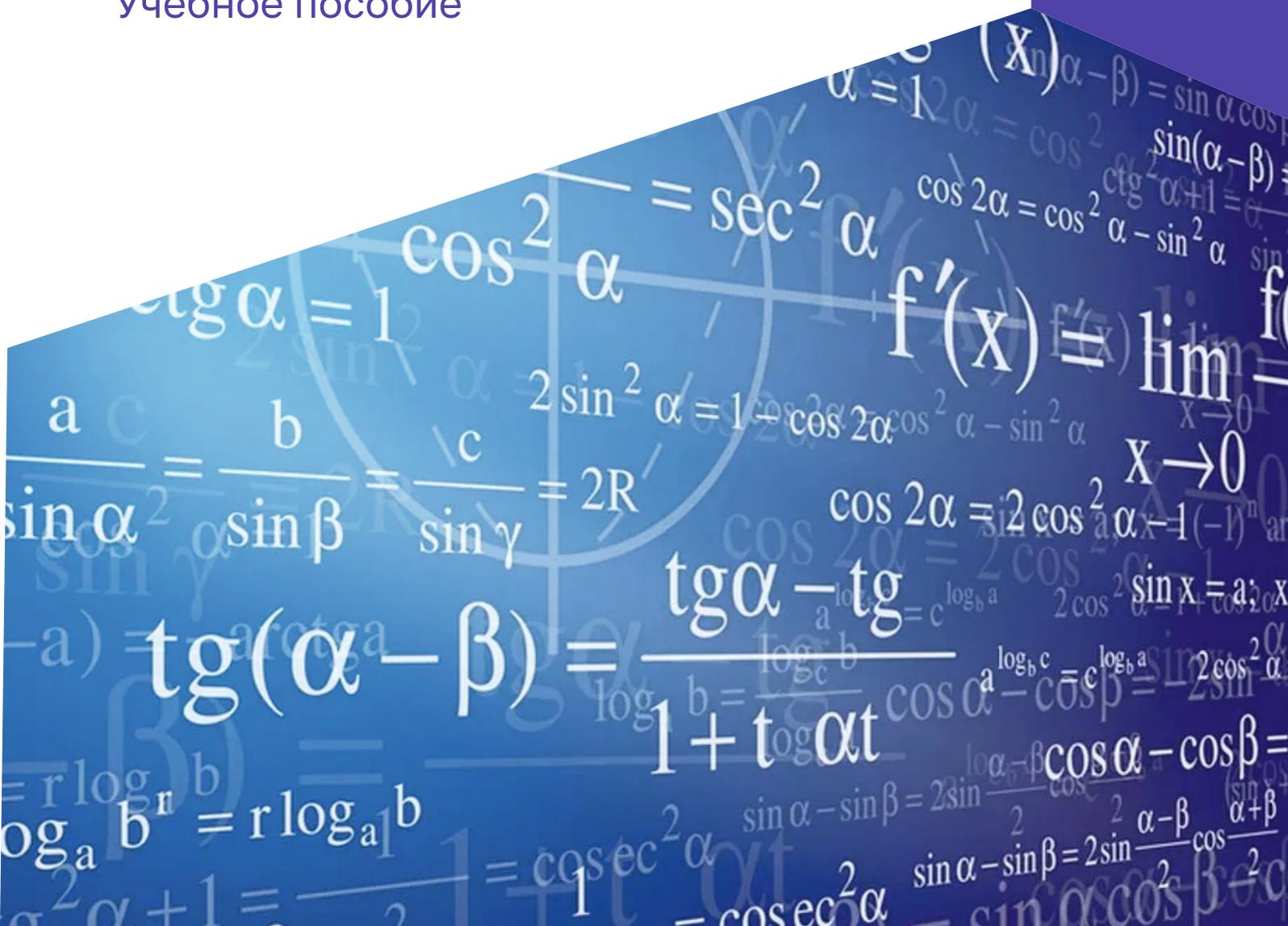


С.В. Федоров, А.В. Бондарев

# МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРАВЛЯЮЩИХ СИСТЕМ

Учебное пособие



**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ  
УФИМСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ НАУКИ И ТЕХНОЛОГИЙ**

**С.В. Федоров, А.В. Бондарев**

**МОДЕЛИРОВАНИЕ  
УПРАВЛЯЮЩИХ СИСТЕМ**

**Учебное пособие**

**Уфа  
РИЦ УУНиТ  
2024**

УДК 519.6  
ББК 22.19  
Ф33

*Печатается по решению кафедры  
«Технологии производства летательных аппаратов» УУНиТ.  
Протокол № 7 от 19.03.2024 г.*

***Рецензенты:***

**Е.А. Муравьева** – д-р техн. наук, профессор, зав. кафедрой  
«Автоматизированные технологические и информационные системы»  
Института химических технологий и инжиниринга ФГБОУ ВО «Уфимский  
государственный нефтяной технический университет»  
(филиал в г. Стерлитамаке);

**Л.А. Влацкая** – канд. техн. наук, доцент кафедры «Электро- и  
теплоэнергетика» ФГБОУ ВО «Оренбургский государственный университет»

**Федоров С.В., Бондарев А.В.**

Ф33 Моделирование управляющих систем: учебное пособие / С.В. Федоров,  
А.В. Бондарев. – Уфа: РИЦ УУНиТ, 2024. – 108 с.  
ISBN 978-5-7477-5877-3

Целью учебного пособия является изучение основ современной теории и приобретение практических навыков моделирования систем управления технологическими процессами и объектами.

В соответствии с этим приводятся основные сведения о математических моделях и общая методика создания математических моделей. Дано описание математической программы Mathcad. Описаны методы решения дифференциальных уравнений в Mathcad. Рассмотрено имитационное моделирование технических систем в Mathcad. Представлены методы синтеза математических моделей технических систем.

Учебное пособие предназначено для обучающихся по направлению 15.03.04 «Автоматизация технологических процессов и производств».

УДК 519.6  
ББК 22.19

ISBN 978-5-7477-5877-3

© Федоров С.В.,  
Бондарев А.В., 2024  
© УУНиТ, 2024

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
1. ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ О МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ	
1.1. Понятие мат. модели и математического моделирования	7
1.2. Классификация математических моделей	8
1.3. Общая методика создания математических моделей	9
1.4. Этапы моделирования систем	9
1.5. Примеры составления дифференциальных уравнений систем	15
2. ОПИСАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПРОГРАММЫ МATHCAD	
2.1. Введение	21
2.2. Программирование в Mathcad	23
2.3. Построение графиков в Mathcad	28
2.3.1. Графики в декартовых координатах	29
2.3.2. Графики в полярных координатах	32
2.4. Аналитические вычисления	33
2.5. Векторные и матричные операции	39
2.6. Математический анализ	43
3. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В МATHCAD	
3.1. Решение линейных дифференциальных уравнений с использованием преобразование Лапласа	48
3.2. Решение разностных уравнений с использованием z-преобразования Лапласа	50
3.3. Численные методы решения дифференциальных уравнений	51
4. ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ В МATHCAD	
4.1. Приведение дифференциального уравнения системы для машинного моделирования	54
4.2. Способ непосредственного интегрирования	54
4.3. Способ разложения на уравнения первого порядка	55
4.4. Способ комбинирования производных	57
4.5. Отыскание оригинала по известному изображению	58
4.6. Получение динамических характеристик	64

4.7. Получение частотных характеристик	68
4.8. Определение показателей качества переходного процесса	70
4.9. Определение интегральных оценок качества	75
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	76
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	78

## ВВЕДЕНИЕ

Целью учебного пособия является изучение основ современной теории и приобретение практических навыков моделирования систем управления технологическими процессами и объектами. Для достижения поставленной цели были сформулированы задачи освоения материала данного учебного пособия:

1. Научиться формулировать задачи моделирования систем и процессов;
2. Сформировать способность использовать основные законы естественнонаучных дисциплин для построения математических моделей систем и процессов;
3. Изучить особенности построения компьютерных алгоритмов и программ моделирования технических устройств;
4. Приобрести навыки применения методов математического анализа и моделирования в теоретических и экспериментальных исследованиях.

В соответствии с этими задачами в главе 1 приводятся основные сведения о математических моделях и общая методика создания математических моделей. Далее приводится описание математической программы Mathcad, в которой осуществляется имитационное моделирование систем (глава 2). В главе 3 описаны методы решения дифференциальных уравнений в Mathcad:

1. Решение линейных дифференциальных уравнений с использованием преобразование Лапласа;
2. Решение разностных уравнений с использованием  $z$ -преобразования Лапласа;
3. Численные методы решения дифференциальных уравнений.

В главе 4 рассмотрено имитационное моделирование технических систем в Mathcad с получением динамических, частотных характеристик систем, а также показателей качества.

В результате изучения дисциплины обучаемые должны:

**Знать:** основы имитационного моделирования, современные алгоритмы и компьютерные программы.

**Уметь** создавать математические модели систем.

**Владеть** методикой создания программ для имитационного моделирования на современных алгоритмических языках программирования с использованием программных комплексов для

автоматизации математических расчетов.

Учебное пособие предназначено для обучающихся по направлению 15.03.04 «Автоматизация технологических процессов и производств». Может быть полезным для других специальностей, связанных с проектированием сложных технических комплексов и разработкой систем управления.

# 1. ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ О МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ

## 1.1. Понятие мат. модели и математического моделирования

**Модель** – это устройство воспроизводящее, имитирующее строение или действие какого-либо другого, «моделируемого» устройства в каких-либо целях [1]. Изучение какой-либо системы или технологического процесса по его модели называется **моделированием**, при этом моделируемая система называется **объектом моделирования**. Сущность моделирования заключается в замене всей исследуемой системы или некоторых ее элементов моделью, по своим свойствам в той или иной мере воспроизводящей свойства исходной системы и в исследовании этой модели. Тогда в модели возникают процессы, аналогичные процессам в реальной системе. Эти процессы можно наблюдать, регистрировать, рассчитывать. Различают три способа моделирования [1, 2]:

**1. Физическое моделирование**, основанное на изучении явлений на моделях одной физической природы с оригиналом. Например, если мы хотим создать принципиально новую промышленную установку для тепловой обработки какого-либо пищевого продукта, то сначала мы создадим лабораторную установку небольшого размера и небольшой производительности, на которой исследуем новый способ. При создании нового мощного электрогенератора часто создают сначала его физическую модель – очень небольшой генератор, который исследуют, а результаты исследования переносят на мощный генератор. Авиаконструктор при создании нового самолета сначала исследует его свойства на деревянной маленькой модели, внешне полностью совпадающей с будущим самолетом. Для переноса свойств физической модели на объект моделирования существует специальная математическая дисциплина – теория подобия.

**2. Математическое моделирование**, при котором в качестве модели служит математическое описание системы, называемое её **математической моделью**. После составления математическую модель исследуют или обычными способами, как изложено в специальных дисциплинах – теоретической механике, сопромате, электротехнике, теории автоматического управления и др., или на ЭВМ методом **имитационного моделирования**, изучаемым в

данном курсе. При **имитационном моделировании** математическую модель системы вводят в ЭВМ, подают на ее вход входное воздействие, решают последовательно все математические зависимости, составляющие математическую модель и получают численное значение результата. Такое «проигрывание» проводят много раз, меняя, например, параметры модели и в конце концов подбирают такие параметры, при которых результат получается удовлетворительным.

3. Обычно объект управления сложен, громоздок и дорог при исполнении в металле, а сам регулятор, как правило, не дорог и дешев. Поэтому после проведения математического имитационного моделирования, которое дает предварительные результаты, часто изготавливают рассчитанный по результатам математического моделирования регулятор в металле, присоединяют его к математической модели объекта управления и проводят повторное, более точное имитационное моделирование такой смешанной системы. Этот процесс называется **полунатурным имитационным моделированием**.

## 1.2. Классификация математических моделей

Математические модели можно разделить по классам описываемых ими явлений. Если математическая модель описывает технологический процесс или работу системы в установившемся режиме, она называется **статической**. Математическая модель, описывающая технологический процесс или работу системы в динамике, называется **динамической**.

Если в математической модели не учитываются случайные явления, происходящие в данном технологическом процессе, то математическая модель является **детерминированной**, в противном случае в ней должны быть использованы методы теории вероятностей и математической статистики и математическая модель является **вероятностной** (статистической).

Кроме того, математические модели различают по использованным в них математическим методам и зависимостям.

Существуют алгебраические, матричные игровые модели, модели массового обслуживания и т. п. [1]

### 1.3. Общая методика создания математических моделей

Различают два основных метода создания математических моделей: **аналитический** и **экспериментальный**. Если объект управления можно разбить на отдельные подсистемы, аналитические зависимости (уравнения) для которых известны, то, исходя из них, можно составить математическую модель всей системы, или всего объекта управления. Такой способ составления математических моделей называется аналитическим. Для систем обычно математические модели составляются именно таким способом.

При экспериментальном способе нужно иметь объект управления в натуре или, по крайней мере, их физическую модель. При этом способе задаются структурой исследуемой системы (или она заранее известна) и измеряют зависимость выходных сигналов системы от всех входных ее сигналов. К входным сигналам относятся управляющие сигналы и помехи. При знании структуры системы на основании этих замеров можно определить ее параметры.

### 1.4. Этапы моделирования систем

Рассмотрим основные этапы моделирования системы, к числу которых относятся: построение концептуальной модели системы и ее формализация; алгоритмизация модели системы и ее машинная реализация; получение и интерпретация результатов моделирования системы [3, 4].

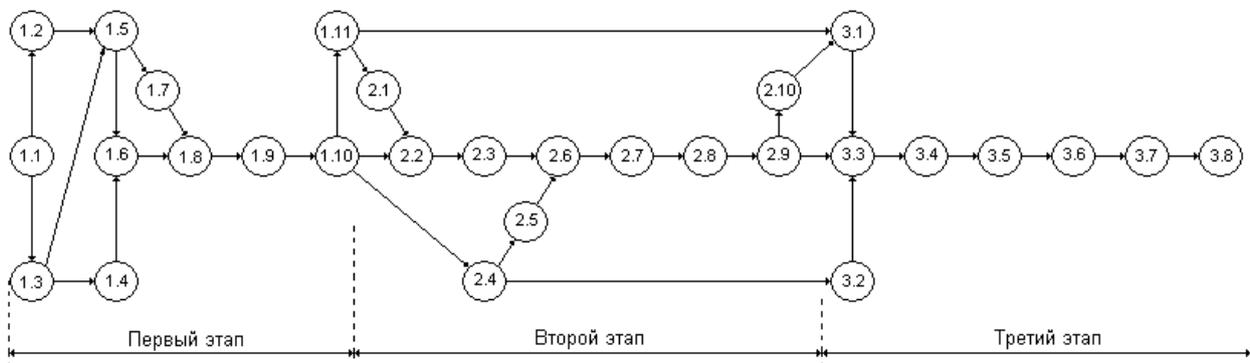


Рис. 1.1. Взаимосвязь этапов моделирования систем

Взаимосвязь перечисленных этапов моделирования систем и их составляющих (подэтапов) может быть представлена в виде сетевого

графика, показанного на рис. 1.1. Перечислим эти подэтапы [3,4]: 1.1 — постановка задачи машинного моделирования системы; 1.2 — анализ задачи моделирования системы; 1.3 — определение требований к исходной информации об объекте моделирования и организация ее сбора; 1.4 — выдвижение гипотез и принятие предположений; 1.5 — определение параметров и переменных модели; 1.6 — установление основного содержания модели; 1.7 — обоснование критериев оценки эффективности системы; 1.8 — определение процедур аппроксимации; 1.9 — описание концептуальной модели системы; 1.10 — проверка достоверности концептуальной модели; 1.11 — составление технической документации по первому этапу; 2.1 — построение логической схемы модели; 2.2 — получение математических соотношений; 2.3 — проверка достоверности модели системы; 2.4 — выбор инструментальных средств для моделирования; 2.5 — составление плана выполнения работ по программированию; 2.6 — спецификация и построение схемы программы; 2.7 — верификация и проверка достоверности схемы программы; 2.8 — проведение программирования модели; 2.9 — проверка достоверности программы; 2.10 — составление технической документации по второму этапу; 3.1 — планирование машинного эксперимента с моделью системы; 3.2 — определение требований к вычислительным средствам; 3.3 — проведение рабочих расчетов; 3.4 — анализ результатов моделирования системы; 3.5 — представление результатов моделирования; 3.6 — интерпретация результатов моделирования; 3.7 — подведение итогов моделирования и выдача рекомендаций; 3.8 — составление технической документации по третьему этапу.

Таким образом, процесс моделирования системы сводится к выполнению перечисленных подэтапов, сгруппированных в виде трех этапов. На этапе построения концептуальной модели и ее формализации проводится исследование моделируемого объекта с точки зрения выделения основных составляющих процесса его функционирования, определяются необходимые аппроксимации, и получается обобщенная схема модели системы, которая преобразуется в машинную модель на втором этапе моделирования путем последовательной алгоритмизации и программирования модели. Последний третий этап моделирования системы сводится к проведению согласно полученному плану рабочих расчетов на ЭВМ с

использованием выбранных программно-технических средств, получению и интерпретации результатов моделирования системы с учетом воздействия внешней среды. Очевидно, что при построении модели и ее машинной реализации при получении новой информации возможен пересмотр ранее принятых решений, т. е. процесс моделирования является итерационным. Рассмотрим содержание некоторых этапов более подробно [4].

На *первом этапе* машинного моделирования – построения *концептуальной модели* объекта и её формализации – формируется модель и строится её формальная схема, т. е. основным назначением этого этапа является переход от содержательного описания объекта к его математической модели, другими словами, процесс формализации [4].

Формальную модель объекта моделирования можно представить в виде множества величин, описывающих процесс функционирования реальной системы и образующих в общем случае следующие подмножества:

1. Совокупность *входных воздействий* на систему:

$$g_i \in G, \quad i = 1, \dots, p;$$

2. Совокупность *воздействий внешней среды*:

$$v_i \in V, \quad i = 1, \dots, q;$$

3. Совокупность *внутренних (собственных) параметров* системы:

$$h_i \in H, \quad i = 1, \dots, k;$$

4. Совокупность *выходных характеристик* системы:

$$y_i \in Y, \quad i = 1, \dots, r.$$

При этом в перечисленных подмножествах можно выделить управляемые и неуправляемые переменные. В общем случае  $g_i, v_i, h_i, y_i$  являются элементами непересекающихся подмножеств и содержат как детерминированные, так и стохастические составляющие.

При моделировании системы входные воздействия, воздействия внешней среды и внутренние параметры системы являются *независимыми (экзогенными) переменными*, которые в векторной форме имеют, соответственно, вид:

$$\vec{g}(t) = (g_1(t), g_2(t), \dots, g_p(t)); \vec{v}(t) = (v_1(t), v_2(t), \dots, v_q(t)); \vec{h}(t) = (h_1(t), h_2(t), \dots, h_k(t)),$$

а выходные характеристики системы являются *зависимыми*

(эндогенными) переменными и в векторной форме имеют вид:  
 $\vec{y}(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_r(t)).$

Процесс функционирования системы описывается во времени оператором  $F$ , который в общем случае преобразует экзогенные переменные в эндогенные в соответствии с соотношением вида:

$$\vec{y}(t) = F(\vec{g}, \vec{v}, \vec{h}, t). \quad (1.1)$$

Совокупность зависимостей выходных характеристик системы от времени  $y_i(t)$  для всех видов  $i=1, \dots, r$  называется *выходной траекторией*  $\vec{y}(t)$ . Зависимость (1.1) называется *законом функционирования системы* и обозначается  $F$ . В общем случае закон функционирования системы  $F$  может быть задан в виде функции, функционала, логических условий, в алгоритмической и табличных формах или в виде словесного правила соответствия.

Весьма важным для описания и исследования системы является понятие *алгоритма функционирования*, под которым понимается метод получения выходных характеристик с учётом входных воздействий  $\vec{g}(t)$ , воздействий внешней среды  $\vec{v}(t)$  и собственных параметров системы  $\vec{h}(t)$ . Очевидно, что один и тот же закон функционирования  $F$  может быть реализован различными способами, т. е. с помощью множества различных алгоритмов функционирования.

Соотношения (1.1) являются математическим описанием поведения объекта (системы) моделирования во времени  $t$ , т. е. отражают его динамические свойства. Поэтому математические модели такого вида принято называть *динамическими моделями (системами)*.

Для *статических моделей* математическая модель (1.1) представляет собой отображение между двумя подмножествами свойств моделируемого объекта  $Y$  и  $\{G, V, H\}$ , что в векторной форме может быть записано как

$$\vec{y} = f(\vec{g}, \vec{v}, \vec{h}).$$

На *втором этапе* моделирования – этапе алгоритмизации модели и её машинной реализации – математическая модель, сформированная в начале этапа в виде явных функций, т. е. в виде

аналитической модели, воплощается в конкретную машинную модель. Этот этап представляет собой этап практической деятельности, направленной на реализацию идей и математических схем в виде машинной модели процесса функционирования системы. При выполнении данного этапа формируются математические соотношения, характеризующие закон функционирования системы, который на этапе построения концептуальной модели был неявно задан в виде соотношения (1.1) [4].

