$$+ \lambda v(\xi, t) + F(D_t^{\alpha_1} u(\xi, t), D_t^{\alpha_2} u(\xi, t), \dots, D_t^{\alpha_n} u(\xi, t)).$$

Для задачи Коши (2.5.5) для уравнения

$$D_t^{3/2} v(\xi, t) = \Delta v(\xi, t) + \sin(D_t^{-1/3} v(\xi, t) + v(\xi, t)), \quad (\xi, t) \in \mathbb{R}^d \times (0, T],$$

$\alpha = \frac{3}{2}$, $m = 2$, $n = 2$, $\alpha_1 = -\frac{1}{3}$, $\alpha_2 = m_2 = 0$, $q = 2$, $Q_2(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_d) = -(\delta_1^2 + \delta_2^2 + \dots + \delta_d^2) \leq 0$ при всех $\delta = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_d) \in \mathbb{R}^d$. Тем самым для этого уравнения выполняются условия теоремы 2.5.1. Для существования обобщенного решения потребуем, чтобы $v_0 \in H^2(\mathbb{R}^d)$, $v_1 \in L_2(\mathbb{R}^d)$.

3 Вырожденные квазилинейные уравнения

3.1 Локальная разрешимость вырожденного уравнения

Пусть \mathcal{X}, \mathcal{Y} — банаховы пространства, возьмем $L, M \in \mathcal{Cl}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$. Будем использовать обозначения $R_\mu^L(M) := (\mu L - M)^{-1}L$, $L_\mu^L(M) := L(\mu L - M)^{-1}$, $\rho^L(M)$ — множество таких $\mu \in \mathbb{C}$, что отображение $\mu L - M : D_L \cap D_M \rightarrow \mathcal{Y}$ инъективно, при этом $R_\mu^L(M) \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ и $L_\mu^L(M) \in \mathcal{L}(\mathcal{Y})$.

Пусть $m - 1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $L, M \in \mathcal{Cl}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \alpha$, U — открытое множество в $\mathbb{R} \times \mathcal{X}^n$, $N : U \rightarrow \mathcal{Y}$, $T > t_0$, $f : [t_0, T] \rightarrow \mathcal{Y}$, $y_k \in \text{im}L$, $k = 0, 1, \dots, m-1$. Рассмотрим задачу Шоуолтера — Сидорова [35, 57]

$$(Lx)^{(k)}(t_0) = y_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (3.1.1)$$

для квазилинейного уравнения

$$D^\alpha Lx(t) = Mx(t) + N(t, D^{\alpha_1}x(t), D^{\alpha_2}x(t), \dots, D^{\alpha_n}x(t)) + f(t) \quad (3.1.2)$$

Решением задачи (3.1.1), (3.1.2) на отрезке $[t_0, T]$ будем называть такую функцию $x : [t_0, T] \rightarrow D_M \cap D_L$, для которой $Lx \in C^{m-1}([t_0, T]; \mathcal{Y})$, $D^\alpha Lx \in C((t_0, T]; \mathcal{Y})$, $Mx \in C((t_0, T]; \mathcal{Y})$, $D^{\alpha_l}x \in C([t_0, T]; \mathcal{Y})$, $l = 1, 2, \dots, n$, выполняются условия (3.1.1), при всех $t \in [t_0, T]$ выполняется включение $(t, D^{\alpha_1}x(t), D^{\alpha_2}x(t), \dots, D^{\alpha_n}x(t)) \in U$, а при всех $t \in (t_0, T]$ — равенство (3.1.2).

Предполагается, что $\ker L \neq \{0\}$, поэтому (3.1.2) будем называть вырожденным эволюционным уравнением. Также отметим, что некоторые из α_k в уравнении (3.1.2) могут быть отрицательными, т. е. нелинейный оператор в уравнении может зависеть от дробных интегралов.

Определение 3.1.1. [48]. Пусть $L, M \in \mathcal{Cl}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$. Пара (L, M) принадлежит классу $\mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$, если

(i) существуют такие $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$ и $a_0 \geq 0$, что при всех $\lambda \in S_{\theta_0, a_0}$ выполняется включение $\lambda^\alpha \in \rho^L(M)$;

(ii) при любых $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a > a_0$ существует такая постоянная $K = K(\theta, a) > 0$, что при всех $\lambda \in S_{\theta, a}$

$$\max\{\|R_{\lambda^\alpha}^L(M)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})}, \|L_{\lambda^\alpha}^L(M)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Y})}\} \leq \frac{K(\theta, a)}{|\lambda|^\alpha}. \quad (3.1.3)$$

Замечание 3.1.1. Если существует обратный оператор $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ то включение $(L, M) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$ выполняется тогда и только тогда, когда $L^{-1}M \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$ и $ML^{-1} \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$.

Замечание 3.1.2. Нетрудно показать, что условие (ii) с неравенством (3.1.3) эквивалентно этому условию с неравенством

$$\max\{\|R_{\lambda^\alpha}^L(M)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})}, \|L_{\lambda^\alpha}^L(M)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Y})}\} \leq \frac{K(\theta, a)}{|\lambda^{\alpha-1}(\lambda - a)|},$$

использованному в работе [48].

Используя псевдорезольвентное тождество и тот факт, что $R_\mu^L(M)$ и $L_\mu^L(M)$ — псевдорезольвенты, нетрудно показать, что $\ker R_\mu^L(M) = \ker L$, множества $\operatorname{im} R_\mu^L(M)$, $\ker L_\mu^L(M)$, $\operatorname{im} L_\mu^L(M)$ также не зависят от $\mu \in \rho^L(M)$ (см. [93]). Введем обозначения $\ker R_\mu^L(M) := \mathcal{X}^0$, $\ker L_\mu^L(M) := \mathcal{Y}^0$. Через \mathcal{X}^1 (\mathcal{Y}^1) обозначим замыкание образа $\operatorname{im} R_\mu^L(M)$ ($\operatorname{im} L_\mu^L(M)$) в норме пространства \mathcal{X} (\mathcal{Y}), а через L_k (M_k) — сужение оператора L (M) на $D_{L_k} := D_L \cap \mathcal{X}^k$ ($D_{M_k} := D_M \cap \mathcal{Y}^k$), $k = 0, 1$.

Теорема 3.1.1. [48]. Пусть банаховы пространства \mathcal{X} и \mathcal{Y} рефлексивны, $(L, M) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$. Тогда выполняются следующие утверждения:

- (i) $\mathcal{X} = \mathcal{X}^0 \oplus \mathcal{X}^1$, $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}^0 \oplus \mathcal{Y}^1$;
- (ii) проектор P (Q) на подпространство \mathcal{X}^1 (\mathcal{Y}^1) вдоль \mathcal{X}^0 (\mathcal{Y}^0) имеет вид $P = s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} nR_n^L(M)$ ($Q = s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} nL_n^L(M)$);
- (iii) $L_0 = 0$, $M_0 \in \mathcal{Cl}(\mathcal{X}^0; \mathcal{Y}^0)$, $L_1, M_1 \in \mathcal{Cl}(\mathcal{X}^1; \mathcal{Y}^1)$;
- (iv) существуют обратные операторы

$$L_1^{-1} \in \mathcal{Cl}(\mathcal{Y}^1; \mathcal{X}^1), \quad M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^0; \mathcal{X}^0);$$

- (v) для всех $x \in D_L$ имеем $Px \in D_L$ и $LPx = QLx$;

- (vi) для всех $x \in D_M$ имеем $Px \in D_M$ и $MPx = QMx$;
- (vii) пусть $S := L_1^{-1}M_1 : D_S \rightarrow \mathcal{X}^1$, тогда $D_S := \{x \in D_{M_1} : M_1x \in \text{im}L_1\}$ плотно в \mathcal{X} ;
- (viii) пусть $R := M_1L_1^{-1} : D_R \rightarrow \mathcal{Y}^1$, тогда $D_R := \{y \in \text{im}L_1 : L_1^{-1}y \in D_{M_1}\}$ плотно в \mathcal{Y} ;
- (ix) если $L_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1; \mathcal{Y}^1)$ или $M_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1; \mathcal{Y}^1)$, то $S \in \mathcal{Cl}(\mathcal{X}^1)$, при этом $S \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$;
- (x) если $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1; \mathcal{X}^1)$ или $M_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1; \mathcal{X}^1)$, то $R \in \mathcal{Cl}(\mathcal{Y}^1)$, при этом $R \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$.

Замечание 3.1.3. В силу теоремы 3.1.1 (iii) $L_0 = 0$, поэтому $\text{im}L = \text{im}L_1 \subset \mathcal{X}^1$. Следовательно, $L = LP$ и по теореме 3.1.1 (iv) задача Шоултера — Сидорова (3.1.1) при $y_k \in \text{im}L$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, эквивалентна задаче Коши для функции Px , называемой также обобщенной задачей Шоултера — Сидорова

$$(Px)^{(k)}(t_0) = x_k := L_1^{-1}y_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1. \quad (3.1.4)$$

Используя начальные данные y_0, y_1, \dots, y_{m-1} , определим

$$\tilde{y}(t) = y_0 + \frac{(t-t_0)}{1!}y_1 + \dots + \frac{(t-t_0)^{m-1}}{(m-1)!}y_{m-1}, \quad \tilde{y}_k = D^{\alpha_k}\tilde{y}(t_0), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Теорема 3.1.2. Пусть банаховы пространства \mathcal{X} и \mathcal{Y} рефлексивны, $(L, M) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$, $L_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1; \mathcal{Y}^1)$ или $M_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1; \mathcal{Y}^1)$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n \leq m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, U — открытое множество в $\mathbb{R} \times \mathcal{X}^n$, $N : U \rightarrow \text{im}L$, отображение $L_1^{-1}N \in C(U; D_S)$ локально липшицево по \bar{x} , $f \in C([t_0, T]; \mathcal{Y})$ при некотором $T > t_0$, $f : [t_0, T] \rightarrow \mathcal{Y}^0 + \text{im}L$, $L_1^{-1}Qf \in C([t_0, T]; D_S)$, $D^{\alpha_l}M_0^{-1}(I - Q)f \in C([t_0, T]; \mathcal{X})$, $l = 1, 2, \dots, n$, $y_k \in L[D_S]$ при $k = 0, 1, \dots, m-1$,

$$(t_0, L_1^{-1}\tilde{y}_1 - D^{\alpha_1}M_0^{-1}(I - Q)f(t_0), \dots, L_1^{-1}\tilde{y}_n - D^{\alpha_n}M_0^{-1}(I - Q)f(t_0)) \in U.$$

Тогда существует единственное решение задачи (3.1.1), (3.1.2) на отрезке $[t_0, t_1]$ при некотором $t_1 \in (t_0, T]$.

Доказательство. Положим $x^0(t) := (I - P)x(t)$, $x^1(t) := Px(t)$. По теореме 3.1.1 в силу условия $\text{im}N \subset \text{im}L \subset \mathcal{Y}^1$ уравнение (3.1.2) может быть

редуцировано к системе

$$x^0(t) = -M_0^{-1}(I - Q)f(t), \quad (3.1.5)$$

$$D^\alpha x^1(t) = Sx^1(t) + L_1^{-1}N(t, D^{\alpha_1}x(t), D^{\alpha_2}x(t), \dots, D^{\alpha_n}x(t)) + L_1^{-1}Qf(t). \quad (3.1.6)$$

Если $L_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1; \mathcal{Y}^1)$ или $M_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1; \mathcal{Y}^1)$, то по теореме 3.1.1 (ix) $S \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$. Теорема 2.1.1 влечет существование единственного решения задачи Коши $D^k x^1(t_0) = L_1^{-1}y_k \in D_S$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, для уравнения (3.1.6) на некотором отрезке $[t_0, t_1]$. Действительно, отображение

$$(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow$$

$$L_1^{-1}N(t, x_1 - D^{\alpha_1}M_0^{-1}(I - Q)f(t), \dots, x_n - D^{\alpha_n}M_0^{-1}(I - Q)f(t)) + L_1^{-1}Qf(t)$$

непрерывно в норме графика оператора S и локально липшицево по переменным x_1, x_2, \dots, x_n . \square

Теорема 3.1.3. Пусть банаховы пространства \mathcal{X} и \mathcal{Y} рефлексивны, $(L, M) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$, $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1; \mathcal{X}^1)$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n \leq m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, U — открытое множество в $\mathbb{R} \times \mathcal{X}^n$, $N : U \rightarrow \mathcal{Y}^1$, $N \in C(U; D_R)$ локально липшицево по \bar{x} , $f \in C([t_0, T]; \mathcal{Y})$ при некотором $T > t_0$, $Qf \in C([t_0, T]; D_R)$, $D^{\alpha_l}M_0^{-1}(I - Q)f \in C([t_0, T]; \mathcal{X})$, $l = 1, 2, \dots, n$, $y_k \in D_R$, $k = 0, 1, \dots, m-1$,

$$(t_0, L_1^{-1}\tilde{y}_1 - D^{\alpha_1}M_0^{-1}(I - Q)f(t_0), \dots, L_1^{-1}\tilde{y}_n - D^{\alpha_n}M_0^{-1}(I - Q)f(t_0)) \in U.$$

Тогда существует единственное решение задачи (3.1.1), (3.1.2) на отрезке $[t_0, t_1]$ при некотором $t_1 \in (t_0, T]$.

Доказательство. Вместо уравнения (3.1.6) получим теперь эквивалентное ему уравнение

$$D^\alpha y^1(t) = Ry^1(t) +$$

$$+ N(t, D^{\alpha_1}(L_1^{-1}y^1(t) - M_0^{-1}(I - Q)f(t)), \dots, D^{\alpha_n}(L_1^{-1}y^1(t) - M_0^{-1}(I - Q)f(t))) + Qf(t),$$

где $y^1(t) = L_1 x^1(t)$. По теореме 3.1.1 (x) $R \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$, поэтому согласно теореме 2.1.1 существует единственное решение задачи Коши $D^k y^1(t_0) = y_k \in$

D_R , $k = 0, 1, \dots, m-1$, для этого уравнения на отрезке $[t_0, t_1]$. Действительно, в силу условия $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1; \mathcal{X}^1)$, непрерывности в норме графика оператора R и локальной липшицевости отображения

$$(t, z_1, z_2, \dots, z_n) \rightarrow$$

$$N(t, L_1^{-1}z_1 - D^{\alpha_1}M_0^{-1}(I - Q)f(t), \dots, L_1^{-1}z_n - D^{\alpha_n}M_0^{-1}(I - Q)f(t)) + Qf(t)$$

нелинейный оператор в рассматриваемом уравнении удовлетворяет условиям теоремы 2.1.1. \square

Замечание 3.1.4. Задача Коши $x^{(k)}(t_0) = x_k$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, для уравнения (3.1.2) может быть исследована аналогичным образом. Но при этом уравнение (3.1.5) влечет необходимые для разрешимости условия согласования

$$(I - P)x_k = -D^k M_0^{-1}(I - Q)f(t_0), \quad k = 0, 1, \dots, m-1,$$

начальных данных и функции f в начальный момент времени $t = t_0$.

