

**Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Уфимский государственный авиационный технический университет»**

Кафедра механики и цифрового проектирования

ИЗУЧЕНИЕ СВОБОДНЫХ И ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ

**Лабораторный практикум по дисциплине
«Теоретическая механика»**



Уфа 2022

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Уфимский государственный авиационный технический университет»

Кафедра механики и цифрового проектирования

ИЗУЧЕНИЕ СВОБОДНЫХ И ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ

Лабораторный практикум по дисциплине
«Теоретическая механика»

Учебное электронное издание сетевого доступа

© УГАТУ

Уфа 2022

Авторы-составители: И. В. Пучкова, Р. И. Ахметшин

Изучение свободных и вынужденных колебаний : лабораторный практикум по дисциплине «Теоретическая механика» [Электронный ресурс] / Уфимск. гос. авиац. техн. ун-т ; [авт.-сост. : И. В. Пучкова, Р. И. Ахметшин]. – Уфа : УГАТУ, 2022. – URL: https://www.ugatu.su/media/uploads/MainSite/Ob%20universitete/Izdateli/El_izd/2022-138.pdf

Цель лабораторного практикума – закрепление лекционного и практического материала по разделу «Колебания материальной точки» дисциплины «Теоретическая механика».

Предназначен для студентов, обучающихся по направлению подготовки бакалавров 24.03.04 Авиастроение и специальностям 24.05.02 Проектирование авиационных и ракетных двигателей и 15.03.03 Прикладная механика, изучающих курс теоретической механики

Рецензент канд. техн. наук, доцент А. Н. Ермоленко

При подготовке электронного издания использовались следующие программные средства:

- Adobe Acrobat – текстовый редактор;
- Microsoft Word – текстовый редактор.

Авторы-составители: *Пучкова Ирина Владимировна,*
Ахметшин Рустам Ильясович

Редактирование и верстка *Р. М. Мухамадиева*
Программирование и компьютерный дизайн *О. М. Толкачёва*

Все права защищены. Книга или любая ее часть не может быть скопирована, воспроизведена в электронной или механической форме, в виде фотокопии, записи в память ЭВМ, репродукции или каким-либо иным способом, а также использована в любой информационной системе без получения разрешения от издателя. Копирование, воспроизведение и иное использование книги или ее части без согласия издателя является незаконным и влечет уголовную, административную и гражданскую ответственность.

Подписано к использованию: 28.06.2022
Объем: 1,7 Мб.

ФГБОУ ВО «Уфимский государственный авиационный технический университет»
450008, Уфа, ул. К. Маркса, 12.
Тел.: +7-908-35-05-007
e-mail: rik@ugatu.su

ВВЕДЕНИЕ

Одним из самых важных и сложных разделов теоретической механики является теория механических колебаний. Этот раздел играет важную роль в подготовке специалистов области авиастроения, приборостроения, машиностроения и других направлений. Это обусловлено необходимостью решать профессиональные практические задачи, тесно связанные с проблемами колебаний механических систем, теоретической основой которых является теория прямолинейных колебаний материальной точки.

Данный лабораторный практикум призван помочь студентам в освоении данного раздела. Выполнение лабораторных работ по изучению свободных, затухающих и вынужденных прямолинейных колебаний материальной точки, способствует более глубокому пониманию, освоению и закреплению основных положений теории механических колебаний.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1

ИЗУЧЕНИЕ СВОБОДНЫХ И ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ТЕЛА

1.1. Цель лабораторной работы

1. Изучение свободных и вынужденных колебаний.
2. Определение круговой частоты k собственных колебаний различных пружин с различными грузами.
3. Определение жесткости c пружин.
4. Построение резонансных кривых для различных пружин с различными грузами и анализ этих кривых.

1.2. Описание установки и правила пользования

В комплект прибора входят: набор пружин №1– 2 штуки; №2 – 1 штука и грузы 0,5Н, 1Н, 2Н, 5Н.

На рисунке 1.1. приведена схема установки. Все узлы и детали смонтированы на чугунном основании 1 и стойке 2. Электродвигатель 3 установлен на стойке 2 за редуктором 11.

Для определения величины статического прогиба и амплитуды колебаний вдоль стойки 2 закреплена шкала 4 с миллиметровыми делениями.

Вращением рукоятки регулятора оборотов 5 можно плавно изменять угловую скорость вращения вала электродвигателя.

Набор пружин 10 для испытания состоит из двух пружин свитых из проволоки одинаковой толщины, одинакового диаметра, но имеющих различное число витков. К концам пружин крепится груз 9 из набора (по заданию преподавателя).

Для создания правильного направления при колебаниях пружин в траверсы с грузами добавлены проволочные петли, которые удерживают груз во время колебаний внутри двух проволочных направляющих 7. Втулки 8 служат для фиксации максимального отклонения груза.

Перед началом работы направляющие должны занимать строго вертикальное направление. Для этой цели основание установки имеет регулярные опоры. Вертикальность направляющих проверяется по отвесу.

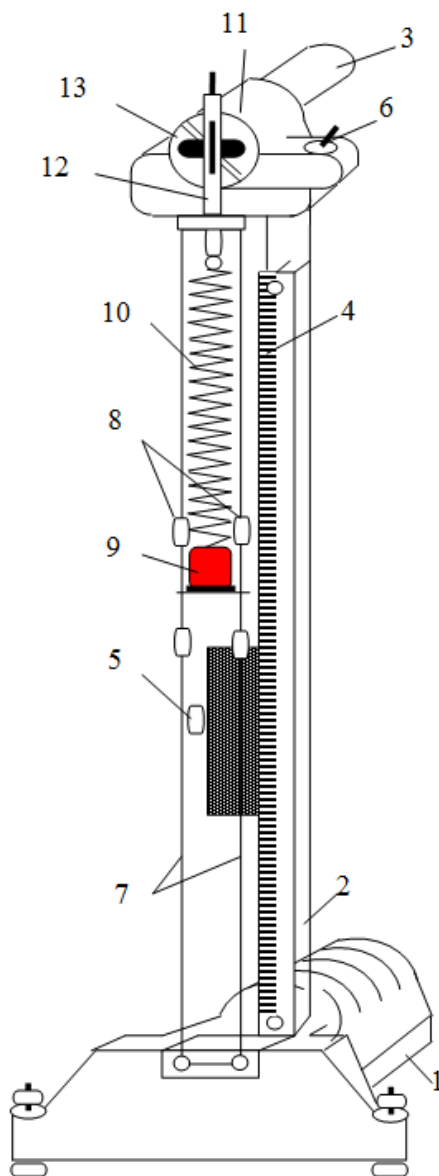


Рис. 1.1:

1 – основание; 2 – стойка; 3 – эл. двигатель; 4 – шкала, 5 – регулятор оборотов (реостат); 6 – тумблер; 7 – направляющие; 8 – втулки; 9 – груз; 10 – пружина; 11 – редуктор; 12 – кулиса; 13 – диск

Установка подключается к сети переменного тока с напряжением 220 В. Пуск мотора осуществляется включением тумблера 6.

Вынужденные колебания системы осуществляются от привода через червячный редуктор 11. На валу червячного колеса закреплен диск 13, в котором смонтирован кривошип (**радиус кривошипа 0,0015 м**), приводящий в возвратно-поступательное движение кулису 12. К кулисе крепится верхний конец исследуемой пружины.

1.3. Теоретическая часть. Уравнение свободных колебаний

Для вывода уравнений свободных колебаний груза $G = mg$ на пружине жесткости c рассмотрим рис. 1.2.