Полученное уравнение описывает изменение выходной величины  $y$  во времени (в дальнейшем будут рассматриваться только одномерные объекты при отсутствии внутренних параметров  $\bar{h}(t)$ ). В общем случае системы бывают достаточно сложными, поэтому уравнение динамики оказывается нелинейным и, как правило, это дифференциальное уравнение или система дифференциальных уравнений. Порядок дифференциальных уравнений может быть довольно высоким, то есть зависимостью связаны как сами входные и выходные величины  $v(t), g(t), y(t)$ , так и скорости их изменения, ускорения и т. д. Поэтому уравнение динамики в общем виде можно записать так:

$$F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}, g, g', g'', \dots, g^{(m)}, v, v', v'', \dots, v^{(l)}) = 0.$$

Поскольку уравнение динамики системы является достаточно сложным, то возникает необходимость упрощения данного уравнения. Для этого нелинейные уравнения заменяют линейными, которые приблизительно описывают динамические процессы. Получаемая при этом точность уравнений оказывается достаточной для технических задач. Процесс преобразования нелинейных уравнений в линейные называется *линеаризацией уравнений динамики*. При этом функцию  $F$  раскладывают в ряд Тейлора в окрестности точки номинального режима, отбрасывая члены ряда высоких порядков малости.

Рассмотрим сначала геометрическое обоснование линеаризации. В нормально функционирующей системе значение регулируемой и всех промежуточных величин незначительно отличается от требуемых. В пределах малых отклонений все нелинейные зависимости между величинами, входящими в уравнение динамики, могут быть приближенно представлены отрезками прямых линий.

Например, нелинейная статическая характеристика элемента системы на участке АВ (рис. 1.2) может быть представлена отрезком касательной в точке номинального режима А"В".

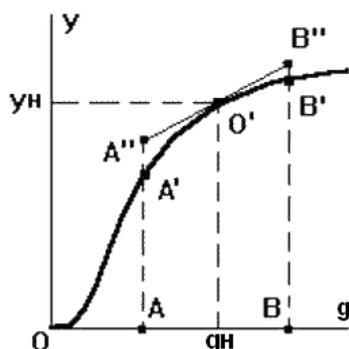


Рис 1.2. Нелинейная статическая характеристика элемента системы

Начало координат переносится в точку  $O'$ , и в уравнениях записываются не абсолютные значения величин  $y$ ,  $g$ ,  $v$ , а их отклонения от номинальных значений:  $\Delta y = y - y_n$ ,  $\Delta g = g - g_n$ ,  $\Delta v = v - v_n$ . Это позволяет получить *нулевые начальные условия*, если считать, что при  $t \leq 0$  система находилась в номинальном режиме в состоянии покоя.

Математическое обоснование линеаризации состоит в том, что если известно значение  $f(a)$  какой-либо функции  $f(x)$  в любой точке  $x = a$ , а также значения производных от этой функции в данной точке  $f'(a)$ ,  $f''(a)$ , ...,  $f^{(n)}(a)$ , то в любой другой достаточно близкой точке  $x + \Delta x$  значение функции можно определить, разложив ее в окрестности точки  $a$  в ряд Тейлора:

$$f(x + \Delta x)|_a = f(a) + \frac{\Delta x}{1!} f'(a) + \frac{\Delta x^2}{2!} f''(a) + \frac{\Delta x^3}{3!} f'''(a) + \dots$$

В результате, раскладывая функцию  $F$  в ряд Тейлора в окрестности точки номинального режима и отбрасывая члены ряда высоких порядков малости, получим линейное уравнение динамики:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m g}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} g}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dg}{dt} + b_0 g +$$

$$+ c_l \frac{d^l v}{dt^l} + c_{l-1} \frac{d^{l-1} v}{dt^{l-1}} + \dots + c_1 \frac{dv}{dt} + c_0 v.$$

К линеаризованной САУ можно применить *принцип суперпозиции*: реакция системы на несколько одновременно действующих входных воздействий равна сумме реакций на каждое воздействие в отдельности [3].

## 1.5. Примеры составления дифференциальных уравнений систем

**Пример 1** [5]. Составим дифференциальное уравнение двигателя постоянного тока с независимым возбуждением (рис. 1.3, а) и проведем его линеаризацию. По второму закону Ньютона для вращательного движения уравнение моментов на валу двигателя имеет вид:

$$J \frac{d\omega}{dt} = M_D - M_C, \quad (1.2)$$

где  $\omega$  – угловая скорость,  $J$  – момент инерции движущихся частей, приведенный к валу,  $M_D$  – вращающий момент,  $M_C$  – момент сопротивления на валу двигателя. Вращающий момент  $M_D$  является функцией угловой скорости  $\omega$  и напряжения  $u$ , приложенного к якорию:  $M_D = M_D(\omega, u)$ , а момент сопротивления  $M_C$  является функцией времени  $t$  и величины  $\omega$ :  $M_C = M_C(\omega, t)$ . Типичные механические характеристики электродвигателей постоянного тока с независимым возбуждением показаны на рис. 1.3, б.

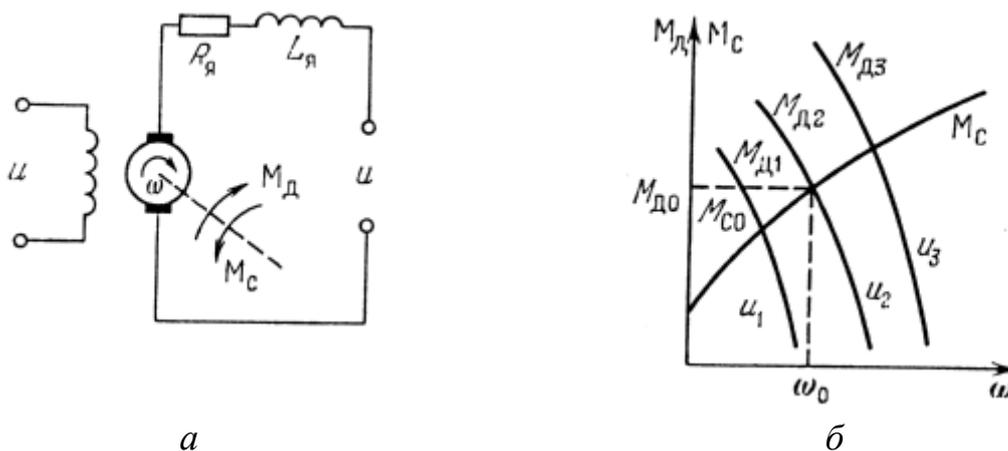


Рис. 1.3. Схема двигателя постоянного тока с независимым возбуждением (а) и механические характеристики электродвигателей постоянного тока с независимым возбуждением

Так как  $M_C = M_C(\omega, u)$  и  $M_C = M_C(\omega, t)$  являются нелинейными функциями, то уравнение (1.2) будет нелинейным дифференциальным уравнением. Для линеаризации уравнения (1.2) перейдем к уравнению в отклонениях от установившегося режима. В установившемся режиме  $M_{C0} = M_{D0}$ . Пусть при этом  $\omega = \omega_0$ . Разложим

нелинейные функции  $M_d(\omega, u)$  и  $M_c(\omega, t)$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $(\omega_0, u_0)$  и отбросим члены, содержащие производные выше первого порядка:

$$M_d = M_{d0} + \left(\frac{\partial M_d}{\partial \omega}\right)_0 \Delta\omega + \left(\frac{\partial M_d}{\partial u}\right)_0 \Delta u, \quad (1.3)$$

$$M_c = M_{c0} + \left(\frac{\partial M_c}{\partial \omega}\right)_0 \Delta\omega + \left(\frac{\partial M_c}{\partial t}\right)_0 \Delta t. \quad (1.4)$$

Из уравнений (1.2) - (1.4) имеем:

$$J \frac{d\omega}{dt} + \left[\left(\frac{\partial M_c}{\partial \omega}\right)_0 - \left(\frac{\partial M_d}{\partial \omega}\right)_0\right] \Delta\omega = -M_c(t) + \left(\frac{\partial M_d}{\partial u}\right)_0 \Delta u. \quad (1.5)$$

В этом уравнении все члены имеют размерность момента. Часто при исследовании систем бывает необходимо получить уравнение в относительных единицах с безразмерными коэффициентами или с коэффициентами, имеющими размерность времени в степени, равной порядку соответствующей производной.

Для перехода к относительным безразмерным единицам разделим обе части уравнения (1.5) на номинальное значение момента  $M_H$  (см. рис. 1.3):

$$\frac{J}{M_H} \frac{d\omega}{dt} + \frac{1}{M_H} \left[\left(\frac{\partial M_c}{\partial \omega}\right)_0 - \left(\frac{\partial M_d}{\partial \omega}\right)_0\right] \Delta\omega = -\frac{1}{M_H} \Delta M_c(t) + \frac{1}{M_H} \left(\frac{\partial M_d}{\partial u}\right)_0 \Delta u.$$

Выберем некоторые величины переменных в качестве базисных. Для напряжения  $u$  удобно взять максимальное значение  $u_{max}$ , а для угловой скорости – ее номинальное значение  $\omega_H$ . Умножим и разделим каждый член уравнения на соответствующую базисную величину:

$$\frac{J\omega_H}{M_H\omega_H} \frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega_H}{M_H} \left[\left(\frac{\partial M_c}{\partial \omega}\right)_0 - \left(\frac{\partial M_d}{\partial \omega}\right)_0\right] \frac{\Delta\omega}{\omega_H} = -\frac{1}{M_H} \Delta M_c(t) + \frac{u_{max}}{M_H} \left(\frac{\partial M_d}{\partial u}\right)_0 \frac{\Delta u}{u_{max}}.$$

Введем обозначения:

$$\frac{\Delta M_c(t)}{M_H} = f(t), \quad \frac{J\omega_H}{M_H} = T, \quad \frac{\Delta\omega}{\omega_H} = y, \quad \frac{\Delta u}{u_{max}} = x,$$

$$\frac{u_{max}}{M_H} \left( \frac{\partial M_D}{\partial u} \right)_0 = k_y, \left( \frac{\partial M_C}{\partial \omega} \right)_0 \frac{\omega_H}{M_H} - \left( \frac{\partial M_D}{\partial \omega} \right)_0 \frac{\omega_H}{M_H} = k_c$$

Тогда получим:

$$T \frac{dy}{dt} + k_c y = -f(t) + k_y x(t). \quad (1.6)$$

В уравнении (1.6) функция  $f(t)$  характеризует возмущающее воздействие,  $x(t)$  – управляющее воздействие,  $y(t)$  – выходная величина (координата). Коэффициент  $T$  имеет размерность времени (с) и называется постоянной времени двигателя. Отношение  $k_y/k_c$  характеризует зависимость между выходной координатой  $y$  и входным воздействием  $x$  в установившемся режиме и называется коэффициентом усиления.

**Пример 2.** Уравнение электрического четырехполюсника. Рассмотрим, как составляется дифференциальное уравнение пассивного электрического четырехполюсника, схема которого приведена на рис. 1.4.

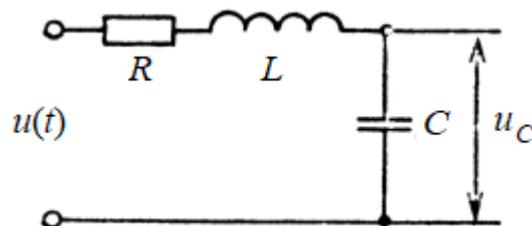


Рис. 1.4. Схема пассивного электрического четырехполюсника

Входной координатной здесь будет напряжение на зажимах  $u(t)$ , а выходной – напряжение на конденсаторе  $u_C$ . Ввиду того, что цепь является линейной, уравнение можно составлять как в отклонениях, так и в безразмерных относительных единицах.

Так как падение напряжения на сопротивлении равно  $u_R = R_i = R dq/dt$ , а падение напряжения в катушке индуктивности будет  $u_L = L di/dt = L d^2q/dt^2$ , можем записать:

$$u(t) = u_L + u_C + u_R = L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C}.$$

Учитывая, что  $q = Cu_c$ , получаем:

$$LC \frac{d^2 u_c}{dt^2} + RC \frac{du_c}{dt} + u_c = u(t)$$

Обозначим  $u_c = y$ ,  $u(t) = x$ ,  $CL = T_1^2$ ,  $RC = T_2$ ; тогда уравнение электрического четырехполюсника будет иметь вид

$$T_1^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + T_2 \frac{dy}{dt} + y = x \quad (1.7)$$

**Пример 3.** Управление углом тангажа самолета. Движение самолета состоит из двух составляющих: движения центра тяжести (центра масс) и вращения вокруг него. Каждое из этих движений имеет три степени свободы. Управление самолетом осуществляется изменением силы тяги и положением рулей высоты.

Движение самолета, при котором вектор скорости центра масс находится в плоскости симметрии, называется *продольным* и характеризуется тремя степенями свободы: двумя составляющими скорости движения центра масс, лежащими в вертикальной плоскости, и вектором угловой скорости вращения относительно центра масс, нормальным к плоскости симметрии. Угол  $\varphi$  между горизонтом и продольной осью самолета называется *углом тангажа* (рис. 1.5).

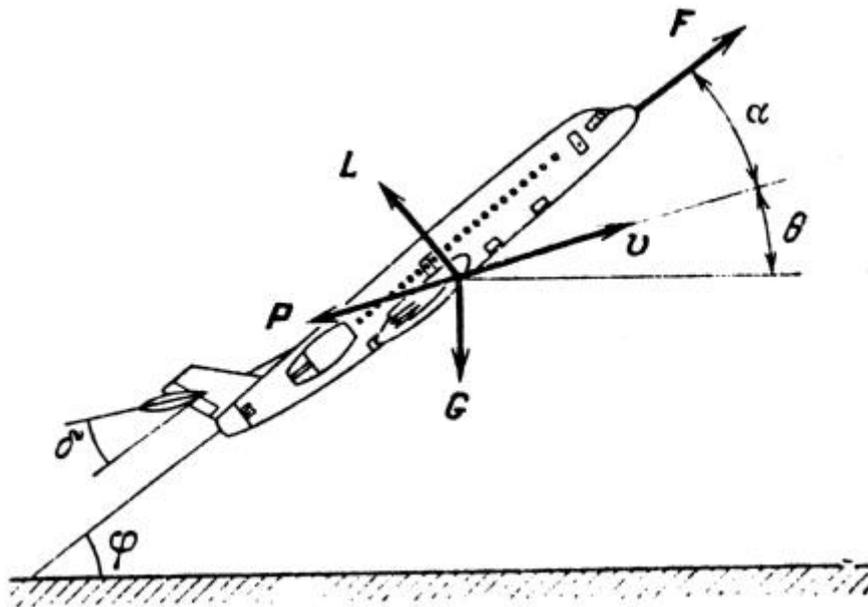


Рис. 1.5. Схема движение самолета

Рассмотрим модель автопилота, управляющего углом тангажа самолета. Управляемыми величинами являются скорость движения  $v$  и угол тангажа  $\varphi$ . Управление самолетом осуществляется с помощью изменения силы тяги  $F$ , совпадающей по направлению с продольной осью самолета, и положения руля высоты (угол  $\delta$ ), изменяющего вращающий момент, поворачивающий самолет в вертикальной плоскости симметрии. На самолет также действует сила веса  $G$ , подъемная сила  $L$ , перпендикулярная вектору скорости  $v$ , и сила лобового сопротивления  $P$ , направленная навстречу вектору  $v$ .

Для построения математической модели процессам движения самолета рассмотрим уравнения сил и моментов при продольном движении самолета. Обозначим:  $\alpha$  – угол между продольной осью самолета и вектором скорости, называемый *углом атаки*;  $\theta$  – угол между горизонтальной плоскостью и вектором скорости, называемый *углом наклона траектории*.

Из рис. 1.5

$$\varphi = \alpha + \theta \quad (1.8)$$

Уравнения сил и моментов можно записать так:

– для оси, совпадающей с вектором скорости  $v$ :

$$m \frac{dv}{dt} = F \cos\alpha - P - G \sin\theta; \quad (1.9)$$

– для оси, нормальной к вектору скорости:

$$mv \frac{d\theta}{dt} = F \sin\alpha + L - G \cos\theta; \quad (1.10)$$

– для моментов сил, действующих в продольной плоскости:

$$J \frac{d^2\varphi}{dt^2} = M, \quad (1.11)$$

где  $J$  – момент инерции самолета относительно оси, перпендикулярной продольной плоскости и проходящей через центр масс,  $M$  – суммарный момент аэродинамических сил относительно той же оси,  $m$  – масса самолета.

В системе уравнений (1.8) – (1.11) величины  $P$ ,  $L$  и  $M$  представляют собой сложные нелинейные функции величин  $v$ ,  $\alpha$  и других величин, характеризующих процесс движения самолета. Поэтому для упрощения анализа процесса управления эти

нелинейные функции необходимо разложить в ряд Тейлора и отбросить члены ряда высокого порядка.

Рассмотрим математическую модель автопилота для случая, когда полет проходит с постоянной скоростью  $v = \text{const}$  и постоянной силой тяги  $F = F_0 = \text{const}$ . Пусть начальный режим характеризуется величинами  $P_0, L_0, M_0 = 0, \delta_0, \varphi_0, \theta_0$  и  $(d\varphi/dt)_0 = 0$ . Изменение угла руля высоты  $\delta$  на величину  $\Delta\delta$  приводит к изменениям  $P, L, M$ , а также  $\varphi$  и  $\alpha$ .

При линейризации вышеуказанных функций можно записать:

$$\alpha = \alpha_0 + \Delta\alpha, \varphi = \varphi_0 + \Delta\varphi, \delta = \delta_0 + \Delta\delta, \quad (1.12)$$

$$L \approx L_0 + \left(\frac{\partial L}{\partial \alpha}\right)_0 \Delta\alpha = L_0 + l_\alpha \Delta\alpha, \quad (1.13)$$

$$M \approx \left(\frac{\partial M}{\partial \delta}\right)_0 \Delta\delta + \left(\frac{\partial M}{\partial \alpha}\right)_0 \Delta\alpha = L_0 + l_\alpha \Delta\alpha = J(m_\delta \Delta\delta - m_\alpha \Delta\alpha - m_\varphi \frac{d(\Delta\varphi)}{dt}), \quad (1.14)$$

$$G \cos\theta = G \cos\theta_0 - G \sin\theta_0 \Delta\theta \approx G \cos\theta_0, \quad (1.15)$$

$$P \sin\alpha = P_0 \sin\alpha_0 + P_0 \cos\alpha_0 \Delta\alpha_0. \quad (1.16)$$

В этих уравнениях использованы следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial L}{\partial \alpha}\right)_0 &= l_\alpha, & \left(\frac{\partial M}{\partial \delta}\right)_0 &= m_\delta J, \\ \left(\frac{\partial M}{\partial \alpha}\right)_0 &= -m_\alpha J, & \left(\frac{\partial M}{\partial \varphi}\right)_0 &= -m_\varphi J, \end{aligned} \quad (1.17)$$

где  $\dot{\varphi} = d\varphi/dt$ .

Перейдем от уравнений (1.9) – (1.11) к уравнениям для приращений:

$$P_0 \sin\alpha + L_0 - G_0 \cos\theta_0 = 0. \quad (1.18)$$

Учитывая, что для установившегося режима  $(d\theta/dt)_0 = 0$ , имеем:

$$d\frac{\Delta\varphi}{dt} = d\frac{\Delta\alpha}{dt} T_\varphi, \quad (1.19)$$

$$\frac{d^2\Delta\varphi}{dt^2} = m_\varphi \frac{d\Delta\varphi}{dt} = m_\delta \Delta\delta - m_\alpha \Delta\alpha. \quad (1.20)$$

В выражении (1.19) величина

$$T_\varphi = T_1 = m_\varphi / (P_0 \cos\alpha_0 + \frac{l}{\alpha}).$$

## 2. ОПИСАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПРОГРАММЫ MATHCAD

### 2.1. Введение

Вычислительная мощь компьютера позволяет использовать его как средство автоматизации научной работы. Для решения сложных расчётных задач используют программы, написанные специально. В то же время, в научной работе встречается широкий спектр задач ограниченной сложности, для решения которых можно использовать универсальные средства.

К такого рода задачам относятся, например, следующие:

1. Подготовка научно-технических документов, содержащих тексты и формулы, записанные в привычной для специалистов форме;

2. Вычисление результатов математических операций, в которых участвуют числовые константы, переменные и размерные физические величины;

3. Операции с векторами и матрицами;

4. Решение уравнений и систем уравнений;

5. Статистические расчёты и анализ данных;

6. Построение двумерных и трёхмерных графиков;

7. Тождественные преобразования выражений, аналитическое решение уравнений и систем;

8. Дифференцирование и интегрирование, аналитическое и численное;

9. Решение дифференциальных уравнений;

10. Проведение серий расчётов с разными значениями начальных условий и других параметров;

11. Программирование.

К универсальным программам, пригодным для решения таких задач, относится программа Mathcad, которая представляет собой автоматизированную систему, позволяющую динамически обрабатывать данные в числовом и аналитическом виде [6, 7, 8, 9].