Рассмотрим прежнюю задачу для вырожденного уравнения, не используя условие $\text{im}N \subset \mathcal{X}^1$. При этом будет предполагаться, что оператор N не зависит от элементов подпространства \mathcal{X}^0 . В этом случае без потери общности можно считать, что $f \equiv 0$:

$$D^\alpha Lx(t) = Mx(t) + N(t, D^{\alpha_1}x(t), D^{\alpha_2}x(t), \dots, D^{\alpha_n}x(t)). \quad (3.1.7)$$

Обозначим $V := U \cap (\mathbb{R} \times (\mathcal{X}^1)^n)$ и предположим, что для оператора $N : U \rightarrow \mathcal{Y}$ и для всех $(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \in U$, таких, что $(t, Px_1, Px_2, \dots, Px_n) \in V$, выполняется $N(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = N_1(t, Px_1, Px_2, \dots, Px_n)$ при некотором $N_1 \in C(V; \mathcal{X})$. Тогда, как при доказательстве теоремы 3.1.2, получаем систему двух уравнений

$$x^0(t) = -M_0^{-1}(I - Q)N_1(t, D^{\alpha_1}x^1(t), D^{\alpha_2}x^1(t), \dots, D^{\alpha_n}x^1(t)), \quad (3.1.8)$$

$$D^\alpha x^1(t) = Sx^1(t) + L_1^{-1}QN_1(t, D^{\alpha_1}x^1(t), D^{\alpha_2}x^1(t), \dots, D^{\alpha_n}x^1(t)). \quad (3.1.9)$$

Заметим, что в данной ситуации нелинейность в итоге не зависит от x^0 , поэтому определение решения задачи (3.1.1), (3.1.7) можно модифицировать

следующим образом, когда существование и непрерывность дробных производных порядка α_l , $l = 1, 2, \dots, n$, требуется не для всего решения x , а только для его проекции Px .

Решением задачи (3.1.1), (3.1.7) на отрезке $[t_0, T]$ будем называть такую функцию $x : [t_0, T] \rightarrow D_M \cap D_L$, для которой $Lx \in C^{m-1}([t_0, T]; \mathcal{Y})$, $D^\alpha Lx \in C((t_0, T]; \mathcal{Y})$, $Mx \in C((t_0, T]; \mathcal{Y})$, $D^{\alpha_l} Px \in C([t_0, T]; \mathcal{Y})$, $l = 1, 2, \dots, n$, выполняются условия (3.1.1), при всех $t \in [t_0, T]$ выполняется включение

$$(t, D^{\alpha_1} Px(t), D^{\alpha_2} Px(t), \dots, D^{\alpha_n} Px(t)) \in V,$$

а при всех $t \in (t_0, T]$ — равенства (3.1.8), (3.1.9), где $x^0(t) := (I - P)x(t)$, $x^1(t) := Px(t)$.

Теорема 3.1.4. Пусть банаховы пространства \mathcal{X} и \mathcal{Y} рефлексивны, $(L, M) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$, $L_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1; \mathcal{Y}^1)$ или $M_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1; \mathcal{Y}^1)$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n \leq m - 1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, множество V открыто в $\mathbb{R} \times (\mathcal{X}^1)^n$, $N : U \rightarrow \mathcal{Y}$, для всех $(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \in U$, таких, что $(t, Px_1, Px_2, \dots, Px_n) \in V$, выполняется $N(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = N_1(t, Px_1, Px_2, \dots, Px_n)$ при некотором $N_1 \in C(V; \mathcal{X})$, $\text{im}QN_1 \subset \text{im}L$, отображение $L_1^{-1}QN_1 \in C(V; D_S)$ локально липшицево по \bar{x} , $y_k \in L[D_S]$ при $k = 0, 1, \dots, m-1$, $(t_0, L_1^{-1}\tilde{y}_1, L_1^{-1}\tilde{y}_2, \dots, L_1^{-1}\tilde{y}_n) \in V$. Тогда существует единственное решение задачи (3.1.1), (3.1.7) на отрезке $[t_0, t_1]$ при некотором $t_1 > t_0$.

Доказательство. В силу теоремы 3.1.1 (ix) и теоремы 2.1.1 получаем разрешимость задачи (3.1.1) для уравнения (3.1.9), поскольку условия (3.1.1) эквивалентны условиям Коши $D^k x^1(t_0) = L_1^{-1}y_k \in D_S$, $k = 0, 1, \dots, m-1$. Функция x^0 определяется из уравнения (3.1.8). \square

Определим отображение $QN_1 \circ L_1^{-1} : \mathbb{R} \times (\mathcal{Y}^1)^n \rightarrow \mathcal{Y}$, которое на элементы $(t, z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{R} \times (\mathcal{Y}^1)^n$ действует по правилу $QN_1 \circ L_1^{-1}(t, z_2, \dots, z_n) := QN_1(t, L_1^{-1}z_1, L_1^{-1}z_2, \dots, L_1^{-1}z_n)$.

Теорема 3.1.5. Пусть банаховы пространства \mathcal{X} и \mathcal{Y} рефлексивны, $(L, M) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$, $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1; \mathcal{X}^1)$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n \leq m - 1 < \alpha \leq m$

$m \in \mathbb{N}$, V — открытое множество в $\mathbb{R} \times (\mathcal{X}^1)^n$, $N : U \rightarrow \mathcal{Y}$, для всех $(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \in U$, таких, что $(t, Px_1, Px_2, \dots, Px_n) \in V$, выполняется $N(t, x_1, \dots, x_n) = N_1(t, Px_1, \dots, Px_n)$, где $N_1 \in C(V; \mathcal{X})$, $QN_1 \in C(V; D_R)$ локально липшицево по \bar{x} , $y_k \in D_R$, $k = 0, 1, \dots, m-1$,

$$(t_0, L_1^{-1}\tilde{y}_1, L_1^{-1}\tilde{y}_2, \dots, L_1^{-1}\tilde{y}_n) \in V.$$

Тогда существует единственное решение задачи (3.1.1), (3.1.7) на отрезке $[t_0, t_1]$ при некотором $t_1 > t_0$.

Доказательство. Вместо уравнения (3.1.9) в данном случае получаем задачу Коши $D^k y^1(t_0) = y_k \in D_R$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, для уравнения

$$D^\alpha y^1(t) = Ry^1(t) + QN_1(t, D^{\alpha_1} L_1^{-1} y^1(t), D^{\alpha_2} L_1^{-1} y^1(t), \dots, D^{\alpha_n} L_1^{-1} y^1(t)), \quad (3.1.10)$$

где $y^1(t) = L_1 x^1(t)$, как при доказательстве теоремы 3.1.3. Остается воспользоваться теоремой 3.1.1 (х) и теоремой 2.1.1. Подействуем на уравнение (3.1.10) оператором L_1^{-1} и получим выполнение равенства (3.1.9). \square

3.2 Глобальная разрешимость вырожденного уравнения

Теперь пусть $N : [t_0, T] \times \mathcal{X}^n \rightarrow \mathcal{Y}$, $t_0, T \in \mathbb{R}$, $T > t_0$. Рассмотрим вопросы глобального существования решения задачи Коши для вырожденного квазилинейного уравнения.

Теорема 3.2.1. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n \leq m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, банаховы пространства \mathcal{X} и \mathcal{Y} рефлексивны, $(L, M) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$, $L_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1; \mathcal{Y}^1)$ или $M_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1; \mathcal{Y}^1)$, $N : [t_0, T] \times \mathcal{X}^n \rightarrow \mathcal{Y}$, для всех $(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ из $[t_0, T] \times \mathcal{X}^n$ $N(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = N_1(t, Px_1, Px_2, \dots, Px_n)$ при некотором $N_1 \in C([t_0, T] \times (\mathcal{X}^1)^n; \mathcal{X})$, $\text{im}QN_1 \subset \text{im}L$, отображение $L_1^{-1}QN_1 \in C([t_0, T] \times (\mathcal{X}^1)^n; D_S)$ липшицево по \bar{x} , $y_k \in L[D_S]$ при $k = 0, 1, \dots, m-1$. Тогда существует единственное решение задачи (3.1.1), (3.1.7) на отрезке $[t_0, T]$.

Доказательство. Положим $x^0(t) := (I - P)x(t)$, $x^1(t) := Px(t)$. Как и прежде, по теореме 3.1.1 уравнение (3.1.7) редуцируем к системе

$$x^0(t) = -M_0^{-1}(I - Q)N_1(t, D^{\alpha_1}x^1(t), D^{\alpha_2}x^1(t), \dots, D^{\alpha_n}x^1(t)), \quad (3.2.1)$$

$$D^\alpha x^1(t) = Sx^1(t) + L_1^{-1}QN_1(t, D^{\alpha_1}x^1(t), D^{\alpha_2}x^1(t), \dots, D^{\alpha_n}x^1(t)). \quad (3.2.2)$$

Если $L_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1; \mathcal{Y}^1)$ или $M_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1; \mathcal{Y}^1)$, то по теореме 3.1.1 (ix) $S \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$. Теорема 2.2.1 влечет существование единственного решения задачи Коши $(x^1)^{(k)}(t_0) = L_1^{-1}y_k \in D_S$, $k = 0, 1, \dots, m - 1$, для уравнения (3.2.2) на $[t_0, T]$. С учетом замечания 3.1.3 получаем требуемое. \square

Напомним определение отображения $QN_1 \circ L_1^{-1} : [t_0, T] \times (\mathcal{Y}^1)^n \rightarrow \mathcal{Y}$, которое на элементы $(t, z_1, z_2, \dots, z_n) \in [t_0, T] \times (\mathcal{Y}^1)^n$ действует по правилу

$$QN_1 \circ L_1^{-1}(t, z_1, z_2, \dots, z_n) := QN_1(t, L_1^{-1}z_1, L_1^{-1}z_2, \dots, L_1^{-1}z_n).$$

Теорема 3.2.2. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n \leq m - 1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, банаховы пространства \mathcal{X} и \mathcal{Y} рефлексивны, $(L, M) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$, $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1; \mathcal{X}^1)$, $N : [t_0, T] \times \mathcal{X}^n \rightarrow \mathcal{Y}$, для всех $(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \in [t_0, T] \times \mathcal{X}^n$ выполняется $N(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = N_1(t, Px_1, Px_2, \dots, Px_n)$ при некотором $N_1 \in C([t_0, T] \times (\mathcal{X}^1)^n; \mathcal{X})$, $QN_1 \circ L_1^{-1} \in C([t_0, T] \times (\mathcal{Y}^1)^n; D_R)$ липшицево по \bar{z} , $y_k \in D_R$, $k = 0, \dots, m - 1$. Тогда существует единственное решение задачи (3.1.1), (3.1.7) на отрезке $[t_0, T]$.

Доказательство. Вместо задачи Коши для уравнения (3.2.2) в данном случае получаем задачу Коши $(y^1)^{(k)}(t_0) = y_k \in D_R$, $k = 0, 1, \dots, m - 1$, для эквивалентного уравнения

$$D^\alpha y^1(t) = Ry^1(t) + QN_1(t, D^{\alpha_1}L_1^{-1}y^1(t), D^{\alpha_2}L_1^{-1}y^1(t), \dots, D^{\alpha_n}L_1^{-1}y^1(t)),$$

где $y^1(t) = L_1x^1(t)$. В силу теоремы 3.1.1 (x) и теоремы 2.2.1 получим существование единственного решения этой задачи. С учетом равенства (3.2.1) получим существование единственного решения $x(t) = x^0(t) + L_1^{-1}y^1(t)$ задачи (3.1.1), (3.1.7). \square

В предположении $\text{im}N \subset \mathcal{Y}^1$ рассмотрим уравнение

$$D^\alpha Lx(t) = Mx(t) + N(t, D^{\alpha_1}x(t), D^{\alpha_2}x(t), \dots, D^{\alpha_n}x(t)) + f(t) \quad (3.2.3)$$

при заданной функции $f \in C([t_0, T]; \mathcal{Y})$.

Теорема 3.2.3. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \alpha \leq m - 1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, банаховы пространства \mathcal{X} и \mathcal{Y} рефлексивны, $(L, M) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$, $L_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1; \mathcal{Y}^1)$ или $M_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1; \mathcal{Y}^1)$, $N : [t_0, T] \times \mathcal{X}^n \rightarrow \text{im}L$, отображение $L_1^{-1}N \in C([t_0, T] \times \mathcal{X}^n; D_S)$ липшицево по \bar{x} , $f \in C([t_0, T]; \mathcal{Y})$, $f : [t_0, T] \rightarrow \mathcal{Y}^0 \dot{+} \text{im}L$, $L_1^{-1}Qf \in C([t_0, T]; D_S)$, $D^{\alpha_l}M_0^{-1}(I - Q)f \in C([t_0, T]; \mathcal{X})$, $l = 1, 2, \dots, n$, $y_k \in L[D_S]$ при $k = 0, 1, \dots, m - 1$. Тогда существует единственное решение задачи (3.1.1), (3.2.3) на отрезке $[t_0, T]$.

Доказательство. Положим, как и прежде, $x^0(t) := (I - P)x(t)$, $x^1(t) := Px(t)$. По теореме 3.1.1 в силу условия $\text{im}N \subset \text{im}L \subset \mathcal{Y}^1$ уравнение (3.2.3) может быть редуцировано к системе

$$x^0(t) = -M_0^{-1}(I - Q)f(t), \quad (3.2.4)$$

$$D^\alpha x^1(t) = Sx^1(t) + L_1^{-1}N(t, D^{\alpha_1}x^1(t), D^{\alpha_2}x^1(t), \dots, D^{\alpha_n}x^1(t)) + L_1^{-1}Qf(t). \quad (3.2.5)$$

Если $L_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1; \mathcal{Y}^1)$ или $M_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1; \mathcal{Y}^1)$, то по теореме 3.1.1 (ix) $S \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$. Перепишем уравнение (3.2.5) с учетом (3.2.4) в виде

$$D^\alpha x^1(t) = Sx^1(t) + L_1^{-1}Qf(t) + L_1^{-1}N(t, D^{\alpha_1}x^1(t) - D^{\alpha_1}M_0^{-1}(I - Q)f(t), \dots, D^{\alpha_n}x^1(t) - D^{\alpha_n}M_0^{-1}(I - Q)f(t))$$

и заметим, что отображение

$$(t, x_1, \dots, x_n) \rightarrow L_1^{-1}Qf(t) + L_1^{-1}N(t, x_1 - D^{\alpha_1}M_0^{-1}(I - Q)f(t), \dots, x_n - D^{\alpha_n}M_0^{-1}(I - Q)f(t))$$

непрерывно в норме графика оператора S и липшицево по x_1, x_2, \dots, x_n в силу вида отображения и условий данной теоремы. Теорема 2.2.1 влечет существование единственного решения задачи Коши $(x^1)^{(k)}(t_0) = L_1^{-1}y_k \in D_S$, $k = 0, 1, \dots, m - 1$, для уравнения (3.2.5) на отрезке $[t_0, T]$. Ссылка на замечание 3.1.3 завершает доказательство. \square

Теорема 3.2.4. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n \leq m - 1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, банаховы пространства \mathcal{X} и \mathcal{Y} рефлексивны, $(L, M) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$, $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1; \mathcal{X}^1)$, $N \in C([t_0, T] \times \mathcal{X}^n; D_R)$ липшицево по \bar{x} , $f \in C([t_0, T]; \mathcal{Y})$, $Qf \in C([t_0, T]; D_R)$, $D^\alpha M_0^{-1}(I - Q)f \in C([t_0, T]; \mathcal{X})$, $l = 1, 2, \dots, n$, $y_k \in D_R$, $k = 0, 1, \dots, m - 1$. Тогда существует единственное решение задачи (3.1.1), (3.2.3) на отрезке $[t_0, T]$.