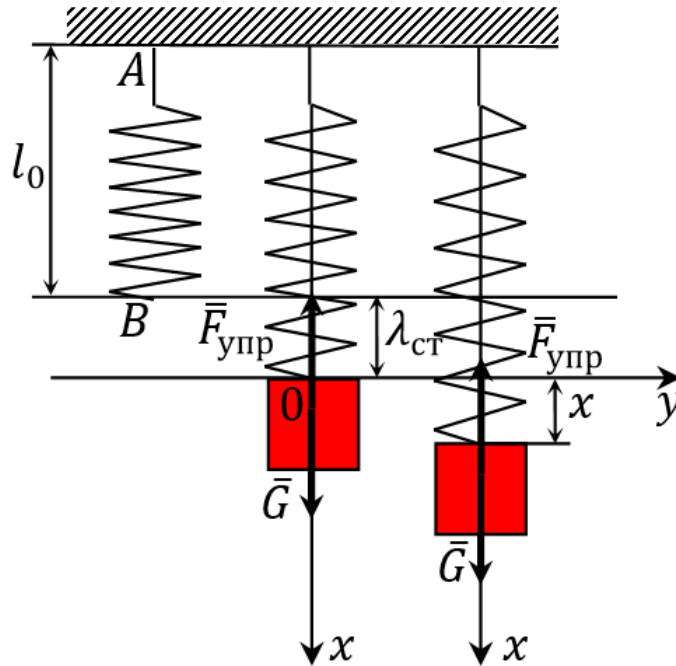


Рис. 1.2

Пусть точка B – конец недеформированной пружины. Точка O – конец пружины в положении статического равновесия груза. При этом

$$G = F_{\text{упр}} = c\lambda_{\text{ст}}. \quad (1.1)$$

Составим дифференциальное уравнение движения груза:

$$m\ddot{x} = G - F_{\text{упр}},$$

где

$$F_{\text{упр}} = c\lambda = c(\lambda_{\text{ст}} + x);$$

$$m\ddot{x} = G - c\lambda_{\text{ст}} - cx.$$

Учитывая (1.1) и обозначив $\frac{c}{m} = k^2$, получаем дифференциальное уравнение свободных колебаний:

$$\ddot{x} + k^2x = 0. \quad (1.2)$$

Решение уравнения (1.2) имеет вид

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt \quad \text{или} \quad x = A \sin(kt + \alpha),$$

где C_1 и C_2 или A и α находятся для начальных условий.

Круговая частота колебаний

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}}$$

или с учетом (1.1)

$$k = \sqrt{\frac{g}{\lambda_{ст}}}.$$

Период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{k}$$

Уравнения вынужденных колебаний

Пусть верхний конец пружины (рис. 1.3) совершает гармонические колебания по закону:

$$z = S \sin(pt),$$

где S – радиус кривошипа; p – круговая частота колебаний кулисы.

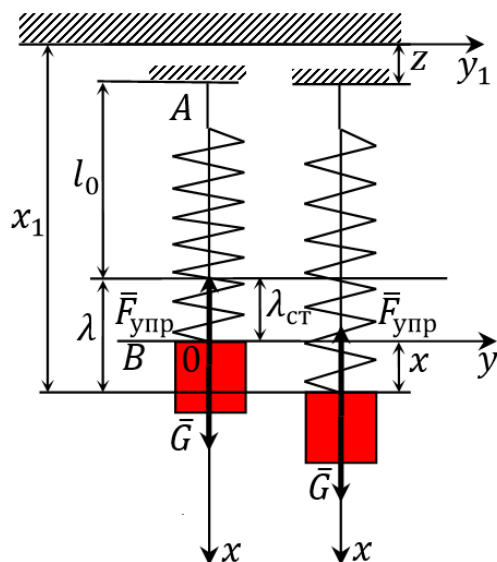


Рис. 1.3

Составим дифференциальное уравнение колебаний груза G относительно неподвижной системы отсчета x, y :

$$m\ddot{x} = G - F_{\text{упр}},$$

где

$$F_{\text{упр}} = c(\lambda_{\text{ст}} + x - z).$$

Тогда получим

$$m\ddot{x} = mg - c\lambda_{\text{ст}} - cx + cz;$$

$$m\ddot{x} = -cx + cz;$$

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}x = \frac{c}{m}z.$$

Обозначив снова $\frac{c}{m} = k^2$, получим дифференциальное уравнение вынужденных колебаний:

$$\ddot{x} + k^2x = k^2S \sin(pt). \quad (1.3)$$

Общее решение уравнения (1.3) имеет вид:

$$x = x_1 + x_2;$$

$$x = A \sin(kt + \alpha) + \frac{k^2 S}{k^2 - p^2} \sin(pt).$$

Вынужденные колебания груза относительно неподвижной стойки (частное решение уравнения (1.3)):

$$x_2 = \frac{kS}{k^2 - p^2} \sin(pt) = B \sin(pt).$$

В случае резонанса, если $k = p$, уравнение вынужденных колебаний груза относительно неподвижной стойки:

$$x_2 = \frac{kSt}{2} \sin\left(kt - \frac{\pi}{2}\right) = B \sin\left(kt - \frac{\pi}{2}\right).$$

1.4. Порядок проведения экспериментов

1.4.1. Методы определения круговой частоты

Первый способ (эксперимент 1)

Определение круговой частоты по формуле $k = \sqrt{\frac{g}{\lambda_{\text{ст}}}}$.

1. К кулисе подвешивается пружина № 1.
2. На шкале отмечается положение нижнего витка пружины.
3. К пружине подвешивается груз G_1 и определяется на шкале второе положение нижнего витка пружины.
4. Определяется прогиб $\lambda_{\text{ст}}$ пружины под действием груза.
5. К пружине № 1 последовательно подвешиваются грузы G_2 и G_3 , и аналогично определяют $\lambda_{\text{ст}}$.
6. Данные заносятся в табл. 1.1 для подсчета k .

Второй способ (эксперимент 2)

Определение круговой частоты по формуле $k = \frac{2\pi}{T}$.

1. Груз отклоняют вручную в нижнее положение.

1.4.2. Построение резонансных кривых (эксперимент 4)

1. Аналогично описанному включается электродвигатель.
2. Сдвигом рукоятки вверх увеличивается частота вынужденных колебаний p . Берется минимум 7 точек:

- 1) три точки при $\frac{p}{k} < 1$;
- 2) одна точка при $\frac{p}{k} = 1$;
- 3) три точки при $\frac{p}{k} > 1$.

3. Строится график:

$$\frac{B}{b_0} = f\left(\frac{p}{k}\right), \quad \text{или} \quad \frac{B}{b_0} = \frac{1}{1 - \left(\frac{p}{k}\right)^2},$$

где b_0 – статическое отклонение точки под действием амплитуды возмущающей силы.

В нашем случае $b_0 = S$; где S – радиус кривошипа 0,0015м.

при $p \neq k$ $B = \frac{k^2 S}{p^2 - k^2}$ если ($p > k$); $B = \frac{k^2 S}{k^2 - p^2}$ если ($p < k$);	при $p = k$ $B = \frac{kSt}{2},$
--	-------------------------------------

4. Данные заносятся в таблицу для построения резонансной кривой.

Значения p определяются с помощью секундомера. Значения B рассчитываются по формулам. Поочередно, подвешивая пружины № 1 и № 2, проводят исследование согласно п. 1.4.2. Полученные экспериментальные кривые сопоставить с теоретическими.

1.5. Содержание и оформление отчета

1. Название работы.
2. Цель работы.
3. Краткие теоретические сведения.
4. Заполненные таблицы и графики.
5. Выводы по работе.

