

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Уфимский государственный авиационный технический университет»

А. А. ЧЕРНОУСОВ

МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА

(конспект лекций)

Уфа 2021

ОГЛАВЛЕНИЕ

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ И СОКРАЩЕНИЙ	4
ВВЕДЕНИЕ	7
1. ИСХОДНЫЕ ГИПОТЕЗЫ И МОДЕЛИ СРЕДЫ	12
1.1. Исходные гипотезы	12
1.2. Уравнения состояния	15
1.3. Молекулярный перенос	21
2. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ	27
2.1. Законы сохранения при пространственном течении	27
2.2. Основные уравнения конкретных моделей МЖГ	34
2.3. Начальные и граничные условия	40
2.4. Законы сохранения в «квазиодномерном» приближении . . .	42
2.5. Законы сохранения для «нульмерной» системы	46
3. ГИДРОСТАТИКА	51
4. ДИНАМИКА ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ И ГАЗА	57
4.1. Уравнения Эйлера	57
4.2. Безвихревые («потенциальные») течения	63
4.3. Изоэнтропные одномерные течения	67
4.4. Истечение через отверстия	68
5. ДИНАМИКА ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ И ГАЗА	69
5.1. Уравнения Навье – Стокса	69
5.2. Ламинарные течения	72
5.3. Турбулентные течения	79
5.4. Моделирование крупных вихрей (<i>LES</i>)	84
5.5. Моделирование осредненных полей течений (<i>RANS</i>)	88
6. ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ ПОДОБИЕ	100
7. СТАЦИОНАРНАЯ ГИДРОГАЗОДИНАМИКА	116
7.1. Течения в трубах, пограничных слоях и в струях	117

7.2. Модель одномерного стационарного течения	128
7.3. Виды газодинамических разрывов	140
7.4. Модель местного сопротивления	145
7.5. Экспериментальное определение характеристик МС	151
7.6. Применение интегральных соотношений	157
8. НЕСТАЦИОНАРНАЯ ГИДРОГАЗОДИНАМИКА	161
8.1. Характеристическая форма уравнений	161
8.2. Граничные условия	166
8.3. Инварианты Римана	167
8.4. Акустическое приближение	169
8.5. Волны конечной амплитуды	169
8.6. Газодинамические функции нестационарного торможения . .	175
8.7. Задача о поршне	179
8.8. Задача о распаде произвольного разрыва	181
8.9. Взаимодействие волн со скачками сечения трубопровода . .	187
9. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ГИДРОГАЗОДИНАМИКА	212
9.1. Численные методы для одномерных задач	214
9.2. Численный метод для пространственных задач	235
9.3. О методологии моделирования в <i>CFD</i> -пакетах	238
ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ	242
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	246
ПРИЛОЖЕНИЕ А. ГАЗОДИНАМИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ	248

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ И СОКРАЩЕНИЙ

Термодинамические величины:

p — давление (абсолютное), Па;

T — термодинамическая (абсолютная) температура, К;

ρ — плотность, кг/м³;

$v = 1/\rho$ — удельный объем, м³/кг;

Y_k — массовая доля компонента смеси;

e — удельная (массовая) внутренняя энергия, Дж/кг;

h — удельная (массовая) энтальпия, Дж/кг;

H — молярная энтальпия, Дж/кг;

$R^0 = 8,314472$ Дж/(моль · К) — универсальная (молярная) газовая постоянная;

W — молярная масса, кг/моль;

R — удельная газовая постоянная, Дж/(кг · К);

c_p — удельная теплоемкость при $p = \text{const}$, Дж/(кг · К);

c_v — удельная теплоемкость при $v = \text{const}$, Дж/(кг · К);

s — удельная энтропия, Дж/(кг · К);

c — скорость звука, м/с;

β — коэффициент температурного расширения, К⁻¹.

Гидрогазодинамические величины:

x, y, z — оси прямоугольной системы координат, м;

$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ — радиус-вектор точки, м;

t — время, с;

\mathbf{n} — единичный вектор внешней нормали к поверхности контрольного объема;

$\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$ — вектор скорости, м/с;

v_x, v_y, v_z (а также u, v, w) — проекции \mathbf{v} на оси декартовой системы координат, м/с;

$E = e + \frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2$ — удельная полная энергия, Дж/кг;

Π_{ij} — тензор плотности потока КД, Па;

Π'_{ij} — тензор напряжений, Па;

Π''_{ij} — тензор «вязких» напряжений, Па;

μ — динамический коэффициент вязкости, Па · с;

ν — кинематический коэффициент вязкости, м²/с;

κ — коэффициент теплопроводности, Вт/(м · К);

D_k — коэффициент диффузии, м²/с;

$\mathbf{q} = q_x \mathbf{i} + q_y \mathbf{j} + q_z \mathbf{k}$ — вектор плотности кондуктивного теплового потока, Вт/м²;

$\mathbf{g} = g_x \mathbf{i} + g_y \mathbf{j} + g_z \mathbf{k}$ — вектор ускорения массовой силы, м/с²;

$G = \rho u F$ — массовый расход в сечении, кг/с;

$I = [(\rho u^2 + p) F]$ — полный импульс (сумма потока количества движения и импульса силы давления) в сечении, Н;

p^*, T^*, c^*, ρ^* — параметры стационарно изоэнтропически заторможенного потока (при $M^* = 0$ и $h^* = h + u^2/2$);

$I_{\pm} = \frac{2}{\gamma-1} c \pm u$ — инварианты Римана, м/с;

p'', T'', c'', ρ'' — параметры нестационарно изоэнтропически заторможенного потока (при $M'' = 0$ и $I''_+ = I_+$);

p', T', c', ρ' — параметры нестационарно изоэнтропически заторможенного потока (при $M' = 0$ и $I'_- = I_-$).

Безразмерные величины (см. также с. 112)

M — число Маха;

Re — число Рейнольдса;

θ — температурный фактор;

$\gamma = c_p/c_v$ — отношение теплоемкостей;

Pr — число Прандтля;

Sc_k — число Шмидта;

Nu — число Нуссельта;

λ — (1) приведенная скорость; (2) коэффициент потерь на трение;

ζ — коэффициент потерь полного давления;

σ — коэффициент сохранения (восстановления) полного давления.

Сокращения:

ВГД — вычислительная гидрогазодинамика; то же, что *CFD*;

ВР — волна Римана;

ГД — газовая динамика;

ГДФ — газодинамическая функция;
ГС — гипотеза сплошности;
ГУ — граничные условия;
ЗС — закон(ы) сохранения;
КД — количество движения;
КР — контактный разрыв;
ЛТР — локальное термодинамическое равновесие;
МЖГ — механика жидкости и газа;
МКО — методы конечных объемов;
МКР — методы конечных разностей;
МКВ — «моделирование крупных вихрей»: численный расчет турбулентного течения с явным выделением лишь крупномасштабной составляющей полей зависимых переменных; то же, что *LES*;
МС — местное сопротивление;
НГДФ — нестационарная газодинамическая функция;
НГГД — нестационарная гидрогазодинамика;
НГХ — нестационарная гидрогазодинамическая характеристика;
НУ — начальные условия;
ОДУ — обыкновенное дифференциальное уравнение;
РД — реактивный двигатель;
РПР — распад произвольного разрыва;
СП — свободная поверхность;
УВ — ударная волна;
УНС — уравнения Навье – Стокса;
УС — уравнение (уравнения) состояния;
УЧП — уравнение (уравнения) с частными производными;
ЦВР — центрированная волна разрежения;
CFD (Computational Fluid Dynamics) — вычислительная гидрогазодинамика;
DNS (Direct Numerical Simulation) — численный расчет течения непосредственно по уравнениям детальной модели пространственного движения реагирующей смеси или по УНС;
LES (Large Eddy Simulation) — то же, что МКВ;
RANS (Reynolds Averaged Navier – Stokes) — расчет течения по осредненным УНС.

ВВЕДЕНИЕ

Объект и предмет изучения. Механика жидкости и газа (МЖГ, англ. *fluid mechanics, fluid dynamics*) — естественно-научная дисциплина, изучающая механическую форму движения материи как *подвижной текучей среды*. В классической МЖГ текучая среда считается *сплошной* и именуется *жидкостью* (англ. *fluid*) безотносительно к агрегатному состоянию¹, т. е. применительно как к *капельным жидкостям*², так и к газам (смесям газов).

Место дисциплины в системе естественно-научных знаний. МЖГ — элемент следующей *иерархии* дисциплин, изучающих различные аспекты механической формы движения: динамика материальной точки — динамика абсолютно твердого тела — механика (динамика) деформируемого тела и, наконец, собственно МЖГ — механика (динамика) легко деформируемой (текучей) среды, т. е. жидкости.

МЖГ следует рассматривать как раздел *механики сплошных сред* [1], в котором принята модель легкоподвижной *сплошной среды* — жидкости или газа. В основе описания течений в рамках МЖГ лежат принятые в качестве аксиом *гипотеза сплошности* (с. 12) и *гипотеза локального термодинамического равновесия* (там же, далее).

В рамках указанных гипотез формулируются *законы сохранения* (ЗС) *массы, количества движения* (КД) и *энергии* для течения жидкости, из которых в классической МЖГ выводятся уравнения моделей, описывающих поля течений в трехмерном пространстве и для абсолютного времени t . Получаемые из ЗС общего вида уравнения замыкаются конкретными *уравнениями состояния*, соотношениями моделей *молекулярного переноса* массы, КД и энергии и т. д. Таким образом, МЖГ использует положения и оперирует соотношениями из механики, термодинамики и молекулярно-кинетической теории газов. В рамках классической МЖГ рассматриваются развивающиеся в пространстве и во времени течения достаточно плотных однородных по составу и однофазных капельных жидкостей (в отсутствие *кавитации*) и газов.

Цели и задачи пособия. Основная цель — дать студентам двигателестроительных и энергетических специальностей целостное пони-

¹ Англоязычный термин *fluid* употребляется именно в этом значении.

² Термин *капельная жидкость* подчеркивает именно жидкое агрегатное состояние среды.

вание фундаментальных основ МЖГ; ставятся задачи показать вывод (начиная с исходных гипотез) основных уравнений МЖГ исходя из общепринятых законов сохранения, дать представление о моделях *стационарных* и *нестационарных* течений с одной пространственной переменной, а также о численных методах газовой динамики.

Структура пособия. Материал поделен на разделы, в соответствии с крупными аспектами формализованного описания гидромеханических процессов моделями МЖГ. Так, в первых двух разделах обсуждаются исходные гипотезы и модели свойств жидкостей и газов, на основе чего выписываются ЗС, а из них выводятся конкретные дифференциальные уравнения. В следующих разделах рассматривается теория, лежащая в основе моделирования нестационарных течений в трубопроводных системах в квазиодномерном приближении. В последнем разд. изложены некоторые численные методы газовой динамики — «явные» методы расчета одно- и многомерных нестационарных течений сжимаемых газов.