Доказательство. Вместо уравнения (3.2.5) получим теперь уравнение

$$\begin{aligned} D^\alpha y^1(t) &= Ry^1(t) + Qf(t) + \\ &+ N(t, D^{\alpha_1}(L_1^{-1}y^1(t) - M_0^{-1}(I - Q)f(t)), \dots, D^{\alpha_n}(L_1^{-1}y^1(t) - M_0^{-1}(I - Q)f(t))), \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

где $y^1(t) = L_1 x^1(t)$. Нелинейное отображение

$$\begin{aligned} (t, z_1, z_2, \dots, z_n) &\rightarrow Qf(t) + \\ &+ N(t, L_1^{-1}z_1 - D^{\alpha_1}M_0^{-1}(I - Q)f(t), \dots, L_1^{-1}z_n - D^{\alpha_n}M_0^{-1}(I - Q)f(t)) \end{aligned}$$

с учетом условия $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1; \mathcal{X}^1)$ непрерывно в норме графика оператора R и липшицево. По теореме 3.1.1 (x) $R \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$, поэтому согласно теореме 2.2.1 существует единственное решение задачи Коши $(y^1)^{(k)}(t_0) = y_k \in D_R$, $k = 0, 1, \dots, m - 1$, для уравнения (3.2.6) на отрезке $[t_0, T]$. Поэтому существует единственное решения $x(t) = x^0(t) + L_1^{-1}y^1(t)$ задачи (3.1.1), (3.2.3). \square

3.3 Обобщенные решения уравнений

с ограничением на образ нелинейного оператора

Пусть $N : U \rightarrow \text{im}L$, $f : [t_0, T] \rightarrow \mathcal{Y}^0 + \text{im}L$, положим $x^0(t) := (I - P)x(t)$, $x^1(t) := Px(t)$. По теореме 3.1.1 в силу условия $\text{im}N \subset \text{im}L \subset \mathcal{Y}^1$ уравнение (3.1.2) может быть редуцировано к системе

$$x^0(t) = -M_0^{-1}(I - Q)f(t), \quad (3.3.1)$$

$$D^\alpha x^1(t) = Sx^1(t) + L_1^{-1}N(t, D^{\alpha_1}x(t), D^{\alpha_2}x(t), \dots, D^{\alpha_n}x(t)) + L_1^{-1}Qf(t).$$

По аналогии с обобщённым решением задачи (2.3.1), (2.3.2) введем в рассмотрение определение обобщенного решения задачи (3.1.1), (3.1.2).

Обобщенным решением задачи (3.1.1), (3.1.2) на отрезке $[t_0, t_1]$ будем называть функцию $x \in C([t_0, t_1]; \mathcal{X})$, для которой $D^{\alpha_1}x, D^{\alpha_2}x, \dots, D^{\alpha_n}x \in C([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$, при всех $t \in (t_0, t_1]$ выполняется равенство (3.3.1), а функция Px является обобщенным решением задачи (3.1.4) для уравнения

$$\begin{aligned} D^\alpha x^1(t) &= Sx^1(t) + L_1^{-1}Qf(t) + \\ &+ L_1^{-1}N(t, D^{\alpha_1}(x^1(t) - M_0^{-1}(I - Q)f(t)), \dots, D^{\alpha_n}(x^1(t) - M_0^{-1}(I - Q)f(t))). \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

на отрезке $[t_0, t_1]$.

Используя начальные данные y_0, y_1, \dots, y_{m-1} , определим

$$\tilde{y}(t) = y_0 + \frac{(t - t_0)}{1!}y_1 + \dots + \frac{(t - t_0)^{m-1}}{(m-1)!}y_{m-1}, \quad \tilde{y}_k = D^{\alpha_k}\tilde{y}(t_0), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Теорема 3.3.1. Пусть банаховы пространства \mathcal{X} и \mathcal{Y} рефлексивны, $(L, M) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$, $L_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1; \mathcal{Y}^1)$ или $M_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1; \mathcal{Y}^1)$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n \leq m - 1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $m_n - 1 < \alpha_n \leq m_n \in \mathbb{N}$, U — открытое множество в $\mathbb{R} \times \mathcal{X}^n$, $N : U \rightarrow \text{im}L$, отображение $L_1^{-1}N \in C(U; \mathcal{X})$ локально липшицево по \bar{x} , $f \in C([t_0, T]; \mathcal{Y})$ при некотором $T > t_0$, $f : [t_0, T] \rightarrow \mathcal{Y}^0 + \text{im}L$, $L_1^{-1}Qf \in C([t_0, T]; \mathcal{X})$, $D^{\alpha_l}M_0^{-1}(I - Q)f \in C([t_0, T]; \mathcal{X})$, $l = 1, 2, \dots, n$; если $\alpha_n < m_n$, то $y_k \in L[D_S]$ при $k = 0, 1, \dots, m_n - 1$, $y_k \in \text{im}L$ при $k = m_n, m_n + 1, \dots, m - 1$; если $\alpha_n = m_n$, то $y_k \in L[D_S]$ при $k = 0, 1, \dots, m_n$, $y_k \in \text{im}L$ при $k = m_n + 1, m_n + 2, \dots, m - 1$;

$$(t_0, L_1^{-1}\tilde{y}_1 - D^{\alpha_1}M_0^{-1}(I - Q)f(t_0), \dots, L_1^{-1}\tilde{y}_n - D^{\alpha_n}M_0^{-1}(I - Q)f(t_0)) \in U.$$

Тогда существует единственное обобщенное решение $x \in C^{m_n}([t_0, t_1]; \mathcal{X})$ задачи (3.1.1), (3.1.2) на отрезке $[t_0, t_1]$ при некотором $t_1 \in (t_0, T]$.

Доказательство. Если $L_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1; \mathcal{Y}^1)$ или $M_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1; \mathcal{Y}^1)$, то по теореме 3.1.1 (ix) $S \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$. Теорема 2.3.2 влечет существование единственного решения задачи Коши $D^k x^1(t_0) = L_1^{-1}y_k \in D_S$, $k = 0, 1, \dots, m - 1$, для уравнения (3.3.2) на некотором отрезке $[t_0, t_1]$. Действительно, отображение

$$(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow$$

$$L_1^{-1}N(t, x_1 - D^{\alpha_1}M_0^{-1}(I - Q)f(t), \dots, x_n - D^{\alpha_n}M_0^{-1}(I - Q)f(t)) + L_1^{-1}Qf(t)$$

непрерывно и локально липшицево по переменным x_1, x_2, \dots, x_n . \square

Аналогично, но с помощью теоремы 2.3.1 нетрудно получить теорему о глобальной однозначной разрешимости.

Теорема 3.3.2. Пусть банаховы пространства \mathcal{X} и \mathcal{Y} рефлексивны, $(L, M) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$, $L_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1; \mathcal{Y}^1)$ или $M_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1; \mathcal{Y}^1)$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n \leq m - 1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $m_n - 1 < \alpha_n \leq m_n \in \mathbb{N}$, $N : [t_0, T] \times \mathcal{X}^n \rightarrow \text{im}L$, отображение $L_1^{-1}N \in C([t_0, T] \times \mathcal{X}^n; \mathcal{X})$ липшицево по \bar{x} , $f \in C([t_0, T]; \mathcal{Y})$ при некотором $T > t_0$, $f : [t_0, T] \rightarrow \mathcal{Y}^0 + \text{im}L$, $L_1^{-1}Qf \in C([t_0, T]; \mathcal{X})$, $D^{\alpha_l}M_0^{-1}(I - Q)f \in C([t_0, T]; \mathcal{X})$, $l = 1, 2, \dots, n$; если $\alpha_n < m_n$, то $y_k \in L[D_S]$ при $k = 0, 1, \dots, m_n - 1$, $y_k \in \text{im}L$ при $k = m_n, m_n + 1, \dots, m - 1$; если $\alpha_n = m_n$, то $y_k \in L[D_S]$ при $k = 0, 1, \dots, m_n$, $y_k \in \text{im}L$ при $k = m_n + 1, m_n + 2, \dots, m - 1$. Тогда существует единственное обобщенное решение $x \in C^{m_n}([t_0, T]; \mathcal{X})$ задачи (3.1.1), (3.1.2) на отрезке $[t_0, T]$.

Теорема 3.3.3. Пусть банаховы пространства \mathcal{X} и \mathcal{Y} рефлексивны, $(L, M) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$, $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1; \mathcal{X}^1)$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n \leq m - 1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $m_n - 1 < \alpha_n \leq m_n \in \mathbb{N}$, U — открытое множество в $\mathbb{R} \times \mathcal{X}^n$, $N : U \rightarrow \mathcal{Y}^1$, $N \in C(U; \mathcal{Y})$ локально липшицево по \bar{x} , $f \in C([t_0, T]; \mathcal{Y})$ при некотором $T > t_0$, $D^{\alpha_l}M_0^{-1}(I - Q)f \in C([t_0, T]; \mathcal{X})$, $l = 1, 2, \dots, n$; если $\alpha_n < m_n$, то $y_k \in D_R$ при $k = 0, 1, \dots, m_n - 1$, $y_k \in \mathcal{Y}^1$ при $k = m_n, m_n + 1, \dots, m - 1$; если $\alpha_n = m_n$, то $y_k \in D_R$ при $k = 0, 1, \dots, m_n$, $y_k \in \mathcal{Y}^1$ при $k = m_n + 1, m_n + 2, \dots, m - 1$;

$$(t_0, L_1^{-1}\tilde{y}_1 - D^{\alpha_1}M_0^{-1}(I - Q)f(t_0), \dots, L_1^{-1}\tilde{y}_n - D^{\alpha_n}M_0^{-1}(I - Q)f(t_0)) \in U.$$

Тогда существует единственное обобщенное решение задачи (3.1.1), (3.1.2) на отрезке $[t_0, t_1]$ при некотором $t_1 \in (t_0, T]$.

Доказательство. Если при условии $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1; \mathcal{X}^1)$ воспользоваться не представлением $x(t) = x^0(t) + x^1(t)$ решения $x(t)$, как это сделано выше, а представлением $x(t) = x^0(t) + L_1^{-1}y^1(t)$, где $x^0(t) = (I - P)x(t)$, $y^1(t) = LPx(t)$,

то вместо уравнения (3.3.2) получим уравнение

$$D^\alpha y^1(t) = Ry^1(t) + Qf(t) + N(t, D^{\alpha_1}(L_1^{-1}y^1(t) - M_0^{-1}(I - Q)f(t)), \dots, D^{\alpha_n}(L_1^{-1}y^1(t) - M_0^{-1}(I - Q)f(t))). \quad (3.3.3)$$

По теореме 3.1.1 (x) $R \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$, поэтому согласно теореме 2.3.2 существует единственное обобщенное решение задачи Коши $D^k y^1(t_0) = y_k \in D_R$, $k = 0, 1, \dots, m - 1$, для уравнения (3.3.3) на отрезке $[t_0, t_1]$. Действительно, в силу условия $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1; \mathcal{X}^1)$ и локальной липшицевости отображения

$$(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \rightarrow$$

$$N(t, L_1^{-1}y_1 - D^{\alpha_1}M_0^{-1}(I - Q)f(t), \dots, L_1^{-1}y_n - D^{\alpha_n}M_0^{-1}(I - Q)f(t)) + Qf(t)$$

нелинейный оператор в рассматриваемом уравнении (3.3.3) удовлетворяет условиям теоремы 2.3.2.

Отсюда следует, что функция $x^1 := L_1^{-1}y^1$ является обобщенным решением задачи (3.1.4) для уравнения (3.3.2). \square

Используя теорему 2.3.1, получим следующий результат о глобальной разрешимости в смысле обобщенного решения.

Теорема 3.3.4. Пусть банаховы пространства \mathcal{X} и \mathcal{Y} рефлексивны, $(L, M) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$, $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1; \mathcal{X}^1)$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n \leq m - 1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $m_n - 1 < \alpha_n \leq m_n \in \mathbb{N}$, $N : [t_0, T] \times \mathcal{X}^n \rightarrow \mathcal{Y}^1$, $N \in C([t_0, T] \times \mathcal{X}^n; \mathcal{Y})$ липшицево по \bar{x} , $f \in C([t_0, T]; \mathcal{Y})$ при некотором $T > t_0$, $D^{\alpha_l}M_0^{-1}(I - Q)f \in C([t_0, T]; \mathcal{X})$, $l = 1, 2, \dots, n$; если $\alpha_n < m_n$, то $y_k \in D_R$ при $k = 0, 1, \dots, m_n - 1$, $y_k \in \mathcal{Y}^1$ при $k = m_n, m_n + 1, \dots, m - 1$; если $\alpha_n = m_n$, то $y_k \in D_R$ при $k = 0, 1, \dots, m_n$, $y_k \in \mathcal{Y}^1$ при $k = m_n + 1, m_n + 2, \dots, m - 1$. Тогда существует единственное обобщенное решение задачи (3.1.1), (3.1.2) на отрезке $[t_0, t_1]$ при некотором $t_1 \in (t_0, T]$.

Замечание 3.3.1. Задача Коши $x^{(k)}(t_0) = x_k$, $k = 0, 1, \dots, m - 1$, для уравнения (3.1.2) может быть исследована аналогичным образом. Но при этом

уравнение (3.3.1) влечет необходимые для разрешимости условия согласования

$$(I - P)x_k = -D^k M_0^{-1}(I - Q)f(t_0), \quad k = 0, 1, \dots, m - 1,$$

начальных данных и функции f в начальный момент времени $t = t_0$.