Документ программы Mathcad называется *рабочим листом*. Он содержит объекты: *формулы, программы и текстовые блоки*. В ходе расчётов формулы обрабатываются последовательно, слева на право и сверху вниз, а текстовые блоки игнорируются.

Ввод информации осуществляется в месте расположения курсора. Программа Mathcad использует три вида курсоров. Если ни один объект не выбран, используется *крестообразный курсор* красного цвета  $+$ , определяющий место создания следующего объекта. При вводе формул используется *уголковый курсор* синего цвета , указывающий текущий элемент выражения. При вводе данных в текстовый блок применяется *текстовый курсор* в виде красной вертикальной черты  [6, 7, 8, 9].

Элементы формул можно вводить с клавиатуры или с помощью специальных панелей управления (программы записываются только при помощи панели программирования). Панели управления (рисунок 1) открывают с помощью меню «Вид» или кнопками панели управления «Математика». Для ввода элементов формул, а также программ предназначены следующие панели:

- панель управления «Арифметика» для ввода чисел, знаков типичных математических операций и наиболее часто употребляемых стандартных функций;
- панель управления «Вычисления» для ввода операторов вычисления и знаков логических операций;
- панель управления «Графики» для построения графиков;
- панель управления «Матрицы» для ввода векторов и матриц, и задания матричных операций;
- панель управления «Булево», содержащая знаки логических операций;
- панель управления «Мат. анализ» для вычисления производных, интегралов, пределов, а также операции суммирования и произведения;
- панель управления «Греческий алфавит» для ввода греческих букв (их можно также вводить с клавиатуры, если сразу после ввода соответствующего латинского символа нажимать сочетание клавиш CTRL+G, например, [a][CTRL+G] –  $\alpha$ , [W][CTRL+G] –  $\Omega$ );
- панель управления «Символы» для управления аналитическими преобразованиями;
- панель управления «Программирование» для создания программ.

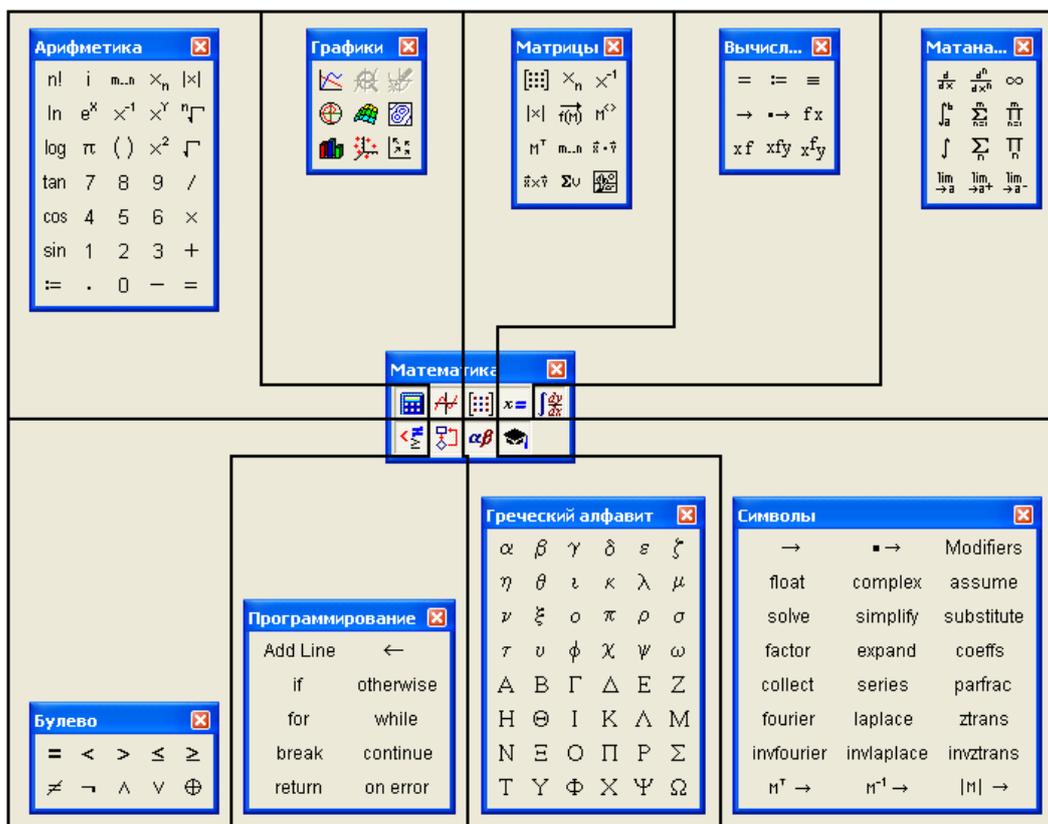


Рис. 2.1. Панели инструментов программы Mathcad

## 2.2. Программирование в Mathcad

Панель инструментов, отвечающая за программирование, приведена на рис. 2.2.

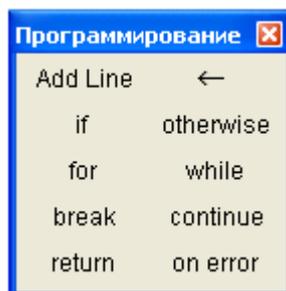
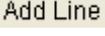


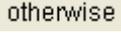
Рис. 2.2. Панель инструментов Программирование

В Mathcad имеется встроенный язык программирования. Это язык более высокого уровня, чем Бейсик и Паскаль, он позволяет производить объектно-ориентированные программы.

При программировании в Mathcad в программе участвуют локальные переменные, действие которых распространяется только на программу, а не на весь документ в целом, частью которого является программа. Переменные, действующие во всем документе,

называются глобальными. Присвоение переменных, находящихся в блоке программы, осуществляется с помощью символа ←.

Для составления программ необходимо, прежде всего, вызвать панель программирования, имеющий вид  и находящийся на математической панели инструментов. Далее необходимо выделить область рабочего листа, который будет определён Mathcadом как программа. Это делается с помощью опции «Добавить строку программы», обозначаемая значком . При её нажатии возникает вертикальная линия, объединяющая два оператора в один блок. Для объединения большего числа операторов кнопку необходимо нажимать несколько раз.

*Условный оператор.* Задаётся с помощью двух кнопок  (если),  (иначе) и имеет следующий вид:

$$\left| \begin{array}{l} D1 \text{ if } Y \\ D2 \text{ otherwise} \end{array} \right. .$$

Данная запись означает, что если условие  $Y$  выполняется, то программа выполнит действие  $D1$ , иначе выполняется действие  $D2$ .

*Оператор прерывания* . С помощью данного оператора происходит прерывание программы.

*Операторы цикла.* Mathcad позволяет организовать два вида циклов:

1. Кнопка  вводит в программу цикл с параметром (когда заранее известно, сколько циклов необходимо выполнить).

$$\left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 1..n \\ T \\ \cdot \end{array} \right. .$$

В данном случае переменная  $i$  задаёт счётчик циклов от 1 до переменной  $n$ , которая должна быть определена заранее. В качестве  $T$  в программе приведено тело цикла, которое может состоять из одного или нескольких операторов. Чтобы использовать несколько операторов в цикле, необходимо навести угловой курсор на тело цикла и несколько раз нажать кнопку .

2. Кнопка  – образует заголовок цикла с предусловием. Такой цикл используется, если мы заранее не знаем, сколько циклов нам необходимо сделать для решения задачи.

$$\left| \begin{array}{l} \text{while } Y \\ \quad T \\ \cdot \end{array} \right.$$

В данном цикле  $Y$  является логическим условием, при выполнении которого программа выходит из цикла,  $T$  является телом цикла (задаётся также как в предыдущем цикле).

Пример программы: *Программа спектрального анализа сигнала при амплитудной модуляции по уровню.*

При анализе коэффициента гармоник был использован метод, основанный на рядах и интеграле Фурье:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega_1 t) + b_k \sin(k\omega_1 t))$$

или

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_1 t - \varphi_k),$$

где

$$\begin{cases} \omega_1 = \frac{2\pi}{T}; \\ A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}; \\ \operatorname{tg}(\varphi_k) = \frac{b_k}{a_k}; \\ a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt; \\ a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(k\omega_1 t) dt; \\ b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(k\omega_1 t) dt; \\ k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Поскольку в нашем случае мы аппроксимируем синусоидальный сигнал, а функция  $f(t) = E_0 \sin(\omega t)$  является не чётной, то  $a_0 = a_k = 0$  и выражение  $f(t)$  примет вид:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\omega_1 t),$$

где

$$b_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin(k\omega_1 t) dt.$$

Входными данными являются:

1.  $U$  – число гармоник;
2.  $N$  – число ступеней (для модуляции по уровню) или число ступеней одной и той же длительности укладываемых в  $1/4$  периода колебания (для модуляции по времени);
3.  $\nu$  – частота сигнала, Гц;
4.  $E$  – амплитуда сигнала;
5. Параметр  $NUL$ : при модуляции по уровню  $NUL=-1$  (если есть нулевая ступень) и  $NUL=0$  (без нулевой ступени); при модуляции по времени  $NUL=1$  (если есть нулевая ступень) и  $NUL=0$  (без нулевой ступени).

Выходными данными служат:

1.  $K_g$  - коэффициент гармоник;
2.  $A_k$  - спектр амплитуд.

Начало программы заключается во введении этих данных:

$U := 200$     $N := 9$     $\nu := 20$     $E := 11$     $NUL := -1$

```

t := | t_{2..N} ← 0
      | for k ∈ 1..N-1
      |   | t_k ← asin(k/N) · 1/ω
      |   | k
      | for k ∈ N..2·(N-1)
      |   | t_k ← π/ω - t_{2·N-k-1}
      |   | k
      | t_{2·N-1} ← π/ω
      | t
  
```

Подпрограмма определения времени начала и конца каждой ступени

```

b := | for k ∈ 1..U
      |   | b_k ← 0
      |   | c ← NUL
      |   | for i ∈ 0..2·(N-1)
      |   |   | c ← c+1 if i < N
      |   |   | c ← c-1 if i ≥ N
      |   |   | b_k ← b_k + 1/(k·ω) · (cos(k·ω·t_i) - cos(k·ω·t_{i+1})) · c · E/N
      |   |   | i
      |   | b_k ← b_k · 4·ν
      |   | k
      | b
  
```

Подпрограмма определения спектра амплитуд  $A_k = |b_k|$

```

Kg := | Q ← 0
      | for k ∈ 2..U
      |   Q ← Q + (bk)2
      |   Kg ←  $\frac{\sqrt{Q}}{b_1}$ 
      | Kg
  
```

Подпрограмма определения коэффициента гармоник  $K_g$

```

Kg = 0.103
  
```

Коэффициент гармоник  $K_g$

```

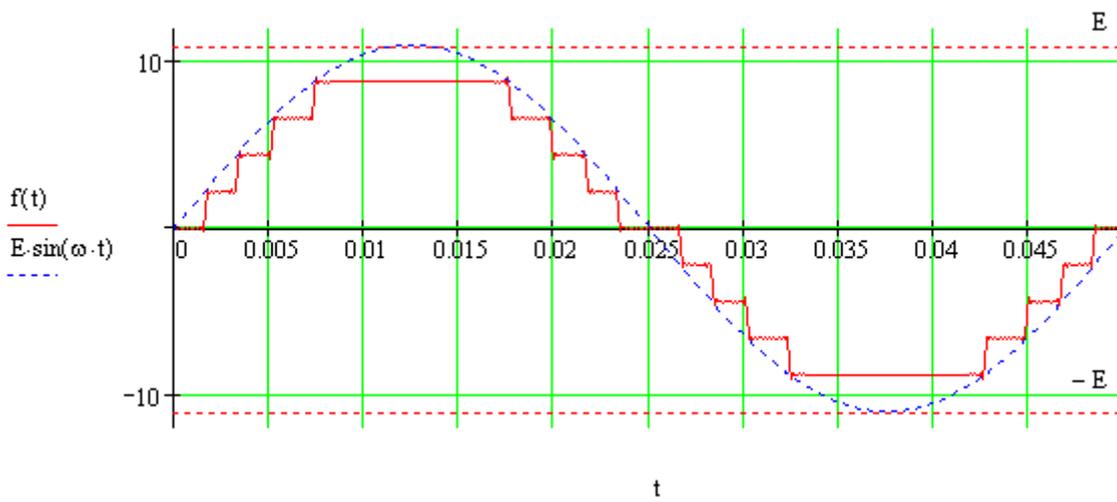
t := 0, 0.0001 .. 0.2
  
```

Задание диапазона изменения функции

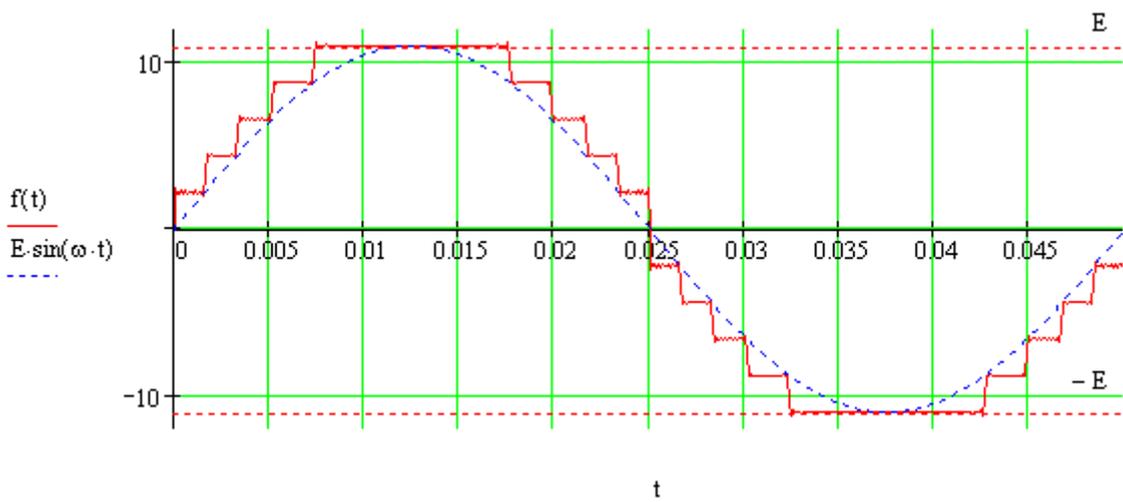
```

f(t) :=  $\sum_{k=1}^U b_k \cdot \sin(k \cdot \omega \cdot t)$ 
  
```

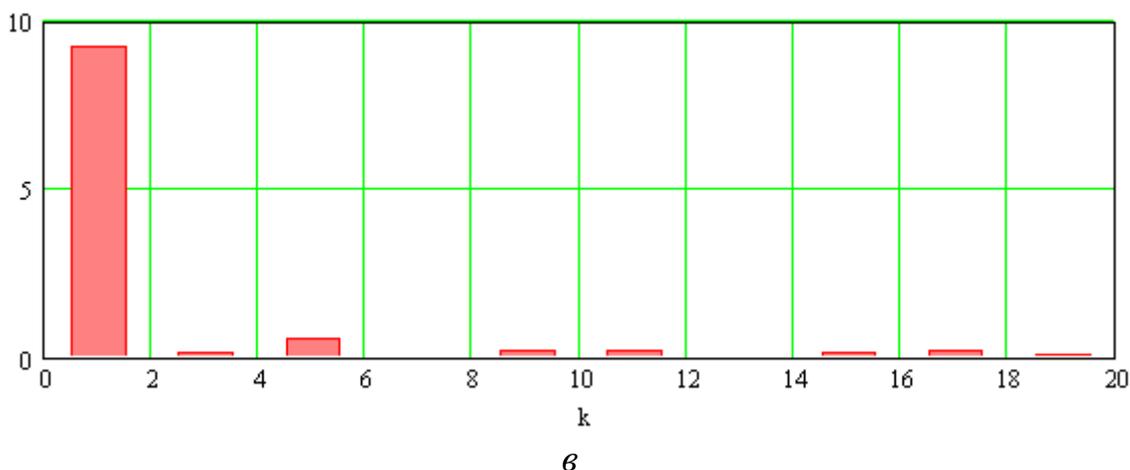
Ступенчатая функция



*a*



*б*



Форма кривой при модуляции по уровню:  $a$  – при наличии нулевой ступени;  $b$  – без нулевой ступени;  $v$  – спектр амплитуд

### 2.3. Построение графиков в Mathcad

Панель графиков вызывается нажатием кнопки с изображением графиков  на арифметической панели (рис. 2.3).

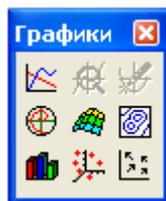


Рис. 2.3. Панель графиков

На панели графиков расположены семь кнопок с изображением различных типов графиков:

1.  – графики в декартовых координатах,
2.  – графики в полярных координатах,
3.  – график поверхности,
4.  – карта линий уровня,
5.  – столбиковая гистограмма,
6.  – точечный график,
7.  – векторное поле.

### 2.3.1. Графики в декартовых координатах

При нажатии кнопки , находящейся на графической панели, появляется изображение области построения графиков, имеющей следующий вид:



где нижняя чёрная метка показывает место записи аргумента функции, левая метка предназначена для записи функции. Чтобы отобразить на одном графике сразу несколько функций для одного и того же аргумента, необходимо навести курсор на левую метку и нажать один раз левой кнопкой. В результате данная метка будет обозначена уголковым курсором. Далее необходимо нажать на знак запятой «,», после чего появится ещё одна метка. Если необходимо построить графики для функций различных аргументов, то необходимо проделать те же действия для нижней метки.

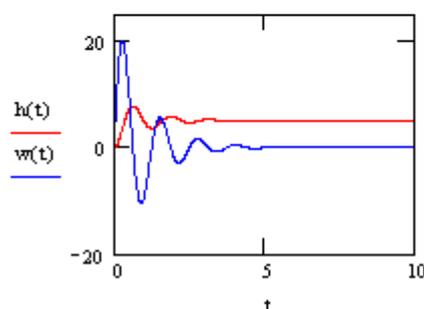
Пример:

$$h(t) := 5 - 5 \cdot e^{-t} \cdot \cos(5 \cdot t)$$

$$w(t) := \frac{d}{dt} h(t)$$

$$w(t) \rightarrow 5 \cdot \exp(-t) \cdot \cos(5 \cdot t) + 25 \cdot \exp(-t) \cdot \sin(5 \cdot t)$$

$$t := 0, 0,01 \dots 10$$



Чтобы изменить параметры графика, необходимо навести курсор на область графика и нажать дважды левую кнопку мыши. После этого появится меню форматирования (рис. 2.4), при помощи которого можно изменить параметры осей.

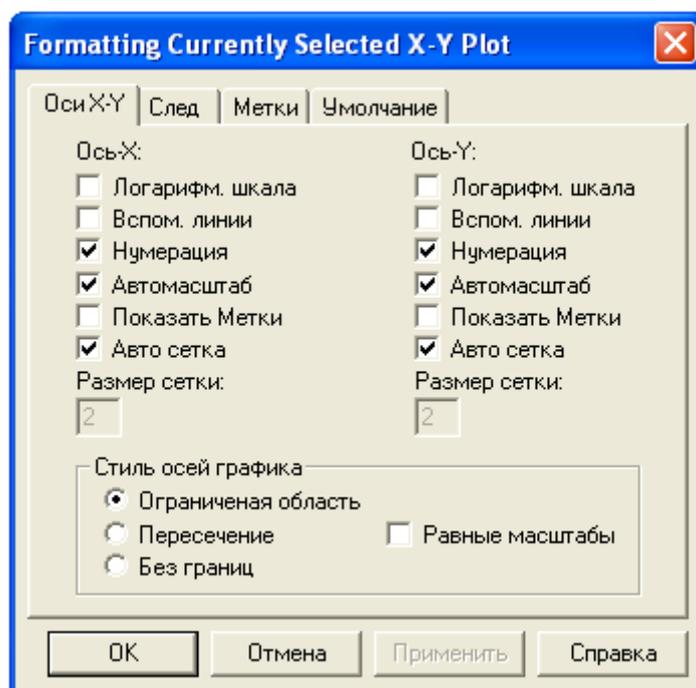


Рис. 2.4. Меню форматирования параметра осей

Чтобы изменить вид самого графика, нужно зайти в меню «След» (рис. 2.5), где под именами trace 1, trace 2, ... подразумеваются графики функций, построенных в данной системе координат. В приведённом выше примере trace 1 определяет график  $h(t)$ , а trace 2 график  $w(t)$ .