В разд. 1 обсуждаются *исходные гипотезы*, а также дополнительные гипотезы и основанные на них конкретные модели жидкости.

В разд. 2 выводятся (на основе этих гипотез) уравнения, *исходные* для получения конкретных моделей МЖГ и выражающие *законы сохранения* для течений жидкостей и газов; вначале — как общего вида ЗС, т. е. для пространственно трехмерных (3D) нестационарных течений однородных по составу сжимаемых жидкостей. Из них далее могут быть получены системы *уравнений в частных производных* (УЧП), напр., *уравнения Навье — Стокса*, описывающие поля характеристик текущей плотной «ньютоновской» среды, а также уравнения более частных моделей течений (напр., *уравнений Эйлера*). Выводятся также ЗС (основа соответствующих УЧП) для моделей, рассматривающих течения в одномерном (1D) приближении, а также ЗС для модели однородной («нульмерной», 0D) открытой термодинамической системы. Из последних получают, в частности, такие УС, в которых s (удельная *энтропия*) выступает параметром состояния.

Разд. 3 посвящена описанию наиболее частного случая: объема неподвижной жидкости, находящейся в состоянии покоя (гидростатического равновесия). Решение задач *гидростатики* сводится к расчету стационарных полей давления $p(x, y, z)$ и плотности $\rho(x, y, z)$ (если последняя величина не принята постоянной). Показано, как интеграл

(частное решение) уравнений гидростатики определяет форму свободной поверхности, силу давления жидкости на площадку и выталкивающую силу (*силу Архимеда*) и решение задачи о сообщающихся сосудах.

В разд. 4 излагается теория движения (вообще говоря, сжимаемой) жидкости, относительно свойств которой принято допущение об отсутствии эффектов *молекулярного переноса* (*вязкость, теплопроводность*) Частицы (микрообъемы) такой гипотетической *идеальной жидкости*, деформируясь, не оказывают сопротивления деформации, и местное *гидродинамическое давление* — единственная составляющая поверхностных сил, действующая по нормали к воображаемым границам раздела микрообъемов среды. Модель идеальной (невязкой и нетеплопроводной) жидкости лежит в основе полезных приближенных моделей течений с малыми градиентами параметров вдали от твердых стенок обтекаемых тел. В этом разд. разбираются *уравнения Эйлера*, особенности *потенциального течения* и др.

Разд. 5 посвящен теории движения вязкой (также, в общем случае, сжимаемой) жидкости, т. е. жидкости, деформация частиц (микрообъемов) которой приводит к возникновению дополнительных («вязких») напряжений. Рассматривается модель жидкости, в которой связь компонентов тензора скоростей деформаций с компонентами тензора «вязких» напряжений линейная (*ньютоновские жидкости*). Уравнения, получаемые в рамках этой модели жидкости из общих ЗС носят название *уравнений Навье – Стокса* (УНС). Приводится пример аналитического решения простейших задач по УНС, уделено большое внимание *турбулентным течениям* вязких жидкостей и подходам к их математическому и компьютерному моделированию на основе УНС.

В разд. 6 изложен необходимый для специалиста по МЖГ материал из по анализу размерностей и теории подобия: основная теорема теории размерностей (с. 103) и пример ее применения к задаче о течении в трубе, понятия *подобия* и *условий подобия* и пример на условия подобия течений для того же класса задач. Включение в пособие специального разд. по данной теме обусловлено широким использованием безразмерных величин, *критериальных уравнений* и соображений подобия в дальнейшем тексте.

Разд. 7 посвящен прикладным моделям стационарного течения. Так, ее первый пункт содержит описания прикладных моделей МЖГ, важных для технических приложений — моделей (вообще говоря, про-

странственных) течений, расчет которых может быть выполнен с привлечением простых полуэмпирических соотношений и сравнительно несложных численных методов решения дифф. уравнений моделей. Приведен материал по турбулентным течениям газов и жидкостей в цилиндрических трубах, изложены основы *теории пограничного слоя* и *теории турбулентных струй*. В течениях всех этих видов существенна в основном продольная компонента скорости среды, а заметные изменения скорости (и др. характеристик потока) существенны, напротив, для поперечного направления.

В остальных пунктах того же разд. изложены модели для расчета течений в каналах переменного сечения в стационарной постановке. Выводятся газодинамические функции для параметров стационарного торможения и для уравнения расхода, с их помощью излагается теория идеализированного течения в каналах и соплах. Для сечений канала, где нарушается гладкость распределений характеристик потока — на разрывах (скачках) искомых функций и на разрывах геометрических характеристик канала («скачках сечения») — вводятся необходимые соотношения интегрального вида. Показана связь потерь *полного давления* с приростом удельной энтропии в энергоизолированном течении.

В разд. 8 рассматривается модель нестационарного (неустановившегося) течения газа в трубопроводной системе в рамках того же *квазиодномерного приближения*. Модель течения на гладком участке трубопровода опирается на интегральные законы сохранения для «квазиодномерного» течения. Исходные уравнения приводятся к «характеристической» форме, из которой получаются соотношения вдоль характеристических направлений в координатах (x, t) , а из них — выражения *газодинамических функций* для расчета параметров торможения частиц совершенного газа простыми изоэнтропными волнами. Модели граничных сечений (местных сопротивлений, разветвлений, компрессионных и расширительных машин) строятся как обобщения модели *местного сопротивления* из предыдущего разд. — через газодинамические функции, с учетом условий совместности с численным расчетом течения в примыкающих каналах.

Последний, 9-й разд. конспекта знакомит с основами численных методов решения уравнений газовой динамики для расчета течений газа как в «квазиодномерной», так и в детальной пространственной постановках задач. Показаны решения одномерных тестовых задач.

При изучении дисциплины рекомендуется использовать книги из [списка литературы](#) на с. 246.

В конце конспекта имеется [предметный указатель](#), который также полезен при изучении дисциплины.

В файле *PDF* конспекта работают³ *гиперссылки* на разделы и пункты текста, формулы, рисунки и элементы списка литературы. Из гиперссылок на разделы и пункты текста состоит и Оглавление, которое продублировано в *закладках* Содержания данного *PDF*-файла.

Обновления [конспекта](#) см. на [сайте](#) кафедры ДВС УГАТУ.

³Вернуться в исходное место документа после «посещения» элемента текста по гиперссылке позволяет комбинация клавиш [Alt] + [←] или др. навигационные средства программы просмотра *PDF*-файлов.

1. ИСХОДНЫЕ ГИПОТЕЗЫ И МОДЕЛИ СРЕДЫ

В данном разделе рассматриваются две *исходные гипотезы*, имеющие для классической *механики жидкости и газа* (МЖГ) силу аксиом, а также приведен материал по *моделям жидкой среды* — *уравнениям состояния* общего и частного вида, и моделям *молекулярного переноса*. Поясняется смысл некоторых важных в МЖГ термодинамических функций и параметров состояния — *внутренней энергии, энтальпии, энтропии, скорости звука*.

На основе исходных гипотез и моделей среды в разд. 2 показан вид *законов сохранения* (ЗС), а также вывод на их основе дифференциальных уравнений, описывающих течения газов и жидкостей в рамках классической МЖГ.

1.1. Исходные гипотезы

1.1.1. Гипотеза сплошности

В качестве исходной гипотезы в МЖГ принимается, что жидкость — *сплошная среда*, базовые характеристики которой определяются локальным осреднением по физическим характеристикам множества структурных элементов (молекул), содержащихся в малой окрестности точки $M(\mathbf{r}, t)$ объемом ΔV (рис. 1.1).

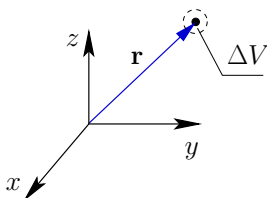


Рис. 1.1. К осреднению характеристик среды по малому объему

Так, величина *плотности* ρ , приписываемая точке \mathbf{r} в момент времени t , определяется как отношение суммы масс структурных элементов (молекул) в малом объеме к величине этого объема ΔV :

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\Delta V} \sum_{n=1}^N m_n,$$

где $N = N(\mathbf{r}, t)$ — число молекул в объеме ΔV в окрестности точки, m_n — масса n -й молекулы.

Векторная величина *скорости потока* среды \mathbf{v} в точке определяется отношением объемных плотностей *количества движения* (КД) $\rho\mathbf{v}$ и массы ρ в малом объеме ΔV —

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \frac{\rho\mathbf{v}}{\rho} = \frac{m\mathbf{v}}{\rho\Delta V} = \frac{1}{\rho\Delta V} \sum_{n=1}^N m_n \mathbf{v}_n.$$

Далее, если определить удельную *полную энергию* среды E как сумму кинетических энергий молекул (приближение одноатомного *идеального газа*) в малом объеме ΔV , то¹

$$E(\mathbf{r}, t) = \frac{\rho E}{\rho} = \frac{mE}{\rho\Delta V} = \frac{1}{\rho\Delta V} \sum_{n=1}^N \frac{m_n \mathbf{v}_n^2}{2}.$$

Величину приписываемой среде в данной точке удельной *внутренней энергии* e получим, вычитая из E *удельную* (в расчете на 1 кг) *кинетическую энергию* при движении со скоростью \mathbf{v} :

$$e(\mathbf{r}, t) = E - \frac{|\mathbf{v}|^2}{2}.$$

Собственно *гипотеза сплошности* (ГС) позволяет считать, что характерное расстояние $l = (\Delta V)^{1/3}$, на котором заметны изменения характеристик среды, все же достаточно велико, чтобы в объеме ΔV содержалось достаточное число молекул для осреднения по приведенным выше формулам без существенных флуктуаций.

Данная гипотеза — своего рода аксиома классической МЖГ. Она позволяет абстрагироваться от молекулярной структуры жидкостей и газов, т. е. ввести *континуальное описание* характеристик текучих сред, приписав любой точке пространства-времени вполне определенные значения характеристик среды — параметров состояния и компонент скорости: $\rho = \rho(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ (и далее — $E = E(\mathbf{r}, t)$, $e = e(\mathbf{r}, t)$, $p = p(\mathbf{r}, t)$, $T = T(\mathbf{r}, t)$ и т. д.). Эти и другие распределения в рамках ГС считаются гладкими (точнее, кусочно-гладкими) функциями пространственных координат и времени, что формально позволяет применять к ним операции дифференцирования (в подобластях их гладкости).