3.4 Обобщенные решения уравнений с нелинейным оператором, не зависящим от элементов подпространства вырождения

Рассмотрим прежнюю задачу для вырожденного уравнения, не используя условие $\text{im}N \subset \mathcal{Y}^1$. При этом будет предполагаться, что оператор N не зависит от элементов подпространства \mathcal{X}^0 . В этом случае без потери общности можно считать, что $f \equiv 0$:

$$D^\alpha Lx(t) = Mx(t) + N(t, D^{\alpha_1}x(t), D^{\alpha_2}x(t), \dots, D^{\alpha_n}x(t)). \quad (3.4.1)$$

Обозначим $V := U \cap (\mathbb{R} \times (\mathcal{X}^1)^n)$ и предположим, что для оператора $N : U \rightarrow \mathcal{Y}$ и для всех $(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \in U$, таких, что $(t, Px_1, Px_2, \dots, Px_n) \in V$, выполняется $N(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = N_1(t, Px_1, Px_2, \dots, Px_n)$ при некотором $N_1 \in C(V; \mathcal{X})$, таком, что $\text{im}QN_1 \subset \text{im}L$. Тогда, рассуждая, как предыдущем параграфе, получаем систему двух уравнений

$$x^0(t) = -M_0^{-1}(I - Q)N_1(t, D^{\alpha_1}x^1(t), D^{\alpha_2}x^1(t), \dots, D^{\alpha_n}x^1(t)), \quad (3.4.2)$$

$$D^\alpha x^1(t) = Sx^1(t) + L_1^{-1}QN_1(t, D^{\alpha_1}x^1(t), D^{\alpha_2}x^1(t), \dots, D^{\alpha_n}x^1(t)). \quad (3.4.3)$$

Заметим, что в данной ситуации нелинейность в итоге не зависит от x^0 , поэтому определение решения задачи (3.1.1), (3.4.1) можно модифицировать таким образом, что существование и непрерывность дробных производных порядка α_l , $l = 1, 2, \dots, n$, будет требоваться не для всего решения x , а только для его проекции $x^1 := Px$.

Обобщенным решением задачи (3.1.1), (3.4.1) на отрезке $[t_0, t_1]$ будем называть такую функцию $x \in C([t_0, t_1]; \mathcal{X})$, что $D^{\alpha_1}Px, D^{\alpha_2}Px, \dots, D^{\alpha_n}Px \in C([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$, Px является обобщенным решением задачи (3.1.4) для уравнения (3.4.3) на отрезке $[t_0, t_1]$ и при всех $t \in (t_0, t_1]$ выполняется равенство (3.4.2).

Теорема 3.4.1. Пусть банаховы пространства \mathcal{X} и \mathcal{Y} рефлексивны, $(L, M) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$, $L_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1; \mathcal{Y}^1)$ или $M_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1; \mathcal{Y}^1)$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n \leq m - 1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $m_n - 1 < \alpha_n \leq m_n \in \mathbb{N}$, множество V открыто в $\mathbb{R} \times (\mathcal{X}^1)^n$, $N : U \rightarrow \mathcal{Y}$, для всех $(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \in U$, таких, что $(t, Px_1, Px_2, \dots, Px_n) \in V$, имеем

$$N(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = N_1(t, Px_1, Px_2, \dots, Px_n)$$

при некотором $N_1 \in C(V; \mathcal{X})$, $\text{im}QN_1 \subset \text{im}L$, отображение $L_1^{-1}QN_1 \in C(V; \mathcal{X})$ локально липшицево по \bar{x} ; если $\alpha_n < m_n$, то $y_k \in L[D_S]$ при $k = 0, 1, \dots, m_n - 1$, $y_k \in \text{im}L$ при $k = m_n, m_n + 1, \dots, m - 1$; если $\alpha_n = m_n$, то $y_k \in L[D_S]$ при $k = 0, 1, \dots, m_n$, $y_k \in \text{im}L$ при $k = m_n + 1, m_n + 2, \dots, m - 1$; $(t_0, L_1^{-1}\tilde{y}_1, L_1^{-1}\tilde{y}_2, \dots, L_1^{-1}\tilde{y}_n) \in V$. Тогда существует единственное обобщенное решение задачи (3.1.1), (3.4.1) на отрезке $[t_0, t_1]$ при некотором $t_1 > t_0$.

Доказательство. В силу теоремы 3.1.1 (ix) и теоремы 2.3.2 получаем локальное существование единственного обобщенного решения задачи (3.1.1) для уравнения (3.4.3). Функция $(I - P)x := x^0$ определяется из уравнения (3.4.2). \square

Аналогичный результат о глобальной разрешимости имеет следующий вид.

Теорема 3.4.2. Пусть банаховы пространства \mathcal{X} и \mathcal{Y} рефлексивны, $(L, M) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$, $L_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1; \mathcal{Y}^1)$ или $M_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1; \mathcal{Y}^1)$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n \leq m - 1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $m_n - 1 < \alpha_n \leq m_n \in \mathbb{N}$, $N : [t_0, T] \times \mathcal{X}^n \rightarrow \mathcal{Y}$, для всех $(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \in [t_0, T] \times \mathcal{X}^n$ выполняется $N(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = N_1(t, Px_1, Px_2, \dots, Px_n)$ при некотором $N_1 \in C([t_0, T] \times (\mathcal{X}^1)^n; \mathcal{X})$, $\text{im}QN_1 \subset \text{im}L$, отображение $L_1^{-1}QN_1 \in C([t_0, T] \times (\mathcal{X}^1)^n; \mathcal{X})$ липшицево по \bar{x} ; если $\alpha_n < m_n$, то $y_k \in L[D_S]$ при $k = 0, 1, \dots, m_n - 1$, $y_k \in \text{im}L$ при $k = m_n, m_n + 1, \dots, m - 1$; если $\alpha_n = m_n$, то $y_k \in L[D_S]$ при $k = 0, 1, \dots, m_n$, $y_k \in \text{im}L$ при $k = m_n + 1, m_n + 2, \dots, m - 1$. Тогда существует единственное обобщенное решение задачи (3.1.1), (3.4.1) на отрезке $[t_0, T]$.

Опять же вместо уравнения (3.4.3) при дополнительном условии $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1; \mathcal{X}^1)$ можно получить уравнение

$$D^\alpha y^1(t) = Ry^1(t) + QN_1(t, D^{\alpha_1} L_1^{-1} y^1(t), D^{\alpha_2} L_1^{-1} y^1(t), \dots, D^{\alpha_n} L_1^{-1} y^1(t)). \quad (3.4.4)$$

Теорема 3.4.3. Пусть банаховы пространства \mathcal{X} и \mathcal{Y} рефлексивны, $(L, M) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$, $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1; \mathcal{X}^1)$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n \leq m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $m_n - 1 < \alpha_n \leq m_n \in \mathbb{N}$, V — открытое множество в $\mathbb{R} \times (\mathcal{X}^1)^n$, $N : U \rightarrow \mathcal{Y}$, для всех $(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \in U$, таких, что $(t, Px_1, Px_2, \dots, Px_n) \in V$, выполняется $N(t, x_1, \dots, x_n) = N_1(t, Px_1, \dots, Px_n)$, где $N_1 \in C(V; \mathcal{X})$, $QN_1 \in C(V; \mathcal{Y})$ локально липшицево по \bar{x} ; если $\alpha_n < m_n$, то $y_k \in D_R$ при $k = 0, 1, \dots, m_n - 1$, $y_k \in \mathcal{Y}^1$ при $k = m_n, m_n + 1, \dots, m - 1$; если $\alpha_n = m_n$, то $y_k \in D_R$ при $k = 0, 1, \dots, m_n$, $y_k \in \mathcal{Y}^1$ при $k = m_n + 1, m_n + 2, \dots, m - 1$, $(t_0, L_1^{-1} \tilde{y}_1, L_1^{-1} \tilde{y}_2, \dots, L_1^{-1} \tilde{y}_n) \in V$. Тогда существует единственное обобщенное решение задачи (3.1.1), (3.4.1) на отрезке $[t_0, t_1]$ при некотором $t_1 > t_0$.

Доказательство. Для доказательства существования единственного обобщенного решения задачи Коши $D^k y^1(t_0) = y_k$, $k = 0, 1, \dots, m - 1$, для уравнения (3.4.4) на отрезке $[t_0, t_1]$ достаточно воспользоваться теоремой 3.1.1 (х) и теоремой 2.3.2. Подействуем на уравнение (3.4.4) оператором L_1^{-1} и получим выполнение равенства (3.4.3) и существования единственного обобщенного решения задачи (3.1.4), (3.4.3). \square

Используя теорему 2.3.1 вместо теоремы 2.3.2, получим следующую теорему о глобальной разрешимости.

Теорема 3.4.4. Пусть банаховы пространства \mathcal{X} и \mathcal{Y} рефлексивны, $(L, M) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$, $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1; \mathcal{X}^1)$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n \leq m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $m_n - 1 < \alpha_n \leq m_n \in \mathbb{N}$, $N : [t_0, T] \times \mathcal{X}^n \rightarrow \mathcal{Y}$, для всех $(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \in [t_0, T] \times \mathcal{X}^n$ выполняется $N(t, x_1, \dots, x_n) = N_1(t, Px_1, \dots, Px_n)$, где $N_1 \in C([t_0, T] \times (\mathcal{X}^1)^n; \mathcal{X})$, $QN_1 \in C([t_0, T] \times (\mathcal{X}^1)^n; \mathcal{Y})$ липшицево по \bar{x} ; если $\alpha_n < m_n$, то $y_k \in D_R$ при $k = 0, 1, \dots, m_n - 1$, $y_k \in \mathcal{Y}^1$ при $k = m_n, m_n +$

$1, \dots, m-1$; если $\alpha_n = m_n$, то $y_k \in D_R$ при $k = 0, 1, \dots, m_n$, $y_k \in \mathcal{Y}^1$ при $k = m_n + 1, m_n + 2, \dots, m-1$. Тогда существует единственное обобщенное решение задачи (3.1.1), (3.4.1) на отрезке $[t_0, T]$.

3.5 Начально-краевая задача для вырожденного нелинейного уравнения

При $\alpha \in (1, 2)$ рассмотрим начально-краевую задачу

$$\left(\beta - \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\right) v(\xi, t_0) = v_0(\xi), \quad D_t^1 \left(\beta - \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\right) v(\xi, t_0) = v_1(\xi), \quad \xi \in (0, \pi), \quad (3.5.1)$$

$$v(0, t) = v(\pi, t) = \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}(0, t) = \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}(\pi, t) = 0, \quad t > t_0, \quad (3.5.2)$$

$$\begin{aligned} D_t^\alpha \left(\beta - \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\right) v(\xi, t) &= \sum_{l=0}^2 a_l \frac{\partial^{2l} v}{\partial \xi^{2l}}(\xi, t) + \\ &+ \left(\beta - \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\right) F\left(\xi, D_t^{-1/3} v(\xi, t), D_t^{1/2} v(\xi, t)\right) \end{aligned} \quad (3.5.3)$$

для $\xi \in (0, \pi)$, $t > t_0$. Здесь $\beta, a_l \in \mathbb{R}$, $l = 0, 1, 2$, $F : (0, \pi) \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Теорема 3.5.1. Пусть $\alpha \in (1, 2)$, $F \in C^\infty((0, \pi) \times \mathbb{R}^2; \mathbb{R})$, $\beta = -k_1^2$ для некоторого $k_1 \in \mathbb{N}$, $a_2 > 0$, $a_0 + a_1\beta + a_2\beta^2 \neq 0$, $v_k = \left(\beta - \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\right) w_k$ при некоторых $w_k \in \{x \in H^4(0, \pi) : x^{(2l)}(0) = x^{(2l)}(\pi) = 0, l = 0, 1\}$, $k = 0, 1$. Тогда задача (3.5.1)–(3.5.3) имеет единственное решение на отрезке $[t_0, t_1]$ при некотором $t_1 > t_0$.

Доказательство. Положим $\mathcal{X} = \{x \in H^2(0, \pi) : x(0) = x(\pi) = 0\}$, $\mathcal{Y} = L_2(0, \pi)$, $D_M := \{x \in H^4(0, \pi) : x^{(2l)}(0) = x^{(2l)}(\pi) = 0, l = 0, 1\}$,

$$L := \beta - \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}, \quad M := \sum_{l=0}^2 a_l \frac{\partial^{2l}}{\partial \xi^{2l}} : D_M \rightarrow \mathcal{Y},$$

$$N(x_1(\xi), x_2(\xi)) = \left(\beta - \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\right) F(\xi, x_1(\xi), x_2(\xi)).$$

По теореме 7 [48] $\ker L = \mathcal{X}^0 = \mathcal{Y}^0 = \text{span}\{\sin k_1 \xi\}$, \mathcal{X}^1 есть замыкание $\text{span}\{\sin k \xi : k \in \mathbb{N} \setminus \{k_1\}\}$ в \mathcal{X} , а \mathcal{Y}^1 — замыкание $\text{span}\{\sin k \xi : k \in \mathbb{N} \setminus \{k_1\}\}$

в норме \mathcal{Y} , оператор $L_1 : \mathcal{X}^1 \rightarrow \mathcal{Y}^1$ является гомеоморфизмом и при $\alpha \in (1, 2)$ $(L, M) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$ для некоторых $\theta_0 \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, $a_0 \geq 0$. Из вида оператора N следует, что $\text{im}N \subset \text{span}\{\sin k\xi : k \in \mathbb{N} \setminus \{k_1\}\} \subset \mathcal{Y}^1$.

В силу теоремы 2.4.1 отображение $(x_1(\cdot), x_2(\cdot)) \rightarrow F(\cdot, x_1(\cdot), x_2(\cdot))$ принадлежит классу $C^\infty((H^2(0, \pi))^2; H^2(0, \pi))$, следовательно, оператор $N : \mathcal{X}^2 \rightarrow \mathcal{X}$ локально липшицев (здесь $\mathcal{X}^2 := \mathcal{X} \times \mathcal{X}$), а оператор $ML_1^{-1}N : \mathcal{X}^2 \rightarrow \mathcal{Y}$ непрерывен, а значит, $N \in C(\mathcal{X}^2; D_R)$, где $R = ML_1^{-1}$. По теореме 3.1.3 получим требуемое. \square

С помощью теоремы 3.1.4 или 3.1.5 аналогичным образом может быть рассмотрена задача (3.5.1), (3.5.2) для уравнения

$$D^\alpha \left(\beta - \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) v(\xi, t) = \sum_{l=0}^2 a_l \frac{\partial^{2l} v}{\partial \xi^{2l}}(\xi, t) + F \left(\xi, \left(\beta - \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) D^{-1/3} v(\xi, t), \left(\beta - \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) D^{1/2} v(\xi, t) \right). \quad (3.5.4)$$

Аналогичным образом при дополнительном условии ограниченности частных производных функции F по второй и третьей переменным можно доказать локальную или глобальную однозначную разрешимость задач (3.5.1)–(3.5.3) и (3.5.1), (3.5.2), (3.5.4).

