

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

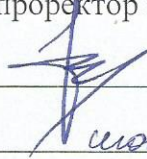
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

**«УФИМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АВИАЦИОННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

Кафедра *высокопроизводительных вычислительных технологий и систем*

УТВЕРЖДАЮ

Первый проректор по науке


_____ Р.Д. Еникеев
« 23 » _____ 2022 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

«ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА»

Уровень подготовки

высшее образование - подготовка научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре

Научная специальность

1.1.2 Дифференциальные уравнения и математическая физика

Квалификация (ученая степень): кандидат наук


Форма обучения

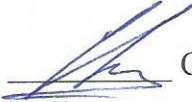
очная


Уфа 2022


Рабочая программа учебной дисциплины «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА»

Рабочая программа дисциплины обсуждена на заседании кафедры ВВТиС 28.04.2022 г., протокол № 17 и рекомендована к реализации в образовательном процессе для подготовки аспирантов по ПА 1.1.2 «Дифференциальные уравнения и математическая физика».

И.о. заведующего кафедрой:  А.А. Гайнетдинова

Составители:  С.Ю. Лукашук, д.ф.-м.н., доцент, профессор кафедры ВВТиС,

 В.О. Лукашук, к.ф.-м.н., доцент кафедры ВВТиС

Согласовано:  Р.К. Фаттахов, к.т.н., доцент, начальник ОАиД

Оглавление

1. Место дисциплины в структуре образовательной программы	4
2. Содержание и структура дисциплины (модуля).....	4
3. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы аспирантов.....	6
4. Фонд оценочных средств	7
5. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины	11
6. Адаптация рабочей программы для лиц с ОВЗ	12

1. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина Дифференциальные уравнения дробного порядка является частью подготовки научных и научно-педагогических кадров высшей квалификации, образовательного компонента (факультативные дисциплины) программы аспирантуры подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре по научной специальности 1.1.2 Дифференциальные уравнения и математическая физика.

Рабочая программа составлена в соответствии с Федеральными государственными требованиями к структуре программам подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре (адъюнктуре)», утвержденных приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (Минобрнауки России) от 20 октября 2021 года № 951; Постановление Правительства Российской Федерации от 30.11.2021 № 2122 "Об утверждении Положения о подготовке научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре (адъюнктуре)".

Целью освоения дисциплины является углубленное знакомство обучающихся с основами интегро-дифференцирования дробного порядка и теорией дробно-дифференциальных уравнений.

Задачи: изучение основ дробного интегрирования и дифференцирования; изучение особенностей постановки начальных задач для обыкновенных дробно-дифференциальных уравнений с дробными производными различных типов; освоение математического аппарата, позволяющего проводить доказательства теорем существования и единственности начальных задач для дробно-дифференциальных уравнений; освоение классических методов решения обыкновенных дробно-дифференциальных уравнений; изучение особенностей применения теоретико-группового подхода к исследованию дробно-дифференциальных уравнений; освоение симметричных методов решения дробно-дифференциальных уравнений.

2. Содержание и структура дисциплины (модуля)

Общая трудоемкость дисциплины составляет 3 зачетных единиц (108 часов).

Трудоемкость дисциплины по видам работ

Вид работы	Трудоемкость, час.
	3 курс
Лекции (Л)	20
Практические занятия (ПЗ)	10
Лабораторные работы (ЛР)	
КСР	1
Курсовая проект работа (КР)	
Расчетно - графическая работа (РГР)	
Самостоятельная работа (проработка и повторение лекционного материала и материала учебников и учебных пособий, подготовка к лабораторным и практическим занятиям, коллоквиумам, рубежному контролю и т.д.)	68
Подготовка и сдача экзамена	
Подготовка и сдача зачета	9
Вид итогового контроля (зачет, экзамен)	зачет

Содержание разделов и формы текущего контроля

№	Наименование и содержание раздела	Количество часов						Литература, рекомендуемая аспирантам
		Аудиторная работа				СРС	Всего	
		Л	ПЗ	ЛР	КСР			
1	Интегралы и производные дробного порядка	4	2			14	20	5.1.1 – 5.1.5
2	Теоремы существования и единственности решения начальных задач для обыкновенных дробно-дифференциальных уравнений	6	2			18	26	5.1.1 – 5.1.4
3	Методы решения линейных обыкновенных дробно-дифференциальных уравнений	4	4			16	24	5.1.1 – 5.1.3
4	Теоретико-групповой подход к решению обыкновенных дробно-дифференциальных уравнений	6	2		1	20	29	5.1.1

3. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы аспирантов

Раздел 1. Интегралы и производные дробного порядка

1. Интегралы дробного порядка и их основные свойства.
2. Дробные производные Римана–Лиувилля, их свойства.
3. Решение простейшего линейного однородного дробно-дифференциального уравнения с дробной производной Римана–Лиувилля.
4. Разложение дробных производных Римана–Лиувилля в ряд по производным целого порядка.
5. Обобщенное правила Лейбница для производных Римана–Лиувилля.
6. Дробные производные Герасимова–Капуто, их свойства.
7. Связь дробных производных Римана–Лиувилля и Герасимова–Капуто.