¹ Отметим закономерность в правой части трех формул.

Оценки показывают, что для гидродинамических явлений в жидкостях и достаточно плотных газах в технике ГС вполне справедлива².

Чтобы ввести более точное определение величины e и строго определить смысл T , p и др. характеристик среды, а также выражать одни величины через другие, необходима дополнительная гипотеза.

1.1.2. Гипотеза локального термодинамического равновесия

Данная гипотеза (гипотеза ЛТР) позволяет считать, что при любых эволюциях микрообъема среды в потоке молекулярная статистика в этом микрообъеме быстро (точнее, бесконечно быстро) *релаксирует* к характерной для *термодинамически равновесного состояния* [3]. Такое состояние характеризуется равновесным (и изотропным) распределением молекул по скоростям, а составляющих их энергии — по поступательным, вращательным и колебательным степеням свободы. Для таких условий искомые характеристики среды (величины e , T , p , ...) получают строгое определение (плотность ρ и скорость \mathbf{v} определены выше) и приобретают смысл параметров термодинамического состояния среды.

Именно принятие ГС и (на ее основе) гипотезы ЛТР позволяет вычислять значения параметра состояния по двум другим независимым параметрам через соотношения вида обычных («двухпараметрических») *уравнений состояния* (УС, англ. *equations of state*), см. с. 15.

Приняв обе гипотезы, мы в дальнейшем будем безоговорочно оперировать распределениями *параметров состояния* ρ , e , p , T и др., а также компонентами вектора скорости $\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}$ как кусочно-гладкими функциями координаты $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ и времени t , привлекая известные УС жидкостей и газов для выражения одних параметров состояния через другие во всех точках изучаемого потока.

²В задачах, для которых ГС *не обоснована*, описание течения в рамках классической МЖГ приведет к неверным результатам. Так, начиная с высот порядка 60 км воздух не является плотным газом применительно к задаче обтекания ЛА, и расчет обтекания по уравнениям МЖГ даст неверный результат. В данном случае, во-первых, нужно привлечь модель свободно-молекулярного течения, во-вторых, учесть химическую неравновесность и излучение — если движение происходит с гиперзвуковыми скоростями.

1.2. Уравнения состояния

Как говорилось выше, под *жидкостью* в МЖГ понимается газ (однородная смесь газов) или *капельная жидкость*. С точки зрения МЖГ нет принципиального различия между газами и капельными жидкостями — связь между параметрами состояния сплошной текучей среды в задачах и уравнениях моделей МЖГ для тех и других задается посредством УС:

$$F(p, T, v = 1/\rho) = 0.$$

1.2.1. Термическое и калорическое уравнения состояния

Исключить давление p из числа искомых функций в задачах МЖГ позволяет *термическое УС*; в общем виде —

$$p = p(\rho, T), \quad (1.1)$$

фигурирующая в котором температура T , в свою очередь, связана с плотностью ρ и удельной *внутренней энергией* e через другое, *калорическое УС*, общий вид которого

$$e = e(\rho, T). \quad (1.2)$$

Таким образом, чтобы по известным значениям удельной внутренней энергии e и плотности ρ в некоторой точке потока можно было вычислить термодинамическую температуру T и давление p , в общем случае необходимы два выражения УС — (1.1) и (1.2). Ниже обсуждаются их частные случаи³.

1.2.2. Идеальный газ

В пределе достаточно больших температур и малых плотностей вещество в газовой фазе ведет себя практически как *идеальный газ* (англ. *ideal gas*); объясняется это тем, что собственный объем молекул газа и силы их взаимного притяжения становятся пренебрежимо малы и взаимодействие молекул газа проявляется только при их столкновениях. Зависимость давления идеального газа от его плотности и температуры описывается термическим УС, которое есть частный случай (1.1):

$$p = \rho RT,$$

³В МЖГ используются также иные виды УС — зависимости между параметрами состояния.

где R — *удельная газовая постоянная*, определяемая выражением $R = R^0/W$, в котором $R^0 \approx 8,314472 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$ — универсальная газовая постоянная, W — масса 1 моля газа. Для воздуха $W \approx 0,02896 \text{ кг}/\text{моль}$ и $R \approx 287,1 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$.

Указанная особенность среды, близкой к идеально-газовому состоянию, обуславливает зависимость удельной внутренней энергии e только от температуры T (меры средней кинетической энергии молекул в хаотическом движении). Температурную зависимость $e = e(\rho, T) \rightarrow e(T)$ для идеального газа можно выразить интегралом известного из термодинамики тождества $(\partial e/\partial T)_v = c_v$:

$$e(T) = e(T_0) + \int_{T_0}^T c_v(T) dT, \quad (1.3)$$

где $c_v(T)$ — зависимость удельной *теплоемкости* при $v = \text{const}$, возрастающая в интервале от «комнатных» температур, до температур, превышающих адиабатные температуры горения топлив. Возрастание $c_v(T)$ объясняется постепенным возбуждением колебательных степеней свободы молекул газов, «запасаящих» внутреннюю энергию наряду с поступательными и вращательными степенями свободы. Зависимость $c_v(T)$ в выражении $e(T)$ на практике аппроксимируется полиномами, например

$$c_v(T) = c_{v0} + a_{v1}T + a_{v2}T^2 + \dots$$

Температурная зависимость для удельной *энтальпии*⁴ $h = e + pv$ (с учетом того, что $(\partial h/\partial T)_p = c_p$) имеет аналогичный (1.3) вид:

$$h(T) = h(T_0) + \int_{T_0}^T c_p(T) dT, \quad (1.4)$$

с учетом того, что для идеальных газов из $pv = RT$ следует $h = e + pv = e + RT$, а также справедливо равенство $R = c_p - c_v$ (закон Майера).

В задачах МЖГ уровень величины $e(T_0)$ для идеального газа (или однородной по составу смеси таких газов) может быть задан произвольно, как и ему соответствующая температура T_0 . Например, при $e(0) = 0$

⁴От греч. $\epsilon\nu\theta\acute{\alpha}\lambda\pi\omega$ — «нагреваю».

из (1.4) получаем

$$e(T) = \int_0^T c_v(T) dT. \quad (1.5)$$

1.2.3. Совершенный газ

Во многих задачах интервал температур не так велик, чтобы заметно проявлялось отличие $c_v(T)$ от постоянного значения и, соответственно, отклонение зависимости $e(T)$ для *идеального газа* от линейной. В этом случае рационально применять линеаризованный вариант зависимости (1.5) — с постоянным значением теплоемкости, отвечающим данному интервалу температур, например, *средней теплоемкости* — $c_v|_{T_{\min}^{\max}}$. Гипотетический идеальный газ, у которого $c_v = \text{const}$, называется (*калорически*) *совершенным газом*, от англ. (*calorically*) *perfect gas*.

Обозначаем здесь и далее постоянное значение теплоемкости как c_v (в отличие от зависимости $c_v(T)$) и, учитывая произвольность отсчета абсолютного значения внутренней энергии e_0 , калорическое УС совершенного газа получаем из (1.5) в виде

$$e(T) = c_v T, \text{ где } c_v = \text{const}.$$

Так как закон Майера $R = c_p - c_v$ справедлив и в частном случае *совершенного газа*, при $c_v = \text{const}$ теплоемкость c_p также постоянна, поэтому постоянно и *отношение теплоемкостей*

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v}.$$

При умеренных (по крайней мере, до 1000 K) температурах приближенно принимают: для двухатомных газов и смесей $\gamma = 7/5 = 1,40$, для трех- и многоатомных — $\gamma \approx 1,25$. Для продуктов сгорания углеводородных топлив в выпускных трактах тепловых двигателей принимают $\gamma = 1,33 \dots 1,36$. Для *одноатомных* газов и их смесей (где практически не проявляются вращательные, и тем более колебательные, степени свободы) $\gamma = 5/3 \approx 1,67$.

С учетом этих значений и тождеств можно подсчитать и примерные значения удельных теплоемкостей. Так, $c_v = \frac{R}{\gamma-1}$, $c_p = c_v + R = \frac{\gamma R}{\gamma-1}$. Для воздуха, принимая $\gamma = 1,40$ и $R = 287,1 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{K})$, получим $c_v = 2,5R \approx 718 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{K})$, $c_p = c_v + R = 3,5R \approx 1005 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{K})$.

Капельные жидкости. В действительности все (однородные по составу и однофазные) жидкости и газы — *сжимаемые* среды, при этом их *плотность* ρ в той или иной мере зависит как от давления, так и от температуры. Повышение T при $p = \text{const}$ приводит к уменьшению ρ («температурное» расширение), при повышении p — в изотермическом ($T = \text{const}$), изоэнтропном ($s = \text{const}$) и др. процессах также повышается плотность ρ .

Тогда как УС идеального и совершенного газа имеют весьма простой вид (см. выше), для «капельных» жидкостей и реальных газов УС выражаются сложными полуэмпирическими зависимостями. «Капельные» жидкости обладают «жесткостью» в том смысле, что значительное повышение давления вызывает лишь малое приращение плотности, что учитывается полуэмпирическими зависимостями, служащими в качестве УС. Ограничимся здесь одним примером. Для воды и ряда других капельных жидкостей при высоких давлениях часто используют *уравнение состояния Тэта*

$$p = B(s) \left[\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^b - 1 \right]. \quad (1.6)$$

В этом уравнении B — слабо зависящая от энтропии s величина (обычно считают $B = \text{const}$), а ρ_0 — плотность жидкости, экстраполированная на нулевое давление (при больших p можно считать, что ρ_0 — плотность при нормальном давлении), b — эмпирический показатель степени. Значения коэффициентов для некоторых жидкостей приведены в табл. 1.1 (взято из [4]).

Таблица 1.1

Коэффициенты УС Тэта для ряда жидкостей

Жидкость	$B, \text{кгс/см}^2$	b	$\rho_0, \text{кг/м}^3$
Вода	3000	7,15	1000
Ртуть	3000	8,20	13500
Гептан	654	10,6	684

Для расчета течений с весьма малой скоростью в качестве УС капельной жидкости (или даже газа) часто задается слабая зависимость плотности от температуры T (но не от давления p); часто ограничивают-

ся соотношением вида

$$\rho(T) = \rho_0 [1 + \beta(T - T_0)], \quad (1.7)$$

где β — объемный коэффициент температурного расширения; такого вида УС в хорошем приближении позволяет оценить влияние температуры на плотность, чего достаточно, например, для описания медленного *свободно-конвективного* течения при $p \approx \text{const}$, вызванного эффектом *плавучести* в поле массовых сил при неравномерном подогреве жидкости.