В случае $\beta \neq -k^2$ для всех $k \in \mathbb{N}$ эти начально-краевые задачи могут быть исследованы с помощью теорем второй главы.

3.6 Начально-краевые задачи для дробных квазистационарных систем уравнений фазового поля

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞ , $\beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Рассмотрим начально-краевую задачу

$$D_t^{\alpha-2} u(\xi, 0) = u_0(\xi), \quad \xi \in \Omega, \quad (3.6.1)$$

$$D_t^{\alpha-1} u(\xi, 0) = u_1(\xi), \quad \xi \in \Omega, \quad (3.6.2)$$

$$(1 - \delta)u(\xi, t) + \delta \frac{\partial u}{\partial n}(\xi, t) = 0, \quad (\xi, t) \in \partial\Omega \times (0, T], \quad (3.6.3)$$

$$(1 - \delta)v(\xi, t) + \delta \frac{\partial v}{\partial n}(\xi, t) = 0, \quad (\xi, t) \in \partial\Omega \times (0, T], \quad (3.6.4)$$

для модельной системы уравнений в цилиндре $\Omega \times (0, T]$

$$D_t^\alpha u(\xi, t) = \Delta u(\xi, t) - \Delta v(\xi, t) + F(D_t^{\alpha_1} u, D_t^{\alpha_1} v, \dots, D_t^{\alpha_n} u, D_t^{\alpha_n} v), \quad (3.6.5)$$

$$\Delta v(\xi, t) + \beta u(\xi, t) + \gamma v(\xi, t) = 0, \quad (3.6.6)$$

линейная часть которой при $\alpha = 1$ с точностью до линейной замены неизвестных функций $u(\xi, t) = \tilde{u}(\xi, t) + \frac{s}{2}\tilde{v}(\xi, t)$, $v(\xi, t) = \frac{s}{2}\tilde{v}(\xi, t)$, $s \in \mathbb{R}$, совпадает с линеаризацией квазистационарной (в предположении, что время релаксации равно 0) системы уравнений фазового поля, описывающей в рамках мезоскопической теории фазовые переходы первого рода в случае одномерной фазовой функции [29, 30].

Положим при $l \in \mathbb{N}$ $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = (H^l(\Omega))^2$,

$$L = \begin{pmatrix} I & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} \Delta & -\Delta \\ \beta I & \gamma I + \Delta \end{pmatrix},$$

$$N(u_1, v_1, \dots, u_n, v_n) = \begin{pmatrix} F(\cdot, u_1(\cdot), v_1(\cdot), \dots, u_n(\cdot), v_n(\cdot)) \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$H_\delta^{l+2}(\Omega) := \left\{ w \in H^{l+2}(\Omega) : \left(\delta \frac{\partial}{\partial n} + (1 - \delta) \right) w(\xi) = 0, \xi \in \partial\Omega \right\},$$

$D_M = (H_\delta^{l+2}(\Omega))^2$. Тем самым определены операторы $L \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$, $M \in \mathcal{Cl}(\mathcal{X})$.

Причем $\ker L = \{0\} \times L_2(\Omega)$.

Обозначим $\Lambda w = \Delta w$, $D_\Lambda = H_\delta^{l+2}(\Omega) \subset H^l(\Omega)$. Через $\{\varphi_k : k \in \mathbb{N}\}$ обозначим ортонормированные в смысле скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$ в $L_2(\Omega)$ собственные функции оператора Λ_1 , занумерованные по невозрастанию собственных значений $\{\lambda_k : k \in \mathbb{N}\}$ с учетом их кратности.

Теорема 3.6.1. [33]. Пусть $\alpha \in [1, 2)$, $\beta, \delta \in \mathbb{R}$, $-\gamma \in \mathbb{R} \setminus \sigma(\Lambda_1)$. Тогда $(L, M) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$ при некоторых $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$, $a_0 \geq 0$. При $\alpha \in (0, 1)$ это же утверждение справедливо при дополнительном условии $\max_{k \in \mathbb{N}} \frac{(\beta + \gamma + \lambda_k)\lambda_k}{\gamma + \lambda_k} <$

1. В обоих случаях

$$P = \begin{pmatrix} I & \mathbb{O} \\ -\beta(\gamma + \Lambda)^{-1} & \mathbb{O} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} I & \Lambda(\gamma + \Lambda)^{-1} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix},$$

следовательно,

$$\mathcal{X}^0 = \{0\} \times H^l(\Omega), \quad \mathcal{X}^1 = \{(u, -\beta(\gamma + \Lambda)^{-1}u) : u \in H^l(\Omega)\},$$

$$\mathcal{Y}^0 = \{(-\Lambda(\gamma + \Lambda)^{-1}v, v) : v \in H^l(\Omega)\}, \quad \mathcal{Y}^1 = H^l(\Omega) \times \{0\}.$$

При этом $L_1 : \mathcal{X}^1 \rightarrow \mathcal{Y}^1$ — линейный гомеоморфизм.

Замечание 3.6.1. Теорема 3.6.1 доказана в [33] в случае, когда $l = 0$ при определении пространств \mathcal{X} , \mathcal{Y} и области определения D_M . На случай $l \in \mathbb{N}$ это доказательство переносится практически дословно.

Замечание 3.6.2. Можно напрямую показать, что в случае $-\gamma \notin \sigma(A)$ выполняется $(L, M) \notin \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$.

Далее понадобится следующая теорема.

Теорема 3.6.2. Пусть $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n \leq 1 < \alpha < 2$, $\beta, \delta \in \mathbb{R}$, $-\gamma \in \mathbb{R} \setminus \sigma(\Lambda)$, $F \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^{2n}; \mathbb{R})$, $l > d/2 \geq n$, $u_0 \in H_\delta^{l+2}(\Omega)$ при $\alpha_n \geq 0$ и $u_0 \in H^l(\Omega)$ в противном случае, $u_1 \in H_\delta^{l+2}(\Omega)$ при $\alpha_n = 1$ и $u_1 \in H^l(\Omega)$ в противном случае. Тогда существует такое $t_1 \in (0, T]$, что на $[0, t_1]$ существует единственное обобщенное решение задачи (3.6.1)–(3.6.6). Если все частные производные функции F до порядка $l + 1$ включительно по $2n$ фазовым переменным ограничены на $\Omega \times \mathbb{R}^{2n}$, то существует единственное обобщенное решение задачи (3.6.1)–(3.6.6) на отрезке $[0, T]$.

Доказательство. Начальные условия (3.6.1), (3.6.2) имеют вид (3.1.1) при данном операторе L . Поскольку по теореме 3.6.1 $L_1 : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ — линейный гомеоморфизм, можно воспользоваться любой из теорем 3.3.1 или 3.3.3 при $f \equiv 0$. По теореме 3.6.1 $\text{im}N \subset \mathcal{Y}^1$. С учетом теоремы 2.4.1 $N \in C^\infty((H^l(\Omega))^{2n}; H^l(\Omega))$. Поэтому задача (3.6.1)–(3.6.6) локально однозначно разрешима. А в случае ограниченности всех частных производных функции

F до порядка $l+1$ включительно оператор N липшицев и задача (3.6.1)–(3.6.6) однозначно разрешима на всем отрезке $[0, T]$ согласно любой из теорем 3.3.2 или 3.3.4. \square

Следующее утверждение доказывается совершенно аналогично.

Теорема 3.6.3. Пусть $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n \leq 0 < \alpha < 1$, $\beta, \delta \in \mathbb{R}$, $-\gamma \in \mathbb{R} \setminus \sigma(\Lambda)$, $\max_{k \in \mathbb{N}} \frac{(\beta + \gamma + \lambda_k) \lambda_k}{\gamma + \lambda_k} < 1$, $F \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^{2n}; \mathbb{R})$, $l > d/2 \geq n$, $u_1 \in H_\delta^{l+2}(\Omega)$ при $\alpha_n = 0$ и $u_1 \in H^l(\Omega)$ в противном случае. Тогда существует такое $t_1 \in (0, T]$, что на $[0, t_1]$ существует единственное обобщенное решение задачи (3.6.2)–(3.6.6). Если все частные производные функции F до порядка $l + 1$ включительно по $2n$ фазовым переменным ограничены на $\Omega \times \mathbb{R}^{2n}$, то существует единственное обобщенное решение задачи (3.6.2)–(3.6.6) на отрезке $[0, T]$.

Теперь рассмотрим систему с другой нелинейной частью

$$D_t^\alpha u(\xi, t) = \Delta u(\xi, t) - \Delta v(\xi, t) + F(D_t^{\alpha_1} u, D_t^{\alpha_2} u, \dots, D_t^{\alpha_n} u), \quad (3.6.7)$$

$$\Delta v(\xi, t) + \beta u(\xi, t) + \gamma v(\xi, t) + G(D_t^{\alpha_1} u, D_t^{\alpha_2} u, \dots, D_t^{\alpha_n} u) = 0. \quad (3.6.8)$$

В этом случае оператор N будет иметь вид

$$N(u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_n, v_n) = \begin{pmatrix} F(\cdot, u_1(\cdot), u_2(\cdot), \dots, u_n(\cdot)) \\ G(\cdot, u_1(\cdot), u_2(\cdot), \dots, u_n(\cdot)) \end{pmatrix}.$$

Принимая во внимание утверждение теоремы 3.6.1, можно заметить, что нелинейный оператор не зависит от элементов подпространства \mathcal{X}^0 , и поэтому можно воспользоваться теоремой 3.4.1 или 3.4.3.

Теорема 3.6.4. Пусть $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n \leq 1 < \alpha < 2$, $\beta, \delta \in \mathbb{R}$, $-\gamma \in \mathbb{R} \setminus \sigma(\Lambda)$, $F, G \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$, $2l > d \geq n$, $u_0 \in H_\delta^{l+2}(\Omega)$ при $\alpha_n \geq 0$ и $u_0 \in H^l(\Omega)$ в противном случае, $u_1 \in H_\delta^{l+2}(\Omega)$ при $\alpha_n = 1$ и $u_1 \in H^l(\Omega)$ в противном случае. Тогда существует такое $t_1 \in (0, T]$, что на $[0, t_1]$ существует единственное обобщенное решение задачи (3.6.1)–(3.6.6). Если все частные производные функций F, G до порядка $l + 1$ включительно по n

фазовым переменным ограничены на $\Omega \times \mathbb{R}^n$, то существует единственное обобщенное решение задачи (3.6.1)–(3.6.6) на отрезке $[0, T]$.

Доказательство. По теореме 3.6.1 $P(u, v) = (u, -\beta(\gamma + \Lambda)^{-1}u)$, $u, v \in H^l(\Omega)$.

Определим отображения $h : (H^l(\Omega))^2 \rightarrow H^l(\Omega)$, $h(u, v) = u$,

$$\begin{aligned} N(u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_n, v_n) &= \begin{pmatrix} F(\cdot, hP(u_1, v_1), hP(u_2, v_2), \dots, hP(u_n, v_n)) \\ G(\cdot, hP(u_1, v_1), hP(u_2, v_2), \dots, hP(u_n, v_n)) \end{pmatrix} \\ &:= N_1(P(u_1, v_1), P(u_2, v_2), \dots, P(u_n, v_n)). \end{aligned}$$

С учетом теоремы 2.4.1 $N_1 \in C^\infty((H^l(\Omega))^n; (H^l(\Omega))^2)$ и задача (3.6.1)–(3.6.6) локально однозначно разрешима. При условии ограниченности всех частных производных функций F, G до порядка $l+1$ включительно оператор N_1 липшицев и задача (3.6.1)–(3.6.6) однозначно разрешима на всем отрезке $[0, T]$ по теореме 3.4.2 или 3.4.4. \square

Теорема 3.6.5. Пусть $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n \leq 0 < \alpha < 1$, $\beta, \delta \in \mathbb{R}$, $-\gamma \in \mathbb{R} \setminus \sigma(\Lambda)$, $\max_{k \in \mathbb{N}} \frac{(\beta + \gamma + \lambda_k)\lambda_k}{\gamma + \lambda_k} < 1$, $F, G \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$, $2l > d \geq n$, $u_1 \in H_\delta^{l+2}(\Omega)$ при $\alpha_n = 0$ и $u_1 \in H^l(\Omega)$ в противном случае. Тогда существует такое $t_1 \in (0, T]$, что на $[0, t_1]$ существует единственное обобщенное решение задачи (3.6.2)–(3.6.6). Если все частные производные функций F и G до порядка $l+1$ включительно по n фазовым переменным ограничены на $\Omega \times \mathbb{R}^n$, то существует единственное обобщенное решение задачи (3.6.2)–(3.6.6) на отрезке $[0, T]$.

Замечание 3.6.3. Для доказательства существования классического решения потребуется усиление условий: $u_0, u_1 \in H_\delta^{l+2}(\Omega)$ при любом α_n и $F, G \in C^\infty((H^l(\Omega))^d; H_\delta^{l+2}(\Omega))$. Доказательство выполнения последнего включения не представляется очевидным.

3.7 Одна дробная модель термоконвекции вязкоупругой жидкости

Рассмотрим начально-краевую задачу

$$v(\xi, t_0) = v_0(\xi), \quad \theta(\xi, t_0) = \theta_0(\xi), \quad \xi \in \Omega, \quad (3.7.1)$$

$$v(\xi, t) = 0, \quad \theta(\xi, t) = 0, \quad (\xi, t) \in \partial\Omega \times (t_0, T], \quad (3.7.2)$$

для одной системы, частными случаями которой являются некоторые дробные модели термоконвекции вязкоупругой жидкости [74],

$$D^\alpha(I - \varkappa\Delta)v = \nu\Delta v - r + F(\xi, D^{\alpha_1}v, \dots, D^{\alpha_n}v, D^{\alpha_1}\theta, \dots, D^{\alpha_n}\theta, \nabla D^{\alpha_1}\theta, \dots, \nabla D^{\alpha_n}\theta), \quad (3.7.3)$$

$$\nabla \cdot v = 0, \quad (3.7.4)$$

$$D^\alpha\theta = \chi\Delta\theta + G(\xi, D^{\beta_1}v, \dots, D^{\beta_n}v, D^{\beta_1}\theta, \dots, D^{\beta_n}\theta, \nabla D^{\beta_1}\theta, \dots, \nabla D^{\beta_n}\theta), \quad (3.7.5)$$

в цилиндре $\Omega \times (t_0, T]$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$, $\chi > 0$, $\nu, \varkappa \in \mathbb{R}$, $\alpha \in (0, 1]$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \alpha$, $\beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_n < \alpha$. Неизвестными являются вектор-функции скорости $v = (v_1, v_2, \dots, v_d)$ и градиента давления $r = (r_1, r_2, \dots, r_d)$, а также функция температуры θ .