Раздел 2. Теоремы существования и единственности решения начальных задач для обыкновенных дробно-дифференциальных уравнений

1. Задача типа Коши для ОДДУ с дробной производной Римана–Лиувилля порядка $(0,1)$.
2. Сведение задачи типа Коши к задаче решения интегрального уравнения Вольтерра второго рода.
3. Теорема существования и единственности решения задачи типа Коши для ОДДУ с дробной производной Римана–Лиувилля порядка $(0,1)$.
4. Решение задачи типа Коши для линейного ОДДУ с дробной производной Римана–Лиувилля порядка $(0,1)$.
5. Взвешенная задача типа Коши для ОДДУ с дробной производной Римана–Лиувилля порядка $(0,1)$.
6. Решение взвешенной задачи типа Коши для линейного ОДДУ с дробной производной Римана–Лиувилля порядка $(0,1)$ и степенным коэффициентом.
7. Задача типа Коши для ОДДУ с дробной производной Римана–Лиувилля произвольного порядка.
8. Сведение задачи типа Коши к задаче решения интегрального уравнения Вольтерра второго рода в случае произвольного порядка дробной производной.
9. Теорема существования и единственности решения задачи типа Коши для ОДДУ с дробной производной Римана–Лиувилля произвольного порядка.
10. Решение задачи типа Коши для ОДДУ с двумя дробными производными разных порядков.
11. Задача Коши для ОДДУ с дробными производными Герасимова–Капуто.
12. Сведение задачи Коши к задаче решения интегрального уравнения Вольтерра второго рода.
13. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для ОДДУ с дробной производной Герасимова–Капуто произвольного порядка.
14. Решение задачи Коши для линейного однородного ОДДУ с дробной производной Герасимова–Капуто.

Раздел 3. Методы решения линейных обыкновенных дробно-дифференциальных уравнений

1. Специальные функции Миттаг–Леффлера и Райта.
2. Интегральное преобразование Лапласа.
3. Интегральное преобразование Меллина.
4. Решение линейных ОДДУ с постоянными коэффициентами и дробными производными Римана–Лиувилля с помощью преобразования Лапласа.

5. Решение линейных ОДДУ с постоянными коэффициентами и дробными производными Герасимова–Капуто с помощью преобразования Лапласа.
6. Использование преобразования Лапласа для решения ОДДУ со степенными коэффициентами.
7. Решение ОДДУ с помощью преобразований Меллина.
8. Метод обобщенных степенных рядов.
9. Решение ОДДУ со степенными коэффициентами методом обобщенных степенных рядов.

Раздел 4. Теоретико-групповой подход к решению обыкновенных дробно-дифференциальных уравнений

1. Локальные однопараметрические группы преобразований.
2. Формулы продолжения групп преобразований на интегралы и производные дробного порядка.
3. Действие классических групп преобразований на дробные интегралы и производные.
4. Группы, допускаемые дробно-дифференциальными уравнениями, необходимое условие инвариантности.
5. Построение и анализ допускаемой группы для простейшего дробно-дифференциального уравнения.
6. Понятие линейно-автономных преобразований и симметрий.
7. Алгоритм построения группы линейно-автономных преобразований, допускаемой ОДДУ.
8. Построение инвариантно-групповых решений ОДДУ.
9. Задача групповой классификации ОДДУ, группы эквивалентности.
10. Пример групповой классификации неоднородного ОДДУ.

4. Фонд оценочных средств

Оценка уровня освоения дисциплины осуществляется в виде текущего и промежуточного контроля успеваемости аспирантов университета, и на основе критериев оценки уровня освоения дисциплины.

Активность обучающегося оценивается на занятиях и на основе выполненных работ и заданий, предусмотренных ФОС дисциплины.

Оценивание проводится преподавателем независимо от наличия или отсутствия обучающегося (по уважительной или неуважительной причине) на занятии. Оценка носит комплексный характер и учитывает достижения обучающегося по основным компонентам образовательного процесса за текущий период.