Следует помнить, что при значительной «жесткости на сжатие» капельные жидкости не могут «держаться» пониженных давлений, при которых равновесным для них является двухфазное состояние — при некотором количестве выделившихся из жидкости растворенных газов и паров самой жидкости. Частицы жидкости в потоке, попадая в область существенного понижения давления, более или менее равновесно «вскипают»; это явление называется *кавитацией* — от латинского слова, обозначающего «каверна», «полость». Формально, при применении уравнений состояния вида (1.6) или вида (1.7), а также УС $p = \text{const}$, кавитация как явление не учитывается.

1.2.4. Несжимаемая жидкость

Если изменение плотности в потоке *сжимаемой* жидкости или газа не превышает единиц процентов⁵, фактор сжимаемости не влияет заметно на поля p , T , \mathbf{v} , траектории частиц, сопротивление и теплоотдачу. В этих условиях сжимаемостью сред при решении технических задач часто пренебрегают, используя *модель несжимаемой жидкости*.

Модель задается условием $\rho = \text{const}$ — простейшим из возможных УС, выражающим неизменность плотности ρ при любых изменениях p и T . Отсюда такая особенность модели несжимаемой жидкости, как бесконечная скорость распространения упругих возмущений⁶, что формально следует из выражения для скорости звука при $\rho = \text{const}$.

1.2.5. Жидкость с постоянными свойствами

Для приближенного выполнения $\rho \approx \text{const}$ в потоке сжимаемой жидкости или газа, помимо условия $M_{\max} \ll 1$, требуется также малая

⁵Так, для изоэнтропного потока газа с $\gamma = 1,4$ изменения плотности на 3% и выше возникнут при превышении величиной $M_{\max} = (|\mathbf{v}|/c)_{\max}$ значения $\approx 0,25$.

⁶Что, конечно, не исключает возможность постановки задач о нестационарном течении жидкости с $\rho = \text{const}$.

интенсивность локального тепловыделения и теплоотдачи от обтекаемых тел.

Тогда в потоке будут весьма мало изменяться *коэффициенты переноса*, в частности, *коэффициент вязкости* μ . Поэтому, принимая наряду с $\rho = \text{const}_1$ также $\mu = \text{const}_2$, получают еще более простую модель *жидкости с постоянными свойствами*.

В рамках этой модели жидкости искомые характеристики полей течения — $p = p(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ определяются совместным решением *уравнений переноса* в потоке, следующих только из ЗС массы и количества движения — т. е. уравнений, описывающих *механическую* составляющую течения — без привлечения *уравнения переноса энергии*.

При этом, если все же необходимо определить поле $T = T(\mathbf{r}, t)$, нужно привлечь уравнение переноса энергии и задать калорическое УС, в общем случае — вида (1.3), или вида $e(T) = c_v$ — если принято, что удельная теплоемкость $c_v = \text{const}_3$. При этом, если принять постоянным и *коэффициент теплопроводности* $\kappa = \text{const}_4$, запись уравнения энергии примет особенно простой вид.

При описании течения смеси переменного состава для расчета поля массовой доли примеси $Y_k = Y_k(\mathbf{r}, t)$ требуется решение соответствующих уравнений переноса, *коэффициент диффузии* D_k в которых можно во многих случаях принимать постоянным.

Скалярную величину (температуру T или массовую долю компонента Y_k и др.), пренебрежимо мало влияющую на распределения прочих характеристик потока, называют *пассивной примесью* (англ. *passive scalar*). Поле такой величины в потоке жидкости с постоянными свойствами может определяться решением соответствующего *уравнения переноса* на основе *предварительно* рассчитанного поля скорости.

1.2.6. Скорость звука

Плотность ρ реальных жидкостей и газов возрастает с увеличением давления в обратимом процессе (при $s = \text{const}$). Скорость возмущений малой амплитуды (*скорость звука*) определяется⁷ с учетом $p = p(\rho, s)$, где $s = s(\rho, T)$ — *удельная энтропия* [5]:

$$c = \sqrt{(\partial p / \partial \rho)_s}. \quad (1.8)$$

⁷Подстрочный индекс в (1.8) указывает на взятие производной при $s = \text{const}$.

1.3. Молекулярный перенос

В рамках принятой ГС явления переноса энергии и *количества движения* вследствие хаотического движения молекул — *процессы молекулярного переноса* — представляются в уравнениях МЖГ вспомогательными *феноменологическими моделями*.

Последние строятся на основе дополнительно принимаемых *гипотез*. Так, например, для большинства текучих вязких и теплопроводных сред (газов и жидкостей) в технических приложениях адекватна модель, в которой компоненты *вектора* \mathbf{q} и *тензора* Π''_{ij} , выражающие плотности потоков энергии и КД, обусловленные эффектами *молекулярного переноса*, определяются произведениями скалярных *коэффициентов переноса* и частных производных по пространственным координатам от соответствующей характеристики среды.

Такое описание (с применением упомянутых гипотез «градиентного» вида) обосновано положениями молекулярно-кинетической теории газов [3]. Здесь и далее процессы молекулярного переноса будут представлены только таким образом — с применением конкретных выражений, которые приведены ниже.

1.3.1. Модель вязкости: гипотеза Ньютона

Вязкость — свойство текучих сред сопротивляться деформации микрообъемов; одно из проявлений молекулярного переноса.

Предположение (гипотеза) о линейной связи обусловленного *вязкостью* жидкости касательного напряжения τ_{xy} (в «сдвиговом» течении, т. е. таком, где продольная компонента скорости u_x существенно изменяется лишь в поперечном направлении y , см. рис. 1.2) с производной от скорости потока du_x/dy выдвинуто впервые И. Ньютоном:

$$\tau_{xy} = -\mu \frac{du_x}{dy} = -\Pi''_{12}, \quad (1.9)$$

где μ — коэффициент вязкости жидкости или газа, введенный в рамках указанной гипотезы, $u_x = u_x(y)$ — распределение скорости в «сдвиговом» течении, τ_{xy} — величина касательного напряжения: плотность потока *количества движения* (x -компоненты КД) в направлении y .

Гипотеза Ньютона (1.9) обобщается на случай векторного поля скорости $\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k}$ общего вида в потоке ньютоновской жидкости следующим выражением [5, 6, 7]:

$$\Pi''_{ij} = \mu \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_m}{\partial x_m} \right], \quad (1.10)$$

где Π''_{ij} — компоненты тензора «вязких», т. е. дополнительных напряжений, обусловленных эффектом молекулярной вязкости.

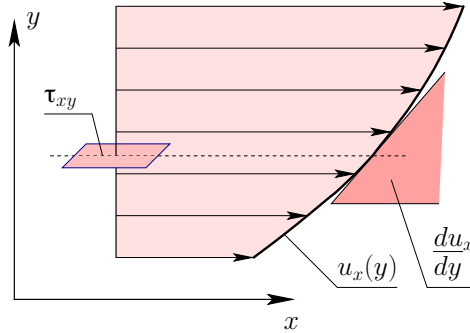


Рис. 1.2. К гипотезе Ньютона

Жидкости, для которых применимо указанное предположение, именуются *ньютоновскими жидкостями*.

Коэффициент вязкости μ в (1.9) или (1.10) — скалярная величина, не зависящая от частных производных от компонент скорости $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$, а определяемая в общем случае параметрами состояния среды в данной точке, например

$$\mu = \mu(\rho, T). \quad (1.11)$$

Для идеальных газов справедлива температурная зависимость

$$\mu = \mu(T).$$

Для разных газов в широком интервале температур коэффициент вязкости μ может задаваться *формулой Сазерленда*:

$$\mu = \mu(T) = \mu_0 \left(\frac{T}{273} \right)^{1,5} \frac{273 + C}{T + C}, \quad (1.12)$$

где, например, для воздуха $\mu_0 = 1,72 \cdot 10^{-5} \text{ Па} \cdot \text{с}$, $C = 122 \text{ К}$ [6], или приближенной степенной формулой, справедливой для меньших значе-

ний температуры $T < T_{\max}$:

$$\mu = \mu_0 \left(\frac{T}{273} \right)^\omega, \quad (1.13)$$

где, например, для воздуха $\omega = 0,76$ и $T_{\max} \approx 800 \text{ K}$.

Число Рейнольдса. Безразмерная величина вида степенного одночлена (безразмерной комбинация или «комплекса») из характерных плотности и k -та вязкости среды, а также скорости потока и линейного размера системы

$$\text{Re} = \frac{\rho u L}{\mu}$$

носит название *числа Рейнольдса*. Эту величину можно интерпретировать как характерный и безразмерный k -т вязкости в задаче.

1.3.2. Модель теплопроводности: гипотеза Фурье

Теплопроводность — свойство тел и сред проводить энергию (теплоту) от более нагретых микрообъемов к менее нагретым; проявление молекулярного переноса (т. е., результат хаотического движения атомов, молекул и т. п.).

Вектор плотности кондуктивного потока теплоты \mathbf{q} чаще всего приближенно описывается феноменологическим *законом Фурье* (англ. *Fourier's law*, рис. 1.3):

$$\mathbf{q} = -\kappa \text{grad } T. \quad (1.14)$$

Коэффициент теплопроводности. В (1.14) скалярная величина κ — *коэффициент теплопроводности*, не зависящая от компонент $\frac{\partial T}{\partial x_j}$ градиента температуры. В рамках принятых нами *исходных гипотез* κ зависит только от локальных значений параметров состояния среды и может задаваться зависимостью вида УС, например

$$\kappa = \kappa(\rho, T), \quad (1.15)$$

теоретическое определение которой для данной среды — сложная самостоятельная задача.

Для идеальных газов справедлива температурная зависимость

$$\kappa = \kappa(T).$$

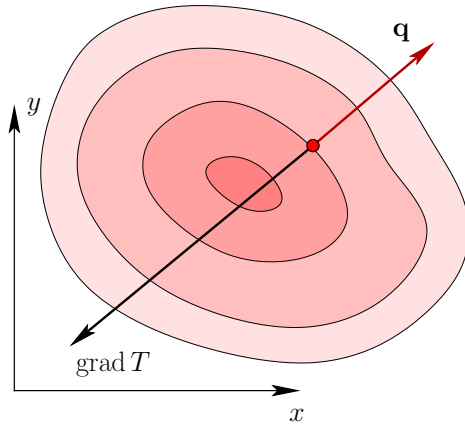


Рис. 1.3. К закону Фурье

Как и в случае коэффициента вязкости μ , коэффициент теплопроводности газов κ возрастает с увеличением температуры T .