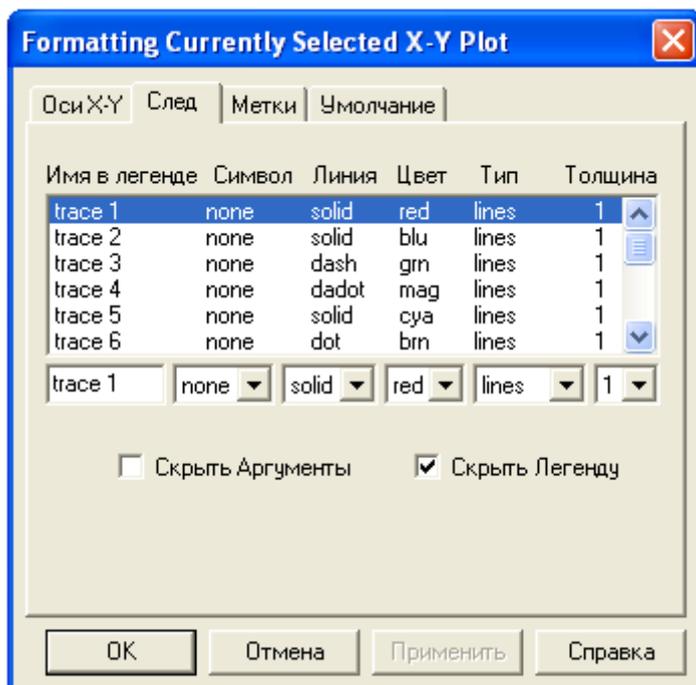
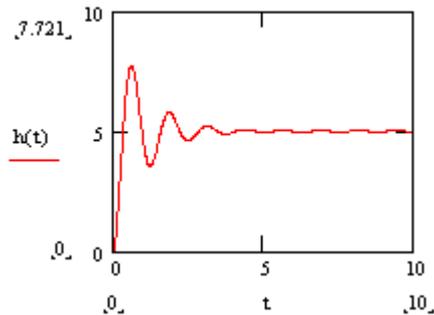


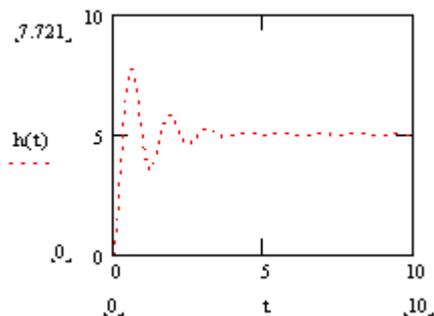
Рис. 2.5. Меню форматирования параметров графика

Параметр «Линия» определяет вид линии, которой строится график:

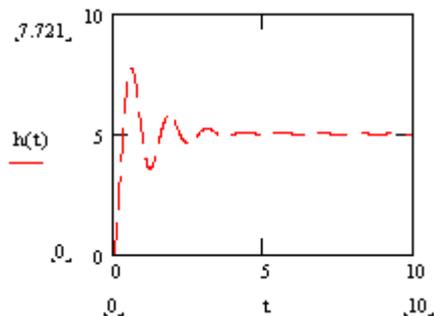
1. `solid` – означает, что график рисуется непрерывной линией:



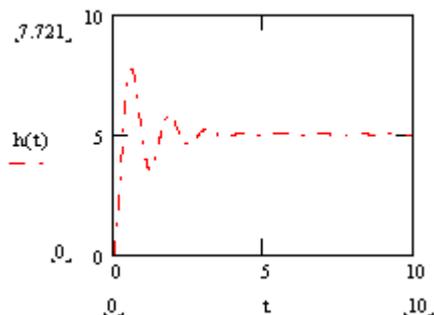
2. `dot` – означает, что график рисуется в виде отдельных точек:



3. `dash` – означает, что график рисуется пунктирными линиями:



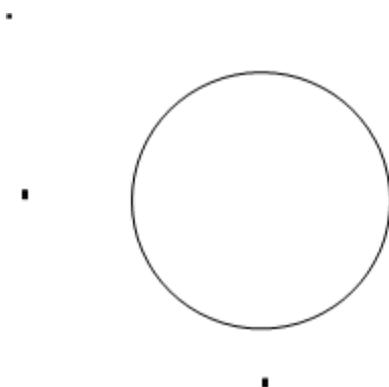
4. `dadot` – означает, что график рисуется пунктирными линиями с точками:



Параметр «Толщина» обозначает толщину линии.

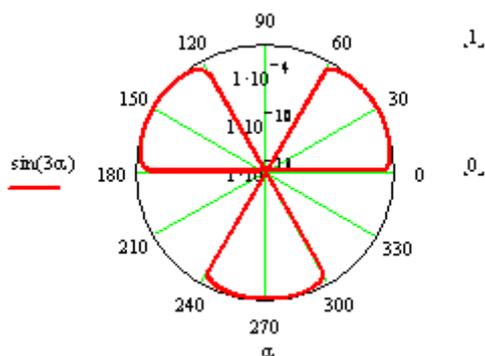
### 2.3.2. Графики в полярных координатах

При нажатии кнопки , находящейся на графической панели, появляется изображение области построения графиков, имеющей следующий вид:



где нижняя чёрная метка показывает место записи аргумента функции, который представляет собой угол, изменяющийся от 0 до 360 градусов, левая метка предназначена для записи функции.

Пример:



Все действия по настройке параметров графика такие же, как при построении графиков в декартовых координатах.

Остальные графики не имеют такого широкого применения. Поэтому они рассматриваться не будут.

## 2.4. Аналитические вычисления

Панель инструментов, отвечающая за аналитические вычисления, приведена на рис. 2.6.

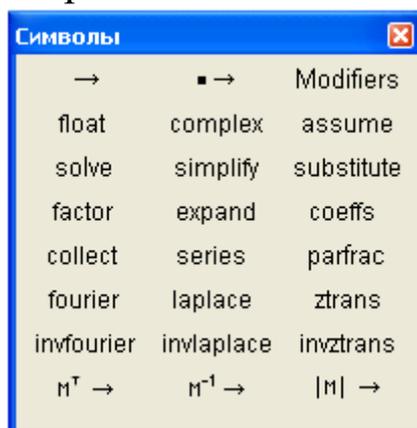


Рис. 2.6. Панель инструментов «Аналитические вычисления»

С помощью аналитических вычислений находят аналитические или полные решения уравнений и систем, а также проводят преобразования сложных выражений (например, упрощение). Иначе говоря, при таком подходе можно получить нечисловой результат. В программе Mathcad конкретные значения, присвоенные переменным, при этом игнорируются – переменные рассматриваются как неопределённые параметры.

**Команда** `float` осуществляет вычисление с плавающей запятой. Форма записи имеет следующий вид:

$$\text{score float},n \rightarrow ,$$

где `score` – значение или значения, которые нужно отобразить, `n` – число знаков которыми отображается значение (значения).

Пример:

$$\begin{aligned} \pi \text{ float},20 &\rightarrow 3.1415926535897932385 \\ e \text{ float},5 &\rightarrow 2.7183 \end{aligned}$$

Данная команда может применяться вместе с другими командами. В этом случае команда `solve` сначала ищет корни уравнения, а затем команда `float` приводит эти значения к необходимому виду:

$$2x^2 + 3x + 2 \left| \begin{array}{l} \text{solve},x \\ \text{float},10 \end{array} \right. \rightarrow \left( \begin{array}{l} -0.7500000000 + 0.6614378278 \cdot i \\ -0.7500000000 - 0.6614378278 \cdot i \end{array} \right)$$

**Команда** `solve` ищет корни функции, заданной каким-либо выражением. Она имеет следующую запись:

`■ solve, ■ → .`

Пример:

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c \text{ solve, } x \rightarrow \left[ \begin{array}{l} \frac{1}{(2 \cdot a)} \cdot \left[ -b + (b^2 - 4 \cdot a \cdot c)^{\left(\frac{1}{2}\right)} \right] \\ \frac{1}{(2 \cdot a)} \cdot \left[ -b - (b^2 - 4 \cdot a \cdot c)^{\left(\frac{1}{2}\right)} \right] \end{array} \right].$$

**Команда** `factor` записывается следующим образом:

`■ factor, ■ → .`

Если у данного оператора убрать ключ (`■ factor →`), то он будет осуществлять разложение функции или числа на простые множители.

Пример:

$$\frac{x^2 + 7x + 10}{x^2 + 10x + 21} \text{ factor} \rightarrow (x + 5) \cdot \frac{(x + 2)}{[(x + 7) \cdot (x + 3)]}$$

$$385 \text{ factor} \rightarrow 5 \cdot 7 \cdot 11 .$$

**Команда** `collect` объединяет члены, содержащие одинаковые степени выделенного подвыражения. Результатом является полином от подвыражения. Выбираемое подвыражение должно быть либо простой переменной, либо встроенной функцией вместе с аргументом. Форма записи имеет следующий вид:

`■ collect, ■ → .`

Пример:

$$x^2 - a \cdot y \cdot x^2 + 2 \cdot y^2 \cdot x - x \text{ collect, } x \rightarrow (1 - a \cdot y) \cdot x^2 + (2 \cdot y^2 - 1) \cdot x .$$

**Команда** `fourier` осуществляет прямое преобразование Фурье. Форма записи имеет следующий вид:

`■ fourier, ■ → .`

Пример:

$$t \cdot e^t \text{ fourier, } t \rightarrow 2 \cdot 1i \cdot \pi \cdot \Delta(1, \omega + 1i) .$$

**Команда** `invfourier` осуществляет обратное преобразование Фурье. Форма записи имеет следующий вид:

■ `invfourier, ■` → .

Пример:

$$2 \cdot 1i \cdot \pi \cdot \Delta(1, \omega + 1i) \text{ invfourier, } \omega \rightarrow t \cdot \exp(t) .$$

**Команда** `complex` выделяет мнимую и действительную части комплексной функции. Форма записи имеет следующий вид:

■ `complex` → .

Пример:

$$\frac{(i \cdot \omega) + 1}{(i \cdot \omega)^2 + 4 \cdot (i \cdot \omega) + 4} \text{ complex} \rightarrow \frac{(-\omega^2 + 4)}{[( -\omega^2 + 4)^2 + 16 \cdot \omega^2]} + 4 \cdot \frac{\omega^2}{[( -\omega^2 + 4)^2 + 16 \cdot \omega^2]} + 1i \cdot \left[ \omega \cdot \frac{(-\omega^2 + 4)}{[( -\omega^2 + 4)^2 + 16 \cdot \omega^2]} - 4 \cdot \frac{\omega}{[( -\omega^2 + 4)^2 + 16 \cdot \omega^2]} \right]$$

**Команда** `simplify` используется для упрощения выражения. При этом выполняются арифметические действия, сокращаются общие множители и приводятся подобные члены. Она имеет следующую запись:

■ `simplify` → .

Пример:

$$\frac{(-\omega^2 + 4)}{[( -\omega^2 + 4)^2 + 16 \cdot \omega^2]} + 4 \cdot \frac{\omega^2}{[( -\omega^2 + 4)^2 + 16 \cdot \omega^2]} + 1i \cdot \left[ \omega \cdot \frac{(-\omega^2 + 4)}{[( -\omega^2 + 4)^2 + 16 \cdot \omega^2]} - 4 \cdot \frac{\omega}{[( -\omega^2 + 4)^2 + 16 \cdot \omega^2]} \right] \text{ simplify} \rightarrow \frac{-(-3 \cdot \omega^2 - 4 + 1i \cdot \omega^3)}{(\omega^4 + 8 \cdot \omega^2 + 16)} .$$

Данная команда может применяться вместе с другими командами. В этом случае команда `complex` сначала выделяет мнимую и действительную части комплексной функции, а затем команда `simplify` упрощает полученный результат:

$$\frac{(i \cdot \omega) + 1}{(i \cdot \omega)^2 + 4 \cdot (i \cdot \omega) + 4} \left| \begin{array}{l} \text{complex} \\ \text{simplify} \end{array} \right. \rightarrow \frac{-(-3 \cdot \omega^2 - 4 + 1i \cdot \omega^3)}{(\omega^4 + 8 \cdot \omega^2 + 16)} .$$

**Команда** `expand` применяется в некоторых действиях по раскрытию скобок и упрощению сложных тригонометрических

выражений. Форма записи имеет следующий вид:

■ expand, ■ → .

Пример:

$$\frac{(-\omega^2 + 4)}{[(-\omega^2 + 4)^2 + 16 \cdot \omega^2]} + 4 \cdot \frac{\omega^2}{[(-\omega^2 + 4)^2 + 16 \cdot \omega^2]} + 1i \cdot \left[ \omega \cdot \frac{(-\omega^2 + 4)}{[(-\omega^2 + 4)^2 + 16 \cdot \omega^2]} - 4 \cdot \frac{\omega}{[(-\omega^2 + 4)^2 + 16 \cdot \omega^2]} \right] \text{expand, } \omega \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{3}{(\omega^4 + 8 \cdot \omega^2 + 16)} \cdot \omega^2 + \frac{4}{(\omega^4 + 8 \cdot \omega^2 + 16)} - 1i \cdot \frac{\omega^3}{(\omega^4 + 8 \cdot \omega^2 + 16)}$$

Данная команда также может использоваться с другими командами:

$$\frac{(i \cdot \omega) + 1}{(i \cdot \omega)^2 + 4 \cdot (i \cdot \omega) + 4} \left| \begin{array}{l} \text{complex} \\ \text{expand, } \omega \end{array} \right. \rightarrow \frac{3}{(\omega^4 + 8 \cdot \omega^2 + 16)} \cdot \omega^2 + \frac{4}{(\omega^4 + 8 \cdot \omega^2 + 16)} - 1i \cdot \frac{\omega^3}{(\omega^4 + 8 \cdot \omega^2 + 16)} .$$

**Команда** `series` осуществляет разложение в ряд Тейлора. Она имеет следующую запись:

F series, arg, n → ,

где F – некая функция, подлежащая разложению в ряд Тейлора,  
arg – аргумент этой функции,  
n – число членов ряда.

Пример:

$$e^x \text{ series, } x, 10 \rightarrow 1 + x + \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{6} \cdot x^3 + \frac{1}{24} \cdot x^4 + \frac{1}{120} \cdot x^5 + \frac{1}{720} \cdot x^6 + \frac{1}{5040} \cdot x^7 + \frac{1}{40320} \cdot x^8 + \frac{1}{362880} \cdot x^9 .$$

**Команда** `laplace` осуществляет прямое преобразование Лапласа. Форма записи имеет следующий вид:

■ laplace, ■ → .

Пример:

$$\left(\frac{1}{5}\right) \cdot e^{\frac{-t}{2}} (1 + \sin(5 \cdot t)) \text{ laplace, } t \rightarrow \frac{1}{\left[5 \cdot \left(s + \frac{1}{2}\right)\right]} + \frac{1}{\left[\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + 25\right]} .$$

**Команда** `invlaplace` осуществляет обратное преобразование Лапласа. Форма записи имеет следующий вид:

$$\blacksquare \text{ invlaplace, } \blacksquare \rightarrow \cdot$$

Пример:

$$\frac{b_2 \cdot p^2 + b_1 \cdot p + b_0}{p^3 + a_2 \cdot p^2 + a_1 \cdot p + a_0} \text{ invlaplace, } p \rightarrow \frac{4}{3} \cdot \exp(-2 \cdot t) + \frac{5}{3} \cdot \exp\left(\frac{-1}{2} \cdot t\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{15} \cdot t\right) + \frac{1}{5} \cdot \exp\left(\frac{-1}{2} \cdot t\right) \cdot \sqrt{15} \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{15} \cdot t\right)$$

**Команда** `assume` предписывает Mathcadу рассматривать переменную, которая следует после этой команды, в качестве неопределенной переменной, даже если ей присвоено определенное значение. Кроме этого, используется для определения ограничений, используемых для вычисления выражения. Форма записи имеет следующий вид:

$$\blacksquare \text{ assume, } \blacksquare \rightarrow \cdot$$

Пример: в данном примере с помощью команды `assume` показано, что мнимая часть комплексной функции  $\frac{1}{(i \cdot |\omega|)^2 + 5(i \cdot |\omega|) + 3}$  является нечётной функцией, а действительная часть – чётной функцией.

$$i := \sqrt{-1}$$

$$\frac{1}{(i \cdot |\omega|)^2 + 5(i \cdot |\omega|) + 3} \text{ complex} \rightarrow \frac{(-\omega^2 + 3)}{\left[(-\omega^2 + 3)^2 + 25 \cdot (|\omega|)^2\right]} - 5 \cdot i \cdot \frac{|\omega|}{\left[(-\omega^2 + 3)^2 + 25 \cdot (|\omega|)^2\right]}$$

$$\frac{|\omega|}{\left[(-\omega^2 + 3)^2 + 25 \cdot (|\omega|)^2\right]} \text{ assume, } \omega < 0 \rightarrow \frac{-\omega}{\left[(-\omega^2 + 3)^2 + 25 \cdot \omega^2\right]}$$

$$\frac{(-\omega^2 + 3)}{\left[(-\omega^2 + 3)^2 + 25 \cdot (|\omega|)^2\right]} \text{ assume, } \omega < 0 \rightarrow \frac{(-\omega^2 + 3)}{\left[(-\omega^2 + 3)^2 + 25 \cdot \omega^2\right]}$$

**Команда** `substitute` осуществляет замену переменной – вместо переменной подставляется содержимое буфера обмена. Она имеет следующую запись:

$$\blacksquare \text{ substitute, } \blacksquare = \blacksquare \rightarrow \cdot$$

Пример:

$$x^2 + 3 \cdot x \text{ substitute, } x = z + 3 \rightarrow (z + 3)^2 + 3 \cdot z + 9$$

$$2x^2 + 3x + 2 \left| \begin{array}{l} \text{solve, } x \\ \text{float, } 3 \end{array} \right. \rightarrow \begin{pmatrix} -0.750 + 0.663 \cdot i \\ -0.750 - 0.663 \cdot i \end{pmatrix}$$

$$x^3 + 5x \text{ substitute, } x = \begin{pmatrix} -0.750 + 0.663 \cdot i \\ -0.750 - 0.663 \cdot i \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -0.750 + 0.663 \cdot i \\ -0.750 - 0.663 \cdot i \end{pmatrix}^3 + 5 \cdot \begin{pmatrix} -0.750 + 0.663 \cdot i \\ -0.750 - 0.663 \cdot i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3.183 + 4.142i \\ -3.183 - 4.142i \end{pmatrix}$$

**Команда** `coeffs` возвращает вектор, содержащий коэффициенты требуемого полинома в порядке возрастания степеней. Форма записи имеет следующий вид:

$$\text{■ coeffs, ■} \rightarrow \text{.}$$

Пример:

$$d \cdot p^2 + n \cdot d \cdot p + 1 \text{ coeffs, } p \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ n \cdot d \\ d \end{pmatrix}$$

$$5 \cdot p^3 + 7 \cdot p + 1 \text{ coeffs, } p \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

**Команда** `parfrac` осуществляет представление дробно-рациональной функции в виде суммы простых дробей с линейными и квадратичными знаменателями. Форма записи имеет следующий вид:

$$\text{■ convert, parfrac, ■} \rightarrow \text{.}$$

Пример:

$$\frac{(p+1)(p+2)}{(p+3)(p+4)(p+5)} \text{ convert, parfrac, } p \rightarrow \frac{1}{(p+3)} - \frac{6}{(p+4)} + \frac{6}{(p+5)}$$

**Команда** `ztrans` осуществляет  $z$  – преобразование решётчатых функций. Форма записи имеет следующий вид:

$$\text{■ ztrans, ■} \rightarrow \text{.}$$

Пример:

$$1 - e^{-\alpha \cdot T \cdot n} \text{ ztrans, } n \rightarrow -z \cdot \frac{(\exp(-\alpha \cdot T) - 1)}{[(z - 1) \cdot (z - \exp(-\alpha \cdot T))]}$$

**Команда** `invztrans` осуществляет обратное  $z$  – преобразование решётчатых функций. Форма записи имеет следующий вид:

■ `invztrans`, ■ → .

Пример:

$$-z \cdot \frac{(\exp(-\alpha \cdot T) - 1)}{[(z - 1) \cdot (z - \exp(-\alpha \cdot T))]} \text{invztrans}, z \rightarrow 1 - \left( \frac{1}{\exp(\alpha \cdot T)} \right)^n .$$

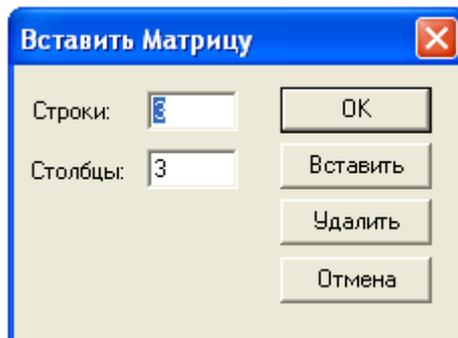
## 2.5. Векторные и матричные операции

Панель инструментов, отвечающая за векторные и матричные операции, приведена на рис. 2.7.



Рис 2.7. Панель инструментов «Векторные и матричные операции»

**Команда** `[grid]` осуществляет создание матрицы или вектора. После нажатия данной кнопки появляется следующее меню:



где указывается число строк и столбцов матрицы. После нажатия кнопки `ОК` на месте *крестообразного курсора* красного цвета  $+$  появляется матрица соответствующего размера:

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix},$$

где вместо чёрных меток записываются какие-либо значения.