Контрольные вопросы

1. Под действием какой силы совершаются свободные колебания материальной точки?
2. Какой вид имеет дифференциальное уравнение свободных колебаний?
3. От каких факторов зависят частота и период свободных колебаний? Амплитуда и начальная фаза свободных колебаний?
4. Как выглядит график свободных колебаний?
5. Что такое статическая деформация пружины?
6. Как изменяется период колебаний с изменением коэффициента жесткости пружины?
7. Какой вид имеет дифференциальное уравнение вынужденных колебаний?
8. Что называется резонансом?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2

ИЗУЧЕНИЕ ЗАКОНОВ ДИНАМИЧЕСКОГО ГАШЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ

2.1. Цель лабораторной работы

Демонстрация и проверка законов динамического гашения.

2.2. Описание установки и правила пользования

Приведены в лабораторной работе № 1 «Изучение свободных и вынужденных колебаний тела».

2.3. Теоретическая часть.

Динамическое гашение колебаний

Рассмотрим систему (рис. 2.1) из двух грузов G_1 и G_2 и двух пружин, имеющих жесткости c_1 и c_2 .

l_{01} и l_{02} – длины недеформированных пружин.

На рис. 2.1 слева показаны системы в состоянии равновесия, при этом

$$F_{1\text{ст}} = G_1 + G_2 = c_1 \lambda_{1\text{ст}}; \quad F_{2\text{ст}} = G_2 = c_2 \lambda_{2\text{ст}}. \quad (2.1)$$

Пусть верхний конец первой пружины совершает колебания по закону

$$z = S \sin(pt). \quad (2.2)$$

На рис. 2.1 справа показано положение системы в произвольный момент. Положения грузов G_1 и G_2 в неподвижной системе координат будем определять координатами x_1 и x_2 , отсчитывая их из положения статического равновесия (точки O_1 и O_2).

Силы упругости пружин имеют вид

$$F_1 = c_1 \lambda_1 = c_1 (x_1 + \lambda_{1\text{ст}} - z);$$
$$F_2 = c_2 \lambda_2 = c_2 (x_2 + \lambda_{2\text{ст}} - x_1). \quad (2.3)$$

Составим дифференциальные уравнения движения грузов:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = G_1 + G_2 - F_1; \\ m_2 \ddot{x}_2 = G_2 - F_2. \end{cases}$$

Подставив значение F_1 и F_2 из (2.3) и учитывая (2.1) и (2.2), получим

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = c_1 \lambda_{1\text{ст}} - c_2 \lambda_{2\text{ст}} + c_2 (x_2 + \lambda_{2\text{ст}} - x_1) - c_1 (x_1 + \lambda_{1\text{ст}} - S \sin(pt)); \\ m_2 \ddot{x}_2 = c_2 \lambda_{2\text{ст}} - c_2 (x_2 + \lambda_{2\text{ст}} - x_1); \end{cases}$$

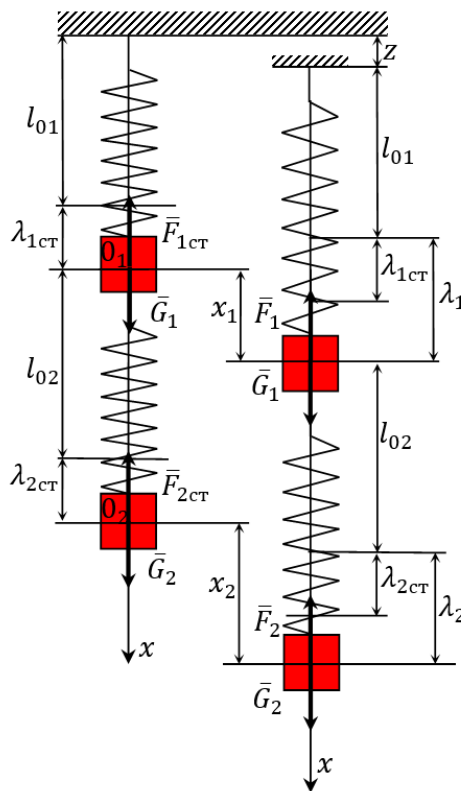


Рис. 2.1.

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \frac{c_1+c_2}{m_1} x_1 - \frac{c_2}{m_1} x_2 = \frac{c_1}{m_1} S \sin(pt); \\ \ddot{x}_2 + k_2^2 x_2 - k_2^2 x_1 = 0, \end{cases} \quad (2.4)$$

где $k_2^2 = \frac{c_2}{m_2}$.

Частное решение этих уравнений можно взять в виде:

$$\begin{cases} x_1 = B_1 \sin(pt); \\ x_2 = B_2 \sin(pt). \end{cases} \quad (2.5)$$

Чтобы получить амплитуды B_1 и B_2 , подставим (2.5) в уравнения (2.4) и найдем:

$$\left(\frac{c_1+c_2}{m_1} - p^2\right) B_1 - \frac{c_2}{m_1} B_2 = \frac{c_1}{m_1} S;$$

$$(k_2^2 - p^2) B_2 - k_2^2 B_1 = 0.$$

Эти уравнения дают для B_1 и B_2 следующие значения:

$$B_1 = \frac{(k_2^2 - p^2) c_1 S}{(k_2^2 - p^2)(c_1 + c_2 - m_1 p^2) - c_2 k_2^2};$$

$$B_2 = \frac{k_2^2 S c_1}{(k_2^2 - p^2)(c_1 + c_2 - m_1 p^2) - c_2 k_2^2}.$$

При этих значениях B_1 и B_2 выражения (2.5) удовлетворяют уравнениям (2.4.) для любого значения времени. Мы видим, что выражения (2.5.) представляют собой простые гармонические движения грузов G_1 и G_2 с круговой частотой p возмущающей силы, вызывающей движение.

Большой практический интерес имеет случай, когда $p = k$, т. е. частота возмущающей силы совпадает с частотой собственных колебаний отдельно взятой второй части системы. При этом $B_1 = 0$, т. е. первый груз не колеблется, а $B_2 = S$ (при $c_1 = c_2$). Хотя возмущающая сила действует на груз G_1 , она вызывает колебания только груза G_2 . Такая дополнительная система, состоящая из груза G_2 и пружины, называется динамическим гасителем колебаний.

2.5. Содержание и оформление отчета

1. Название работы.
2. Цель работы.
3. Краткие теоретические сведения.
4. Порядок выполнения и результаты привести в таблице.
5. Выводы по работе.

Контрольные вопросы

1. Что называют динамическим гасителем?
2. Что называют объектом виброгашения?
3. При каком условии объект виброгашения перестанет совершать колебания?
4. Какое значение имеет масса динамического гасителя?
5. Какие основные параметры имеет динамический гаситель?
6. Объясните суть закона динамического гасителя?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3

ИЗУЧЕНИЕ СВОБОДНЫХ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

3.1. Цель и задачи выполнения работы

Цель:

1. Освоение метода теоретической механики описания, теоретического и экспериментального исследования механического движения.
2. Изучение закономерностей колебательного движения точек.

Задачи:

1. Понять и усвоить алгоритм теоретического описания и исследования механического движения точки.
2. Повторить математический аппарат от математической постановки задачи до получения и анализа уравнения движения.
3. Теоретически и экспериментально установить влияние массы точки и жесткости пружины на характеристики ее колебательного движения.
4. Понять и освоить логику расчета эквивалентной жесткости систем пружин.
5. Найти развернутые ответы на контрольные вопросы.

3.2. Краткая теория

Краткую теорию свободных колебаний изучить в пункте 3 лабораторной работы № 1.

Параллельное соединение пружин

Рассмотрим параллельное соединение двух пружин с коэффициентами жесткости c_1 и c_2 (рис. 3.1). Схема соединения пружин на рис. 3.1, *а* характерна тем, что на ней при движении груза обе пружины одновременно растягиваются, или одновременно сжимаются, в отличие от соединения, показанного на рис. 3.1, *б*, где при растяжении одной из пружин вторая сжимается, и наоборот.