Число Прандтля. В приложениях важна связь между величинами μ , κ и c_p . Безразмерная комбинация этих характеристик среды в точке

$$\text{Pr} = \frac{\mu c_p}{\kappa}$$

носит название *числа Прандтля*. Величина Pr , вообще говоря, зависит от состава и параметров состояния смеси, но в простейших случаях ее принимают зависящей только от T или даже считают постоянной, что особенно оправданно для газов. Для двухатомных газов и их смесей при умеренных температурах принимается $\text{Pr} = 0,72$.

1.3.3. Модель диффузии: гипотеза Фика

Для описания влияния неоднородностей состава на течение жидкости или газа в систему уравнений добавляют уравнения переноса массы индивидуальных компонентов смеси. В число независимых переменных добавляются массовые доли компонентов Y_k , а вектор плотности диффузионного потока массы компонента \mathbf{j}_k чаще всего приближенно описывается феноменологическим *законом Фика* (англ. *Fick's law*, рис. 1.4):

$$\mathbf{j}_k = -\rho D_k \text{grad } Y_k. \quad (1.16)$$

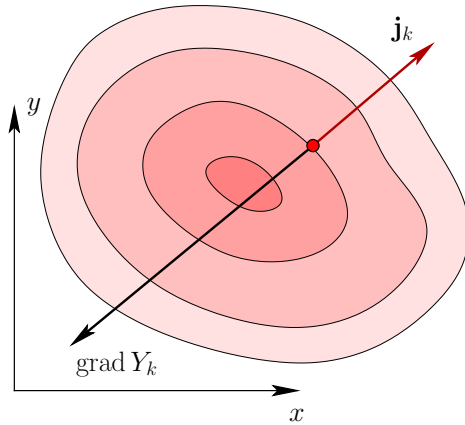


Рис. 1.4. К закону Фика

Коэффициент диффузии. В (1.16) скалярная величина D_k — коэффициент диффузии, не зависящая от компонент $\frac{\partial Y_k}{\partial x_j}$ градиента массовой доли вещества. В рамках принятых гипотез D_k зависит только от локальных значений параметров состояния среды и может задаваться в общем случае зависимостью вида

$$D_k = D_k(\rho, T, Y_1, \dots, Y_{K-1}), \quad (1.17)$$

при этом аналогично обобщаются зависимости (1.11) и (1.15).

В простейших случаях ни плотность, ни величины массовых долей компонентов не влияют заметно на коэффициент диффузии, и тогда

$$D_k = D_k(T) \quad \text{или даже} \quad D_k = \text{const.}$$

Как и коэффициенты вязкости μ и теплопроводности κ , коэффициент диффузии D_k компонента газовой смеси возрастает с температурой T .

Число Шмидта. Безразмерная комбинация

$$\text{Sc}_k = \frac{\mu}{\rho D_k}$$

носит название *числа Шмидта*. Величины Sc_k , вообще говоря, зависят от состава и двух параметров состояния смеси, но в конкретных задачах

можно принять их зависящими только от T или даже считать постоянными (для не очень больших температур); можно также (для смесей газов, мало отличающихся по молярным массам W_k) считать их одинаковыми для всех K компонентов.

Так, для смесей двухатомных газов с близкими по значениям W_k и при умеренных температурах можно принять

$$Sc_k = 0,72 \text{ для } k = 1, \dots, K.$$

2. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В данном разделе дается вывод наиболее общих для МЖГ *законов сохранения*, из которых далее выводятся [4, 6, 8] основные дифференциальные уравнения — путем замыкания уравнений конкретными моделями среды — такими как *уравнения состояния* и модели явлений *молекулярного переноса*.

Приводятся полезные для приложений частные формы уравнений.

Исходные гипотезы МЖГ и модели жидкости обсуждались в гл. 1 данного пособия.

2.1. Законы сохранения при пространственном течении

Получим *законы сохранения* (ЗС) для описания общего вида течений жидкости как *сплошной среды*.

Введем произвольный воображаемый контрольный объем V , ограниченный замкнутой поверхностью F (рис. 2.1).

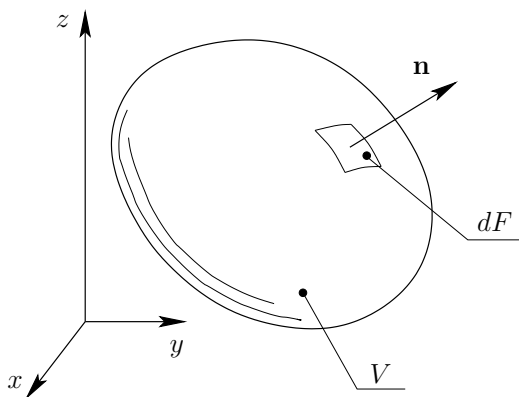


Рис. 2.1. К выводу интегральных законов сохранения

Жидкость в общем случае будем считать сжимаемой, а течение — неустановившимся во времени, т. е. поля характеристик жидкости — зависящими в общем случае от x , y , z и t . В своей исходной (*интегральной*) форме эти ЗС не требуют гладкости (дифференцируемости) искомых функций ρ , \mathbf{v} , p и т. д. и применимы к описанию течений кусочно-гладкими распределениями искомых функций.

2.1.1. Закон сохранения массы

Закон сохранения массы в интегральной форме имеет вид условия баланса для потока массы, протекающей через поверхность F контрольного объема V . Действительно, в каждой точке этой поверхности *плотность потока массы* — произведение $\rho \mathbf{v}$ (векторная величина). Проекция $\rho \mathbf{v}$ на *внешнюю нормаль* \mathbf{n} к элементу поверхности dF , умноженная на его площадь, дает секундный поток массы (т. е. *массовый расход*) через элемент контрольной поверхности dF в направлении наружу из контрольного объема

$$dG = (\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dF,$$

где $\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ — *скалярное произведение* указанных векторов. Текущая величина полного потока (расхода) массы через поверхность F определяется интегралом

$$G = \int_F dG = \int_F (\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dF$$

по этой замкнутой поверхности. Текущее значение G выражает быстроту убывания (если $G \geq 0$) заключенной в V массы m с течением времени:

$$\frac{d}{dt} \left(m = \int_V \rho dV \right) = -G.$$

Условие сохранения массы жидкости для произвольного контрольного объема V с учетом ее потока через поверхность F (рис. 2.1) выражается уравнением

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = - \int_F (\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dF. \quad (2.1)$$

Уравнение (2.1) — *закон сохранения массы* в интегральной форме. Преобразуя интеграл по поверхности в (2.1) в интеграл по объему по формуле Остроградского — Гаусса

$$\int_F (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) dF = \int_V \operatorname{div} \mathbf{a} dV,$$

где в данном случае $\mathbf{a} = \rho \mathbf{v}$, и изменяя порядок интегрирования и дифференцирования в левой части (2.1), получим равенство

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} \right) dV = 0. \quad (2.2)$$

Отметим, что применимость (2.2) ограничена подобластями, где ρ , а также векторный аргумент операции $\operatorname{div} \rho \mathbf{v}$ — гладкие (дифференцируемые) функции. Дифференцируемость $\rho \mathbf{v}$ (и других искомых функций) обеспечивается при учете в уравнениях МЖГ молекулярных эффектов *вязкости* и *теплопроводности*, которые препятствуют образованию разрывов искомых функций.

Модель невязкой и нетеплопроводной сжимаемой жидкости допускает решения и с разрывами искомых функций. Поэтому отметим то обстоятельство, что форма записи (2.2) ЗС массы (и ее следствия) — эквивалентны (2.1) только *в подобластях гладкости* искомых функций. Также и дифференциальные уравнения, выражающие сохранение количества движения и энергии (см. далее), эквивалентны исходным (интегральным) ЗС только в подобластях гладкости искомых функций.

В силу произвольности контрольного объема V (рис. 2.1) условием, при котором выполняется равенство (2.2), будет равенство нулю подынтегрального выражения, из чего следует

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0. \quad (2.3)$$

Уравнение в частных производных (2.3) — *закон сохранения массы*, записанный в *дифференциальной* форме.

Как и уравнения (2.1) и (2.2), уравнение (2.3) выражает тот факт, что масса жидкости, заключенной в (конечном или бесконечно малом) объеме, изменяется из-за переноса массы при пересечении жидкостью поверхности объема.

С применением *тензорных обозначений*, в которых дивергенция вектора

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial a_j}{\partial x_j}$$

обозначается *без символа суммы*: $\frac{\partial a_j}{\partial x_j}$ (как и любая сумма одночленов с двумя повторяющимися индексами), получим *тензорную форму* записи того же закона сохранения массы:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} = 0. \quad (2.4)$$

Наконец, в развернутом виде (в проекциях $\rho\mathbf{v}$ на оси координат) уравнение сохранения массы примет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0. \quad (2.5)$$

2.1.2. Закон сохранения количества движения

Объемная плотность *количества движения* (КД) выражается¹ произведением $\rho\mathbf{v}$. Закон сохранения КД в интегральной форме — условие баланса КД для контрольного объема V . КД выражается интегралом

$$\int_V \rho\mathbf{v} dV.$$

Возрастание или убывание КД внутри объема V — следствие переноса КД, во-первых, потоком массы частиц жидкости, пересекающих поверхность F объема, а во-вторых — потоком импульса *поверхностных сил* через эту границу² и, в-третьих, под действием сил объемного характера («массовых» сил), приложенных к частицам в объеме V .

Поверхностная плотность потока КД в тензорных обозначениях есть

$$\Pi_{ij} = \rho u_i u_j - \Pi'_{ij},$$

где $\rho u_i u_j$ — конвективная составляющая *тензора плотности потока КД*, Π'_{ij} — тензор напряжений, который обычно выражают как

$$\Pi'_{ij} = -p\delta_{ij} + \Pi''_{ij}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases},$$

где p — давление; Π''_{ij} — тензор «вязких» напряжений.

Для многих используемых в технике жидкостей, а также для газов и их смесей, компоненты тензора Π''_{ij} выражают с помощью закона (1.10) — *обобщенной гипотезы Ньютона* для вязкости среды (см. с. 22). Приведем здесь для справки соответствующее выражение

¹Как и поверхностная плотность потока массы.

²Плотность потока КД, как мы знаем, должна выражаться тензорной величиной (т. е. тензором второго ранга, при том что вектор — тензор первого ранга, а скаляр — нулевого).

для прямоугольной системы координат:

$$\Pi''_{ij} = \begin{pmatrix} \Pi''_{xx} & \Pi''_{xy} & \Pi''_{xz} \\ \Pi''_{yx} & \Pi''_{yy} & \Pi''_{yz} \\ \Pi''_{zx} & \Pi''_{zy} & \Pi''_{zz} \end{pmatrix} = \mu \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_m}{\partial x_m} \right].$$

Объемная плотность массовой силы — $\rho \mathbf{g}$, где \mathbf{g} — локальная величина ускорения этой силы. Массовая сила может представлять собой силу *гравитационную* или сумму ее с силой инерции (например, центробежной силы) — при описании течения жидкости в системе координат, движущейся относительно инерциальной системы отсчета.