Пусть $q \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$, обозначим $H^0(\Omega) := L_2(\Omega)$, $\mathbb{H}^q := (H^q(\Omega))^n$, замыкание линеала $\mathfrak{L} := \{z \in (C_0^\infty(\Omega))^n : \nabla \cdot z = 0\}$ в норме пространства \mathbb{H}^q обозначим через \mathbb{H}_σ^q , \mathbb{H}_π^q — ортогональное дополнение к \mathbb{H}_σ^q в \mathbb{H}^q , $\mathbb{H}_\sigma^{2q+2-} := \mathbb{H}_\sigma^{2q+1} \cap \mathbb{H}^{2q+2}$, $\Sigma : \mathbb{H}^q \rightarrow \mathbb{H}_\sigma^q$ — ортопроектор на \mathbb{H}_σ^q вдоль \mathbb{H}_π^q , $\Pi = I - \Sigma$.

Пусть $q \in \mathbb{N}$, оператор $A_1 := \Sigma\Delta$, продолженный до замкнутого оператора в пространстве \mathbb{H}_σ^{2q-2} с областью определения \mathbb{H}_σ^{2q-} , имеет действительный отрицательный дискретный конечнократный спектр, сгущающийся только на $-\infty$ [25], через $\{\lambda_k\}$ обозначены собственные значения этого оператора, занумерованные по невозрастанию с учетом их кратности, а через $\{\varphi_k\}$ — соответствующие собственные функции.

Через A_2 обозначим оператор Лапласа Δ в $H^{2q}(\Omega)$ с граничными условиями Дирихле и с областью определения $H_0^{2q+2}(\Omega) := \{w \in H^{2q+2}(\Omega) : w(\xi) = 0, \xi \in \partial\Omega\}$ соответственно, $\{\mu_k\}$ — его собственные значения, занумерованные по невозрастанию с учетом их кратности, $\{\psi_k\}$ — соответствующие собственные функции.

Выберем минимальное q , такое, что $q > d/4$. Учитывая уравнение

несжимаемости (3.7.4), положим

$$\mathcal{X} = \mathbb{H}_\sigma^{2q-} \times \mathbb{H}_\pi^{2q-2} \times H^{2q}(\Omega), \quad \mathcal{Y} = \mathbb{H}_\sigma^{2q-2} \times \mathbb{H}_\pi^{2q-2} \times H^{2q}(\Omega), \quad (3.7.6)$$

$$L = \begin{pmatrix} I - \varkappa A_1 & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ -\varkappa \Pi \Delta & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & I \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y}), \quad M = \begin{pmatrix} \nu A_1 & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \nu \Pi \Delta & -I & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \chi A_2 \end{pmatrix}, \quad (3.7.7)$$

$D_M = \mathbb{H}_\sigma^{2q-} \times \mathbb{H}_\pi^{2q-2} \times H_0^{2q+2}(\Omega) \subset \mathcal{X}$. Тогда элементами пространства \mathcal{X} являются вектор-функции $x(t) = (v(\cdot, t), r(\cdot, t), \theta(\cdot, t))$ при фиксированном t .

Лемма 3.7.1. Пусть $\alpha \in (0, 2)$, $\chi > 0$, $\nu \in \mathbb{R}$, $\varkappa \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\varkappa^{-1} \notin \sigma(A_1)$, пространства \mathcal{X} и \mathcal{Y} имеют вид (3.7.6), а операторы L и M определены формулами (3.7.7). Тогда $(L, M) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$ при некоторых $a_0 \geq 0$, $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$, при этом

$$P = \begin{pmatrix} I & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \nu \Pi \Delta (I - \varkappa A_1)^{-1} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & I \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} I & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ -\varkappa \Pi \Delta (I - \varkappa A_1)^{-1} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & I \end{pmatrix},$$

$\mathcal{X}^0 = \{0\} \times \mathbb{H}_\pi^{2q-2} \times \{0\}$, $\mathcal{X}^1 = \{(z, \nu \Pi \Delta (I - \varkappa A_1)^{-1} z, w) : z \in \mathbb{H}_\sigma^{2q-}, w \in H^{2q}(\Omega)\}$, $\mathcal{Y}^0 = \{0\} \times \mathbb{H}_\pi^{2q-2} \times \{0\}$, $\mathcal{Y}^1 = \{(z, -\varkappa \Pi \Delta (I - \varkappa A_1)^{-1} z, w) : z \in \mathbb{H}_\sigma^{2q-}, w \in H^{2q}(\Omega)\}$.

Доказательство. Банаховы пространства \mathcal{X} и \mathcal{Y} рефлексивны, поскольку являются даже гильбертовыми.

Так как $\varkappa^{-1} \notin \sigma(A_1)$, то $1 - \varkappa \lambda_k \neq 0$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Заметим также, что последовательность $\{\nu \lambda_k / (1 - \varkappa \lambda_k)\}$ имеет конечный предел $-\nu / \varkappa$ и поэтому ограничена. Следовательно, при $\alpha \in (0, 2)$ найдутся такие $\theta_0 \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, $a_0 > 0$, что $\alpha \theta_0 \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, при $\mu \in S_{\theta_0, a_0}$ существует оператор $(\mu^\alpha - \nu(I - \varkappa A_1)^{-1} A_1)^{-1}$ и при $z_1 \in \mathbb{H}_\sigma^{2q-2}$, $z_2 \in \mathbb{H}_\sigma^{2q-}$

$$\|(\mu^\alpha - \nu(I - \varkappa A_1)^{-1} A_1)^{-1} z_1\|_{\mathbb{H}_\sigma^{2q-2}}^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1 + \lambda_k^{2q-2}) |\langle z_1, \varphi \rangle_{\mathbb{H}^0}|^2}{\left| \mu^\alpha - \frac{\nu \lambda_k}{1 - \varkappa \lambda_k} \right|^2} \leq C \|z_1\|_{\mathbb{H}_\sigma^{2q-2}}^2,$$

$$\|(\mu^\alpha - \nu(I - \varkappa A_1)^{-1} A_1)^{-1} z_2\|_{\mathbb{H}_\sigma^{2q-}}^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1 + \lambda_k^{2q}) |\langle z_2, \varphi \rangle_{\mathbb{H}^0}|^2}{\left| \mu^\alpha - \frac{\nu \lambda_k}{1 - \varkappa \lambda_k} \right|^2} \leq C \|z_2\|_{\mathbb{H}_\sigma^{2q-}}^2,$$

поэтому $(\mu^\alpha - \nu(I - \varkappa A_1)^{-1} A_1)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{H}_\sigma^{2q-2}) \cap \mathcal{L}(\mathbb{H}_\sigma^{2q-})$. Аналогично при $z_1 \in \mathbb{H}_\sigma^{2q-}$, $z_2 \in \mathbb{H}_\sigma^{2q-2}$

$$\|(I - \varkappa A_1)^{-1} z_1\|_{\mathbb{H}_\sigma^{2q-}}^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1 + \lambda_k^{2q}) |\langle z_1, \varphi \rangle_{\mathbb{H}^0}|^2}{|1 - \varkappa \lambda_k|^2} \leq c_1^2 \|z_1\|_{\mathbb{H}_\sigma^{2q-}}^2,$$

$$c_1 = \min_{k \in \mathbb{N}} |1 - \varkappa \lambda_k|^{-1},$$

$$\|(I - \varkappa A_1)^{-1} z_2\|_{\mathbb{H}_\sigma^{2q-}}^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1 + \lambda_k^{2q}) |\langle z_2, \varphi \rangle_{\mathbb{H}^0}|^2}{|1 - \varkappa \lambda_k|^2} \leq c_2^2 \|z_2\|_{\mathbb{H}_\sigma^{2q-2}}^2,$$

$$c_2 = \sqrt{\max_{k \in \mathbb{N}} \frac{1 + \lambda_k^{2q}}{(1 + \lambda_k^{2(q-1)}) |1 - \varkappa \lambda_k|^2}},$$

следовательно, $(I - \varkappa A_1)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{H}_\sigma^{2q-}) \cap \mathcal{L}(\mathbb{H}_\sigma^{2q-2}; \mathbb{H}_\sigma^{2q-})$. Кроме того, $\Pi \Delta \in \mathcal{L}(\mathbb{H}_\sigma^{2q-}; \mathbb{H}_\pi^{2q-2})$, поэтому $\Pi \Delta (I - \varkappa A_1)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{H}_\sigma^{2q-}; \mathbb{H}_\pi^{2q-2}) \cap \mathcal{L}(\mathbb{H}_\sigma^{2q-2})$.

Для $\mu \in S_{\theta_0, a_0}$ имеем

$$\begin{aligned} (\mu^\alpha L - M)^{-1} &= \begin{pmatrix} \mu^\alpha(I - \varkappa A_1) - \nu A_1 & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ -(\mu^\alpha \varkappa + \nu) \Pi \Delta & I & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mu^\alpha - \chi A_2 \end{pmatrix}^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} (\mu^\alpha(I - \varkappa A_1) - \nu A_1)^{-1} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ (\mu^\alpha \varkappa + \nu) \Pi \Delta (\mu^\alpha(I - \varkappa A_1) - \nu A_1)^{-1} & I & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & (\mu^\alpha - \chi A_2)^{-1} \end{pmatrix} = \\ R_{\mu^\alpha}^L(M) &= \begin{pmatrix} (\mu^\alpha - \nu(I - \varkappa A_1)^{-1} A_1)^{-1} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ (\mu^\alpha \varkappa + \nu) \Pi \Delta (\mu^\alpha - \nu(I - \varkappa A_1)^{-1} A_1)^{-1} - \varkappa \Pi \Delta & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & (\mu^\alpha - \chi A_2)^{-1} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (\mu^\alpha - \nu(I - \varkappa A_1)^{-1} A_1)^{-1} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \nu \Pi \Delta (I - \varkappa A_1)^{-1} (\mu^\alpha - \nu(I - \varkappa A_1)^{-1} A_1)^{-1} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & (\mu^\alpha - \chi A_2)^{-1} \end{pmatrix}, \\ L_{\mu^\alpha}^L(M) &= \begin{pmatrix} (\mu^\alpha - \nu A_1 (I - \varkappa A_1)^{-1})^{-1} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ -\varkappa \Pi \Delta (I - \varkappa A_1)^{-1} (\mu^\alpha - \nu A_1 (I - \varkappa A_1)^{-1})^{-1} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & (\mu^\alpha - \chi A_2)^{-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Здесь учитывается также, что $(\mu^\alpha I - A_2)^{-1} \in \mathcal{L}(L_2(\Omega))$ при всех $\mu \in S_{\theta_0, a_0}$, так как спектр оператора A_2 действителен и отрицателен. При этом для $w \in H^{2q}(\Omega)$

$$\|(\mu^\alpha I - \nu A_2)^{-1} w\|_{H^{2q}(\Omega)}^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1 + \mu_k^{2q}) |\langle w, \psi_k \rangle_{L_2(\Omega)}|^2}{|\mu^\alpha - \nu \mu_k|^2} \leq \frac{\|w\|_{H^{2q}(\Omega)}^2}{\sin^2(\alpha \theta_0) |\mu^\alpha|^2}.$$

Увеличив, если надо, $a_0 > 0$, получим

$$a_0 \sin(\alpha \theta_0) \geq \nu \max\{\|A_1(I - \varkappa A_1)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{H}_\sigma^{2q-2})}, \|(I - \varkappa A_1)^{-1} A_1\|_{\mathcal{L}(\mathbb{H}_\sigma^{2q-})}\},$$

тогда $|\mu|^\alpha \geq 2 \max\{\|A_1(I - \varkappa A_1)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{H}_\sigma^{2q-2})}, \|(I - \varkappa A_1)^{-1} A_1\|_{\mathcal{L}(\mathbb{H}_\sigma^{2q-})}\}$ при $\mu \in S_{\theta_0, a_0}$, а значит,

$$(\mu^\alpha - \nu A_1(I - \varkappa A_1)^{-1})^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \mu^{-\alpha(j+1)} [\nu A_1(I - \varkappa A_1)^{-1}]^j,$$

$$\|(\mu^\alpha - \nu A_1(I - \varkappa A_1)^{-1})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{H}_\sigma^{2q-2})} \leq \frac{1}{|\mu|^\alpha - \|A_1(I - \varkappa A_1)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{H}_\sigma^{2q-2})}} \leq \frac{2}{|\mu|^\alpha}.$$

Аналогично получаем такую же оценку для $\|(\mu^\alpha - \nu(I - \varkappa A_1)^{-1} A_1)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{H}_\sigma^{2q-})}$. Таким образом, $(L, M) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$.

Проекторы P, Q без труда вычисляются с помощью теоремы 3.1.1 (ii), получаем $\mathcal{X}^0 = \ker P$, $\mathcal{X}^1 = \operatorname{im} P$, $\mathcal{Y}^0 = \ker Q$, $\mathcal{Y}^1 = \operatorname{im} Q$. \square

Замечание 3.7.1. Можно показать, что в данном случае $L_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1; \mathcal{Y}^1)$, $M_1 \notin \mathcal{L}(\mathcal{X}^1; \mathcal{Y}^1)$, $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1; \mathcal{X}^1)$.

Из вида оператора L следует, что условия (3.7.1) эквивалентны условиям Шоултера — Сидорова (3.1.1). Из леммы 3.7.1 и полученного вида проектора P следует, что нелинейный оператор N , задаваемый вектор-функцией F , функцией G и операторами $D_{\xi_i}^1$, $i = 1, 2, \dots, d$, в данном уравнении, действует только на v и θ , т.е. зависит только от элементов подпространства \mathcal{X}^1 . Согласно замечанию 3.7.1 можно использовать теорему 3.1.4 или теорему 3.1.5, чтобы доказать существование единственного решения задачи (3.7.1)–(3.7.4).

При $\alpha \in (1, 2)$ аналогичный результат можно получить для задачи (3.7.1)–(3.7.4) с дополнительными начальными условиями

$$D_t^1 v(\xi, t_0) = v_1(\xi), \quad D_t^1 \theta(\xi, t_0) = \theta_1(\xi), \quad \xi \in \Omega.$$

Заключение

Основным результатом данной диссертационной работы стали теоремы о существовании и единственности классического и обобщенного решений для начальных задач для широких классов квазилинейных уравнений в банаховых пространствах с несколькими дробными производными Герасимова — Капуто в нелинейной части, разрешенных относительно старшей производной Герасимова — Капуто или с вырожденным оператором при ней. При этом построена теория комплексных степеней секториального, т. е. порождающего аналитическое разрешающее семейство, оператора. Она использована для исследования уравнений, в которых нелинейный оператор задан и липшицев в норме графика дробной степени секториального оператора, что позволяет применять полученные результаты при изучении уравнений в частных производных, нелинейных относительно производных по пространственным переменным. Такой подход использован также и для квазилинейных уравнений с дробными производными Римана — Лиувилля.

