

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по научной работе

ФГБОУ ВО «ЧелГУ»

кандидат химических наук, доцент

Бирюков Александр Игоревич



« 08 »

2026 г.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Челябинский государственный университет»

Диссертация Захаровой Татьяны Анатольевны «Квазилинейные эволюционные уравнения с дробными производными и дробные степени операторов» выполнена на кафедре математического анализа федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Челябинский государственный университет».

В период подготовки диссертации соискатель Захарова Татьяна Анатольевна работала лаборантом-исследователем кафедры математического анализа федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Челябинский государственный университет».

В 2021 году Т.А. Захарова с отличием окончила федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Челябинский государственный университет» по направлению подготовки 01.04.01 Математика с присвоением квалификации «Магистр».

В 2025 году окончила аспирантуру по очной форме обучения федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Челябинский государственный университет» по направлению подготовки 01.06.01 Математика и механика, научной специальности 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая

физика с присвоением квалификации «Исследователь. Преподаватель исследователь». С 01.09.2024 г. Захарова Татьяна Анатольевна работает ассистентом кафедры математического анализа федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Челябинский государственный университет».

Диплом об окончании аспирантуры выдан федеральным государственным бюджетным образовательным учреждением высшего образования «Челябинский государственный университет» в 2025 году. Справка об обучении со сведениями о сданных кандидатских экзаменах выдана федеральным государственным бюджетным образовательным учреждением высшего образования «Челябинский государственный университет» в 2026 году.

Научный руководитель – Федоров Владимир Евгеньевич, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Челябинский государственный университет».

Тема диссертации утверждена Учёным советом университета (протокол от 30 марта 2026 г. № 18).

По итогам обсуждения диссертации «Квазилинейные эволюционные уравнения с дробными производными и дробные степени операторов» принято следующее заключение.

Диссертационная работа Захаровой Татьяны Анатольевны посвящена исследованию вопросов однозначной разрешимости начальных задач для квазилинейных эволюционных уравнений с дробными производными Герасимова – Капуто и Римана – Лиувилля в банаховых пространствах. Ключевую роль в работе играет построенная автором теория комплексных степеней для операторов, порождающих аналитическое разрешающее семейство для уравнения с дробной производной Герасимова – Капуто и называемых далее секториальными. Построена шкала банаховых пространств, представляющих собой области определения дробных

степеней секториального оператора и используемых при исследовании разрешимости квазилинейных уравнений.

Для уравнений, разрешенных относительно старшей дробной производной Герасимова – Капуто или Римана – Лиувилля, доказаны теоремы о локальной и глобальной однозначной разрешимости задачи Коши в смысле классических и обобщенных решений. Для квазилинейных уравнений с вырожденным оператором при старшей производной Герасимова – Капуто, называемых далее вырожденными, при условии секториальности пары операторов в линейной части уравнения исследована однозначная разрешимость задачи Шоуолтера – Сидорова. Полученные абстрактные результаты применены к начально-краевым задачам для дробных по времени уравнений и систем уравнений математической физики.

Тема диссертации непосредственно связана с научно-исследовательской работой кафедры математического анализа Челябинского государственного университета и соответствует паспорту научной специальности 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика, а именно: пункту 2 — «Начальные, краевые и смешанные задачи для дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений»; пункту 4 — «Качественная теория дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений»; пункту 6 — «Нелинейные дифференциальные уравнения и системы нелинейных дифференциальных уравнений»; пункту 10 — «Теория дифференциально-операторных уравнений».

Основы теории разрешающих семейств для уравнений с дробными производными в банаховых пространствах были заложены в работах Э. Бажлековой, В.Е. Федорова, М. Костича и других. В области исследования аналитических полугрупп операторов, порождающих их секториальных операторов и их дробных степеней важную роль играют классические результаты А. Пази, Д. Хенри. Теория вырожденных эволюционных уравнений (уравнений соболевского типа) развита в трудах С.Л. Соболева, Г.В. Демиденко, Н.А. Сидорова, R.E. Showalter, A. Favini,

А. Yagi, А.И. Кожанова, И.В. Мельниковой и многих других исследователей.

Теория уравнений с дробными производными активно развивается как в России, так и за рубежом. Этой тематикой занимались многие ученые: М. Caputo, А.А. Килбас, С.Г. Самко, А.М. Нахушев, В.В. Учайкин, а также зарубежные исследователи I. Podlubny, K. Diethelm, F. Mainardi, J. Pruss и другие. В настоящее время в России значительный вклад в развитие теории дробных дифференциальных уравнений вносят научные школы Института прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра (А.В. Псху, М.О. Мамчуев, С.Ш. Рехвиашвили), Уфимского университета науки и технологий (Р.К. Газизов, С.Ю. Лукашук, А.А. Касаткин), Челябинского государственного университета (В.Е. Федоров, М.В. Плеханова) и других научных центров.