Закон сохранения КД с учетом действия массовых сил в интегральной форме записи принимает вид

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{v} dV = - \int_F (\Pi_{ij})_n dF + \int_V \rho \mathbf{g} dV. \quad (2.6)$$

Преобразуя интеграл по поверхности в (2.6) в интеграл по объему, получим

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{v} dV = - \int_V \text{Div } \Pi_{ij} dF + \int_V \rho \mathbf{g} dV, \quad (2.7)$$

а с учетом произвольности контрольного объема V запишем одну из *дифференциальных* форм записи («дивергентную» форму) закона сохранения количества движения:

$$\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \text{Div } \Pi_{ij} = \rho \mathbf{g}. \quad (2.8)$$

В (2.7) и (2.8) $\text{Div } \Pi_{ij}$ — операция *дивергенции тензора*

$$\text{Div } \Pi_{ij} = \left\{ \frac{\partial \Pi_{j1}}{\partial x_j}, \frac{\partial \Pi_{j2}}{\partial x_j}, \frac{\partial \Pi_{j3}}{\partial x_j} \right\}^T.$$

Пользуясь этим определением и выписывая отдельно «вязкие» напряжения, получим тензорную форму записи уравнения сохранения КД:

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j u_i + \delta_{ij} p) = \frac{\partial \Pi''_{ji}}{\partial x_j} + \rho g_i, \quad (2.9)$$

или, в проекциях на оси прямоугольной системы координат:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2 + p) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v u) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w u) = \\ = \frac{\partial \Pi''_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \Pi''_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \Pi''_{zx}}{\partial z} + \rho g_x, \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u v) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v^2 + p) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w v) = \\ = \frac{\partial \Pi''_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \Pi''_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \Pi''_{zy}}{\partial z} + \rho g_y, \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u w) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v w) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w^2 + p) = \\ = \frac{\partial \Pi''_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \Pi''_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \Pi''_{zz}}{\partial z} + \rho g_z. \end{aligned} \quad (2.12)$$

2.1.3. Закон сохранения энергии

Получим этот ЗС, определив объемную плотность (в Дж/м³) *полной энергии* как сумму объемных плотностей *внутренней* и *кинетической* энергии жидкости:

$$\rho E = \rho e + \rho \frac{|\mathbf{v}|^2}{2}.$$

Поверхностная *плотность потока энергии* — векторная величина, выражаемая суммой

$$\rho \mathbf{v} e + \rho \mathbf{v} \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} + p \mathbf{v} + \mathbf{q} - \mathbf{v} \cdot \Pi''_{ij} = \rho \mathbf{v} \left(h + \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} \right) + \mathbf{q} - \mathbf{v} \cdot \Pi''_{ij},$$

где в левой части представлены соответственно эффекты: конвективного переноса внутренней и кинетической энергии смеси, работы поверхностных сил давления («работы проталкивания»), кондуктивного теплового потока \mathbf{q} и работы «вязких» напряжений. Плотность потока \mathbf{q} может задаваться с помощью феноменологического закона *Фурье* (1.14) для теплопроводности (см. с. 23).

Если массовые силы существенны и учитываются в ЗС количества движения, следует учесть совершаемую ими работу и в ЗС энергии. Объемная мощность работы массовых сил есть $\rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{g})$. С учетом сказанного закон сохранения энергии в интегральной форме принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \rho E dV = - \int_F \left[\rho \mathbf{v} \left(h + \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} \right) + \mathbf{q} - \mathbf{v} \cdot \Pi''_{ij} \right] \cdot \mathbf{n} dF + \\ + \int_V \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{g}) dV. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Дифференциальная («дивергентная») форма ЗС энергии примет вид

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \operatorname{div} \left[\rho \mathbf{v} \left(h + \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} \right) + \mathbf{q} - \mathbf{v} \cdot \Pi''_{ij} \right] = \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{g}). \quad (2.14)$$

В тензорной нотации, обозначая удельную полную энтальпию (энтальпию стационарного торможения) как $h^* = h + |\mathbf{v}|^2/2$, имеем

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j h^* + q_j - u_j \Pi''_{ij}) = \rho u_j g_j. \quad (2.15)$$

В развернутом виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u h^* + q_x - u \Pi''_{xx} - v \Pi''_{yx} - w \Pi''_{zx}) + \\ + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v h^* + q_y - u \Pi''_{xy} - v \Pi''_{yy} - w \Pi''_{zy}) + \\ + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w h^* + q_z - u \Pi''_{xz} - v \Pi''_{yz} - w \Pi''_{zz}) = \rho (u g_x + v g_y + w g_z). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Выведенные выше законы сохранения массы, количества движения и энергии имеют вид системы условий, налагаемых на движение жидкости, модель которой обсуждалась выше. Так, система (2.5), (2.10) – (2.12) и (2.16) есть система уравнений с частными производными (УЧП), справедливая для пространственного нестационарного течения однородной жидкости, в подобластях гладкости искомым функций. Система уравнений (2.1), (2.7) и (2.13) справедлива также для разрывных решений задач МЖГ, в силу чего является и более общей.

2.1.4. О замыкании уравнений моделей МЖГ

Выведенные выше уравнения в принципе выражают в довольно общем виде ЗС, которые должны соблюдаться в рамках двух исходных гипотез МЖГ. Эти ЗС служат для получения модельных уравнений, справедливых в рамках частных предположений, принимаемых в разных разделах МЖГ.

Для этого нужно *замкнуть* исходные уравнения — т. е. сделать так, чтобы число неизвестных величин в них совпало с числом уравнений.

Для этого систему УЧП модели течения дополняют *уравнениями состояния*. Как обсуждалось в п. 1.2 (с. 15), вообще говоря, требуются два независимых УС — *термическое* вида (1.1) и *калорическое* вида (1.2).

Также величины, выражающие потоки от процессов *молекулярного переноса*, в ЗС подставляются через соответствующие феноменологические «законы», наиболее распространенный вид которых был приведен в гл. 1. Коэффициенты молекулярного переноса в них также вычисляются по соотношениям вида УС. Получаемые после такого «замыкания» ЗС уравнения, как правило, по-прежнему составляют систему УЧП.

Например, *уравнения Навье – Стокса* (УНС) получают, замыкая ЗС (общие для *деформируемой сплошной среды*) известными выражениями компонентов тензора «вязких» напряжений Π''_{ij} и вектора теплового потока \mathbf{q} (с. 22 и далее). После чего в этой системе из 5 УЧП в роли неизвестных выступают 9 искомым величин — функций координат и времени: $\rho = \rho(\mathbf{r}, t)$, $v_i = v_i(\mathbf{r}, t)$, $i = 1, 2, 3$, $p = p(\mathbf{r}, t)$, $T = T(\mathbf{r}, t)$, $e = e(\mathbf{r}, t)$, $\mu = \mu(\mathbf{r}, t)$ и $\kappa = \kappa(\mathbf{r}, t)$.

С привлечением двух УС для однородной среды — термического $p = p(\rho, T)$ и калорического $e = e(\rho, T)$ — и двух зависимостей для определения μ и κ система УНС становится замкнутой частной моделью для решения задач (с конкретными *условиями однозначности*) о течении сжимаемых *ньютоновских жидкостей*.

2.2. Основные уравнения конкретных моделей МЖГ

Уравнения Навье – Стокса, как система УЧП (2.5), (2.10) – (2.12) и (2.16), дополненная уравнениями состояния $e = e(\rho, T)$, $p = p(\rho, T)$, $\mu = \mu(\rho, T)$ и $\kappa = \kappa(\rho, T)$, служат основой для описания произволь-

ных — установившихся и нестационарных, ламинарных и турбулентных пространственных течений вязкой по (1.10) («ньютоновской») и теплопроводной по (1.14) сжимаемой жидкости.

Напомним, что данные уравнения были получены выше как следствия законов сохранения в интегральной форме, посредством замыкания указанных соотношений для сплошной среды гипотезами частного вида относительно характера процессов молекулярного переноса.

Уравнения модели для реагирующей многокомпонентной газовой смеси (более общей, чем УНС, см. п. 9.2) в данном пособии полностью не приводятся (см. [26, 29, 30]).

Ниже обсуждаются конкретные частные системы *модельных уравнений*:

- уравнения Эйлера — модель невязкой нетеплопроводной сжимаемой жидкости (п. 2.2.1);
- уравнения Навье — Стокса (УНС) для частного случая $\rho = \text{const}_1$ и $\mu = \text{const}_2$ — наиболее простая модель течения вязкой жидкости (п. 2.2.2).

2.2.1. Уравнения Эйлера

Уравнения Эйлера получим, отбрасывая в уравнениях Навье — Стокса члены с вязкостью ($\Pi''_{ij} \equiv 0$) и теплопроводностью ($\mathbf{q} \equiv 0$), или же полагая в них $\mu = 0$ и $\kappa = 0$.

Для наглядности приведем вид уравнений Эйлера в дивергентной форме:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) &= 0, \\ \frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \text{Div}(\rho u_i u_j + \delta_{ij} p) &= \rho \mathbf{g}, \\ \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v} E + p \mathbf{v}) &= \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{g}). \end{aligned} \quad (2.17)$$

В согласии с данной моделью течения индивидуальная частица жидкости в потоке (без скачков уплотнения) претерпевает *адиабатный изоэнтропный* (обратимый) процесс. При задании однородных граничных условий втекания расчет по уравнениям Эйлера *в принципе* должен давать картину потенциального течения.

Система уравнений (4.1) — нелинейная система связанных УЧП гиперболического типа первого порядка по времени и по пространственным координатам.

Следует соблюдать осторожность, получая численными расчетами по уравнениям Эйлера решения газодинамических задач, содержащих разрывы параметров решения — скачки уплотнения, контактные разрывы, слабые разрывы (разрывы производных искомых функций). Формально система (4.1) теряет смысл на разрывах зависимых переменных. Фактически же любой консервативный численный метод, полученный в рамках подхода МКО, аппроксимирует на конечно-объемной сетке уравнения в интегральной форме. Последние обладают бóльшей общностью, так как не требуют дифференцируемости искомых функций.