Общие результаты использованы при исследовании вопросов существования и единственности классического или обобщенного решения для ряда начально-краевых задач для нелинейных уравнений и систем уравнений в частных производных, как разрешимых, так и не разрешимых относительно старшей дробной производной по времени.

Полученные результаты могут стать основой для дальнейших исследований в следующих направлениях:

1) исследование вопросов существования и единственности сильных решений аналогичных задач для квазилинейных уравнений с производными Герасимова — Капуто или Римана — Лиувилля и с секториальным оператором (или парой операторов в вырожденном случае) в линейной части;

2) исследование вопросов управляемости и приближенной управляемости квазилинейных уравнений с производными Герасимова — Капуто или Римана — Лиувилля и с секториальным оператором (или парой операторов)

в линейной части;

3) исследование различных задач оптимального управления для систем, динамика которых описывается квазилинейными уравнениями с производными Герасимова — Капуто или Римана — Лиувилля и с секториальным оператором (или парой операторов) в линейной части.

Обозначения и соглашения

1. Множества, как правило, обозначаются заглавными буквами латинского алфавита, при этом

\mathbb{N} — множество натуральных чисел, $\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$;

\mathbb{R} — множество действительных чисел;

$\mathbb{R}_+ = \{a \in \mathbb{R} : a > 0\}$; $\overline{\mathbb{R}}_+ = \{0\} \cup \mathbb{R}_+$;

\mathbb{C} — множество комплексных чисел.

2. Элементы множеств обозначаются строчными буквами латинского и греческого алфавитов, операторы обозначаются заглавными буквами латинского алфавита.

3. $\mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$ — банахово пространство линейных непрерывных операторов, действующих из банахова пространства \mathcal{X} в банахово пространство \mathcal{Y} ;

$\mathcal{Cl}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$ — множество всех линейных замкнутых плотно определенных в пространстве \mathcal{X} операторов, действующих в пространство \mathcal{Y} ;

$\mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{X}) := \mathcal{L}(\mathcal{X})$, $\mathcal{Cl}(\mathcal{X}; \mathcal{X}) := \mathcal{Cl}(\mathcal{X})$.

4. Область определения оператора A обозначается через D_A , его ядро — через $\ker A$, образ — через $\operatorname{im} A$.

5. Символом $\operatorname{span} \mathcal{B}$ обозначается линейная оболочка множества \mathcal{B} .

6. Через $L_q(\Omega; \mathcal{X})$ и $W_q^l(\Omega; \mathcal{X})$, $1 \leq q \leq \infty$ обозначаются пространства Лебега и Соболева соответственно функций $u : \Omega \rightarrow \mathcal{X}$, где область $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, \mathcal{X} — банахово пространство, $q \geq 1$, $l \in \mathbb{N}$; $H^l(\Omega; \mathcal{X}) := W_2^l(\Omega; \mathcal{X})$.

7. Символами I и \mathbb{O} обозначаются соответственно тождественный и нулевой операторы, области определения которых ясны из контекста.

8. Символ \square лежит в конце доказательства.

Список литературы

- [1] Авилович, А. С. Вопросы однозначной разрешимости и приближённой управляемости для линейных уравнений дробного порядка с гёльдеровой правой частью / А.С. Авилович, Д.М. Гордиевских, В.Е. Федоров // Челяб. физ.-мат. журн. — 2020. — Т. 5, № 1. — С. 5–21.
- [2] Байбулатова, Г. Д. Начальная задача для одного класса слабо вырожденных полулинейных уравнений с младшими дробными производными / Г. Д. Байбулатова, М. В. Плеханова // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. — 2021. — Т. 35. — С. 34–48.
- [3] Бояринцев, Ю. Е. Алгебро-дифференциальные системы: Методы решения и исследования / Ю. Е. Бояринцев, В. Ф. Чистяков. — Новосибирск: Наука, 1998. — 224 с.
- [4] Булатов, М. В. Многошаговые методы для дифференциально-алгебраических уравнений второго порядка / М. В. Булатов, Л. С. Соловарова // Дифференц. уравнения. — 2023. — Т. 59, № 3. — С. 389–399.
- [5] Газизов, Р. К. Симметричный подход к дифференциальным уравнениям дробного порядка / Р. К. Газизов, А. А. Касаткин, С. Ю. Лукашук // Мат. моделирование и краевые задачи. — 2008. — № 3. — С. 59–61.
- [6] Газизов, Р. К. Уравнения с производными дробного порядка: замены переменных и нелокальные симметрии / Р. К. Газизов, А. А. Касаткин, С. Ю. Лукашук // Уфимск. мат. журн. — 2012. — Т. 4, № 4. — С. 54–68.
- [7] Гальперн, С. А. Задача Коши для общих систем линейных уравнений с частными производными / С. А. Гальперн // Тр. Моск. мат. о-ва. — 1960. — Т. 9. — С. 401–423.
- [8] Герасимов, А. Н. Обобщение линейных законов деформации и их приложение к задачам внутреннего трения / А. Н. Герасимов // Приклад. математика и механика. — 1948. — Т. 12, № 3. — С. 251–260.

- [9] Демиденко, Г. В. Краевые задачи в четверти пространства для систем не типа Коши-Ковалевской / Г. В. Демиденко, И. И. Матвеева // Тр. Ин-та математики СО РАН. — 1994. — Т. 26. — С.42–76.
- [10] Демиденко, Г. В. Уравнения и системы, не разрешённые относительно старшей производной / Г. В. Демиденко, С. В. Успенский. — Новосибирск: Науч. кн., 1998. — 436 с.
- [11] Егоров, И. Е. Неклассические дифференциально-операторные уравнения / И. Е. Егоров, С. Г. Пятков, С. В. Попов. — Новосибирск: Наука, 2000. — 336 с.
- [12] Ильин, А. М. Об асимптотике решения одной краевой задачи / А. М. Ильин // Мат. заметки. — 1970. — Т. 8, вып. 3. — С. 273–284.
- [13] Ильин, А. М. О поведении решения одной краевой задачи при $t \rightarrow \infty$ / А. М. Ильин // Мат. сб. — 1972. — Т. 87, № 4. — С. 529–553.
- [14] Кайкина, Е. И. Задача Коши для уравнения типа Соболева со степенной нелинейностью / Е. И. Кайкина, П. И. Наумкин, И. А. Шишмарев // Изв. РАН. Сер. мат. — 2005. — Т. 69, № 1. — С. 61–114.
- [15] Кайкина, Е. И. Периодическая задача для нелинейного уравнения Соболева / Е. И. Кайкина, П. И. Наумкин, И. А. Шишмарев // Функци. анализ и его приложения. — 2010. — Т. 44, № 3. — С. 14–26.
- [16] Клемент, Ф. Однопараметрические полугруппы / Ф. Клемент, Х. Хейманс, С. Ангенент, К. ван Дуйн, Б. де Пахтер. — М.: Мир, 1992. — 352 с.
- [17] Кожанов, А. И. Задача с косой производной для некоторых псевдопараболических и близких к ним уравнений / А. И. Кожанов // Сиб. мат. журн. — 1996. — Т. 37, № 6. — С. 1335–1346.
- [18] Кожанов, А. И. Начально-краевая задача для уравнения типа обобщенного уравнения Буссинеска с нелинейным источником / А. И. Кожанов // Мат. заметки. — 1999. — Т. 65, № 1. — С. 70–75.

- [19] Кожанов, А. И. О краевых задачах для некоторых классов уравнений высокого порядка, не разрешенных относительно старшей производной / А. И. Кожанов // Сиб. мат. журн. — 1994. — Т. 35, № 2. — С. 359–376.
- [20] Корпусов, М. О. Разрушение в неклассических волновых уравнениях / М. О. Корпусов. — М.: Книжный дом «Либроком», 2010. — 240 с.
- [21] Корпусов, М. О. Разрушение в неклассических нелокальных уравнениях / М. О. Корпусов. — М.: Книжный дом «Либроком», 2011. — 376 с.
- [22] Костич, М. Вырожденные дробные дифференциальные уравнения в локально выпуклых пространствах с сигма-регулярной парой операторов / М. Костич, В. Е. Федоров // Уфимский мат. журн. — 2016. — Т. 8, № 4. — С. 100–113.
- [23] Костюченко А. Г. Задача Коши для уравнения Соболева — Гальперна / А. Г. Костюченко, Г. И. Эскин // Тр. Моск. мат. о-ва. — 1961. — Т. 10. — С. 273–284.
- [24] Крейн, С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / С. Г. Крейн. — М. : Наука, 1967. — 464 с.
- [25] Ладыженская, О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости / О. А. Ладыженская. — М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1961. — 204 с.
- [26] Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа / А. Г. Свешников, А. Б. Альшин, Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д. — М.: Физматлит, 2007. — 736 с.
- [27] Мамчуев, М. О. Краевые задачи для уравнений и систем уравнений с частными производными дробного порядка / М. О. Мамчуев. — Нальчик: Изд-во КБНЦ РАН, 2013. — 200 с.
- [28] Нахушев, А. М. Дробное исчисление и его применение / А. М. Нахушев. — М. : Физматлит, 2003. — 272 с.

- [29] Плотников, П. И. Уравнения фазового поля и градиентные потоки маргинальных функций / П. И. Плотников, А. В. Клепачева // Сиб. мат. журн. — 2001. — Т. 42, № 3. — С. 651–669.
- [30] Плотников, П. И. Задача Стефана с поверхностным натяжением как предел модели фазового поля / П. И. Плотников, В. Н. Старовойтов // Дифференц. уравнения. — 1993. — Т. 29, № 3. — С. 461–471.
- [31] Псху, А. В. Уравнения в частных производных дробного порядка / А. В. Псху. — М. : Наука, 2005. — 199 с.
- [32] Пятков, С. Г. Разрешимость краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений смешанного типа. Вырожденный случай / С. Г. Пятков, Н. Л. Абашеева // Сиб. мат. журн. — 2002. — Т. 43, № 3. — С. 678–693.
- [33] Романова, Е. А. Разрешающие операторы линейного вырожденного эволюционного уравнения с производной Капуто. Секториальный случай / Е. А. Романова, В. Е. Федоров // Мат. заметки СВФУ. — 2016. — Т. 23, № 4. — С. 58–72.
- [34] Самко, С. Г. Дробные интегралы и производные дробного. Теория и приложения / С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев. — Минск: Наука и техника, 1987. — 688 с.
- [35] Сидоров, Н. А. Об одном классе вырожденных дифференциальных уравнений с конвергенцией / Н. А. Сидоров // Мат. заметки. — 1984. — Т. 25, № 4. — С. 569–578.
- [36] Сидоров, Н. А. Обобщенные решения дифференциальных уравнений с фредгольмовым оператором при производной / Н. А. Сидоров, М. В. Фалалеев // Дифференц. уравнения. — 1987. — Т. 23, № 4. — С. 726–728.

- [37] Ситник, С. М. Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя / С. М. Ситник, Э. Л. Шишкина. — М.: Физматлит, 2019. — 224 с.
- [38] Соболев, С. Л. Об одной новой задаче математической физики / С. Л. Соболев // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1954. — Т. 18. — С. 3–50.
- [39] Учайкин, В. В. Метод дробных производных / В. В. Учайкин. — Ульяновск: Артишок, 2008. — 512 с.
- [40] Фалалеев, М. В. Вырожденные интегро-дифференциальные уравнения специального вида в банаховых пространствах и их приложения / М. В. Фалалеев, С. С. Орлов // Вестник Южно-Уральск. гос. ун-та. Сер. Мат. моделирование и программирование. — 2011. — Вып. 7, № 4 (211). — С. 100–110.
- [41] Федоров, В. Е. Задача типа Коши для вырожденного уравнения с производной Римана — Лиувилля в секториальном случае / В. Е. Федоров, А. С. Авилович // Сиб. мат. журн. — 2019. — Т. 60, № 2. — С. 461–477.
- [42] Федоров, В. Е. Начальные задачи для некоторых классов линейных эволюционных уравнений с несколькими дробными производными / В. Е. Федоров, К. В. Бойко, Т. Д. Фуонг // Мат. заметки СВФУ. — 2021. — Т. 28. — С. 85–104.
- [43] Федоров, В. Е. Интегро-дифференциальные уравнения типа Герасимова с секториальными операторами / В. Е. Федоров, А. Д. Годова // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. — 2024. — Т. 30, № 2. — С. 243–258.
- [44] Федоров, В. Е. Разрешающие операторы вырожденных эволюционных уравнений с дробной производной по времени / В. Е. Федоров, Д. М. Гордиевских // Изв. вузов. Математика. — 2015. — № 1. — С. 71–83.
- [45] Федоров, В. Е. Уравнения в банаховых пространствах с вырожденным оператором под знаком дробной производной / В. Е. Федоров, Д. М. Гор-

- диевских, М. В. Плеханова // Дифференц. уравнения. — 2015. — Т. 51, № 10. — С. 1367–1375.
- [46] Федоров, В. Е. Линейные вырожденные эволюционные уравнения с дробной производной Римана — Лиувилля / В. Е. Федоров, М. В. Плеханова, Р. Р. Нажимов // Сиб. мат. журн. — 2018. — Т. 59, № 1. — С. 136–146.
- [47] Федоров, В. Е. Неоднородное эволюционное уравнение дробного порядка в секториальном случае / В. Е. Федоров, Е. А. Романова // Итоги науки и техники. Сер. Современ. математика и ее приложения. Темат. обзоры. — 2018. — Т. 149. — С. 103–112.
- [48] Федоров, В. Е. Аналитические в секторе разрешающие семейства операторов вырожденных эволюционных уравнений дробного порядка / В. Е. Федоров, Е. А. Романова, А. Дебуш // Сиб. журн. чистой и приклад. математики. — 2016. — Т. 16, № 2. — С. 93–107.
- [49] Федоров, В. Е. Дефект задачи типа Коши для линейных уравнений с несколькими производными Римана — Лиувилля / В. Е. Федоров, М. М. Туров // Сиб. мат. журн. — 2021. — Т. 62, № 5. — С. 1143–1162.
- [50] Хенри, Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений / Д. Хенри. — М. : Мир, 1985. — 376 с.
- [51] Хилле, Э. Функциональный анализ и полугруппы / Э. Хилле, Р. Филлипс. — М. : Иностран. лит., 1962. — 830 с.
- [52] Хэссард, Б. Теория и приложения бифуркации рождения цикла / Б. Хэссард, Н. Казаринов, И. Вэн. — М.: Мир, 1985. — 280 с.
- [53] Чистяков, В. Ф. Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром / В. Ф. Чистяков. — Новосибирск: Наука, 1996. — 278 с.
- [54] Bajlekova, E. G. Fractional Evolution Equations in Banach Spaces / E. G. Bajlekova. — PhD thesis. — Eindhoven: Eindhoven University of Technology, 2001. — 107 p.