**Команда**  $\times_n$  осуществляет установку нижнего индекса.

**Команда**  $\times^{-1}$  осуществляет вычисление обратной матрицы.

Пример:

$$\begin{aligned} X &:= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \\ X^{-1} &= \begin{pmatrix} 1.5 & -0.5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\ \left( \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \right)^{-1} &= \begin{pmatrix} 1.5 & -0.5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

При попытке применить данную команду для числа Mathcad возводит это число в -1 степень:

$$5^{-1} = 0.2$$

**Команда**  $| \times |$  осуществляет вычисление определителя матрицы.

Пример:

$$\begin{aligned} X &:= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \\ |X| &= 2 \\ \left| \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \right| &= 2 \end{aligned}$$

С помощью данной команды можно найти значения амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) в определённых точках.

Пример:

$$\omega := 0, 0.1..100$$

$$W(\omega) := \frac{1}{(i \cdot \omega)^2 + 1}$$

$$|W(\omega)| =$$

1
1.01
1.042
1.099
1.19
1.333
1.563
1.961
2.778
5.263
4.504·10 <sup>15</sup>
4.762
2.273
1.449
1.042
0.8

**Команда**  $\vec{f(m)}$  осуществляет поэлементные операции с матрицами.

Пример:

$$A := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad C := \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\vec{(A \cdot C)} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 18 \end{pmatrix} .$$

**Команда**  $M^{<>}$  определяет столбец матрицы.

Пример:

$$x := \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 7 & 2 & 2 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$x^{<0>} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} .$$

**Команда**  $M^T$  осуществляет транспонирование матрицы.

Пример:

$$x := \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 7 & 2 & 2 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$x^T = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 9 \\ 5 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} .$$

**Команда**  $m..n$  определяет диапазон изменения переменной.

**Команда**  $\vec{x} \cdot \vec{y}$  осуществляет скалярное произведение векторов.

Пример:

$$a := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$a \cdot b = 32 .$$

**Команда**  $\times$  осуществляет векторное произведение векторов.  
 Пример:

$$a := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$a \times b = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

**Команда**  $\Sigma$  осуществляет суммирование элементов вектора.  
 Пример:

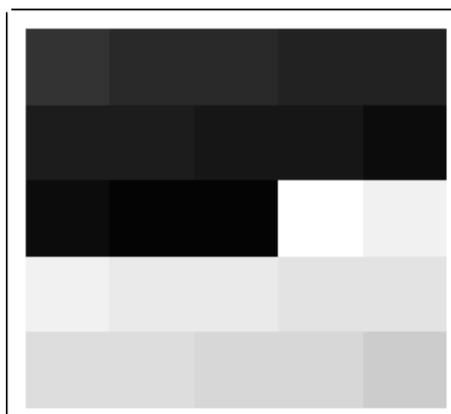
$$a := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma a = 6$$

**Команда**  $\text{Matrix}$  осуществляет визуализацию информации.  
 Пример: Визуализация информации, хранящейся в матрице:

$$N := \begin{pmatrix} 50 & 46 & 42 & 38 & 34 \\ 30 & 26 & 22 & 18 & 14 \\ 10 & 6 & 2 & -6 & -10 \\ -14 & -18 & -22 & -26 & -30 \\ -34 & -38 & -42 & -46 & -50 \end{pmatrix}$$

Каждому числу из матрицы соответствует определённый цвет:



N

## 2.6. Математический анализ

Панель инструментов, отвечающая за математический анализ операции, приведена на рис. 2.8.



Рис. 2.8. Панель инструментов Математический анализ

**Команда**  $\frac{d}{dx}$  осуществляет нахождение производной функции.

Пример: Если необходимо найти аналитическое выражение производной некой функции, то после ввода функции производную которой необходимо найти, а также указания переменной, по которой идёт дифференцирование, нужно набрать символический знак равенства  $\rightarrow$ :

$$h(t) := 5 - 5e^{-t} \cdot \sin(7 \cdot t)$$

$$\frac{d}{dt} h(t) \rightarrow 5 \cdot \exp(-t) \cdot \sin(7 \cdot t) - 35 \cdot \exp(-t) \cdot \cos(7 \cdot t)$$

$$\frac{d}{dt} (5 - 5 \cdot e^{-t} \cdot \sin(7 \cdot t)) \rightarrow 5 \cdot \exp(-t) \cdot \sin(7 \cdot t) - 35 \cdot \exp(-t) \cdot \cos(7 \cdot t)$$

Если необходимо получить численный результат производной функции для заданных значений, нужно вместо символического знака равенства  $\rightarrow$  набрать знак равенства  $=$ :

$$t := 0..10$$

$$h(t) := 5 - 5e^{-t} \cdot \sin(7 \cdot t)$$

$$\frac{d}{dt} h(t) =$$

-35
-8.499
0.023
1.163
0.642
0.199
0.023
-0.014
-0.011
-4.155·10 <sup>-3</sup>
-8.307·10 <sup>-4</sup>

$$\frac{d}{dt} (5 - 5 \cdot e^{-t} \cdot \sin(7 \cdot t))$$

-35
-8.499
0.023
1.163
0.642
0.199
0.023
-0.014
-0.011
-4.155·10 <sup>-3</sup>
-8.307·10 <sup>-4</sup>

**Команда**  $\frac{d^n}{dx^n}$  осуществляет нахождение производной функции порядка n.

Пример:

Всё вышесказанное для производной первого порядка справедливо и при нахождении производной порядка n:

$$h(t) := 5 - 5 \cdot e^{-t} \cdot \sin(7 \cdot t)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} h(t) \rightarrow 240 \cdot \exp(-t) \cdot \sin(7 \cdot t) + 70 \cdot \exp(-t) \cdot \cos(7 \cdot t)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} (5 - 5 \cdot e^{-t} \cdot \sin(7 \cdot t)) \rightarrow 240 \cdot \exp(-t) \cdot \sin(7 \cdot t) + 70 \cdot \exp(-t) \cdot \cos(7 \cdot t)$$

$$t := 0..10$$

$$h(t) := 5 - 5e^{-t} \cdot \sin(7 \cdot t)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} h(t) = \frac{d^2}{dt^2} (5 - 5 \cdot e^{-t} \cdot \sin(7 \cdot t))$$

70
77.42
33.471
8.088
-0.043
-1.119
-0.615
-0.19
-0.022
0.013
0.01

70
77.42
33.471
8.088
-0.043
-1.119
-0.615
-0.19
-0.022
0.013
0.01

**Команда**  $\int_a^b$  осуществляет нахождение определённого интеграла. Форма записи имеет следующий вид:

$$\int_a^b f(x) dx$$

Пример:

$$T := 5$$

$$\int_0^{3 \cdot T} 5 - 5 \cdot e^{-\frac{t}{T}} \cdot \sin(7 \cdot t) dt = 74.277$$

**Команда**  $\sum_{n=1}^m$  осуществляет нахождение суммы числового ряда. Форма записи имеет следующий вид:

$$\sum_{n=1}^m \cdot$$

Пример:

В данном примере приведено нахождение суммы двух числовых рядов – сходящегося  $1/n^2$  и расходящегося  $1/n$ .

Если необходимо найти сумму элементов ряда во всём числовом диапазоне, то после ввода зависимости и указания диапазона нужно набрать символический знак равенства  $\rightarrow$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \rightarrow \infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \rightarrow \frac{1}{6} \cdot \pi^2$$

Если необходимо найти сумму конечного числа элементов ряда, то после ввода зависимости и указания диапазона нужно набрать знак равенства  $=$ :

$$\sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n^2} = 1.635 \cdot$$

Сумму конечного числа элементов ряда можно найти также набрав после суммы символический знак равенства  $\rightarrow$ :

$$\sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n^2} \rightarrow \frac{1589508694133037873112297928517553859702383498543709859889432834803818131090369901}{972186144434381030589657976672623144161975583995746241782720354705517986165248000}$$

однако при попытке найти сумму элементов ряда во всём числовом диапазоне с использованием знака равенства  $=$  Mathcad выдаёт ошибку:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \cdot$$

This must be an integer. The expression you used may have a fractional part.

**Команда**  $\prod$  осуществляет нахождение произведения элементов числового ряда. Форма записи имеет следующий вид:

$$\prod_{n=1}^m$$

Пример:

Всё выше сказанное для суммы справедливо и при нахождении произведения элементов ряда:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

$$\prod_{n=1}^{10} \frac{1}{n} \rightarrow \frac{1}{3628800}$$

$$\prod_{n=1}^{10} \frac{1}{n} = 2.756 \times 10^{-7}$$

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 0$$

This must be an integer. The expression you used may have a fractional part.

**Команда**  $\int$  осуществляет нахождение неопределённого интеграла функции.

Пример:

$$\int \cos(t) dt \rightarrow \sin(t)$$

**Команда**  $\sum$  осуществляет нахождение суммы элементов числового ряда по дискретному аргументу. Форма записи имеет следующий вид:

$$\sum_n$$

Пример:

$$n := 1, 1.5 .. 2$$

$$\sum_n \frac{1}{n} = 2.167$$

**Команда**  $\prod_n$  осуществляет нахождение произведения элементов числового ряда по дискретному аргументу. Форма записи имеет следующий вид:

$$\prod_n$$

Пример:

$$n := 1, 1.5 .. 2$$

$$\prod_n \frac{1}{n} = 0.333$$

**Команда**  $\lim_{\rightarrow a}$  осуществляет нахождение предела функции. Форма записи имеет следующий вид:

$$\lim_{\rightarrow a}$$

Пример:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \rightarrow 1$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} 5 - 5 \cdot e^{-3 \cdot t} \cdot \sin(10 \cdot t) \rightarrow 5$$

**Команда**  $\lim_{\rightarrow a^+}$  осуществляет нахождение предела функции справа. Форма записи имеет следующий вид:

$$\lim_{\rightarrow a^+}$$

Пример:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^3} \rightarrow \infty$$

**Команда**  $\lim_{\rightarrow a^-}$  осуществляет нахождение предела функции слева. Форма записи имеет следующий вид:

$$\lim_{\rightarrow a^-}$$

Пример:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^3} \rightarrow -\infty$$

### 3. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В MATHCAD

#### 3.1. Решение линейных дифференциальных уравнений с использованием преобразования Лапласа

Рассмотрим решение линейных дифференциальных уравнений на примере. Пусть дано линейное дифференциальное уравнение вида:

$$3 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 4 \frac{dy(t)}{dt} + 5y(t) = \sin(t),$$

при следующих начальных условиях -  $y(0) = 1, \frac{dy(0)}{dt} = 0$ .

Необходимо решить данное уравнение. Для решения данного уравнения нужно будет использовать команды `laplace`, `invlaplace` и команду `expand` для упрощения выражения.

Сначала необходимо осуществить преобразование Лапласа этого уравнения. Для этого находится изображение по Лапласу левой и правой части уравнения:

$$\begin{aligned} & 3 \left( \frac{d^2}{dt^2} y(t) \right) + 4 \left( \frac{d}{dt} y(t) \right) + 5 y(t) \left| \begin{array}{l} \text{laplace, t} \\ \text{expand, s} \end{array} \right. \rightarrow 3 \cdot s^2 \cdot \text{laplace}(y(t), t, s) - 3 \cdot s \cdot y(0) - 3 \cdot \left. \begin{array}{l} t \leftarrow 0 \\ \frac{d}{dt} y(t) \end{array} \right. + \\ & + 4 \cdot s \cdot \text{laplace}(y(t), t, s) - 4 \cdot y(0) + 5 \cdot \text{laplace}(y(t), t, s) \\ & \sin(t) \text{ laplace, t} \rightarrow \frac{1}{(s^2 + 1)} \end{aligned}$$

Слагаемые в правой части верхнего выражения обозначают следующее:  $\text{laplace}(y(t), t, s)$  является изображением по Лапласу

искомой функции  $y(t)$ ,  $y(0)$  и  $\left. \begin{array}{l} t \leftarrow 0 \\ \frac{d}{dt} y(t) \end{array} \right.$  – начальные условия. В общем виде изображение дифференциального уравнения запишется так:

$$3 \cdot s^2 \cdot \text{laplace}(y(t), t, s) - 3 \cdot s \cdot y(0) - 3 \cdot \left. \begin{array}{l} t \leftarrow 0 \\ \frac{d}{dt} y(t) \end{array} \right. + 4 \cdot s \cdot \text{laplace}(y(t), t, s) - 4 \cdot y(0) + 5 \cdot \text{laplace}(y(t), t, s) = \frac{1}{(s^2 + 1)} \quad (3.1)$$

Далее подставляем численные значения в слагаемые,

содержащие начальные условия, и переносим их в правую часть уравнения (3.1). В левой части (3.1) выносим за скобки изображение искомой функции  $y(t)$  –  $\text{laplace}(y(t), t, s)$  и делим обе части на полученное в скобках выражение. В результате мы получим чему равно изображение неизвестной функции  $y(t)$ :

$$\text{laplace}(y(t), t, s) = \frac{\left(4 + 3s + \frac{1}{s^2 + 1}\right)}{3s^2 + 4s + 5}$$

Исходная функция  $y(t)$  находится с помощью обратного преобразования Лапласа:

$$\frac{\left(4 + 3s + \frac{1}{s^2 + 1}\right)}{3s^2 + 4s + 5} \text{invlaplace}, s \rightarrow \frac{-1}{5} \cdot \cos(t) + \frac{1}{10} \cdot \sin(t) + \frac{6}{5} \cdot \exp\left(\frac{-2}{3} \cdot t\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{3} \cdot \sqrt{11} \cdot t\right) + \frac{21}{110} \cdot \exp\left(\frac{-2}{3} \cdot t\right) \cdot \sqrt{11} \cdot \sin\left(\frac{1}{3} \cdot \sqrt{11} \cdot t\right)$$

Исходный текст программы представлен ниже:

$$\begin{aligned} & 3 \left( \frac{d^2}{dt^2} y(t) \right) + 4 \left( \frac{d}{dt} y(t) \right) + 5 y(t) \left| \begin{array}{l} \text{laplace}, t \\ \text{expand}, s \end{array} \right. \rightarrow 3 \cdot s^2 \cdot \text{laplace}(y(t), t, s) - 3 \cdot s \cdot y(0) - 3 \cdot \left. \begin{array}{l} t \leftarrow 0 + \\ \frac{d}{dt} y(t) \end{array} \right. \\ & + 4 \cdot s \cdot \text{laplace}(y(t), t, s) - 4 \cdot y(0) + 5 \cdot \text{laplace}(y(t), t, s) \\ & \sin(t) \text{ laplace}, t \rightarrow \frac{1}{(s^2 + 1)} \\ & \frac{\left(4 + 3s + \frac{1}{s^2 + 1}\right)}{3s^2 + 4s + 5} \text{invlaplace}, s \rightarrow \frac{-1}{5} \cdot \cos(t) + \frac{1}{10} \cdot \sin(t) + \frac{6}{5} \cdot \exp\left(\frac{-2}{3} \cdot t\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{3} \cdot \sqrt{11} \cdot t\right) + \\ & + \frac{21}{110} \cdot \exp\left(\frac{-2}{3} \cdot t\right) \cdot \sqrt{11} \cdot \sin\left(\frac{1}{3} \cdot \sqrt{11} \cdot t\right) \end{aligned}$$

### 3.2. Решение разностных уравнений с использованием z-преобразования Лапласа

Пусть дано линейное дифференциальное уравнение вида:

$$x(n+2) - 0,7x(n+1) + 0,1x(n) = nT,$$

при следующих начальных условиях:  $x(0) = 0, x(1) = 1$ . Для решения данного уравнения нужно будет использовать команды `ztrans`, `invztrans`. Как и в предыдущем случае сначала необходимо осуществить  $z$ -преобразование Лапласа этого уравнения. Для этого находится  $z$ -изображение по Лапласу левой и правой части уравнения:

$$\begin{aligned} x(n+2) - 0.7x(n+1) + 0.1x(n) & \left| \begin{array}{l} \text{ztrans,n} \\ \text{float,1} \end{array} \right. \rightarrow z^2 \cdot \text{ztrans}(x(n), n, z) - 1 \cdot x(0) \cdot z^2 - 1 \cdot x(1) \cdot z - \\ & - 0.7 \cdot z \cdot \text{ztrans}(x(n), n, z) + 0.7 \cdot x(0) \cdot z + 0.1 \cdot \text{ztrans}(x(n), n, z) \\ n \cdot T \cdot \text{ztrans,n} & \rightarrow T \cdot \frac{z}{(z-1)^2} \end{aligned}$$

$Z$  – изображение искомой функции  $x(n)$  в данном случае записано как `ztrans(x(n), n, z)`. Далее, выполняя те же действия, что и при решении линейных дифференциальных уравнений, получим искомую функцию:

$$\left[ \frac{T \cdot \frac{z}{(z-1)^2} + z}{z^2 - 0.7z + 0.1} \right] \left| \begin{array}{l} \text{invlaplace,z} \\ \text{simplify} \\ \text{float,1} \end{array} \right. \rightarrow -6 \cdot T \cdot \exp(t) + 3 \cdot T \cdot t \cdot \exp(t) - 0.7 \cdot \exp(0.2t) - 1 \cdot \exp(0.2t) \cdot T + 2 \cdot \exp(0.5t) + 7 \cdot \exp(0.5t) \cdot T$$

Под переменной  $t$  здесь понимается значение  $nT$  ( $T$  – период дискретизации).

Исходный текст программы имеет вид:

$$\begin{aligned} x(n+2) - 0.7x(n+1) + 0.1x(n) & \left| \begin{array}{l} \text{ztrans,n} \\ \text{float,1} \end{array} \right. \rightarrow z^2 \cdot \text{ztrans}(x(n), n, z) - 1 \cdot x(0) \cdot z^2 - 1 \cdot x(1) \cdot z - \\ & - 0.7 \cdot z \cdot \text{ztrans}(x(n), n, z) + 0.7 \cdot x(0) \cdot z + 0.1 \cdot \text{ztrans}(x(n), n, z) \\ n \cdot T \cdot \text{ztrans,n} & \rightarrow T \cdot \frac{z}{(z-1)^2} \\ \left[ \frac{T \cdot \frac{z}{(z-1)^2} + z}{z^2 - 0.7z + 0.1} \right] & \left| \begin{array}{l} \text{invlaplace,z} \\ \text{simplify} \\ \text{float,1} \end{array} \right. \rightarrow -6 \cdot T \cdot \exp(t) + 3 \cdot T \cdot t \cdot \exp(t) - 0.7 \cdot \exp(0.2t) - 1 \cdot \exp(0.2t) \cdot T + \\ & + 2 \cdot \exp(0.5t) + 7 \cdot \exp(0.5t) \cdot T \end{aligned}$$

### 3.3. Численные методы решения дифференциальных уравнений

Суть этого метода состоит в том, что искомая интегральная кривая, являющаяся графиком частного решения, приближённо заменяется ломаной [10].

Пусть дано дифференциальное уравнение:

$$y' = f(x, y)$$

и начальные условия  $y|_{x=x_0} = y_0$ . Найдём приближённо решение уравнения на отрезке  $[x_0, b]$ , удовлетворяющем заданным начальным условиям.

Разобьём отрезок  $[x_0, b]$  точками  $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$  на  $n$  равных частей. Пусть  $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \dots = x_n - x_{n-1} = \Delta x$ . Обозначим через  $y_i$  приближённые значения искомого решения в точках  $x_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ). Проведём через точки разбиения  $x_i$  прямые (рис. 3.1), параллельные оси  $Oy$ , и последовательно сделаем следующие однотипные операции.

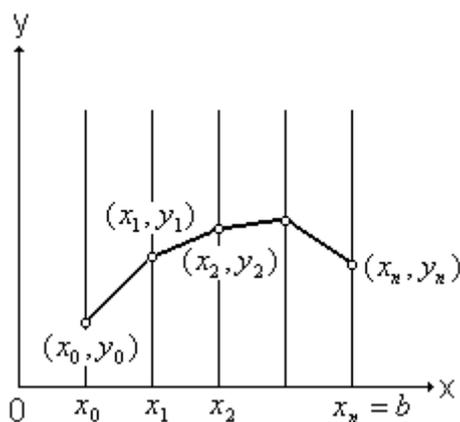


Рис. 3.1. Приближенная искомая интегральная кривая в виде ломаной

Подставим значения  $x_0$  и  $y_0$  в правую часть уравнения  $y' = f(x, y)$  и вычислим угловой коэффициент  $y' = f(x_0, y_0)$  касательной к интегральной кривой в точке  $(x_0; y_0)$ . Для нахождения приближённого значения  $y_1$  искомого решения заменяем на отрезке  $[x_0; x_1]$  интегральную кривую отрезком её касательной в точке  $(x_0; y_0)$ . При этом получаем:

$$y_1 - y_0 = f(x_0, y_0)(x_1 - x_0),$$

откуда, так как  $x_0, x_1, y_0$  известны, находим:

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0) \text{ или } y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)\Delta x.$$

Подставляя значения  $x_1$  и  $y_1$  в правую часть уравнения  $y' = f(x, y)$ , вычисляем угловой коэффициент  $y' = f(x_1, y_1)$  касательной к интегральной кривой в точке  $(x_1; y_1)$ . Далее, заменяя на отрезке  $[x_1, x_2]$  интегральную кривую отрезком касательной, находим приближённое значение решения  $y_2$  в точке  $x_2$ :

$$y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)(x_2 - x_1) \text{ или } y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)\Delta x.$$

В этом равенстве известными являются  $x_1, y_1, x_2$ , а  $y_2$  выражается через них.