Деформации же пружин на обеих схемах одинаковы

$$\delta_{\text{ст}_1} = \delta_{\text{ст}_2} = \delta.$$

Для соединения по схеме (рис. 3.1, *a*) это означает, что штанга *AB* должна смещаться по вертикали, сохраняя горизонтальность. Для обеспечения этого условия груз *P* необходимо подвесить в точке *D*, в которой приложена равнодействующая двух параллельных сил упругости:

$$F_1 = c_1 \delta \quad \text{и} \quad F_2 = c_2 \delta.$$

Эта точка определяется соотношением

$$F_1 a = F_2 b, \quad \text{или} \quad c_1 \delta a = c_2 \delta b,$$

и окончательно $c_1 a = c_2 b$.

Замечание: при выполнении лабораторной работы точка *D* подбирается экспериментально путем смещения груза по штанге *AB* и добивается ее горизонтальности.

Уравнения равновесия для обеих рассматриваемых схем выглядят одинаково:

$$P = (c_1 + c_2) \delta = c_{\text{экв}} \delta,$$

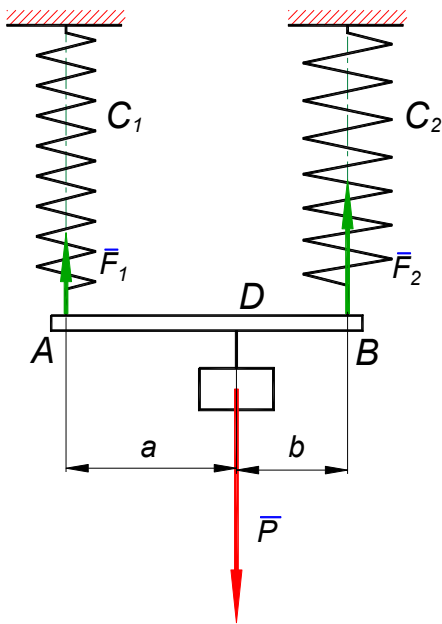
откуда жесткость эквивалентной пружины, заменяющей две параллельно соединенные, находится как

$$c_{\text{экв}} = c_1 + c_2.$$

Последовательное соединение пружин

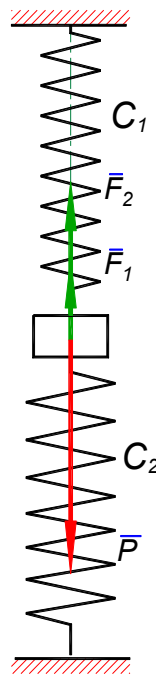
На рис. 3.2 показан груз P , подвешенный к двум последовательно соединенным пружинам. В положении статического равновесия каждая из пружин растягивается силой P . Статические удлинения пружин будут

$$\delta_{ст1} = \frac{P}{c_1}, \quad \delta_{ст2} = \frac{P}{c_2}. \quad (3.1)$$



a

Рис. 3.1



б

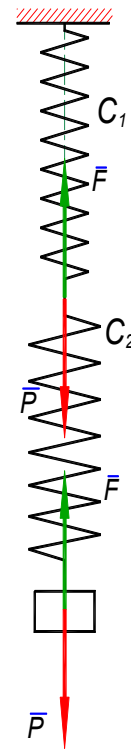


Рис. 3.2

Если представить пружину с коэффициентом жесткости $c_{\text{ЭКВ}}$, эквивалентную двум данным пружинам, то в положении статического равновесия ее удлинение равно

$$\delta = \frac{P}{c_{\text{ЭКВ}}}, \quad (3.2)$$

но учитывая, что $\delta = \delta_{ст1} + \delta_{ст2}$, с использованием (3.1) и (3.2) получаем для последовательно соединенных пружин

$$c_{\text{ЭКВ}} = \frac{c_1 \cdot c_2}{c_1 + c_2}.$$

3.3. Лабораторное оборудование

Комплектность виртуальной лабораторной установки (рис. 3.3): шесть пружин разной длины, с разными коэффициентами жесткости; штанга для параллельного соединения пружин; комплект грузов; секундомер; линейка.

При выполнении лабораторной работы применяются следующие клавиши клавиатуры:

- 1) W , S , A , D – для перемещения в пространстве;
- 2) $F2$, E – аналог средней кнопки манипулятора (при первом нажатии берется объект, при последующем – ставится);
- 3) $F10$ – выход из программы.

Управление манипулятором осуществляется с помощью мыши.

Примечание: при появившемся курсоре невозможно переводить взгляд вверх и в стороны.



Рис. 3.3

3.4. Порядок выполнения работы. Определение коэффициента жесткости пружины

1. Закрепите исследуемую пружину.
2. Подвесьте к ней один из грузов P_0 и запишите в табл. 3.1 длину предварительно напряженной пружины L_0 .
3. Добавляя последовательно любой из n имеющихся грузов P_i , фиксируем соответствующие длины L_i пружины и вычисляем величины статических деформаций (удлинений)

$$\delta_{ст_i} = L_i - L_{i-1}.$$

4. Вычислите коэффициент жесткости пружины для каждого из случаев догрузки

$$c_i = \frac{P_i}{\delta_{ст_i}}.$$

5. Вычислите среднеарифметическое значение коэффициента жесткости пружины

$$c = \frac{\sum c_i}{n}.$$

6. Вычислите погрешность измерения коэффициента жесткости

$$\Delta_{c_i} = \frac{c - c_i}{c} \cdot 100\%.$$

7. Занесите все результаты измерений и вычислений в табл. 3.1 и повторите все для второй пружины. Коэффициенты жесткости обозначать c_m и c_b соответственно для пружины малого и большого диаметров.

Определение коэффициента жесткости пружин, эквивалентных параллельному и последовательному соединению пружин

Параллельное соединение

1. Рассчитайте предварительно теоретическое значение коэффициента жесткости пружины, эквивалентной параллельному соединению двух пружин:

$$c_{\text{пар}}^T = c_M + c_6,$$

где c_M и c_6 коэффициенты жесткости пружин меньшего и большего диаметров, взятые из табл. 3.1.

2. Соедините пружины параллельно (рис. 3.4) и проделайте все, что было выполнено для одной пружины, заполняя табл. 3.2. В результате будет получено среднеарифметическое значение экспериментального коэффициента жесткости $c_{\text{пар}}$ данной системы параллельно соединенных пружин.

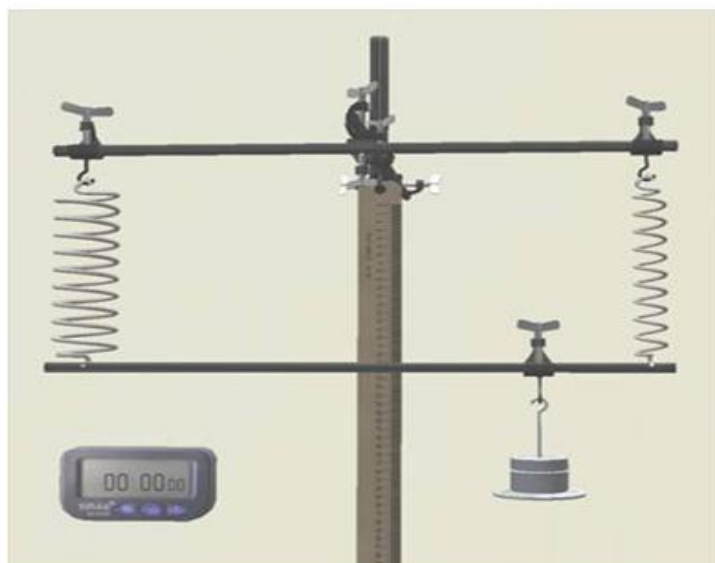


Рис. 3.4

3. Сравните значения $c_{\text{пар}}^T$ и $c_{\text{пар}}$ и оцените погрешность по формуле

$$\Delta_{c_{\text{пар}}} = \frac{|c_{\text{пар}}^T - c_{\text{пар}}|}{c_{\text{пар}}^T}.$$

Последовательное соединение

1. Рассчитайте предварительно теоретическое значение коэффициента жесткости пружины, эквивалентной последовательному соединению двух пружин

$$c_{\text{посл}}^T = \frac{c_M \cdot c_6}{c_M + c_6}.$$

2. Соедините пружины последовательно (рис. 3.5) и проделайте все, что было выполнено для одной пружины, занося все результаты в соответствующую часть табл. 3.2. В результате будет получено среднеарифметическое значение экспериментального коэффициента жесткости $c_{\text{посл}}$ данной системы последовательно соединенных пружин.