Основные результаты диссертации изложены в трех главах.

В главе 1 построена теория комплексных степеней для операторов, порождающих аналитические разрешающие семейства уравнений с дробной производной. Определена шкала банаховых пространств, совпадающих с областями определения дробных степеней секториального оператора. Доказаны теоремы о локальной и глобальной однозначной разрешимости задачи Коши для квазилинейных уравнений с несколькими дробными производными Герасимова – Капуто или Римана – Лиувилля. Рассмотрены случаи классических и обобщенных решений. Приведены примеры использования абстрактных результатов при рассмотрении начально-краевых задач для уравнений в частных производных, в частности, для дробного по времени уравнения Кана – Хиллиарда.

В главе 2 исследованы квазилинейные уравнения с липшицевой нелинейностью. Доказаны теоремы о локальной и глобальной однозначной разрешимости задачи Коши в случае, когда нелинейный оператор непрерывен в норме графика секториального оператора. Введено понятие обобщенного решения, позволяющее ослабить требования на гладкость начальных данных и нелинейного оператора. Полученные результаты применены к исследованию начально-краевых задач для уравнений в

частных производных, в частности, для дробного по времени уравнения Аллена – Кана.

В главе 3 изучены квазилинейные уравнения с вырожденным оператором при старшей дробной производной Герасимова – Капуто. Для случая секториальной пары операторов в линейной части уравнения доказана однозначная разрешимость задачи Шоуолтера – Сидорова. При этом используются различные варианты ограничений на нелинейный оператор. Введено понятие обобщенного решения для вырожденного уравнения. Абстрактные результаты применены к начально-краевым задачам для вырожденных нелинейных систем уравнений: дробных по времени квазистационарных систем уравнений фазового поля и модели термоконвекции вязкоупругой жидкости.

Актуальность темы исследования. В последние десятилетия методы дробного интегро-дифференциального исчисления все чаще используются в задачах математического моделирования реальных процессов в средах со сложной структурой, когда возникают эффекты памяти, нелокального взаимодействия, в частности, в задачах теории вязкоупругости. Теория дробных дифференциальных уравнений активно развивается, при этом важное место занимают уравнения с дробными производными в банаховых пространствах. Развитие теории дробных дифференциальных уравнений в банаховых пространствах дает новые инструменты для изучения линейных и нелинейных задач математической физики. Путем редукции к таким уравнениям исследуются целые классы начально-краевых задач для уравнений в частных производных. В связи с этим тема исследования настоящей диссертационной работы является актуальной.

Теоретическая и практическая значимость результатов. Работа носит фундаментальный характер и развивает методы качественного анализа квазилинейных эволюционных уравнений дробного порядка. Предложенный подход, основанный на введении комплексных степеней секториального оператора и построении шкалы банаховых пространств, является естественным обобщением классической теории аналитических

полугрупп. Полученные результаты могут быть использованы при постановке и исследовании начально-краевых задач для нелинейных уравнений в частных производных дробного порядка по времени, возникающих в задачах вязкоупругости, гидродинамики, математической биологии и теории финансов. Эффективность разработанных методов продемонстрирована на примере дробных по времени уравнений Кана – Хиллиарда и Аллена – Кана.

Личное участие соискателя в получении научных результатов.

Все основные результаты диссертации получены соискателем самостоятельно. В совместных публикациях 1–3 соавторам принадлежат отдельные идеи и постановки задач, конкретизированные во введении к диссертации, тогда как соискателем выполнены полные доказательства теорем, проведён анализ результатов и подготовлены тексты статей. Статья 4 написана соискателем единолично. В диссертацию вошли только результаты, принадлежащие лично её автору.

Степень достоверности результатов проведенных исследований обеспечивается их публикацией в рецензируемых журналах из Перечня ВАК и международных реферативных баз данных Web of Science и Scopus. Все основные результаты, изложенные в диссертации Захаровой Т.А., достоверны и строго обоснованы. По теме диссертации имеются 4 статьи, из них статьи 1–4 опубликованы в журналах, входящих в международные реферативные базы данных Web of Science и Scopus, приравненных к изданиям из Перечня ВАК.

Новизна и значение выводов. В работе установлены условия однозначной разрешимости задачи Коши для новых классов квазилинейных уравнений в банаховых пространствах с нелинейной частью, зависящей от нескольких дробных производных Герасимова – Капуто. Линейная часть рассматриваемых уравнений порождает аналитическое в секторе разрешающее семейство операторов. Рассмотрены случаи локальной и глобальной разрешимости, классических и обобщенных решений, разрешенных относительно старшей производной и вырожденных эволюционных уравнений. Для секториальных операторов, т. е.