№ п/п	Контролируемые разделы (темы) дисциплины	Наименование оценочного средства*
1	Интегралы и производные дробного порядка	Круглый стол, комплексное задание, ответы на вопросы
2	Теоремы существования и единственности решения начальных задач для обыкновенных дробно-дифференциальных уравнений	Круглый стол, комплексное задание, ответы на вопросы
3	Методы решения линейных обыкновенных дробно-дифференциальных уравнений	Круглый стол, комплексное задание, ответы на вопросы
4	Теоретико-групповой подход к решению обыкновенных дробно-дифференциальных уравнений	Круглый стол, комплексное задание, ответы на вопросы

Зачет по дисциплине ориентирован на проверку *знаний*, для этого используются контрольные вопросы по всем разделам дисциплины. Зачет проводится в письменной форме. Студенту выдается билет к зачету, состоящий из 10 контрольных вопросов из списка перечня вопросов к зачету, охватывающих все разделы дисциплины, на которые он должен дать краткий письменный ответ. Время на ответ - 20 минут.

Вопросы к зачету

1. Дайте определения лево- и правостороннего дробных интегралов.
2. Докажите формулу дробного интегрирования по частям.
3. Сформулируйте полугрупповое свойство дробных интегралов.
4. Дайте определение лево- и правосторонней дробной производной Римана–Лиувилля.
5. Как связаны дробные производные Римана–Лиувилля и уравнение Абеля?
6. Дайте определение абсолютно непрерывной функции.
7. Дайте определение класса функций $AC^n[a,b]$ и приведите необходимое и достаточное условие принадлежности функции этому классу.
8. Приведите примеры классов функций, для которых существуют дробные производные.
9. Чему равна дробная производная Римана–Лиувилля от постоянной?
10. Запишите формулу для дробной производной Римана–Лиувилля от степенной функции.
11. Сформулируйте обобщенное правило Лейбница.
12. В чем состоит отличие дробных производных Герасимова--Капуто от дробных производных Римана--Лиувилля?
13. Запишите формулу связи дробных производных Герасимова–Капуто и Римана–Лиувилля?
14. Что такое задача типа Коши для ОДДУ с дробной производной Римана–Лиувилля?
15. Почему для дробно-дифференциального уравнения с дробной производной Римана–Лиувилля не ставится классическая задача Коши?
16. Как связана задача типа Коши для дробно-дифференциального уравнения с дробной производной Римана–Лиувилля с интегральным уравнением Вольтерра второго рода?
17. Сформулируйте теорему существования и единственности решения задачи типа Коши для ОДДУ с дробной производной Римана–Лиувилля порядка $(0,1)$.
18. Как ставится взвешенная задача типа Коши?
19. В чем состоит отличие в постановках начальных задача для дробно-дифференциальных уравнений с дробными производными Римана–Лиувилля и Герасимова–Капуто?
20. Для решения каких видов дробно-дифференциальных уравнений может быть эффективно использовано преобразование Меллина?
21. Почему необходимое условие инвариантности для ОДДУ не является критерием?
22. Почему допускаемые дробно-дифференциальным уравнением группы преобразований должны оставлять неподвижными начала отсчета дробных производных?
23. Какие преобразования называются линейно-автономными?
24. Приведите алгоритм построения симметрий ОДДУ.
25. В чем отличие задачи групповой классификации ОДДУ от аналогичной задачи для дифференциальных уравнений целого порядка?

Критерии оценки:

- итоговая оценка «зачтено» выставляется студенту, получившему промежуточные оценки «зачтено» по всем заданиям промежуточной аттестации, а также письменно правильно ответившему на зачете не менее чем на 7 из 10 контрольных вопросов из перечня вопросов к зачету.

- итоговая оценка «не зачтено» выставляется студенту, имеющему оценку «не зачтено» по одному заданию промежуточной аттестации или более, либо правильно ответившему на зачете менее чем на 7 из 10 контрольных вопросов из перечня контрольных вопросов.