3. Сравните значения $c_{\text{посл}}^T$ и $c_{\text{посл}}$ и оцените погрешность по формуле

$$\Delta_{c_{\text{посл}}} = \frac{|c_{\text{посл}}^T - c_{\text{посл}}|}{c_{\text{посл}}^T}.$$

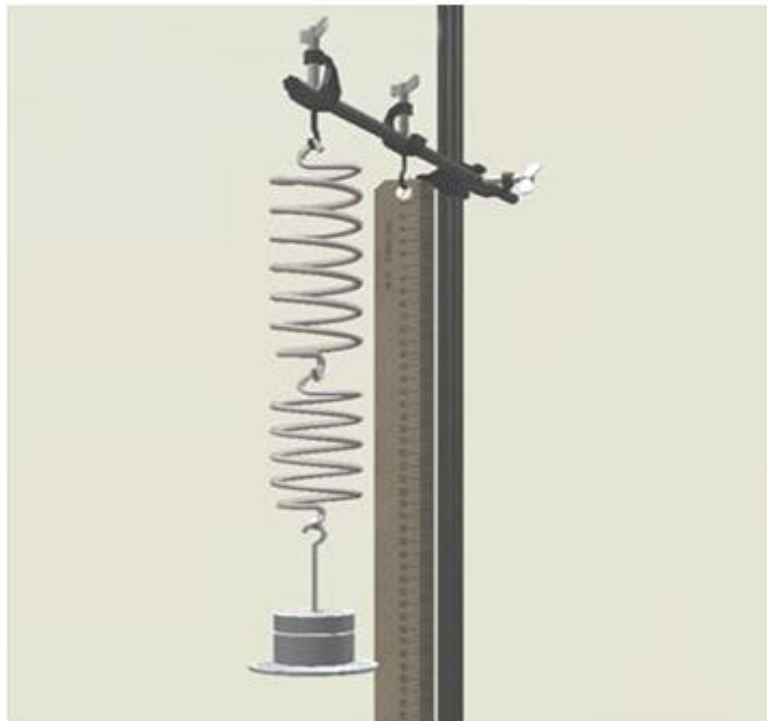


Рис. 3.5

Определение периода колебаний груза

1. Предскажите теоретически по формуле $T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}}$ какими будут периоды колебаний грузов на пружинах большего и меньшего диаметров, а также при параллельном и последовательном соединении этих пружин. При этом массы и коэффициенты жесткости брать из табл. 3.1 и 3.2.
2. Подвесив исследуемую пружину (или соединение) к раме, загрузите ее грузами в соответствии с таблицами.
3. В каждом из случаев нагружения, отклоняя груз от положения равновесия, измерьте при помощи секундомера время 10 полных колебаний.
4. После подсчета времени одного колебания $T_{\text{эксп}}$ вычислите погрешность по отношению к теоретически предсказанному $T_{\text{теор}}$. Результаты занесите в табл. 3.3.

$$\Delta_T = \frac{|T_{\text{эксп}} - T_{\text{теор}}|}{T_{\text{теор}}}$$

3.5. Содержание отчета

1. Изобразите схему установки с указанием координатной оси и начала на этой оси.
2. Покажите силы, действующие на груз, деформацию пружины в положении статического равновесия груза, координату x груза в произвольный момент колебаний.
3. Заполнить табл. 3.1–3.3.
4. Построить графики деформирования двух пружин по данным табл. 3.1.

Таблица 3.1

Определение коэффициентов жесткости пружин

Силы тяжести добавляемых грузов P_i					Средние значения жесткости
Пружина малого диаметра					
Длина нагруженной пружины L_i					
Статическая деформация пружины $\delta_{стi}$					
Жесткость $c_{мi}$					
Погрешность измерения жесткости Δ_{c_i}					
Пружина большого диаметра					
Длина нагруженной пружины L_i					
Статическая деформация пружины $\delta_{стi}$					
Жесткость $c_{бi}$					
Погрешность измерения жесткости Δ_{c_i}					

Таблица 3.2

Определение коэффициентов жесткости систем пружин

Силы тяжести добавляемых грузов P_i					Среднее значение жесткости
Система двух параллельно соединенных пружин.					
Длина нагруженной системы L_i					
Статическая деформация системы $\delta_{ст_i}$					
Жесткость $c_{пар_i}$					
Расчетная жесткость $c_{пар}^T$ (по c_M и c_b из табл. 3.1)					
Погрешность $\Delta_{c_{пар}}$					
Система двух последовательно соединенных пружин.					
Длина нагруженной системы L_i					
Статическая деформация системы $\delta_{ст_i}$					
Жесткость $c_{посл_i}$					
Расчетная жесткость $c_{посл}^T$ (по c_M и c_b из табл. 5.1)					
Погрешность $\Delta_{c_{посл}}$					

Таблица 3.3

Определение периода колебаний грузов

	c , Н/м	m , кг	$T_{теор}$, с	t_{10} , с	$T_{эксп}$, с	Δ_T
Пружина малого диаметра						
Пружина большого диаметра						
Параллельно соединенные пружины						
Последовательно соединенные пружины						

Контрольные вопросы

1. Под действием какой силы совершаются свободные колебания материальной точки?
2. Каков алгоритм описания механического движения точки?
3. Что такое уравнение или закон движения материальной точки?
4. Какой вид имеет дифференциальное уравнение свободных колебаний?
5. От каких факторов зависят амплитуда и начальная фаза свободных колебаний?
6. Почему точность определения периода будет выше, если следить за прохождением груза его равновесного положения, а не крайнего?
7. Как вычисляется среднее арифметическое значение измеряемой величины?
8. Как выглядит график свободных колебаний?
9. Что такое статическая деформация пружины?
10. Как можно увеличить амплитуду свободных колебаний?
11. Как изменяется период колебаний с изменением коэффициента жесткости пружины?
12. Какой пружиной можно заменить систему пружин, соединенных параллельно?
13. Какой пружиной можно заменить систему пружин, соединенных последовательно?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4

ИЗУЧЕНИЕ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ ЗАТУХАЮЩИХ КОЛЕБАНИЙ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

4.1. Цель и задачи проведения лабораторной работы

Цель:

изучение влияния диссипативных сил (сил сопротивления) на закономерности прямолинейных колебаний точки.

Задачи:

1. Изучить влияние диссипативной силы (силы сопротивления) на математическую постановку задачи.
2. Научиться теоретически и экспериментально определять параметры колеблющейся точки: частоту, период, коэффициент затухания, декремент затухающих колебаний.
3. Усвоить основной метод борьбы с колебаниями и количественные характеристики быстроты затухания колебаний.

4.2. Краткая теория затухающих колебаний материальной точки

Наблюдения показывают, что свободные колебания материальной точки (или тела, принимаемого за материальную точку) около положения устойчивого равновесия, происходящие под действием восстанавливающей силы, не продолжаются бесконечно долго. Постепенно амплитуда колебаний уменьшается, колебания затухают. Таким образом, теория свободных колебаний требует уточнения, в котором необходимо учитывать фактор, приводящий к их затуханию. Этим фактором является сила сопротивления движению, т. е. сила, направленная противоположно движению.