порождающих аналитические в секторе разрешающие семейства операторов для уравнений с дробной производной, в работе введено в рассмотрение понятие комплексной степени. Это позволило построить шкалу банаховых пространств, совпадающих с областями определения дробных степеней секториального оператора, и исследовать квазилинейные уравнения с несколькими производными Герасимова – Капуто или Римана – Лиувилля, в которых нелинейная часть задана и является липшицевой в некотором пространстве из этой шкалы. Полученные результаты применены к начально-краевым задачам для уравнений в частных производных, в частности к дробному по времени уравнению Кана – Хиллиарда.

Полнота изложения материалов диссертации в работах, опубликованных соискателем. Все основные результаты, изложенные в диссертационной работе, опубликованы в виде статей в рецензируемых изданиях, рекомендованных ВАК для публикации результатов диссертаций. Материалы диссертации с достаточной полнотой изложены в 18 работах, из которых 4 статьи опубликованы в журналах, входящих в международные реферативные базы данных Web of Science и Scopus, приравненных к изданиям из Перечня ВАК.

Основные публикации по теме диссертации:

1. Fedorov, V.E. Complex powers of fractional sectorial operators and quasilinear equations with Riemann–Liouville derivatives / V.E. Fedorov, A.S. Avilovich, T.A. Zakharova // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2023. — Vol. 44, no. 2. — P. 580–593.

2. Fedorov, V. E. Quasilinear fractional order equations and fractional powers of sectorial operators / V.E. Fedorov, M. Kostić, T.A. Zakharova // Fractal and Fractional. — 2023. — Vol. 7, no. 5. — P. 385.

3. Fedorov, V. E. Nonlocal solvability of quasilinear degenerate equations with Gerasimov–Caputo derivatives / V.E. Fedorov, T.A. Zakharova // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2023. — Vol. 44, no. 2. — P. 594–606.

4. Захарова, Т.А. Обобщенные решения квазилинейных уравнений с производными Герасимова – Капуто и секториальным оператором /

Т.А. Захарова // Челябинский физико-математический журнал — 2025. — Т. 10. Вып. 3. — С. 431–444.

Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на заседаниях научного семинара кафедры математического анализа Челябинского государственного университета (руководитель проф. В. Е. Федоров), на Общегородском семинаре имени А.М. Ильина по дифференциальным уравнениям математической физики (руководители проф. В.Ю. Новокшенов, проф. Л.А. Калякин), на Межгородском семинаре «Неклассические задачи математической физики» (руководитель проф. А.И. Кожанов), на конференциях: Международная научная конференция «Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения» (Уфа, 2022 г., 2023 г., 2025 г., 2026 г.); «The 9th International Conference on Differential and Functional Differential Equations» (Москва, 2022 г.); Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Суздаль, 2022 г.); «O. A. Ladyzhenskaya Centennial Conference on PDE's» (Санкт-Петербург, 2022 г.); X Международная конференция по математическому моделированию, посвященная 30-летию Академии наук Республики Саха (Якутия) и памяти первого Президента Академии наук РС(Я), член-корреспондента РАН В.В. Филиппова (Якутск, 2023 г.); Международная научная конференция «Неклассические уравнения математической физики и их приложения» (Ташкент, 2022 г.); Международная научная конференция «Уфимская осенняя математическая школа» (Уфа, 2023 г.); VII Международная конференция «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики» (Нальчик, 2023 г.); Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна, посвященная памяти академика В. П. Маслова (Воронеж, 2024 г.); Летние чтения (воркшоп) «Неклассические дифференциальные уравнения и математическое моделирование» (Самара, 2024 г.).

Текст диссертации представляет собой самостоятельную научно-квалификационную работу, не содержит заимствованного материала без ссылки на автора и (или) источник заимствования.

Диссертация «Квазилинейные эволюционные уравнения с дробными производными и дробные степени операторов» Захаровой Татьяны Анатольевны удовлетворяет п. 9–11, 13, 14 постановления Правительства Российской Федерации от 24 сентября 2013 г. № 842 «О порядке присуждения ученых степеней» и рекомендуется к защите на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по научной специальности 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика.

Заключение принято на заседании кафедры математического анализа Челябинского государственного университета.

На заседании присутствовало 12 человек (в том числе 3 доктора наук и 5 кандидатов наук).

Результаты голосования: «за» – 12 чел., «против» – 0 чел., «воздержалось» – 0 чел., протокол № 12 от «07» 04 2026 г.


Председатель заседания,

профессор кафедры математического анализа,

доктор физ.-мат. наук

С.М. Воронин / С.М. Воронин

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Челябинский государственный университет», Россия, 454001, г. Челябинск, ул. Братьев Кашириных, 129, телефон (351) 799-71-01, e-mail: odou@csu.ru, web-сайт <https://www.csu.ru>.


Подпись Воронин С.М.
удостоверяю С.М. Воронин
ведущий специалист
07.04.2026