Уравнения Эйлера в развернутом виде запишем — для простоты применительно к пространственно одномерным искомым функциям — $\rho = \rho(x, t)$, $\mathbf{v}(x, t) = u(x, t)\mathbf{i}$, $p = p(\mathbf{r}, t)$, $T = T(\mathbf{r}, t)$ и др., а также полю ускорения массовой силы $\mathbf{g}(x, t) = g(x, t)\mathbf{i}$ — как систему

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^2 + p)}{\partial x} &= \rho g, \\ \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u E + pu)}{\partial x} &= \rho u g. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Если не учитывать массовые силы, получается система уравнений, описывающая плоское нестационарное движение однородной сжимаемой жидкости или газа (формально справедливая, как мы помним, в подобластях гладкости искомых функций); она записывается в символической «векторной» форме

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_x}{\partial x} = 0, \quad (2.19)$$

где $\mathbf{U} = [\rho, \rho u, \rho E]^T$ и $\mathbf{F}_x = [\rho u, \rho u^2 + p, \rho u E + pu]^T$.

В заключение преобразуем второе уравнение системы (2.18) — уравнение сохранения количества движения. Для этого нужно преобразовать первые два уравнения системы (2.18), используя формулу производной произведения, и преобразовать 2-е уравнение, подставив туда 1-е уравнение (рекомендуется проделать это в качестве упражнения).

Получим *уравнение движения*

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x \quad (2.20)$$

как преобразованное к «неконсервативной» форме выражение закона сохранения КД, из которой, однако, ясно виден физический смысл уравнения движения индивидуального объема среды — «жидкой частицы» — как уравнения ее динамики в поле массовых и поверхностных сил.

В случае пространственного движения показанная операция дает векторное уравнение движения

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} \right) = -\text{grad } p + \rho \mathbf{g}. \quad (2.21)$$

Уравнение движения идеальной (невязкой) жидкости вида (4.4) получил (без учета массовых сил) в 1755 г. Л. Эйлер (*L. Euler*). В левой части уравнения — полная производная скорости индивидуальной частицы жидкости (субстанциональная производная), в правой части — причина этого изменения: локальная неравномерность поля гидродинамического давления p и действие массовой силы с ускорением \mathbf{g} (в гравитационных и др. силовых полях и при неинерциальности системы отсчета). Очевидно теперь, что уравнение движения в МЖГ является обобщением закона движения материальной точки для классической механики на случай элемента движущейся *сплошной среды*.

2.2.2. Уравнения Навье – Стокса для жидкости с постоянными свойствами

Динамику несжимаемой ($\rho = \text{const}_1$) *ньютоновской жидкости* с также постоянным (не зависящим от плотности ρ и температуры T) коэффициентом вязкости ($\mu = \text{const}_2$) описывает модель, опирающаяся на соответственно упрощенные уравнения Навье – Стокса. Задаваемую таким образом (предельно простую) модель вязкой жидкости именуют моделью *жидкости с постоянными свойствами*.

Примечательно, что для описания динамики такой жидкости привлекать уравнение энергии не требуется, искомыми функциями задачи являются векторное поле скорости $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ и поле давления в потоке $p(\mathbf{r}, t)$. Они определяются из совместно учитываемых ЗС массы и ко-

личества движения, которые имеют при $\rho = \text{const}_1$ и $\mu = \text{const}_2$ частный вид связанных *уравнения неразрывности* и *уравнения движения* (см. ниже).

Если все же предполагается рассчитывать перенос энергии и/или некоторой примеси в потоке жидкости с постоянными свойствами, то эта задача решается с привлечением соответствующего уравнения переноса по уже найденному полю скорости $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$. Именно в силу того, что в модели отсутствует механизм влияния температуры или концентрации примеси на свойства такой жидкости, уравнения переноса, служащие для расчета поля температуры $T(\mathbf{r}, t)$ или массовой доли компонента $Y_k(\mathbf{r}, t)$, решаются как уравнения переноса *пассивной примеси*.

Из ЗС массы в форме (2.3) при $\rho = \text{const}$ непосредственно следует

$$\text{div } \mathbf{v} = 0, \text{ или } \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \text{ или } \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0. \quad (2.22)$$

Уравнение (2.22) — *уравнение неразрывности*, имеющее в динамике несжимаемой жидкости смысл условия постоянства объема индивидуальной жидкой частицы при ее движении.

Действительно, вращение частицы вокруг мгновенного центра вращения не сопровождается изменением объема, а, напротив, растяжение и сжатие (воображаемой «элементарной» частицы, исходно взятой в форме прямоугольного параллелепипеда) выражается членами $\frac{\partial v_j}{\partial x_j}$ для каждого координатного направления. Из (2.22) следует, что скорости этих деформаций частицы согласованы условием неизменности ее объема. Подробно *кинематика жидкости* изложена в [7].

Эквивалентная (1.10) форма записи тензора «вязких» напряжений в *ньютоновской жидкости* есть

$$\Pi''_{ij} = 2\mu S_{ij} - \frac{2}{3}\mu\delta_{ij}\text{div } \mathbf{v},$$

она раскрывает связь Π''_{ij} с компонентами *тензора скоростей деформации* S_{ij} :

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} & 2\frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} & 2\frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

Тензор S_{ij} характеризует скорость деформирования частиц; компоненты на главной диагонали «отвечают» за скорость растяжения/сжатия частиц, прочие — за скорость их вращения. Данный вид S_{ij} справедлив как для постоянной, так и для переменной плотности.

Для несжимаемой жидкости (где $\operatorname{div} \mathbf{v} \equiv 0$) тензор «вязких» напряжений имеет вид

$$\Pi''_{ij} = 2\mu S_{ij}.$$

Таким образом, уравнения (2.5) и (2.10), выражающие законы сохранения массы и количества движения, применительно к ньютоновской жидкости с постоянными свойствами можно существенно упростить (рекомендуется проделать это в качестве упражнения). В результате первое уравнение принимает вид (2.22), а второе, записанное в векторной форме —

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\operatorname{grad} p + \mu \Delta \mathbf{v} + \rho \mathbf{g}, \quad (2.23)$$

имеет тот же смысл *уравнения движения*, что и уравнение (4.4), и отличается от последнего только наличием «вязкого» члена, который делает векторное УЧП (2.23) уравнением *второго порядка* по пространственным переменным.

Если уравнение (2.23) разделить на $\rho = \operatorname{const}_1$ и обозначить в нем $\nu = \mu/\rho = \operatorname{const}_3$ («кинематический» коэффициент вязкости, измеряется в m^2/c), получится

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{g}. \quad (2.24)$$

Уравнение (5.3) было впервые (без учета массовых сил \mathbf{g}) выведено Навье в 1827 г. (*C. L. Navier*). Вывод уравнений движения вязкой жидкости, близкий к современному, впервые (см. [5]) выполнен в 1845 г. Стоксом (*G. G. Stokes*); в варианте для $\rho \neq \operatorname{const}_1$:

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\operatorname{grad} p + \mu \Delta \mathbf{v} + \frac{\mu}{3} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v}. \quad (2.25)$$

Строго говоря, векторное уравнение (5.2) и было названо в честь этих ученых. Однако в технической литературе наименование «уравнения Навье — Стокса» закрепилось за полной системой (2.5),

(2.10) – (2.12) и (2.16), т. е. с включенными в систему уравнениями переноса массы и энергии.

Описание течений вязких капельных жидкостей с малыми вариациями температуры и газов по модели несжимаемой жидкости является совершенно оправданным; (с малыми *числами Маха* — до $M \approx 0,25$ в потоке газа) при этом к минимуму сводятся количество решаемых совместно уравнений модели и набор физических взаимодействий. Результаты расчетов и экспериментов в таком режиме течения могут представляться [9, 10, 2] зависимостями для безразмерных определяемых параметров — коэффициентов сопротивления C_x , ζ , локальных характеристик потока $u(x/x_L, \dots)/u_\infty$ и т. п. — от числа Re .

2.3. Начальные и граничные условия

Для однозначного решения задачи, описываемой системой УНС (или другой системой модельных уравнений МЖГ), необходимо задать ее исходные данные, содержащие все необходимые *условия однозначности*, которыми данная задача выделяется из класса задач.

Среди условий однозначности (помимо параметров УС жидкости и геометрических очертаний расчетной области) должны быть заданы еще *начальные условия* (НУ) и *граничные условия* (ГУ).

НУ суть начальные (при $t = t_0$) распределения внутри расчетной области зависимых переменных (искомых характеристик потока). Как минимум, необходимо задать два независимых *параметра состояния* среды, например $p = p(\mathbf{r}, t_0)$ и $T = T(\mathbf{r}, t_0)$ и компоненты *скорости* $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t_0)$. НУ как таковые важны для нестационарных задач, для расчета же установившихся течений они играют роль *начального приближения*. Число произвольно задаваемых в НУ полей независимых *скалярных величин* равно числу УЧП модели.

В расчетах по уравнениям Эйлера или Навье–Стокса по заданным в НУ начальным распределениям («первичных») зависимых переменных

$$[p, T, v_x, v_y, v_z]^T = \mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{r}, t_0)$$

могут быть с применением УС вычислены распределения «консервативных» переменных (плотностей сохраняющихся величин), которыми и задаются НУ в расчетных ячейках при применении численных *методов конечных объемов* (МКО).

При расчетах турбулентных течений в систему УЧП прикладной модели бывают включены *уравнения переноса* специфических характеристик турбулентности (например, k и ε), то их начальные распределения $k = k(\mathbf{r}, t_0)$ и $\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{r}, t_0)$ также должны быть заданы в НУ.

ГУ — условия, задаваемые на границе расчетной области (при $t > t_0$) — $\varphi_{\Gamma}(\mathbf{r}, t)$ — в основном, на поверхностях обтекаемых тел и на «свободных» границах, пересекаемых потоком жидкости. При расчетах непосредственно по УНС задание на твердой поверхности ГУ $\mathbf{v}_{\Gamma} \equiv 0$ выражает ее непроницаемость и «прилипание» к ней частиц жидкости. Течение жидкости с переменными свойствами зависит также от ГУ, определяющего условия теплоотдачи. Так, постановка для уравнения энергии граничного условия I рода — использование известного распределения температуры на поверхности стенки: $T_{\Gamma} = T_{\Gamma}(\mathbf{r}, t)$.

При включении в систему УЧП — уравнений переноса для характеристик турбулентности (таких как k и ε) также необходимо задать соответствующие ГУ.

Уравнения Эйлера (см. п. 2.2.1) модели невязкой и нетеплопроводной жидкости получаются из УНС при $\mu = \kappa = 0$. При решении задач по ним вместо ГУ «прилипания» на твердой поверхности задаются ГУ «непротекания» (или «скольжения»): $(\mathbf{v})_n \equiv 0$, а ГУ для уравнения энергии выражают условия адиабатности — $(\mathbf{q})_n = 0$ или же $(\partial T / \partial n)_n = 0$.