- [55] Boyko, K. V. The Cauchy problem for a class of multi-term equations with Gerasimov–Caputo derivatives / K. V. Boyko, V. E. Fedorov // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. — 2022. — Vol. 43. — P. 1293–1302.
- [56] Caputo, M. Lineal model of dissipation whose Q is almost frequency independent. II / M. Caputo // *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*. — 1967. — Vol. 13. — P. 529–539.
- [57] Carroll, R. W. *Singular and Degenerate Cauchy Problems* / R. W. Carroll, R. E. Showalter. — New York, San Fransisco, London: Academic Press, 1976. — 333 p.
- [58] Da Prato, G. Linear integro-differential equations in Banach spaces / G. Da Prato, M. Iannelly // *Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*. — 1980. — Tome 62. — P. 207–219.
- [59] Diethelm, K. *The Analysis of Fractional Differential Equations. An Application-Oriented Exposition Using Differential Operators of Caputo Type* / K. Diethelm. — Berlin; Heidelberg: Springer, 2010. — 247 p.
- [60] Favini, A. *Degenerate Differential Equations in Banach Spaces* / A. Favini, A. Yagi. — New York, etc.: Marcel Dekker Inc., 1999. — 324 p.
- [61] Fedorov, V. E. A class of fractional order semilinear evolutions in Banach spaces / V. E. Fedorov // *In Integral Equations and Their Applications. Proceeding of the University Network Seminar on the Occasion of the Third Mongolia–Russia–Vietnam Workshop on NSIDE 2018, 27–28 October; Hanoi Mathematical Society Hung Yen University of Technology and Education: Hung Yen, Vietnam, 2018*. — P. 11–20.
- [62] Fedorov, V. E. Semilinear fractional-order evolution equations of Sobolev type in the sectorial case / V. E. Fedorov, A. S. Avilovich // *Complex Variables and Elliptic Equations*. — 2021. — Vol. 66. — P. 1108–1121.

- [63] Fedorov, V. E. Initial problems for semilinear degenerate evolution equations of fractional order in the sectorial case / V. E. Fedorov, A. S. Avilovich, L. V. Borel // Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. — 2019. — Vol. 292. — P. 41–62.
- [64] Fedorov, V. E. Integro-differential equations in Banach spaces and analytic resolving families of operators / V. E. Fedorov, A. D. Godova // Journal of Mathematical Sciences. — 2024. — Vol. 283, no. 2. — P. 317–334.
- [65] Fedorov, V. E. A class of inverse problems for evolution equations with the Riemann–Liouville derivative in the sectorial case / V. E. Fedorov, A. V. Nagumanova, A. S. Avilovich // Mathematical Methods in the Applied Sciences. — 2021. — Vol. 44, no. 15. — P. 11961–11969.
- [66] Fedorov, V. E. On the unique solvability of incomplete Cauchy type problems for a class of multi-term equations with the Riemann–Liouville derivatives / V. E. Fedorov, M. M. Turov, B. T. Kien // Symmetry. — 2022. — Vol. 14, no. 1. — P. 75.
- [67] Fedorov, V. E. A Class of quasilinear equations with Riemann–Liouville derivatives and bounded operators / V. E. Fedorov, M. M. Turov, B. T. Kien // Axioms. — 2022. — Vol. 11, no. 3. — P. 96.
- [68] Gazizov, R. Symmetries, conservation laws and group invariant solutions of fractional PDEs / R. Gazizov, A. Kasatkin, S. Lukashchuk. In: Fractional Differential Equations, ed. by A. Kochubei, Y. Luchko. Vol. 2. Berlin; Boston: De Gruyter, 2019. P. 353–382.
- [69] Higher Transcendental Functions / A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F. G. Tricomi. — New-York: McGraw-Hill, 1955. — 326 c.
- [70] Hilfer, R. Applications of Fractional Calculus in Physics / R. Hilfer. — Singapore: WSPC, 2000. — 465 p.

- [71] Kilbas, A. A. Theory and Applications of Fractional Differential Equations / A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo. — Amsterdam; Boston; Heidelberg: Elsevier Science Publishing, 2006. — 541 p.
- [72] Kostić, M. Abstract Volterra Integro-Differential Equations / M. Kostić. — Boca Raton: CRC Press, 2015. — 458 p.
- [73] Lyapunov–Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications / N. Sidorov, B. Loginov, A. Sinitsyn, M. Falaleev. — Dordrecht; Boston; London: Kluwer Academic Publisher, 2002. — 568 p.
- [74] Mainardi, F. Creep, relaxation and viscosity properties for basic fractional models in rheology / F. Mainardi, G. Spada // The European Physical Journal Special Topics. — 2011. — Vol. 193. — P. 133–160.
- [75] Melnikova, I. V. Abstract Cauchy Problems: Three Approaches / I. V. Melnikova, A. Filinkov. — Boca Raton; London; New York; Washington: Chapman & Hall / CRC, 2001. — 242 p.
- [76] Miller, K. S. An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations / K. S. Miller, B. Ross. — New York: John Wiley & Sons, 1993. — 384 p.
- [77] Nishimoto, K. Fractional Calculus and Its Applications / K. Nishimoto. — Koriyama: Nihon University, 1990. — 284 p.
- [78] Novozhenova, O. G. Life and science of Alexey Gerasimov, one of the pioneers of fractional calculus in Soviet Union / O. G. Novozhenova // Fractional Calculus and Applied Analysis. — 2017. — Vol. 20. — P. 790–809.
- [79] Oldham, K. B. The Fractional Calculus / K. B. Oldham, J. Spanier. — Boston: Academic Press, 1974. — 234 p.
- [80] Pazy, A. Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations / A. Pazy. — New York: Springer Verlag, 1983. — 282 p.

- [81] Plekhanova, M. V. Nonlinear equations with degenerate operator at fractional Caputo derivative / M. V. Plekhanova // *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. — 2016. — Vol. 40. — P. 41–44.
- [82] Plekhanova, M. V. Sobolev type equations of time-fractional order with periodical boundary conditions / M. V. Plekhanova // *AIP Conference Proceedings*. — 2016. — Vol. 1759. — P. 020101-1–020101-4.
- [83] Plekhanova, M. V. Strong solutions to nonlinear degenerate fractional order evolution equations / M. V. Plekhanova // *Journal of Mathematical Sciences*. — 2018. — Vol. 230, no. 1. — P. 146–158.
- [84] Plekhanova, M. V. Semilinear equations in Banach spaces with lower fractional derivatives / M. V. Plekhanova, G. .D. Baybulatova // *Springer Proceedings in Mathematics and Statistics*. — 2019. — Vol. 292. — P. 81–93.
- [85] Plekhanova, M. V. Degenerate quasilinear equations with the Dzhrbashyan–Nersesyan derivative / M. V. Plekhanova, E. M. Izhberdeeva // *Journal of Mathematical Sciences*. — 2023. — Vol. 269, no. 2. — P. 217–228.
- [86] Plekhanova, M. V. Local unique solvability of a quasilinear equation with the Dzhrbashyan–Nersesyan derivatives / M. V. Plekhanova, E. M. Izhberdeeva // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. — 2022. — Vol. 43, iss. 6. — P. 1141–1150.
- [87] Podlubny, I. *Fractional Differential Equations* / I. Podlubny. — San Diego; Boston: Academic Press, 1999. — 340 p.
- [88] Prüss, J. *Evolutionary Integral Equations and Applications* / J. Prüss. — Basel: Springer, 1993. — 366 p.
- [89] Pyatkov, S. G. *Operator Theory. Nonclassical Problems* / S. G. Pyatkov. — Utrecht, Boston, Köln, Tokyo: VSP, 2002. — 346 p.

- [90] Rossikhin, Yu. A. Reflections on two parallel ways in the progress of fractional calculus in mechanics of solids // Applied Mechanics Reviews. — 2010. — Vol. 63. — 010701 p.
- [91] Shishkina, E. Transmutations, Singular and Fractional Differential Equations with Applications to Mathematical Physics, Mathematics in Science and Engineering / E. Shishkina, S. Sitnik. — Elsevier, Academic Press, 2020. — 592 p.
- [92] Fedorov, V. E. Strongly continuous resolving families of operators for equations with a fractional derivative / V. E. Fedorov, A. S. Skorynin // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2022. — Vol. 44, vol. 7. — P. 2651–2659.
- [93] Sviridyuk, G. A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G. A. Sviridyuk, V. E. Fedorov. — Utrecht; Boston : VSP, 2003. — 216 p.
- [94] Tarasov, V. E. Fractional Dynamics: Applications of Fractional Calculus to Dynamics of Particles, Fields and Media / V. E. Tarasov. — New York : Springer, 2011. — 450 p.
- [95] Uchaykin, V. V. Fractional Derivatives for Physicists and Engineers / V. V. Uchaykin. — Beijing: Higher Education Press, 2012.
- [96] Vector-valued Laplace Transforms and Cauchy Problems / W. Arendt, C. J. K. Batty, M. Hieber, F. Neubrander. — Basel: Springer, 2011. — 539 p.

**Публикации автора диссертации в журналах, входящих
в перечень ВАК ведущих периодических изданий,
и приравненные к ним**

- [97] Захарова, Т. А. Обобщенные решения квазилинейных уравнений с производными Герасимова — Капуто и секториальным оператором // Челяб. физ.-мат. журн. — 2025. — Т. 10, вып. 3. — С. 431–444.

- [98] Fedorov, V. E. Complex powers of fractional sectorial operators and quasilinear equations with Riemann–Liouville derivatives. / V. E. Fedorov, A. S. Avilovich, T. A. Zakharova // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2023. — Vol. 44, no. 2. — P. 580–593.
- [99] Fedorov, V. E. Quasilinear fractional order equations and fractional powers of sectorial operators. / V. E. Fedorov, M. Kostić, T. A. Zakharova // Fractal and Fractional. — 2023. — Vol. 7, no. 5. — P. 385.
- [100] Fedorov, V. E. Nonlocal solvability of quasilinear degenerate equations with Gerasimov–Caputo derivatives / V. E. Fedorov, T. A. Zakharova // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2023. — Vol. 44, no. 2. — P. 594–606.
- [101] Zakharova, T. A.. Mild solutions of degenerate quasilinear equations with Gerasimov–Caputo derivatives / T. A. Zakharova // Computational Mathematics and Modeling. — 2026. — <https://doi.org/10.1007/s10598-026-09698-4>.

Публикации по теме диссертации, примыкающие к основным

- [102] Федоров, В. Е. Квазилинейные уравнения с дробной производной Герасимова — Капуто. Секториальный случай / В. Е. Федоров, Т. А. Захарова // Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее приложения. Темат. обзоры. — 2023. — Т. 226. — С. 127–137.
- [103] Захарова, Т. А. Неполная задача типа Коши для квазилинейного дробного уравнения / Т. А. Захарова, В. Е. Федоров // Мат. заметки СВФУ. — 2025. — Т. 32, № 1. — С. 113–114.
- [104] Захарова, Т. А. О локальной разрешимости вырожденного квазилинейного уравнения с производными Герасимова — Капуто / Т. А. Захарова, В. Е. Федоров // Междунар. конф. по дифференц. уравнениям и динамическим системам: тез. докл. Суздаль, — Владимир : Аркаим, 2022. — С. 122–123.

- [105] Fedorov, V. E. Incomplete Cauchy type problem for quasilinear equations with Riemann–Liouville derivatives / V. E. Fedorov, T. A. Zakharova // O.A. Ladyzhenskaya centennial conference on PDE's: Book of abstracts. St. Petersburg, — St. Petersburg, 2022. — P. 26.
- [106] Захарова Т. А. О разрешимости вырожденного квазилинейного уравнения с производными Герасимова — Капуто / Т. А. Захарова, В. Е. Федоров // Неклассич. уравнения мат. физики и их приложения: тез. докл. Междунар. науч. конф., Ташкент, Узбекистан. — Ташкент : Университет, 2022. — С. 96–97.
- [107] Захарова, Т. А. Локальная однозначная разрешимость квазилинейного уравнения с производной Герасимова — Капуто / Т. А. Захарова, В. Е. Федоров // Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения: тез. докл. Междунар. конф., оз. Банное, Башкортостан. — Уфа : Аэтерна, 2022. — С. 35–36.
- [108] Захарова, Т. А. Начальная задача для вырожденного квазилинейного уравнения с производными Герасимова — Капуто / Т. А. Захарова, В. Е. Федоров // 9-я междунар. конф. по дифференц. и функционал.-дифференц. уравнениям, Москва. — М.: РУДН, 2022. — P. 143–144.
- [109] Захарова, Т. А. Нелокальная разрешимость квазилинейного уравнения / Т. А. Захарова, В. Е. Федоров // Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики: материалы VII Междунар. науч. конф., Нальчик. — Нальчик : ИПМА КБНЦ РАН, 2023. — С. 115–116.
- [110] Захарова, Т. А. Квазилинейные вырожденные эволюционные уравнения / Т. А. Захарова, В. Е. Федоров // X Междунар. конф. по мат. моделированию, посвящ. 30-летию Академии наук Республики Саха (Якутия) и памяти первого Президента Академии наук РС(Я), член-корр. РАН Филиппова Василия Васильевича, Якутск, 2023. — С. 43.

- [111] Захарова, Т. А. Об однозначной нелокальной разрешимости квазилинейного уравнения с производными Герасимова — Капуто / Т. А. Захарова, В. Е. Федоров // Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения: тез. докл. Междунар. конф., оз. Банное, Башкортостан. — Уфа : Аэтерна, 2023. — С. 52–53.
- [112] Захарова, Т. А. Однозначная разрешимость задачи Коши для квазилинейного уравнения дробного порядка / Т. А. Захарова, В. Е. Федоров // Уфимская осенняя мат. школа: материалы Междунар. науч. конф., Уфа. — Уфа : РИЦ БашГУ, 2023. — С. 53–55.
- [113] Федоров, В. Е. Квазилинейные уравнения с дробными производными в банаховых пространствах / В. Е. Федоров, Т. А. Захарова // Воронеж. зимн. мат. шк. С. Г. Крейна: материалы междунар. Воронеж. зимн. мат. шк., посвящ. памяти академика В. П. Маслова, Воронеж. — Воронеж: Издат. дом ВГУ, 2024. — С. 268–271.
- [114] Захарова, Т. А. Локальная разрешимость вырожденного квазилинейного уравнения / Т. А. Захарова // Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения: тез. докл. Междунар. конф., Павловка, Башкортостан. — Уфа, 2025. — С. 23–24.
- [115] Захарова, Т. А. Дробные степени оператора в теории разрешимости эволюционных уравнений дробного порядка / Т. А. Захарова, В. Е. Федоров // Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения: тез. докл. Междунар. конф., Павловка, Башкортостан. — Уфа, 2026. — С. 25.