Типовые оценочные материалы

Тема 1. Интегралы и производные дробного порядка

Перечень дискуссионных тем для круглого стола (дискуссии, полемики, диспута, дебатов)

1. Отличие свойств дробных производных Римана–Лиувилля от аналогичных свойств производных целого порядка.
2. Что общего и чем различаются дробные производные Римана–Лиувилля и Герасимова–Капуто.
3. Дробные производные сложной функции.
4. Обобщенное правило Лейбница для дробных производных.
5. Пространства функций, используемые при исследовании дробных производных

Комплексное задание (пример):

1. Докажите прямыми вычислениями полугрупповое свойство для дробных интегралов.
2. С использованием разложения в ряд Тейлора вычислите дробный интеграл ${}_a I_x^\alpha e^{\lambda x}$.
3. Докажите прямыми вычислениями, что дробная производная от постоянной не равна нулю.
4. Вычислите следующие дробные производные:

$${}_0 D_x^\alpha (\ln x), \quad {}^C_0 D_x^\alpha (x^\beta e^{\lambda x}).$$

Критерии оценки:

- оценка «зачтено» выставляется аспиранту, если была проявлена дискуссионная активность в рамках круглого стола и верно решены не менее трех задач из комплексного задания;
- оценка «не зачтено» выставляется аспиранту, если у него отсутствовала дискуссионная активность в рамках круглого стола и/или верно решено менее трех задач комплексного задания.

Тема 2. Теоремы существования и единственности решения начальных задач для обыкновенных дробно-дифференциальных уравнений

Перечень дискуссионных тем для круглого стола (дискуссии, полемики, диспута, дебатов)

1. Невозможность постановки классической задачи Коши для ОДДУ с дробными производными Римана–Лиувилля.
2. Эквивалентность задачи типа Коши и взвешенной задачи типа Коши для ОДДУ с дробными производными Римана–Лиувилля.
3. Сведение начальных задач для ОДДУ к интегральным уравнениям Вольтерра второго рода.
4. Особенности решения задачи типа Коши для ОДДУ с двумя дробными производными разных порядков.
5. Отличие решений начальных задач для линейных однородных ОДДУ с дробными производными Римана–Лиувилля и Герасимова–Капуто.

Комплексное задание (пример):

Выписать эквивалентные интегральные уравнения Вольтерра второго рода и построить их решения методом последовательных приближений для следующих начальных задач:

1)

$${}_0 D_x^\alpha y = e^x y, \quad 0 < \alpha < 1, \quad y = y(x),$$

$$({}_0 I_x^{1-\alpha} y)(0) = A, \quad A = \text{const.}$$

2)

$${}_0^C D_x^\alpha y - \lambda x^\beta y = 0, \quad 0 < \alpha < 1, \quad \lambda, \beta \in R, \\ y(0) = A, \quad A = \text{const.}$$

3)

$${}_0^C D_x^\alpha y - \lambda {}_0^C D_x^\beta y = f(x), \quad \alpha > 0, \quad 0 < \beta < 1, \quad \lambda \in R, \quad x > 0, \\ y^{(k)}(0) = A_k, \quad k \in R, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad n = [\alpha] + 1.$$

Критерии оценки:

- оценка «зачтено» выставляется аспиранту, если была проявлена дискуссионная активность в рамках круглого стола и верно решены не менее двух задач из комплексного задания;

- оценка «не зачтено» выставляется аспиранту, если у него отсутствовала дискуссионная активность в рамках круглого стола и/или верно решено менее двух задач комплексного задания.

Тема 3. Методы решения линейных обыкновенных дробно-дифференциальных уравнений

Перечень дискуссионных тем для круглого стола (дискуссии, полемики, диспута, дебатов)

1. Специальные функции Миттаг–Леффлера и типа Миттаг–Леффлера, их свойства.
2. Функций Райта и ее обобщения.
3. Решение линейных ОДДУ с помощью интегральных преобразований.
4. Метод обобщенных степенных рядов: область применения, преимущества и недостатки.
5. Преобразование Фурье и построение фундаментальных решений дробно-дифференциальных уравнений.

Комплексное задание (пример):

1. С использованием преобразования Лапласа построить общее решение следующего линейного неоднородного ОДДУ:

$$x {}_0^C D_x^\alpha y - \lambda y = f(x), \quad x > 0, \quad 0 < \alpha < 1, \quad \lambda \in R.$$

2. С использованием преобразования Меллина построить общее решение следующего линейного неоднородного ОДДУ:

$$x^2 y'' + \lambda x^\alpha {}_0^C D_x^\alpha y = f(x), \quad x > 0, \quad 0 < \alpha < 1, \quad \lambda \in R.$$

3. Методом обобщенных степенных рядов построить общее решение следующего линейного однородного ОДДУ:

$${}_0^C D_x^\alpha y - \lambda x^\beta y = 0, \quad 0 < \alpha < 1, \quad \lambda, \beta \in R.$$

Критерии оценки:

- оценка «зачтено» выставляется аспиранту, если была проявлена дискуссионная активность в рамках круглого стола и верно решены не менее двух задач из комплексного задания;

- оценка «не зачтено» выставляется аспиранту, если у него отсутствовала дискуссионная активность в рамках круглого стола и/или верно решено менее двух задач комплексного задания.