К числу сил сопротивления следует отнести, например, силы связанные с вязкостью жидкости или воздуха, внутреннее трение в материале колеблющегося тела, трение между поверхностями скольжения. При рассмотрении колебаний материальной точки в жидкости или воздухе, как показывают опыты, сила сопротивления этой среды является функцией скорости. При небольших скоростях движения (меньших 0,2 м/с в жидких средах и меньших 20 м/с в воздухе) и относительно небольших размерах колеблющегося тела

вязкая составляющая силы сопротивления значительно преобладает над аэродинамической (или гидродинамической) составляющей. В этом случае сила сопротивления является линейной функцией скорости.

Следует заметить, что даже если колебания происходят в пустоте, то они будут постепенно затухать вследствие внутреннего трения в материале упругого элемента колеблющейся системы. Сила сопротивления от внутреннего трения в первом приближении также считается пропорциональной первой степени скорости.

Таким образом, в теории затухающих колебаний сила сопротивления задается формулой

$$\bar{R} = -\mu \cdot \bar{V}. \quad (4.1)$$

Здесь \bar{R} – сила сопротивления; μ – коэффициент сопротивления, зависящий от свойств окружающей среды и свойств материала, он определяется опытным путем; \bar{V} – скорость; знак $-$ в формуле означает, что сила сопротивления направлена в сторону, противоположную скорости.

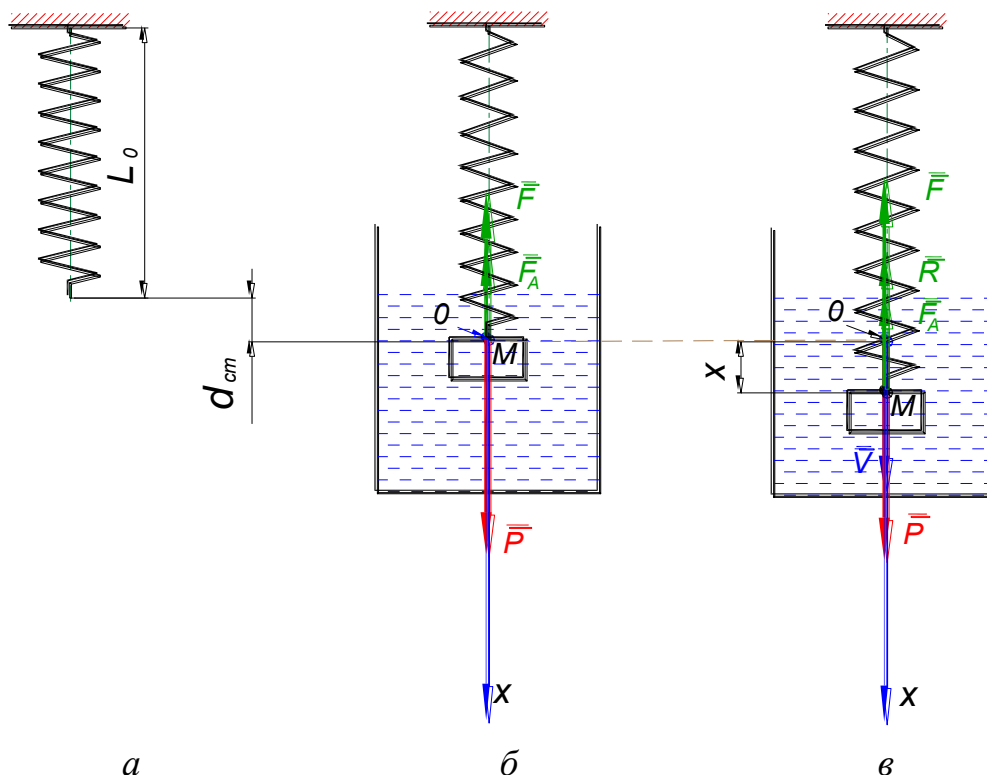


Рис. 4.1

В лабораторной работе с целью уменьшения влияния гидродинамического сопротивления, когда $R = R(V^2)$, в качестве колеблющегося тела берется подвешенная на пружине тонкая пластинка с малой площадью поперечного сечения.

На рис. 4.1, *а* показана пружина длиной L_0 в свободном состоянии.

На рис. 4.1, *б* показано состояние статического равновесия пластины массой m (рассматривается как точка M), подвешенную к пружине и погруженную в сосуд с жидкостью. Это состояние описывается уравнением равновесия

$$P = F_A + c\delta_{ст}, \quad (4.2)$$

здесь $P = mg$ – сила тяжести; F_A – архимедова сила выталкивания; $F_A = c\delta_{ст}$ – сила упругости пружины, имеющая жесткость c и растянутая в этом положении на $\delta_{ст}$. Точка O – положение устойчивого равновесия пластины около которого и происходят колебания.

Произвольное положение пластины в процессе колебательного движения (расчетная схема процесса – механическая модель) изображена на рис. 4.1, *в*. Дифференциальное уравнение движения берем в форме второго закона Ньютона

$$m\bar{a} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i. \quad (4.3)$$

Скалярную форму дифференциального уравнения (4.3) получаем проецированием его на ось x

$$m\ddot{x} = \sum_{i=1}^n F_i, \quad (4.4)$$

где \ddot{x} – проекция ускорения точки на ось Ox ; $\sum_{i=1}^n F_i$ – сумма проекций на ось Ox всех сил, действующих на точку.

Формулируем **начальные условия** задачи: при $t = 0$, $x_0 = 0$ и $\dot{x}_0 = 0$ (4.4) приводится к виду

$$m\ddot{x} = P - F_A - c(x + \delta_{ст}) = 0. \quad (4.5)$$

С привлечением уравнения (4.2) после простых преобразований получаем каноническое дифференциальное уравнение затухающих колебаний

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = 0, \quad (4.6)$$

где обозначено $2n = \frac{\mu}{m}$, $k^2 = \frac{c}{m}$, n – коэффициент затухания, k – круговая частота свободных колебаний.

4.3. Исследование затухающих колебаний

Решение однородного дифференциального уравнения второго порядка (4.6) ищется путем составления соответствующего характеристического уравнения и анализа его корней. В результате выясняем, что надо рассмотреть три варианта решения:

А. случай большого сопротивления, когда $n > k$ и решение уравнения (4.5) имеет вид

$$x = C_1 e^{t\sqrt{n^2-k^2}} + C_2 e^{-t\sqrt{n^2-k^2}}; \quad (4.7)$$

Б. Предельный случай, когда $n = k$ и решение уравнения (4.5) ищется в виде

$$x = e^{-nt}(C_1 t + C_2). \quad (4.8)$$

В формулах (4.1) и (4.2) C_1 и C_2 – постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий.

На рис. 4.1 приведены кривые, иллюстрирующие движения в соответствии с формулами (4.1) и (4.2). Движение в этих случаях апериодическое, то есть не является колебательным. Вид кривых зависит от начальных условий, но в любом случае система асимптотически стремится вернуться к положению статического равновесия.

В. Случай малого сопротивления, когда сила сопротивления мала по сравнению с восстанавливающей силой, математически это описывается неравенством $n < k$.

Решение ищется в виде

$$x = e^{-nt}(C_1 \cos(k_1 t) + C_2 \sin(k_2 t)),$$

где $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$ – круговая частота затухающих колебаний; C_1 и C_2 – постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий.

Часто вместо (4.1) решение уравнения (4.6) ищется в амплитудной форме:

$$x = Ae^{-nt} \sin(k_1 t + \alpha), \quad (4.3)$$

здесь A и α константы интегрирования, определяемые из начальных условий.