Аналогично находим:

$$y_3 = y_2 + f(x_2, y_2)\Delta x, \dots, y_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})\Delta x.$$

Таким образом, приближённо построена искомая интегральная кривая в виде ломаной и получены приближённые значения  $y_i$  искомого решения в точках  $x_i$ . При этом значения  $y_i$  вычисляются по формуле:

$$y_i = y_{i-1} + f(x_{i-1}, y_{i-1})\Delta x \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (3.2)$$

Формула (3.2) и является *основной расчётной формулой метода Эйлера*. Её точность тем выше, чем меньше разность  $\Delta x$ .

Степень точности метода Эйлера невелика. Существуют гораздо более точные методы приближённого решения дифференциальных уравнений.

Для примера произведём моделирование системы второго порядка методом Эйлера.

Система задана передаточной функцией  $W(p) = \frac{kp}{T^2 p^2 + 2\xi Tp + 1}$ .

Необходимо построить по передаточной функции уравнение системы и исследовать методом имитационного моделирования влияние постоянной времени  $T$ , коэффициента усиления  $k$  и постоянной  $\xi$  на переходный процесс.

Передаточная функция  $W(p) = y/x$ . Отсюда дифференциальное уравнение для данной передаточной функции имеет вид:

$$T^2 \frac{d^2}{dt^2} y(t) + 2\xi T \frac{d}{dt} y(t) + y(t) = k \frac{d}{dt} x(t). \quad (3.3)$$

Поскольку метод Эйлера применим для дифференциальных уравнений первого порядка, то необходимо понизить порядок производной уравнения (3.3). Для этого воспользуемся способом разложения на уравнения первого порядка.

В результате получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} y = y_1, \\ \frac{d}{dt} y_1 = y_2 + \frac{k}{T_2} x, \\ \frac{d}{dt} y_2 = -\frac{2\xi}{T} y_2 - \frac{1}{T^2} y_1 - \frac{2k\xi}{T^3} x. \end{cases}$$

Переходя от дифференциальных уравнений к формулам Эйлера, запишем конечную систему уравнений:

$$\begin{cases} y_i = y_{1,i}, \\ y_{1,i} = y_{1,i-1} + (y_{2,i} + \frac{k}{T_2} x) \Delta t, \\ y_{2,i} = y_{2,i-1} + (-\frac{2\xi}{T} y_{2,i-1} - \frac{1}{T^2} y_{1,i-1} - \frac{2k\xi}{T^3} x) \Delta t. \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

В этой системе  $\Delta t$  - шаг интегрирования,  $x$  - внешнее воздействие.

Задавшись внешним воздействием  $x = 1$ , нулевыми начальными условиями  $y_{2,0} = 0, y_{1,0} = 0, y_0 = 0$  и шагом интегрирования  $\Delta t = 0,01$ , составим блок-схему программы моделирования уравнения (3.3) (рис. 3.2).

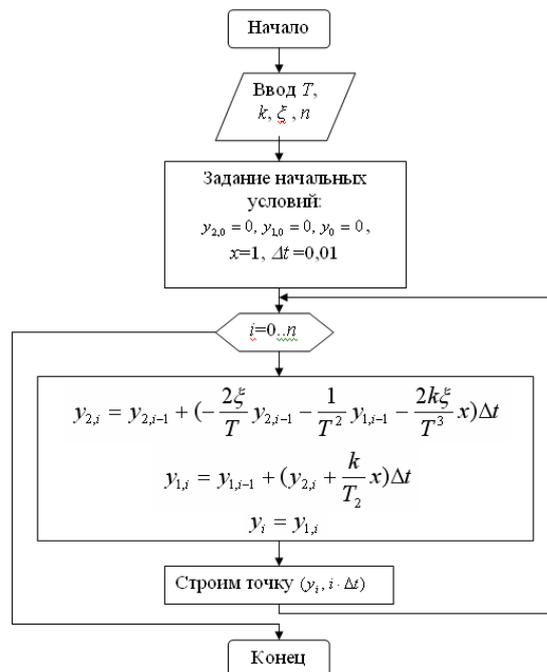


Рис. 3.2. Блок-схема программы моделирования

## 4. ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ В MATHCAD

### 4.1. Приведение дифференциального уравнения системы для машинного моделирования

В настоящее время для анализа и синтеза автоматических систем широко применяется математическое моделирование, при котором автоматические системы можно моделировать по уравнению (по уравнениям) или по структурной схеме. В первом случае возникает необходимость моделирования дифференциального уравнения вида:

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m g}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} g}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dg}{dt} + b_0 g + \\ + c_l \frac{d^l v}{dt^l} + c_{l-1} \frac{d^{l-1} v}{dt^{l-1}} + \dots + c_1 \frac{dv}{dt} + c_0 v.$$

Где  $c_l, c_{l-1}, \dots, c_1, c_0, b_m, b_{m-1}, \dots, b_1, b_0, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$  – заданные постоянные коэффициенты;

$y(t)$  – выходная траектория;

$g(t)$  – входное воздействие;

$v(t)$  – воздействие внешней среды.

Известны различные способы моделирования таких дифференциальных уравнений, среди которых наибольшее распространение нашли способы, позволяющие осуществлять моделирование при заранее неизвестном законе изменения входного сигнала, возмущения и избегать применения численного дифференцирования, которое, как известно, весьма восприимчиво к неточностям представления тех или иных координат элементов систем:

- непосредственное интегрирование;
- разложение на уравнения первого порядка;
- комбинирование производных.

### 4.2. Способ непосредственного интегрирования

Запишем линейное дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_n \frac{d^n g}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} g}{dt^{n-1}} + \dots + b_1 \frac{dg}{dt} + b_0 g + \\ + c_n \frac{d^n v}{dt^n} + c_{n-1} \frac{d^{n-1} v}{dt^{n-1}} + \dots + c_1 \frac{dv}{dt} + c_0 v.$$

Требуется найти  $y(t)$  при заданных постоянных коэффициентах  $a_i, b_j, c_j$  ( $i = 0, \dots, n-1; j = 0, \dots, n$ ) и воздействии  $g$ , а также возмущения  $v$ , зависимость которых от времени заранее не задана.

Запишем:

$$y = z_1 + b_n g + c_n v \quad (4.1)$$

и

$$\frac{dz_1}{dt} = -(a_{n-1}y - b_{n-1}g - c_{n-1}v) + z_2.$$

Для определения  $z_2$  воспользуемся обобщенным выражением:

$$\frac{dz_k}{dt} = -(a_{n-k}y - b_{n-k}g - c_{n-k}v) + z_{k+1}, \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad z_{n+1} = 0.$$

**Пример.** Задано дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^3 y}{dt^3} + a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_2 \frac{d^2 g}{dt^2} + b_1 \frac{dg}{dt} + b_0 g + c_2 \frac{d^2 v}{dt^2} + c_1 \frac{dv}{dt} + c_0 v.$$

Представить уравнения моделирования на основе способа непосредственного интегрирования.

**Решение.** Здесь  $n = 3, m = 2, l = 2$ . Так как  $b_3 = 0, c_3 = 0$ , то исходя из выражения (4.1), имеем  $y = z_1$ . Далее:

$$\frac{dz_1}{dt} = -(a_2 y - b_2 g - c_2 v) + z_2,$$

$$\frac{dz_2}{dt} = -(a_1 y - b_1 g - c_1 v) + z_3$$

и

$$\frac{dz_3}{dt} = -(a_0 y - b_0 g - c_0 v).$$

### 4.3. Способ разложения на уравнения первого порядка

Запишем линейное дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_n \frac{d^n g}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} g}{dt^{n-1}} + \dots + b_1 \frac{dg}{dt} + b_0 g + \\ + c_n \frac{d^n v}{dt^n} + c_{n-1} \frac{d^{n-1} v}{dt^{n-1}} + \dots + c_1 \frac{dv}{dt} + c_0 v. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Это линейное дифференциальное уравнение может быть представлено в виде совокупности линейных дифференциальных уравнений первой степени:

$$\begin{aligned}
y &= y_1 + \alpha_n g + \beta_n v, \\
\frac{dy_1}{dt} &= y_2 + \alpha_{n-1} g + \beta_{n-1} v, \\
&\dots\dots\dots \\
\frac{dy_{n-1}}{dt} &= y_n + \alpha_1 g + \beta_1 v, \\
\frac{dy_n}{dt} &= -a_{n-1} y_n - a_{n-2} y_{n-1} - \dots - a_1 y_2 - a_0 y_1 + \alpha_0 g + \beta_0 v.
\end{aligned}
\tag{4.3}$$

Чтобы уравнения (4.2) и (4.3) были тождественны, необходимо, чтобы значения новых коэффициентов  $\alpha_i$  ( $i = 0, \dots, n$ ) и  $\beta_i$  ( $i = 0, \dots, n$ ) удовлетворяли следующим равенствам:

$$\begin{aligned}
b_n &= \alpha_n, \\
b_{n-1} &= \alpha_{n-1} + \alpha_n a_{n-1}, \\
&\dots\dots\dots \\
b_2 &= \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-1} a_3 + \alpha_n a_2, \\
b_1 &= \alpha_1 + \alpha_2 a_{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} a_2 + \alpha_n a_1, \\
b_0 &= \alpha_0 + \alpha_1 a_{n-1} + \alpha_2 a_{n-2} + \dots + \alpha_{n-1} a_1 + \alpha_n a_0;
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
c_n &= \beta_n, \\
c_{n-1} &= \beta_{n-1} + \beta_n a_{n-1}, \\
&\dots\dots\dots \\
c_2 &= \beta_2 + \dots + \beta_{n-1} a_3 + \beta_n a_2, \\
c_1 &= \beta_1 + \beta_2 a_{n-1} + \dots + \beta_{n-1} a_2 + \beta_n a_1, \\
c_0 &= \beta_0 + \beta_1 a_{n-1} + \beta_2 a_{n-2} + \dots + \beta_{n-1} a_1 + \beta_n a_0.
\end{aligned}$$

**Пример.** Задано дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^3 y}{dt^3} + a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_2 \frac{d^2 g}{dt^2} + b_1 \frac{dg}{dt} + b_0 g + c_2 \frac{d^2 v}{dt^2} + c_1 \frac{dv}{dt} + c_0 v.$$

Представить уравнения моделирования на основе способа разложения на уравнения первого порядка.

**Решение.** Так как  $n = 3$ , то совокупность линейных дифференциальных уравнений будет иметь вид:

$$\begin{aligned}
y &= y_1 + \alpha_3 g + \beta_3 v, \\
\frac{dy_1}{dt} &= y_2 + \alpha_2 g + \beta_2 v, \\
\frac{dy_2}{dt} &= y_3 + \alpha_1 g + \beta_1 v, \\
\frac{dy_3}{dt} &= -a_2 y_3 - a_1 y_2 - a_0 y_1 + \alpha_0 g + \beta_0 v.
\end{aligned}$$

Составим выражения для определения коэффициентов  $\alpha_0, \dots, \alpha_3$  и  $\beta_0, \dots, \beta_3$ . Так как  $b_3 = 0$  и  $c_3 = 0$ , то  $\alpha_3 = 0$ ,  $\beta_3 = 0$  и

$$\begin{aligned} b_2 &= \alpha_2, \\ b_1 &= \alpha_1 + \alpha_2 a_2, \\ b_0 &= \alpha_0 + \alpha_1 a_2 + \alpha_2 a_1; \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} c_2 &= \beta_2, \\ c_1 &= \beta_1 + \beta_2 a_2, \\ c_0 &= \beta_0 + \beta_1 a_2 + \beta_2 a_1. \end{aligned}$$

Тем самым

$$\begin{aligned} y &= y_1, \\ \frac{dy_1}{dt} &= y_2 + b_2 g + c_2 v, \\ \frac{dy_2}{dt} &= y_3 + (b_1 - b_2 a_2) g + (c_1 - c_2 a_2) v, \\ \frac{dy_3}{dt} &= -a_2 y_3 - a_1 y_2 - a_0 y_1 + (b_0 - (b_1 - b_2 a_2) a_2 + b_2 a_1) g + (c_0 - (c_1 - c_2 a_2) a_2 + c_2 a_1) v. \end{aligned}$$

#### 4.4. Способ комбинирования производных

Запишем дифференциальное уравнение в виде:

$$\begin{aligned} \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y &= b_n \frac{d^n g}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} g}{dt^{n-1}} + \dots + b_1 \frac{dg}{dt} + b_0 g + \\ &+ c_n \frac{d^n v}{dt^n} + c_{n-1} \frac{d^{n-1} v}{dt^{n-1}} + \dots + c_1 \frac{dv}{dt} + c_0 v. \end{aligned}$$

Найдем изображение по Лапласу данного уравнения:

$$\begin{aligned} Y(p)(p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0) &= G(p)(b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0) + \\ &+ V(p)(c_n p^n + c_{n-1} p^{n-1} + \dots + c_1 p + c_0). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Выразим из уравнения (4.4) величину  $Y(p)$ :

$$\begin{aligned} Y(p) &= \frac{G(p)}{p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0} (b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0) + \\ &+ \frac{V(p)}{p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0} (c_n p^n + c_{n-1} p^{n-1} + \dots + c_1 p + c_0) \end{aligned}$$

и произведём следующую замену:

$$\begin{aligned} u(p) &= \frac{G(p)}{p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}, \\ m(p) &= \frac{V(p)}{p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

В результате получаем:

$$Y(p) = u(p)(b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0) + m(p)(c_n p^n + c_{n-1} p^{n-1} + \dots + c_1 p + c_0). \quad (4.6)$$

Находя оригиналы выражений (4.5) и (4.6), получаем искомую систему уравнений:

$$y(t) = b_n \frac{d^n u}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} u}{dt^{n-1}} + \dots + b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u + c_n \frac{d^n m}{dt^n} + c_{n-1} \frac{d^{n-1} m}{dt^{n-1}} + \dots + c_1 \frac{dm}{dt} + c_0 m,$$

$$\frac{d^n u}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} u}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{du}{dt} + a_0 u = g,$$

$$\frac{d^n m}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} m}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dm}{dt} + a_0 m = v.$$

**Пример.** Задано дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^3 y}{dt^3} + a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_2 \frac{d^2 g}{dt^2} + b_1 \frac{dg}{dt} + b_0 g + c_2 \frac{d^2 v}{dt^2} + c_1 \frac{dv}{dt} + c_0 v.$$

Представить уравнения моделирования на основе способа комбинирования производных.

**Решение.** Исходя из выражения (4.6), имеем:

$$y = b_2 \frac{d^2 u}{dt^2} + b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u + c_2 \frac{d^2 m}{dt^2} + c_1 \frac{dm}{dt} + c_0 m.$$

Выражение (4.5) в рассматриваемом примере принимает вид:

$$\frac{d^3 u}{dt^3} + a_2 \frac{d^2 u}{dt^2} + a_1 \frac{du}{dt} + a_0 u = g,$$

$$\frac{d^3 m}{dt^3} + a_2 \frac{d^2 m}{dt^2} + a_1 \frac{dm}{dt} + a_0 m = v.$$

#### 4.5. Отыскание оригинала по известному изображению

Для отыскания оригинала по известному изображению обычно используют справочные таблицы и, когда это возможно, свойство о свёртке оригиналов. Во многих практических случаях, возникающих при исследовании систем, можно вывести непосредственно формулы для определения оригинала по заданному изображению. Это связано с тем, что многие вопросы исследования систем могут быть сформулированы в терминах лапласовского преобразования как исследование отношения:

$$W(p) = \frac{K(p)}{D(p)}$$

многочлена  $K(p)$  степени  $m$ :

$$K(p) = b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m$$

и многочлена  $D(p)$  степени  $n$  ( $n > m$ ):

$$D(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n.$$

Для дальнейшего изложения на потребуется следующая теорема о разложении на элементарные дроби [5, 11, 12, 13, 14].

**Теорема.** Любое отношение  $W(p) = \frac{K(p)}{D(p)}$  многочлена  $K(p)$  степени  $m$  и многочлена  $D(p)$  степени  $n > m$ , не имеющих общих корней, может быть представлено в виде суммы  $n$  элементарных дробей, соответствующих корням многочлена  $D(p)$  ( $D(p_k) \neq 0$ ).

Обозначим:  $r$  – число различных корней,  $p_k$ , а  $\mu_k$  – кратность корня  $p_k$ . По основной теореме алгебры многочленов  $\sum_{k=1}^r \mu_k = n$ . В данных обозначениях имеем:

$$W(p) = \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^{\mu_k} \frac{c_{kj}}{(p - p_k)^{\mu_k - j + 1}} = \sum_{k=1}^r \left\{ \frac{c_{k1}}{p - p_k} + \frac{c_{k2}}{(p - p_k)^2} + \dots + \frac{c_{k\mu_k}}{(p - p_k)^{\mu_k}} \right\}. \quad (4.7)$$

Коэффициенты этого разложения  $c_{kj}$  обычно находят одним из следующих методов.

**Первый метод.** Умножая обе части равенства (4.7) на  $D(p)$  и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $p$  в обеих частях полученного равенства, придём к системе линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов  $c_{kj}$ . Однако из-за своих вычислительных трудностей этот метод мало популярен, и обычно пользуются следующим методом.

**Второй метод.** Зафиксируем некоторое значение  $k$  и умножим обе части равенства (4.7) на  $(p - p_k)^{\mu_k}$ . Пусть  $k = l$ , тогда:

$$(p - p_l)^{\mu_l} W(p) = \sum_{j=1}^{\mu_l} c_{lj} (p - p_l)^{j-1} + (p - p_l)^{\mu_l} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^r \sum_{j=1}^{\mu_k} \frac{c_{kj}}{(p - p_k)^{\mu_k - j + 1}}$$

Продифференцируем полученное равенство  $j-1$  раз по  $p$ :

$$\frac{d^{j-1} (p - p_l)^{\mu_l} W(p)}{dp^{j-1}} = (j-1)! c_{lj} + \varphi(p), \quad (4.8)$$

где, как нетрудно видеть,  $\varphi(p_l) = 0$  из-за члена  $(p - p_l)^{\mu_l}$ . Переходя в равенстве (4.8) к пределу при  $p \rightarrow p_l$ , получим окончательную формулу для определения коэффициентов  $c_{lj}$ :

$$c_{lj} = \lim_{p \rightarrow p_l} \frac{1}{(j-1)!} \frac{d^{j-1}}{dp^{j-1}} [p - p_l]^{\mu_l} W(p).$$

**Следствие.** Если все корни знаменателя  $D(p)$  различны ( $\mu_k = 1$ ), то

$$c_l = \lim_{p \rightarrow p_l} \{(p - p_l)W(p)\} = \frac{K(p_l)}{D'(p_l)}.$$

Используя свойство линейности преобразования Лапласа, на основании равенства (4.7) получаем:

$$W(p) = \sum_{k=1}^r \left\{ c_{k1} + \frac{t}{1!} c_{k2} + \dots + \frac{t^{\mu_k-1}}{(\mu_k-1)!} c_{k\mu_k} \right\} e^{p_k t} \cdot [2, \text{стр. 265-266}]$$

**Пример 1.** Необходимо найти оригинал передаточной функции системы:

$$W(p) = \frac{p+1}{p^3 + 8p^2 + 21p + 18}. \quad (4.9)$$

Для того чтобы найти оригинал необходимо сначала найти корни полинома знаменателя. В данном примере  $p_1 = -2, p_2 = -3, p_3 = -3$ , тогда, в соответствии с теоремой, данную передаточную функцию можно разложить на сумму элементарных дробей вида:

$$W(p) = \frac{c_1}{p+2} + \frac{c_2}{p+3} + \frac{c_3}{(p+3)^2}. \quad (4.10)$$

Далее необходимо найти неизвестные коэффициенты  $c_1, c_2, c_3$ .

1. Найдём данные коэффициенты, используя первый метод.

Для этого умножим обе части равенства (4.10) на полином знаменателя:

$$(p+2)(p+3)^2 W(p) = c_1(p+3)^2 + c_2(p+2)(p+3) + c_3(p+2). \quad (4.11)$$

Подставив вместо  $w(p)$  выражение (4.9) и раскрыв скобки в правой части равенства (4.11), получим:

$$p+1=(c_1+c_2)p^2+(6c_1+5c_2+c_3)p+9c_1+6c_2+2c_3.$$

Приравнявая коэффициенты при равных степенях  $p$  в обеих частях полученного равенства получаем систему:

$$\begin{cases} c_1+c_2=0, \\ 6c_1+5c_2+c_3=1, \\ 9c_1+6c_2+2c_3=1. \end{cases}$$

Решив данную систему, получим неизвестные коэффициенты  $c_1=-1, c_2=1, c_3=2$ .

2. Найдём те же коэффициенты вторым методом.

Найдём сначала коэффициент  $c_1$ . Для этого умножим обе части равенства (4.10) на  $p+2$ :

$$(p+2)W(p)=c_1+c_2\frac{p+2}{p+3}+c_3\frac{p+2}{(p+3)^2}=\frac{p+1}{(p+3)^2}.$$

Подставим вместо  $p$  значение  $-2$ , тогда множители при коэффициентах  $c_2$  и  $c_3$  станут нулями, а коэффициент  $c_1$  станет равен  $-1$ .