Тема 4. Теоретико-групповой подход к решению обыкновенных дробно-дифференциальных уравнений

Перечень дискуссионных тем для круглого стола (дискуссии, полемики, диспута, дебатов)

1. Построение формул продолжения групп точечных преобразований на интегралы и производные дробного порядка.
2. Отсутствие принципа инвариантности для дробно-дифференциальных уравнений.
3. Алгоритм построения линейно-автономных симметрий для ОДДУ.
4. Особенности построения преобразований эквивалентности для ОДДУ.
5. Задачи групповой классификации ОДДУ.

Комплексное задание (пример):

1. Вычислите продолжение инфинитезимального оператора

$$X = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + (\alpha - 1)xy \frac{\partial}{\partial y} + y \frac{\partial}{\partial y}, \quad 0 < \alpha < 1$$

на дробный интеграл ${}_0I_x^{1-\alpha}u$ и дробные производные Римана–Лиувилля ${}_0D_x^\alpha u$ и Герасимова–Капуто ${}_0^C D_x^\alpha u$.

2. Найдите симметрии следующего ОДДУ:

$${}_0D_x^{\alpha+1}y = y {}_0D_x^\alpha y, \quad 0 < \alpha < 1.$$

3. Выполните групповую классификацию следующего семейства ОДДУ:

$${}_0D_x^{\alpha+1}y = f(x, {}_0D_x^\alpha y), \quad 0 < \alpha < 1.$$

Критерии оценки:

- оценка «зачтено» выставляется аспиранту, если была проявлена дискуссионная активность в рамках круглого стола и верно решены не менее двух задач из комплексного задания;

- оценка «не зачтено» выставляется аспиранту, если у него отсутствовала дискуссионная активность в рамках круглого стола и/или верно решено менее двух задач комплексного задания.

5. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

5.1 Основная литература

1. Лукашук В.О., Лукашук С.Ю. Обыкновенные дифференциальные уравнения дробного порядка: основы классической теории и группового анализа : учебное пособие / [Электронный ресурс] / Уфимск. гос. авиац. техн. ун-т. – Уфа : УГАТУ, 2022. –170 с.
2. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение [Электронный ресурс]. – М : ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 272 с. – URL: <https://e.lanbook.com/book/59343>.
3. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.
4. Колмогоров А.,Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. [Электронный ресурс]. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 572 с. – URL: <https://e.lanbook.com/book/2206>.
5. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. В 3т. Том 3. Специальные функции. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 688 с. — URL: <https://e.lanbook.com/book/2287>.

5.2 Дополнительная литература

1. Джрбашян М.М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. – М.: Наука, 1966. – 672 с.
2. Диткин В.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 1961. – 524 с.

3. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1965. – 716 с.
4. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Т.1. Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина. – М.: Наука, 1969. – 344 с.
5. Газизов Р.К., Лукашук В.О. Специальные методы решения дифференциальных уравнений: групповой анализ: учебное пособие. – Уфа.: УГАТУ, 2021. – 91 с.

5.3. Интернет-ресурсы (электронные учебно-методические издания, лицензионное программное обеспечение)

На сайте библиотеки <http://library.ugatu.ac.ru/> в разделе «Информационные ресурсы», подраздел «Доступ к БД» размещены ссылки на интернет-ресурсы.

6. Адаптация рабочей программы для лиц с ОВЗ

При инклюзивном обучении лиц с ОВЗ предоставляется возможность использовать следующие материально-технические средства:

- для аспирантов с ОВЗ по зрению предусматривается применение средств преобразования визуальной информации в аудио и тактильные сигналы, таких как, брайлевская компьютерная техника, электронные лупы, видеовеличители, программы не визуального доступа к информации, программы-синтезаторов речи;

- для аспирантов с ОВЗ по слуху предусматривается применение сурдотехнических средств, таких как, системы беспроводной передачи звука, техники для усиления звука, видеотехника, мультимедийная техника и другие средства передачи информации в доступных формах;

для аспирантов с нарушениями опорно-двигательной функции предусматривается применение специальной компьютерной техники с соответствующим программным обеспечением, в том числе, специальные возможности операционных систем, таких, как экранная клавиатура и альтернативные устройства ввода информации.