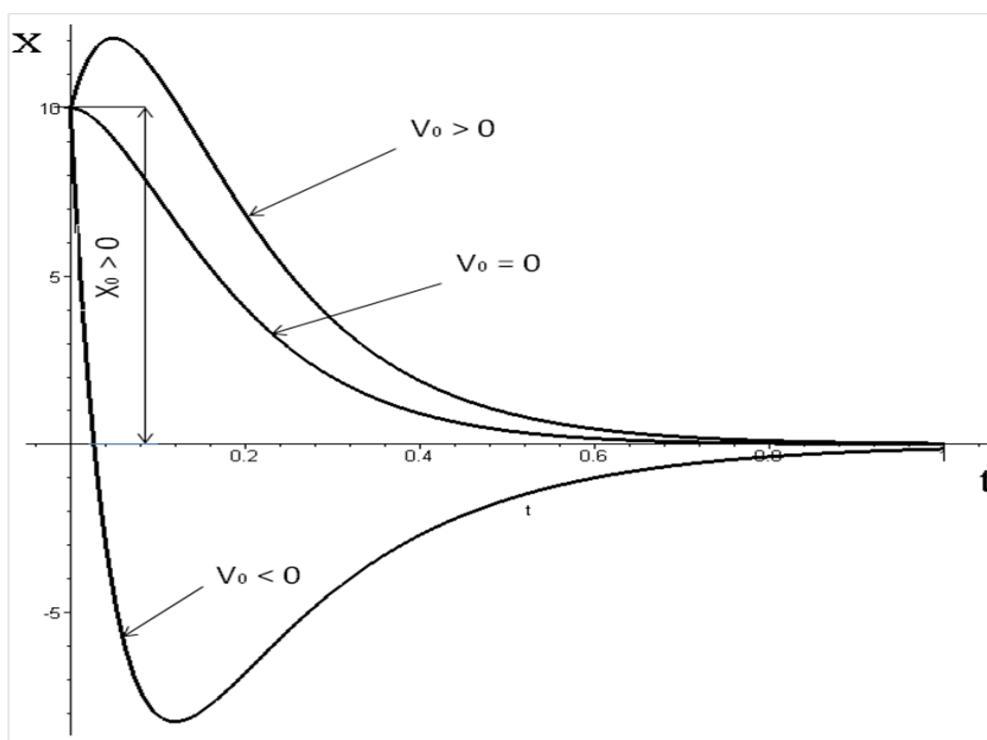


Рис. 4.2

Колебания, происходящие в соответствии с формулами (4.1) или (4.2), называются затухающими (рис. 4.2), так как из-за наличия множителя e^{-nt} – координата x (отклонение от положения статического равновесия – амплитуда) с течением времени убывает, стремясь к нулю.

Промежуток времени $T_1 = \frac{2\pi}{k_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}}$ – принято называть периодом затухающих колебаний. Сравнивая с периодом $T = \frac{2\pi}{k}$ свободных колебаний, следует заметить, что с увеличением сопротивления, период затухающих колебаний увеличивается.

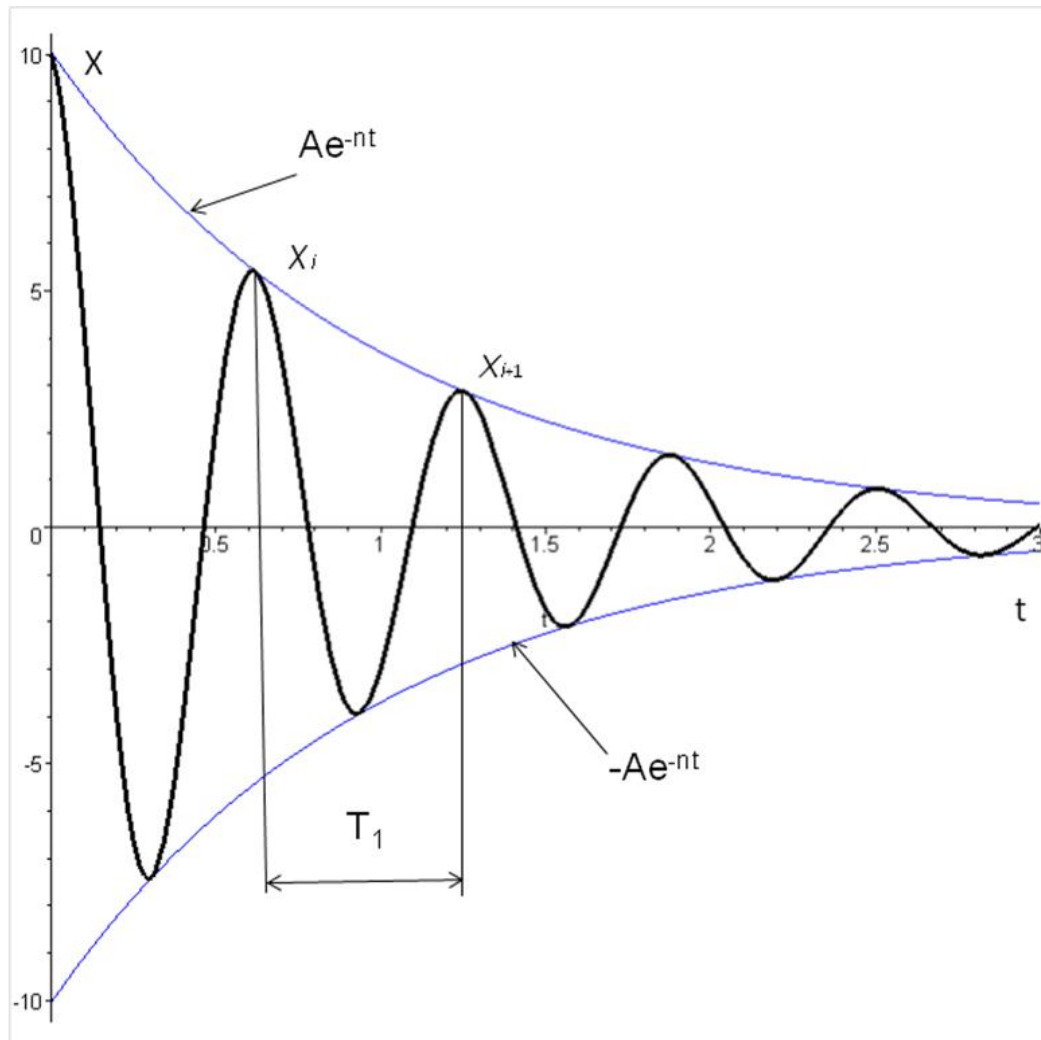


Рис. 4.3

Рассмотрим, как изменяется амплитуда затухающих колебаний за промежуток времени T_1 . Пусть в некоторый момент времени t_i имеем максимальное отклонение точки M от положения статического равновесия x_i (см. рис. 4.1), которое определяется формулой

$$x = Ae^{-nt_i} \sin(k_1 t_i + \alpha).$$

Следующее максимальное отклонение через интервал T_1 будет равно

$$x = Ae^{-n(t_i+T_1)} \sin(k_1 t_i + k_1 T_1 + \alpha).$$

Учитывая, что $k_1 T_1 = 2\pi$, получаем

$$x_{i+1} = x_i e^{-nT_1}. \quad (4.9)$$

Таким образом, амплитуды будут убывать по закону геометрической прогрессии. Знаменатель этой прогрессии называется декрементом затухающих колебаний:

$$D = e^{nT_1}.$$

Иногда пользуются логарифмическим декрементом колебаний:

$$\eta = \ln(D) = nT_1. \quad (4.10)$$

Затухание колебаний происходит достаточно быстро даже при небольшом сопротивлении. Так, например, при $n = 0,05kT_1 = 1,00125T$ декремент затухающих колебаний, $D = e^{-nT_1} = 0,731$ т. е. период затухающих колебаний T_1 отличается от периода свободных колебаний лишь на 0,125 %, а амплитуда за время одного колебания уменьшается на 0,27 своей величины, а после 10 полных колебаний становится равной лишь 0,043 своего первоначального значения. Таким образом, основное влияние сопротивления на свободные колебания выражается в уменьшении амплитуды колебаний с течением времени, т. е. затухании колебаний.