Чтобы найти коэффициент  $c_2$ , необходимо умножить обе части равенства (4.10) на  $(p+3)^2$ :

$$(p+3)^2W(p)=c_1\frac{(p+3)^2}{p+2}+c_2(p+3)+c_3=\frac{p+1}{p+2}. \quad (4.12)$$

Перепишем равенство (4.12) следующим образом:

$$c_2(p+3)+\varphi(p)=\frac{p+1}{p+2}, \quad (4.13)$$

где

$$\varphi(p)=c_1\frac{(p+3)^2}{p+2}+c_3.$$

Далее для нахождения коэффициента  $c_2$  нужно избавиться от множителя  $(p+3)$ , продифференцировав равенство (4.13):

$$c_2+\varphi'(p)=\frac{1}{(p+2)^2}.$$

Далее, подставив вместо  $p$  значение  $-3$ , получим, что  $c_2 = 1$  (при  $p = -3$   $\varphi'(p) = 0$ ).

Чтобы найти коэффициент  $c_3$ , необходимо также умножить обе части равенства (4.10) на  $(p+3)^2$ :

$$(p+3)^2 W(p) = c_1 \frac{(p+3)^2}{p+2} + c_2(p+3) + c_3 = \frac{p+1}{p+2}.$$

Если вместо  $p$  подставить  $-3$ , то получим  $c_3 = 2$ .

В результате, подставив значения коэффициентов в выражение (4.10), получим следующее:

$$W(p) = \frac{-1}{p+2} + \frac{1}{p+3} + \frac{2}{(p+3)^2}.$$

Далее находим оригинал полученного выражения:

$$w(t) = -e^{-2t} + e^{-3t} + 2te^{-3t}.$$

**Пример 2.** Необходимо найти оригинал передаточной функции системы:

$$W(p) = \frac{1}{p^2 - 4p + 13}. \quad (4.14)$$

Для того чтобы найти оригинал необходимо сначала найти корни полинома знаменателя. В данном примере  $p_1 = 2 + i3$ ,  $p_2 = 2 - i3$ , тогда, в соответствии с теоремой, данную передаточную функцию можно разложить на сумму элементарных дробей вида:

$$W(p) = \frac{c_1}{p - 2 - i3} + \frac{c_2}{p - 2 + i3}. \quad (4.15)$$

Далее необходимо найти неизвестные коэффициенты  $c_1, c_2$ .

1. Найдём данные коэффициенты, используя первый метод.

Для этого умножим обе части равенства (5.15) на полином знаменателя:

$$(p - 2 - i3)(p - 2 + i3)W(p) = c_1(p - 2 + i3) + c_2(p - 2 - i3). \quad (4.16)$$

Подставив вместо  $w(p)$  выражение (4.14) и раскрыв скобки в правой части равенства (4.16), получим

$$1 = (c_1 + c_2)p + ic_1 3 - ic_2 3 - 2c_1 - 2c_2.$$

Приравнивая коэффициенты при равных степенях  $p$  в обеих частях полученного равенства, получаем систему:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0, \\ ic_1 3 - ic_2 3 - 2c_1 - 2c_2 = 1. \end{cases}$$

Решив данную систему, получим неизвестные коэффициенты  $c_1 = \frac{1}{i6}, c_2 = -\frac{1}{i6}$ .

2. Найдём те же коэффициенты вторым методом.

Найдём сначала коэффициент  $c_1$ . Для этого умножим обе части равенства (4.15) на  $p-2-i3$ :

$$(p-2-i3)W(p) = c_1 + c_2 \frac{p-2-i3}{p-2+i3} = \frac{1}{p-2+i3}.$$

Подставим вместо  $p$  значение  $2+i3$ , тогда множитель при коэффициенте  $c_2$  станет нулём, а коэффициент  $c_1$  станет равен  $\frac{1}{i6}$ .

Чтобы найти коэффициент  $c_2$ , необходимо умножить обе части равенства (4.15) на  $p-2+i3$ :

$$(p-2+i3)W(p) = c_1 \frac{p-2+i3}{p-2-i3} + c_2 = \frac{1}{p-2-i3}.$$

Подставив вместо  $p$  значение  $2-i3$ , получим  $c_2 = -\frac{1}{i6}$ .

В результате, подставив значения коэффициентов в выражение (4.15), получим следующее:

$$W(p) = \frac{1}{i6} \frac{1}{p-2-i3} - \frac{1}{i6} \frac{1}{p-2+i3} = \frac{1}{i6} \left[ \frac{1}{p-2-i3} - \frac{1}{p-2+i3} \right].$$

Далее находим оригинал полученного выражения:

$$w(t) = \frac{1}{i6} \left[ e^{(2+i3)t} - e^{(2-i3)t} \right]. \quad (4.17)$$

Функция  $w(t)$  является комплексной. Чтобы привести её к нормальному виду, необходимо использовать формулы Эйлера:

$$\begin{cases} \sin \beta t = \frac{e^{i\beta t} - e^{-i\beta t}}{2i}, \\ \cos \beta t = \frac{e^{i\beta t} + e^{-i\beta t}}{2}. \end{cases}$$

Тогда, преобразовав выражение (4.17), получим:

$$w(t) = \frac{1}{i6} [e^{(2+i3)t} - e^{(2-i3)t}] = \frac{1}{i6} [e^{2t} e^{i3t} - e^{2t} e^{-i3t}] = \frac{e^{2t}}{i6} [e^{i3t} - e^{-i3t}] =$$

$$= \frac{1}{3} e^{2t} \left[ \frac{e^{i3t} - e^{-i3t}}{2i} \right].$$

Выражение, записанное в квадратных скобках, является  $\sin\beta t$ . В результате:

$$w(t) = \frac{1}{3} e^{2t} \sin 3t.$$

#### 4.6. Получение динамических характеристик

Mathcad содержит инструменты для решения дифференциальных уравнений (систем) различного порядка и различными методами. В него входят 13 встроенных функций (Bustoer, bustoer, bvalfit, multigird, relax, Rkadapt, rkadapt, rkfixed, sbval, Stiffb, stiffb, StiffR и stiffR), работа одной из которых (rkfixed – метод Рунге — Кутты) показана на рис. 4.1. Эта функция имеет вид: rkfixed ( $v, x_0, x_k, n, F$ ). Здесь  $v$  – начальные условия, записанные в виде вектора,  $x_0, x_k$  – начальное и конечное значения аргумента,  $n$  – число шагов,  $F$  – правые части системы, записанные в виде вектора. Функция rkfixed возвращает в матрицу (у нас она имеет имя  $z$ ) с  $P+1$  столбцами и  $n$  строками ( $P$  – количество уравнений или порядок уравнения) таблицу решений системы: нулевой столбец – это значения аргумента  $t$  (их задает пользователь через величины  $x_0, x_k$  и  $n$ ), а последующие столбцы – значения ординат решения.

Для того чтобы вызвать данную функцию, необходимо нажать на значок вставки функции  на панели инструментов Mathcada (рис. 4.1).

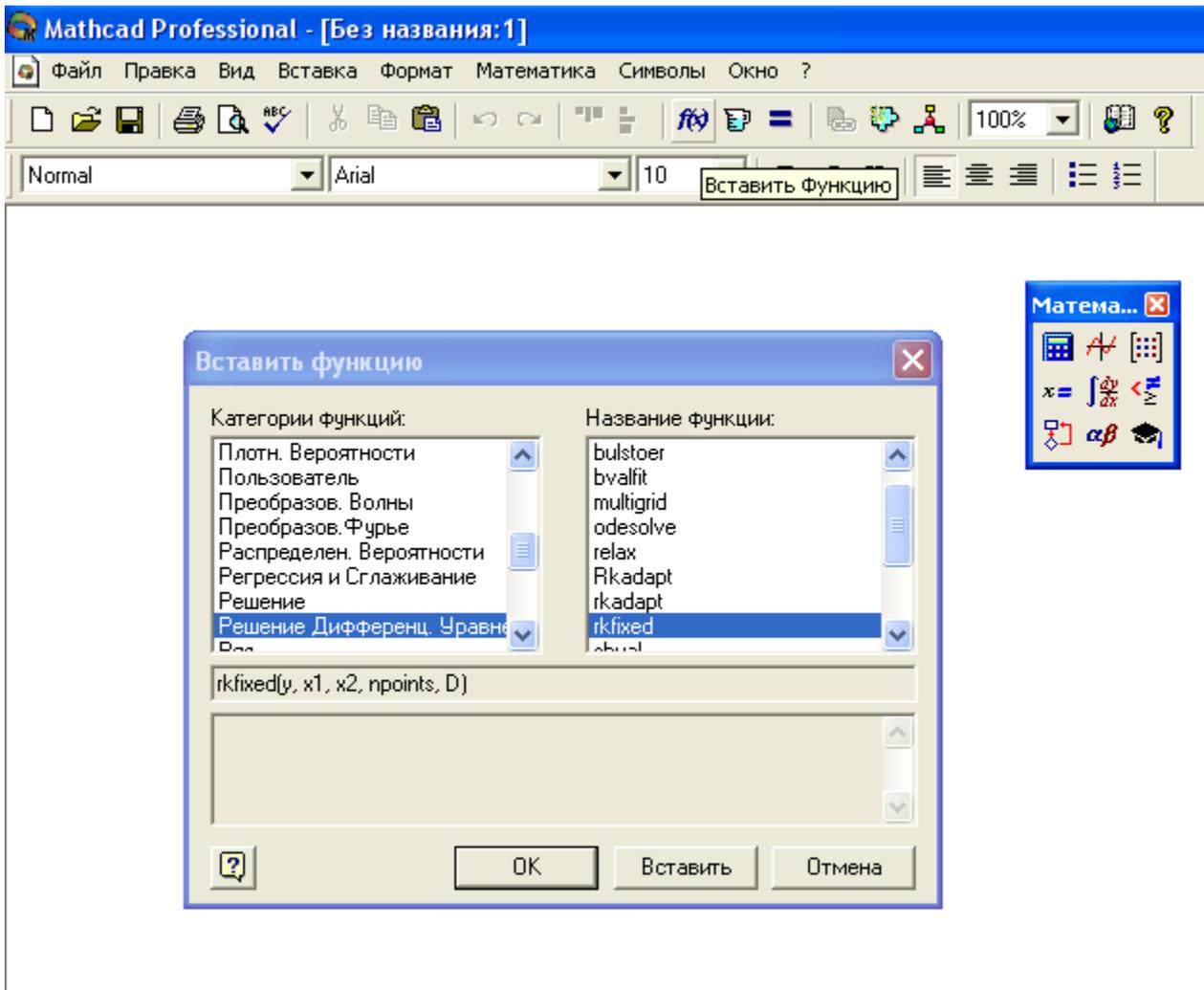
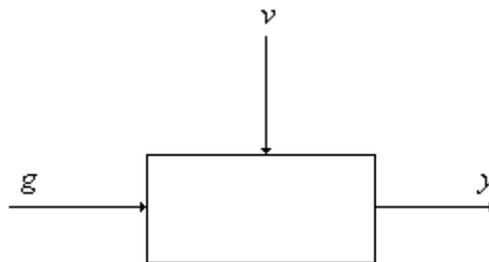


Рис. 4.1. Вызов функции rkfixed

Рассмотрим работу этой функции на примере. Пусть исследуется система, имеющая следующую структурную схему:



и описываемая дифференциальным уравнением вида:

$$\frac{d^3 y}{dt^3} + a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_2 \frac{d^2 g}{dt^2} + b_1 \frac{dg}{dt} + b_0 g + c_2 \frac{d^2 v}{dt^2} + c_1 \frac{dv}{dt} + c_0 v.$$

Смоделируем данную систему, используя способ разложения на уравнения первого порядка:

$$\begin{aligned}
 y &= y_1 + \alpha_3 g + \beta_3 v, \\
 \frac{dy_1}{dt} &= y_2 + \alpha_2 g + \beta_2 v, \\
 \frac{dy_2}{dt} &= y_3 + \alpha_1 g + \beta_1 v, \\
 \frac{dy_3}{dt} &= -a_2 y_3 - a_1 y_2 - a_0 y_1 + \alpha_0 g + \beta_0 v.
 \end{aligned}$$

Составим выражения для определения коэффициентов  $\alpha_0, \dots, \alpha_3$  и  $\beta_0, \dots, \beta_3$ :

$$\begin{aligned}
 b_3 &= \alpha_3, \\
 b_2 &= \alpha_2 + \alpha_3 a_2, \\
 b_1 &= \alpha_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_1, \\
 b_0 &= \alpha_0 + \alpha_1 a_2 + \alpha_2 a_1 + \alpha_3 a_0;
 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
 c_3 &= \beta_3, \\
 c_2 &= \beta_2 + \beta_3 a_2, \\
 c_1 &= \beta_1 + \beta_2 a_2 + \beta_3 a_1, \\
 c_0 &= \beta_0 + \beta_1 a_2 + \beta_2 a_1 + \beta_3 a_0.
 \end{aligned}$$

Поиск неизвестных коэффициентов, как показано на рис. 4.2, осуществляется методом Крамера, с использованием функции `lsolve`. Затем ищутся сами решения системы.

В столбце матрицы  $z$  с номером 0 хранятся значения времени, в столбце с номером 1 – значения самой функции, в столбце с номером 2 – значения первой производной функции, в столбце с номером 3 – вторая производная функции. На верхнем графике показана переходная функция системы. На нижнем графике показана весовая функция системы. Поскольку начальные значения были взяты нулевыми, то в результате значения производных функции (столбцы 2 и 3 в матрице  $z$ ) оказались смещёнными на истинные начальные значения. Данные истинные начальные значения производных можно определить из следующих соображений. Поскольку для устойчивых систем переходная функция в установившемся режиме является величиной постоянной, то значения производных этой функции в

этих точек должны быть равными нулю, т. е. значения  $z_{n,2}$  и  $z_{n,3}$  равны нулю. Однако вследствие того, что все значения оказались смещены истинными начальными значениями, то именно в  $z_{n,2}$  и  $z_{n,3}$  и будут храниться данные значения. Поэтому при построении графика весовой функции необходимо сместить или избавиться от этого смещения, как показано на рис. 4.2.

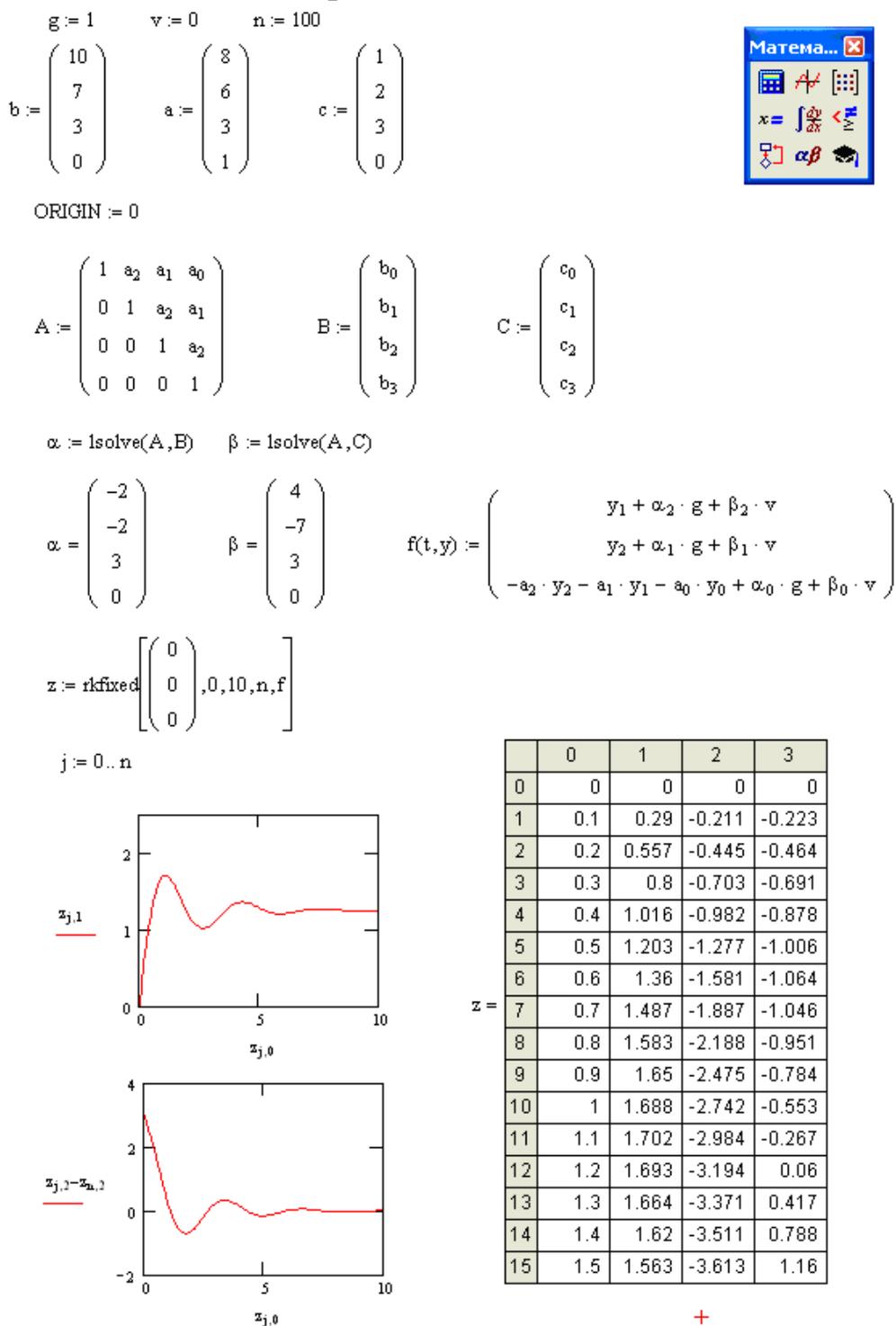


Рис. 4.2. Получение динамических характеристик с помощью функции rkfixed

## 4.7. Получение частотных характеристик

Для получения частотных характеристик с помощью Маткада, необходимо записать передаточную функцию системы. Также необходимо указать диапазон частот, для которого будут искаяться значения соответствующих характеристик. Функции, позволяющие находить данные значения, являются встроенными функциями Маткада. Функция, позволяющая определить значения мнимой частотной характеристики (МЧХ) в заданном диапазоне частот, имеет следующий вид –  $\text{Im}(\bullet)$ . Для определения значений вещественной частотной характеристики (ВЧХ) используется функция –  $\text{Re}(\bullet)$ . Чтобы определить значения фазовой частотной характеристики (ФЧХ) необходимо применить функцию –  $\text{arg}(\bullet)$ . Данные функции можно вводить как с клавиатуры, так и с помощью опции «вставить функцию», обозначаемая значком  (рис. 4.3).

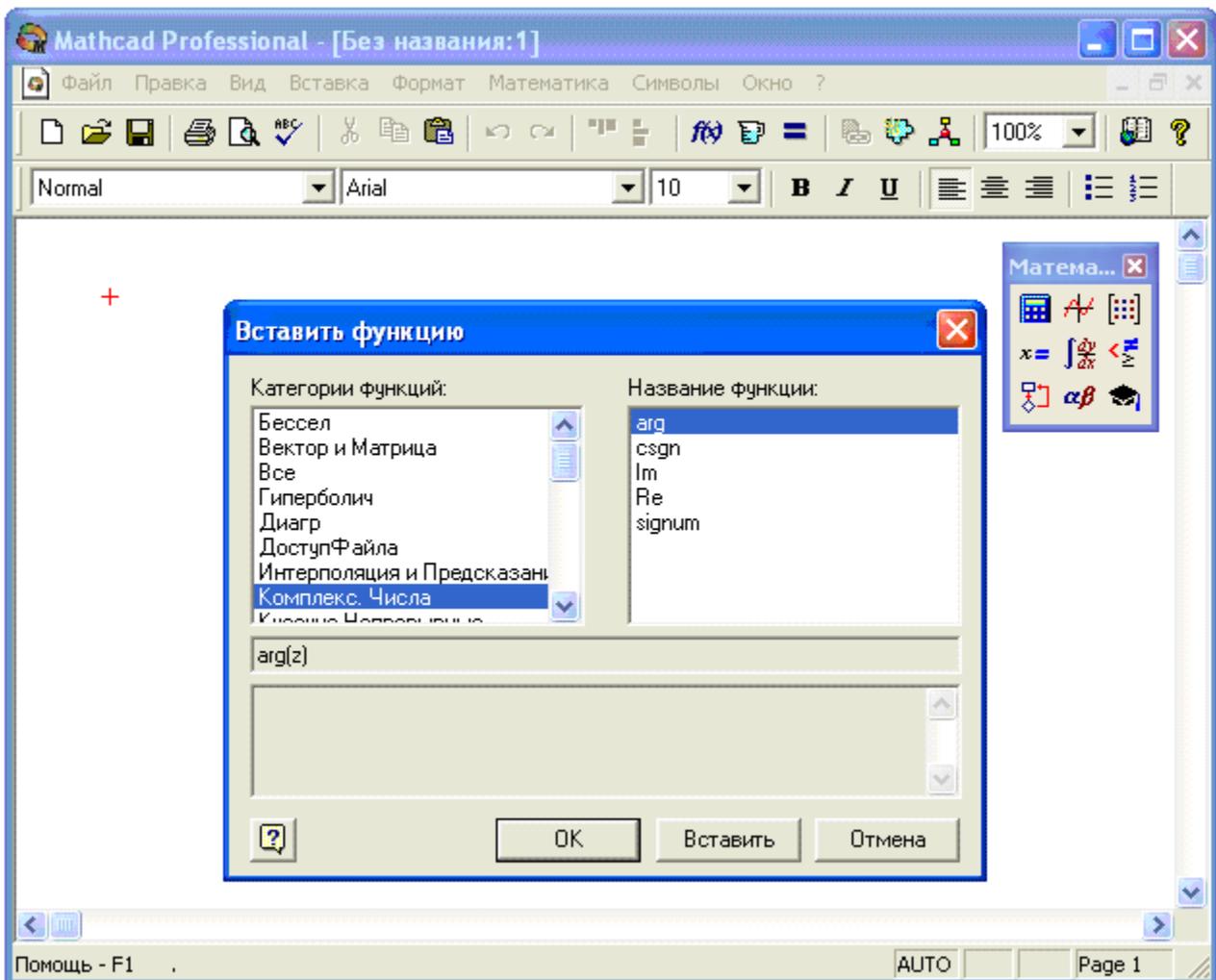


Рис. 4.3. Встроенные функции для получения частотных характеристик

Амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) систем находится с помощью функции «Модуль», находящейся на панели инструментов «Математика» в опции «Арифметические инструменты» в виде значка  $|x|$ .