Для определения вязкости жидкости (коэффициент μ в (4.1)) Кулон использовал следующий метод: подвесив на пружине тонкую пластинку, он заставлял ее колебаться сначала в воздухе, а затем в той жидкости, вязкость которой надлежало определить, и находил периоды T – в первом случае и T_1 во втором.

Считая колебания в воздухе свободными, определяется частота этих колебаний из формулы

$$k = \frac{2\pi}{T}.$$

Период затухающих колебаний

$$T_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}}.$$

Из (4.3) и (4.4) определяется коэффициент затухания

$$n = \frac{2\pi \sqrt{T_1^2 - T^2}}{T_1 T} \quad (4.11)$$

и по нему рассчитывается коэффициент сопротивления $\mu = 2\pi n t$.

Заметим, что в рассматриваемом случае коэффициент сопротивления зависит от коэффициента вязкости жидкости ν и площади пластинки S

$$\mu = \nu S. \quad (4.12)$$

Из формулы (4.7), при известной площади пластинки, определяется в конечном итоге коэффициент вязкости жидкости ν .

4.4. Оборудование для выполнения работы

Установка для изучения закономерностей затухающих колебаний состоит из рамы, на верхний стержень которой подвешивается пружина с пластинкой, и сосудов с различными жидкостями для создания вязкого трения при колебаниях (рис. 4.4, 4.5).

Комплектность лабораторной установки: пружины; комплект грузов; линейка; секундомер; линейка; емкость с вязкой жидкостью (бензин, вода, масло).



Рис. 4.4

4.5. Порядок выполнения работы. Предварительные измерения

1. Измерьте по шкале на раме статическое удлинение пружины.
2. Определите коэффициент жесткости пружины, как $c = \frac{P}{\Delta l}$.



Рис. 4.5

3. Определите период свободных колебаний; измерив секундомером 10 полных колебаний пластинки в воздухе.

4. Подсчитайте теоретическое значение периода свободных колебаний по формуле

$$T_{\text{теор}} = \frac{2\pi}{\sqrt{c/m}}$$

5. Результаты измерений занесите в табл. 4.1. При этом значения $T_{\text{теор}}$ и $T_{\text{эксп}}$ не должны значительно отличаться.

Исследование затухающих колебаний пластинки в вязкой жидкости

1. Поместите пластинку на пружине в сосуд связкой жидкостью. Пластинка должна находиться примерно в середине слоя жидкости (рис. 4.6).

2. Отклоните пластинку от равновесного состояния и секундомером замерьте время 5 полных колебаний.

3. Подсчитайте период затухающих колебаний в данной жидкости, запишите результаты в табл. 4.2.

4. Подсчитайте по формуле (4.6) величину коэффициента затухания и занесите в табл. 4.2.

5. Запишите в табл. 4.2 какую часть коэффициент затухания n составляет от круговой частоты k (например, $n = 0,5k$).

6. Дайте в табл. 4.2 сравнение периодов затухающих и свободных колебаний (например, $T_1 = 1,0125T$).

7. По формуле (4.5) подсчитайте логарифмический декремент затуханий и занесите значение в табл. 4.2.



Рис. 4.6

8. Подсчитайте декремент колебаний и занесите значение в табл. 4.2.

9. Подсчитайте и запишите на сколько уменьшается амплитуда колебаний за один период (например, $\Delta A = 0,25A_i$).

10. Отклоните пластину от равновесного положения на $x_0 = 2 - 3$ см, замерьте секундомером время до полного затухания колебаний, подсчитайте при этом их полное число.

11. Постройте декрементные кривые – огибающие графика затухающих колебаний: $x = x_0 e^{-nt}$ (предельным значением при построении взять значение, при котором величина x становится 1–2 мм).

12. Двигаясь до предела по оси времени с шагом, равным периоду колебаний, подсчитайте, сколько колебаний должна совершить пластинка. Сравните это число с результатом пункта 10.

4.6. Содержание отчета

1. Заполнить табл. 4.1, 4.2.

2. Построить декрементные кривые, отложив на оси времен периоды затухающих колебаний.

Таблица 4.1

Предварительные измерения

Измеряемая величина	Обозначение	Ед. измер.	Числ. знач.	Способ измерения или подсчета
Площадь пластинки	S	м ²		Измер. линейкой
Вес пластинки	P	Н		Взвешивание
Масса пластинки	m	кг		$m = P/g$
Статическое удлинение пружины	$\delta_{ст}$	м		Измер. по шкале
Коэфф. жесткости	c	Н/м		$c = P/\delta_{ст}$
Период своб. кол. теор.	$T_{теор}$	с		$T_{теор} = \frac{2\pi}{\sqrt{c/m}}$
Период своб. кол. эксп.	$T_{эксп}$	с		Измерение секундомером

Исследование затухающих колебаний

	Вязкая жидкость			Способ измерения или вычисления
	бензин	вода	масло	
Время 5 полных колебаний t_5				Измерение секундомером
Период затухающих колебаний				$T_1 = t_5/5$
Коэфф. затухания				$n = \frac{2\pi\sqrt{T_1^2 + T^2}}{T_1 T}$
Сравнение n с k				$n/k =$
Сравнение периодов T_1 и T				$\frac{T}{T_1} =$
Логарифмический декремент затухающих колебаний				$\eta = nT_1 = \frac{2\pi\sqrt{T_1^2 - T^2}}{T}$
Декремент затухающих колебаний				$D = e^{nT_1}$
На сколько уменьшается амплитуда за один период колебания				$A_{i+1} = A_i e^{nT_1}$ $\Delta A = A_{i+1} - A_i =$ $= A_i(1 - e^{nT_1})$
Время одного полного колебания				Измерение секундомером
Полное количество колебаний				Подсчет в процессе наблюдения

Контрольные вопросы

1. Какие колебания совершает тело при наличии диссипативной силы сопротивления?
2. Как влияет на амплитуду колебаний диссипативная сила трения?
3. Меняется ли с течением времени период затухающих колебаний?
4. Что такое декрементная кривая?
5. Что такое декремент затухающих колебаний?
6. Как подсчитать логарифмический декремент затухающих колебаний?
7. Вид дифференциального уравнения движения затухающих колебаний.
8. От каких факторов зависит диссипативная сила трения?
9. Какие параметры влияют на частоту затухающих колебаний?
10. Приведет ли увеличение площади пластинки (при других неизменных параметрах) к увеличению периода затухающих колебаний?
11. Что показывает декремент затухающих колебаний?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бутенин Н. В., Лунц Я. Л., Меркин Д. Р. Курс теоретической механики. В 2 т. СПб.: Лань, 2002. 736 с.

2. Дронг В. И., Дубинин В. В., Ильин М. М. и др. Курс теоретической механики: учебник для вузов. М.: Издательство МГТУ имени Н. Э. Баумана, 2000. 736 с. (Серия «Механика в техническом университете»: Т.1).

3. Яблонский А. А., Никифорова В. М. Курс теоретической механики. Статика. Кинематика. Динамика: учеб. пособие. М.: Интеграл-Пресс, 2006. 603 с.

4. Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики: учебник. М.: Высшая школа, 2006. 416 с.