Ниже приведён пример вычисления частотных характеристик для системы с передаточной функцией третьего порядка (рис. 4.4).

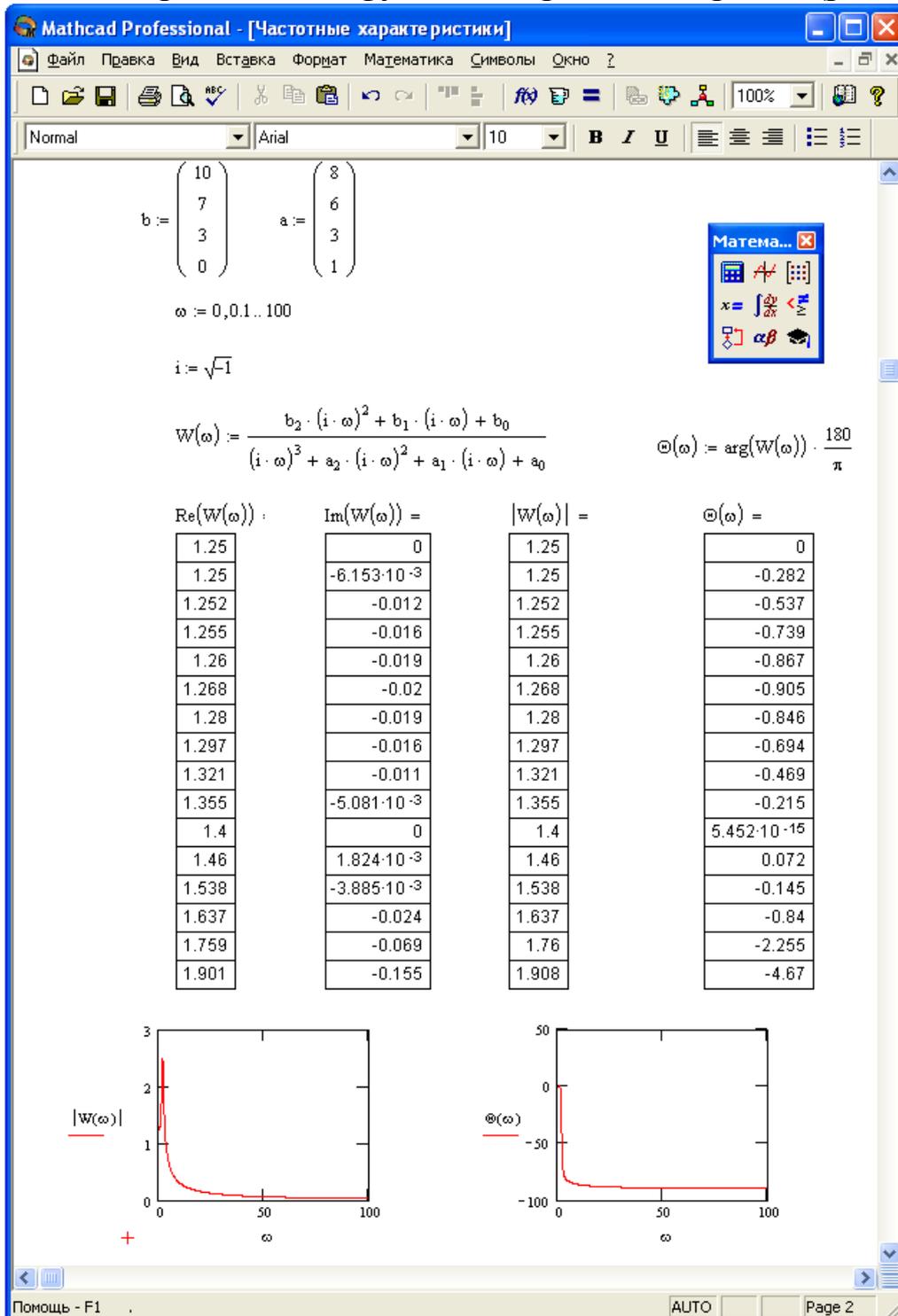
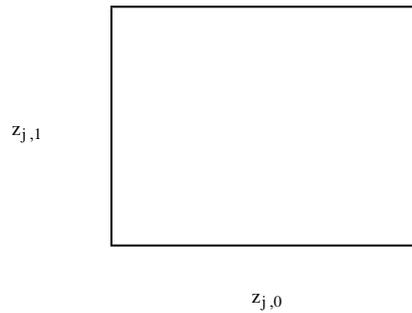


Рис. 4.4. Пример вычисления частотных характеристик для системы с передаточной функцией третьего порядка

## 4.8. Определение показателей качества переходного процесса



### 1. Установившееся значение выхода – $H$ .

Данное значение находится путём подставления в передаточную функцию линейной системы значения  $p = 0$ .

$$H := W(0)$$

$$H = \bullet$$

### 2. Время переходного процесса $T$ .

Время переходного процесса находится с использованием программы.

С помощью перебора ищутся все значения переходной характеристики, начиная с последнего, и удовлетворяющие условию:

$$|h(t) - h_{уст}| \leq \delta_{пер} \quad \text{при} \quad t \geq t_{пер}. \quad (4.18)$$

При этом если условие (4.18) выполняется, то значению времени  $T$  присваивается значение времени из матрицы  $z$  (значения времени находятся в столбце с номером 0), соответствующее данной величине переходной характеристики. Так происходит до тех пор, пока какое-либо значение переходной характеристики не перестанет удовлетворять условию (4.18). В этом случае происходит прерывание программы с помощью оператора **break**. Тогда при выходе из программы в переменной  $T$  будет храниться последнее значение времени, при котором выполнялось условие (4.18). Если значений, удовлетворяющих данному условию, нет, то в переменной  $T$  будет храниться значение 0, это значит что либо система не устойчива, либо точность  $\delta$  слишком велика.

$\delta := 0.005$

$H = \bullet$

$n := 100$

```
T :=  $\left\{ \begin{array}{l} T \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in n..1 \\ \quad \left\{ \begin{array}{l} T \leftarrow z_{i,0} \text{ if } |z_{i,1} - H| \leq \delta \\ \text{break if } |z_{i,1} - H| > \delta \end{array} \right. \\ T \end{array} \right.$ 
```

$T = \bullet$

### 3. Величина перерегулирования $\sigma$ .

Величина перерегулирования ищется программно. Путём перебора среди всех найденных точек, соответствующих переходному процессу, хранящихся в матрице  $z$  в столбце с номером 1, с помощью цикла ищется наибольшее значение переходного процесса  $H_{max}$ . Затем согласно формуле:

$$\sigma = \frac{h_{max} - h_{уст}}{h_{уст}}$$

ищется величина перерегулирования  $\sigma$ .

```
Hmax :=  $\left\{ \begin{array}{l} Hmax \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 1..n \\ \quad Hmax \leftarrow z_{i,1} \text{ if } z_{i,1} > Hmax \\ Hmax \end{array} \right.$ 
```

$Hmax = \bullet$

$$\sigma := \frac{Hmax - H}{H}$$

$\sigma = \bullet$

#### 4. Число перерегулирований $N$

Число перерегулирований ищется программно. С помощью цикла осуществляется перебор всех значений переходной характеристики и если данная характеристики осуществляет переход через границу, заданную условием

$$h_{\max} - h_{уст} > \delta_{рег} > 0,$$

т.е. разность предыдущего значения переходной характеристики и ее установившегося значения будет меньше либо равно  $\delta$ , а разность последующего и значения  $H$  – больше  $\delta$ , то к значению  $N$  прибавляется единица. В результате в  $N$  будет храниться число переходов переходной характеристики или число выбросов.

$$N := \begin{array}{|l} N \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 1..n-1 \\ \quad N \leftarrow N + 1 \text{ if } z_{i,1} - H \leq \delta \wedge z_{i+1,1} - H > \delta \\ N \end{array}$$

$$N = \bullet$$

#### 5. Время запаздывания $Tz$

Время запаздывания также ищется при помощи программы. При этом ищется номер значения переходной характеристики в матрице  $z$ , находящегося ближе всего к значению  $H/2$ , а затем и сама величина  $Tz$ . Так как Маткад решает дифференциальное уравнение в отдельных точках, то не удаётся точно определить время запаздывания. Для увеличения точности необходимо увеличить число шагов  $n$ .

$$no := \begin{array}{|l} \text{for } i \in 1..n-1 \\ \quad \left| \begin{array}{|l} no \leftarrow i \\ \text{break if } \left| z_{i,1} - \frac{h}{2} \right| < \left| z_{i+1,1} - \frac{h}{2} \right| \end{array} \right. \\ no \end{array}$$

$$Tz := z_{no,0}$$

$$Tz = \bullet$$

## 6. Время нарастания $T_n$

Чтобы определить время нарастания переходного процесса, необходимо определить уравнение касательной, проведённой к осреднённой кривой переходной характеристики в точке  $t=t_3$ . Уравнение касательной в общем виде запишется как

$$\psi(t) = q \cdot t + p, \quad (4.19)$$

где  $q$  – величина равная тангенсу угла наклона касательной или значение производной переходной характеристики в точке  $t=t_3$ .

Значения производных переходной характеристики находятся в матрице  $z$  в столбце с номером 2, тогда величина  $q$  находится как

$$q = z_{n0,2} - z_{n,2},$$

где  $n0$  – номер значения переходной характеристики в матрице  $z$  в точке  $t=t_3$  (находится из предыдущего пункта).

Так как при решении дифференциального уравнения методом Рунге – Кутты значения производных оказались смещёнными (поскольку были заданы нулевые начальные условия), то от  $z_{n0,2}$  необходимо отнять  $z_{n,2}$ .

Величина  $p$  ищется из выражения (4.19) при подстановке вместо  $t$  значения  $T_z$

$$p = z_{n0,1} - q \cdot T_z,$$

где  $z_{n0,1}$  – значение переходной функции в точке  $t=T_z$ .

Далее ищется значение времени  $T_{ky}$  при котором касательная пересекается с горизонтальной прямой, соответствующей установившемуся значению регулируемой величины, а также значение времени  $T_{k0}$  соответствующее пересечению оси времени с касательной. В результате время нарастания

$$T_n = T_{ky} - T_{k0}.$$

$$z_{no,2} - z_{n,2} = 2.543$$

$$q := z_{no,2} - z_{n,2}$$

$$p := z_{no,1} - q \cdot Tz$$

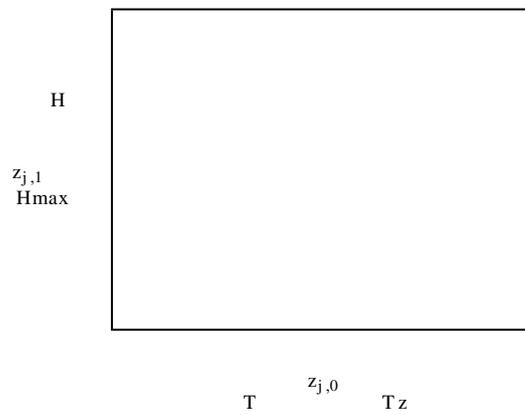
$$\psi(t) := q \cdot t + p$$

$$Tky := \frac{(H - p)}{q}$$

$$Tko := \frac{-p}{q}$$

$$Tn := Tky - Tko$$

$$Tn = 0.492$$

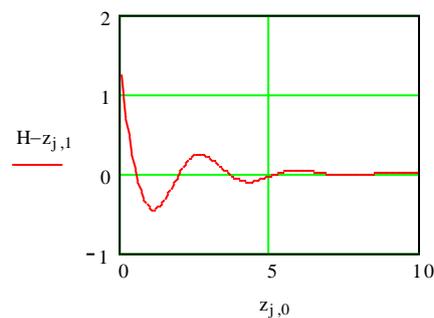


## 4.9. Определение интегральных оценок качества

### 1. Линейная интегральная оценка $J_1$ .

Поскольку решение дифференциального уравнения в Маткаде представляет не аналитическое выражение, а совокупность отдельных значений, то при нахождении линейной интегральной оценки  $J_1$  операция интегрирования заменяется операцией суммирования элементов числового ряда по дискретному аргументу  $\sum_n$ .

$$J_1 := \sum_j (H - z_{j,1})$$

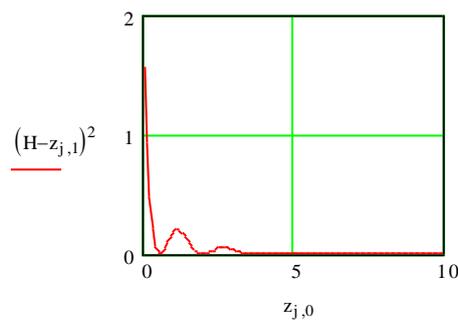


$$J_1 = 1.304$$

### 2. Квадратичная интегральная оценка $J_2$ .

Аналогично определению линейной интегральной оценки  $J_1$  производится нахождение квадратичной интегральной оценки  $J_2$ .

$$J_2 := \sum_j (H - z_{j,1})^2$$



$$J_2 = 5.234$$

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Процесс проектирования систем непрерывно совершенствуется. В центре внимания разработчиков оказываются все более сложные системы, что затрудняет использование физических моделей и повышает значимость математических моделей и машинного моделирования систем. Машинное моделирование стало эффективным инструментом исследования и проектирования сложных систем. Актуальность математических моделей непрерывно возрастает из-за их гибкости, адекватности реальным процессам, невысокой стоимости реализации на базе современных ЭВМ. Все большие возможности предоставляются пользователю, т. е. специалисту по моделированию систем средствами вычислительной техники. Особенно эффективно применение моделирования на ранних этапах проектирования автоматизированных систем, когда цена ошибочных решений наиболее значительна. Современные вычислительные средства позволили существенно увеличить сложность используемых моделей при изучении систем, появилась возможность построения комбинированных, аналитико-имитационных моделей, учитывающих все многообразие факторов, имеющих место в реальных системах, т. е. использования моделей, более адекватных исследуемым явлениям. Поэтому в учебном пособии особое внимание уделено методологическим аспектам моделирования, типовым математическим схемам, методам и средствам их реализации в процессе моделирования на современных ЭВМ. В целом в учебном пособии сделана попытка системного подхода к изложению научных основ моделирования систем. Перспективным и значимым для теории и практики системного моделирования является дальнейшее развитие научных основ моделирования с ориентацией на новые информационные технологии в научных исследованиях, проектировании, управлении и обучении [4].

Моделирование вообще и компьютерное имитационное моделирование в частности получает применение в таких информационных технологиях как [4]:

1. Компьютерные программы, включающие в себя электронные учебники, тренажеры, тьюторы, лабораторные практикумы, тестовые системы, деловые игры, использующие машинные имитаторы.
2. Системы на базе мультимедиа технологий, построенные с

использованием персональных ЭВМ, видеотехники, накопителей на оптических дисках, включая системы виртуальной реальности.

3. Интеллектуальные и обучающие экспертные системы, широко использующие имитационный подход в различных предметных областях.

4. Распределение базы данных по отраслям знаний, электронные библиотеки, распределенные и централизованные издательские системы.

5. Средства телекоммуникации, включающие в себя электронную почту, телеконференции, локальные и региональные сети связи, цифровые сети интегрального обслуживания и т. д. с использованием новых интеллектуальных сетевых технологий.

6. Геоинформационные системы, базирующиеся на технологии, объединяющей компьютерную картографию и системы управления базами данных, и реализующие технологию создания многослойной электронной карты, опорный слой которой описывает географию территории, а каждый из остальных слоев — один из аспектов состояния территории.

7. Технологии защиты информации, включая защиту от несанкционированного доступа в ПЭВМ, защиту от перехвата в сетях и т. п.

Использование персонального компьютера открывает принципиально новые возможности в организации изучения физических явлений с помощью машинной имитации. При традиционном подходе физическое понимание по существу вырабатывалось у обучающихся в процессе выполнения ими необходимых математических преобразований и вычислений, что и представляет собой наибольшую трудность для указанной категории учащихся. Благодаря специально разработанным программам имитации физических процессов в реальных системах такую работу берет на себя компьютер, и на долю учащихся остается не само добывание результата, а выявление и усвоение его физических причин. Другими словами, теперь доминирует роль идей и качественных методов исследования, которые связаны с гораздо большей наглядностью и образностью мышления. При этом заметно возрастает эмоциональный фактор, и предмет изучения становится не только доступным, но и интересным [4].

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Звонарев С.В. Основы математического моделирования: учебное пособие / С.В. Звонарев. – Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2019. – 112 с.
2. Моделирование систем и процессов: учебник для академического бакалавриата / под ред. В.Н. Волковой, В.Н. Козлова. – М.: Издательство Юрайт, 2019. – 450 с. – (Серия: Бакалавр. Академический курс).
3. Голубева Н.В. Математическое моделирование систем и процессов: учебное пособие. – 2-е изд., стер. – СПб.: Издательство «Лань», 2016. – 192 с.
4. Советов Б.Я., Яковлев С.А. Моделирование систем: учеб. для вузов – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 2001. – 343 с.
5. Лотош М.М., Шустер А.Л. Основы теории автоматического управления. – М.: Наука, 1992. – 288 с.
6. Очков В.Ф. Mathcad 14 для студентов и инженеров: русская версия. – СПб.: БХВ-Петербург, 2009. – 512 с.
7. Кирьянов Д.В. Mathcad 15/Mathcad Prime 1.0. – СПб.: БХВ-Петербург, 2012. – 432 с.
8. Макаров Е. Инженерные расчеты в Mathcad 15: учебный курс. – СПб.: Питер, 2011. – 400 с.
9. Алексеев Е.Р., Чеснокова О.В. Решение задач вычислительной математики в пакетах Mathrad 12, MATLAB 7, Maple 9 / Е.В. Алексеев, О.В. Чеснокова – М.: ИТ Пресс, 2006. – 496 с.
10. Пименов В.Г. Численные методы: в 2 ч. Ч. 2: [учеб. пособие] / В.Г. Пименов, А.Б. Ложников; [науч. ред. Ю.А. Меленцова]; М-во образования и науки Рос. Федерации, Урал. федер. ун-т. – Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2014. – 106 с.
11. Теория систем автоматического регулирования, издание третье, исправленное / Бесекерский В.А., Попов Е.П. – «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, М., 1975. – 768 с.
12. Операционное исчисление. Теория устойчивости: Задачи и примеры с подробными решениями: учебное пособие. Изд. 3-е, испр. и доп. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 176 с.
13. Александров И.А. Операционное исчисление и его применения: учеб. пособие. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2013. – 144 с.
14. Шипачёв В.С. Высшая математика. Учеб. для вузов. – 3-е изд., стер. – М.: Высшая школа. 1996. – 479 с.

*ДЛЯ ЗАМЕТОК*

*Учебное издание*

**ФЕДОРОВ Сергей Витальевич  
БОНДАРЕВ Андрей Владимирович**

**МОДЕЛИРОВАНИЕ  
УПРАВЛЯЮЩИХ СИСТЕМ**

**Учебное пособие**

*За достоверность информации, изложенной в учебном пособии,  
ответственность несут авторы*

Подписано в печать 11.06.2024 г. Формат 60x84/16.

Усл. печ. л. 4,6. Уч.-изд. л. 4,8.

Тираж 300 экз. (1-й завод 35 экз.). Изд. № 9. Заказ 22.

*Редакционно-издательский центр  
Уфимского университета науки и технологий  
450008, Башкортостан, г. Уфа, ул. Карла Маркса, 12.*

*Отпечатано в отделе полиграфии  
редакционно-издательского центра  
Уфимского университета науки и технологий  
450008, Башкортостан, г. Уфа, ул. Карла Маркса, 12.*