ГУ, задаваемые на «свободной» границе, более разнообразны; в основном встречаются ГУ, задающие *втекание, вытекание, копирование изнутри области, условия периодичности, вытекание с неотражением возмущений*. Простейший способ постановки ГУ *втекания* — задание однородного поля всех параметров потока в сечении, достаточно удаленном от обтекаемого тела или от интересующего участка канала.

Задание ГУ на «свободной» границе наталкивается на противоречие между произвольным в общем случае характером задаваемых ГУ и специфическими требованиями, налагаемыми самими УЧП, справедливыми внутри расчетной области. Учет данных требований при задании ГУ (особенно для модели вязкого дозвукового течения) часто делает понятие «свободной» границы условным, позволяя считать таковой границу, удаленную на «бесконечность» от обтекаемого тела (задачи внеш-

него обтекания) или от интересующего участка (задачи расчета внутренних течений).

При численных расчетах *турбулентных течений* с выделением вихревой структуры необходимо учитывать в ГУ соотношения, адекватные соотношениям для завихренного потока. Последнее нелегко осуществить (особенно для ГУ *втекания*), что заставляет удалять свободные границы от интересующего участка для снижения влияния произвольности в задании ГУ и делает привлекательным использование *периодических* ГУ.

В расчетах по модели сжимаемой невязкой и нетеплопроводной среды — описываемой уравнениями Эйлера (а это система УЧП первого порядка гиперболического типа) — при постановке ГУ определенного вида на свободных границах необходимо учитывать ограничения (пп. 8.2) на количество произвольно задаваемых в ГУ независимых параметров.

2.4. Законы сохранения в «квазиодномерном» приближении

Часто геометрические очертания расчетной области представляют системой, состоящей из элементов типа *емкостей* и *каналов*, описывая течение газа или жидкости на участках каналов в так называемом «квазиодномерном» приближении. При этом изменение искомым параметров потока: $\rho_k(x, t)$, $k = 1, \dots, K$, $\rho = \rho(x, t)$, $u = u(x, t)$ и т. д., рассматривается в пространстве двух *независимых переменных* — координаты x , отсчитываемой вдоль слабо искривленной оси более или менее протяженного канала, и времени t .

Расчет в таком приближении [11, 13, 14] течений газов и жидкостей в технических устройствах (в стационарной и нестационарной постановке) широко применяется в инженерной практике. Так, например, рассмотрение движения рабочего тела как нестационарного течения газовой смеси с одной пространственной координатой используется для описания течений на участках каналов в газоздушных трактах ДВС.

При описании течений в «квазиодномерном» приближении разумно принять за основу также систему интегральных ЗС, которые могут быть получены аналогично ЗС для пространственного движения (в п. 2.1 — для контрольного объема на рис. 2.1).

В данном же случае накладываем ограничения на форму контрольного объема и на распределение параметров потока внутри него: во-первых, вписываем контрольный объем (рис. 2.2) в участок канала с непо-

движными и непроницаемыми для жидкости стенками, во-вторых, считаем распределения параметров потока по поперечному сечению канала однородными. Как следствие, существенно упрощаются выражения объемных и поверхностных интегралов.

Получим ЗС в квазиодномерном приближении для общего случая неустановившихся течений *многокомпонентной смеси* в канале с переменным (и плавно меняющимся по координате x) сечением, с учетом трения и теплообмена со стенкой на основе гипотез сплошности и локального термодинамического равновесия³.

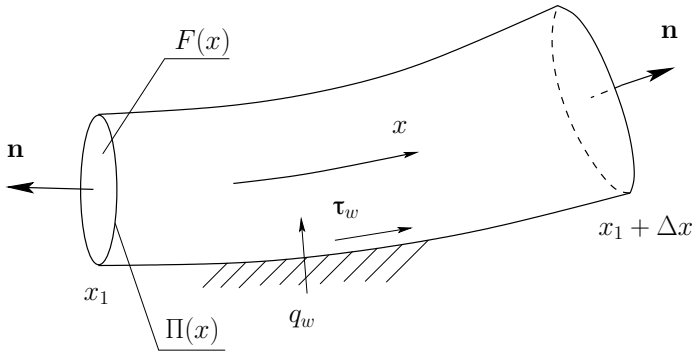


Рис. 2.2. К выводу законов сохранения для одномерного течения

Примем, что площадь $F(x)$ и периметр $\Pi(x)$ сечения канала — гладкие функции (в рассматриваемой области по x). При квазиодномерном описании придется считать также, что средние по периметру сечения напряжение трения τ_w и плотность теплового потока q_w на стенке канала воздействуют на всю жидкость (смесь) в данном сечении, а по нормали на стенку действует давление p в сечении. Процессы молекулярного и турбулентного переноса в продольном направлении не учитываем. Интеграл

$$\int_V \rho_k(x, t) dV = \int_{x_1}^{x_1 + \Delta x} \rho_k F dx$$

выражает массу молекул k -го компонента внутри контрольного объема при том, что ρ_k зависит в каждый момент только от x . Скорость из-

³Гипотез, которые, напомним, позволяют пользоваться обычным и однозначным образом определенными термодинамическими и кинематическими параметрами *сплошной среды* и использовать для связи между термодинамическими параметрами обычные УС.

менения этой массы в объеме определяется разностью прихода и расхода массы компонента на левой и правой границах — в сечениях x_1 и $x_1 + \Delta x$. При принятом положительном направлении x скорость изменения массы компонента в контрольном объеме выражается как

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_1+\Delta x} \rho_k F dx = - (\rho_k u F)|_{x_1}^{x_1+\Delta x}. \quad (2.26)$$

Уравнение (2.26) — интегральная форма ЗС массы k -го компонента смеси ($k = 1, \dots, K$) при нестационарном движении в канале.

Подобным же образом получается интегральная форма ЗС количества движения смеси, заключенной в контрольном объеме:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_1+\Delta x} \rho u F dx = & - [(\rho u^2 + p) F]|_{x_1}^{x_1+\Delta x} + \\ & + \int_{x_1}^{x_1+\Delta x} \left[p \frac{dF}{dx} + \tau_w \Pi \right] dx. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Уравнение КД (2.27) учитывает приход и расход КД от перетекания его вместе с массой смеси, движущейся со скоростью u и от импульса сил давления на левой и правой границах контрольного объема, а также от проекций сил нормального и касательного напряжений, действующих по периметру стенки со средней интенсивностью p и τ_w соответственно.

Интегральная форма ЗС энергии смеси в контрольном объеме принимает вид

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_1+\Delta x} \rho E F dx = - [(\rho u E + p u) F]|_{x_1}^{x_1+\Delta x} + \int_{x_1}^{x_1+\Delta x} q_w \Pi dx. \quad (2.28)$$

В уравнении энергии (2.28) рассматривается сохранение *полной энергии*, количество которой (на 1 кг смеси) определяется суммой удельной *внутренней* и удельной *кинетической* энергии смеси $E = e + \frac{u^2}{2}$. Правая часть (2.28) учитывает приход и расход энергии на проницаемых для смеси границах контрольного объема — в форме притока внутренней и кинетической энергии смеси и работы проталкивания в этих сечениях, а также в результате действия теплового потока через стенку канала со средней плотностью $q_w(x, t)$, Bm/m^2 .

Уравнения (2.26) — (2.28) образуют систему условий сохранения, замыкаемую далее УС и соотношениями, выражающими интенсивность трения и теплообмена со стенкой. Записанные в интегральной

форме, (2.26) – (2.28) справедливы (в одномерном приближении) даже в том случае, если искомые функции — $\rho_k(x, t)$, $\rho(x, t)$, $p(x, t)$, $u(x, t)$ и т. п. — не гладкие, а разрывные функции пространственной координаты и времени. Если искомые функции все же гладкие (в смысле дифференцируемости по x и t), переходя к пределу $\Delta x = dx \rightarrow 0$, можно получить дифференциальные аналоги (2.26) – (2.28). $\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_1+\Delta x} \mathbf{U}F dx \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{U}F)$ и $(\mathbf{F}_x F)|_{x_1}^{x_1+\Delta x} \rightarrow d(\mathbf{F}_x F)$, где

$$\mathbf{U} = [\rho_1, \dots, \rho_K, \rho u, \rho E]^T,$$

$$\mathbf{F}_x = [\rho_1 u, \dots, \rho_K u, \rho u^2 + p, \rho u E + pu]^T,$$

и получается система уравнений в дифференциальной форме:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_k F}{\partial t} + \frac{\partial \rho_k u F}{\partial x} &= 0, \quad k = 1, \dots, K, \\ \frac{\partial \rho u F}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^2 + p) F}{\partial x} &= \tau_w \Pi + p \frac{dF}{dx}, \\ \frac{\partial \rho E F}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u E + pu) F}{\partial x} &= q_w \Pi, \end{aligned} \quad (2.29)$$

которую с применением символических «векторных» обозначений можно записать более компактно —

$$\frac{\partial \mathbf{U}F}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_x F}{\partial x} = \mathbf{S}, \quad (2.30)$$

где \mathbf{U} — «вектор» неизвестных и \mathbf{F}_x — «вектор» плотностей потоков (приведены выше), а \mathbf{S} — «вектор» объемной мощности «источников» в этих уравнениях: $\mathbf{S} = [0, \dots, 0, \tau_w \Pi + p \frac{dF}{dx}, q_w \Pi]^T$.

Форма, в которой записаны системы уравнений (2.29) или (2.30), называется *консервативной*, так как в ней сохраняется унаследованное от ЗС в интегральной форме представление о сохранении массы, КД и энергии при изменениях этих величин в контрольных объемах под действием их *потоков* в сечениях канала и на его твердой стенке; уравнения в этой форме, формально примененные для вывода методов численного интегрирования, позволяют получить консервативные численные методы (гл. 9) с тем же успехом, как если бы были использованы исходные уравнения (2.26) – (2.28).

В приложениях используются частные случаи системы (2.29). Так, если рассматриваемая смесь однородна по составу ($K = 1, \rho_1 = \rho$), то в (2.29) останется лишь одно уравнение сохранения массы:

$$\frac{\partial \rho F}{\partial t} + \frac{\partial \rho u F}{\partial x} = 0, \quad (2.31)$$

а если площадь поперечного сечения канала F постоянна, можно вынести ее за знак дифференцирования и, разделив на нее, получить

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^2 + p)}{\partial x} &= \tau_w \frac{\Pi}{F}, \\ \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u E + p u)}{\partial x} &= q_w \frac{\Pi}{F}. \end{aligned}$$

Наконец, пренебрегая трением и теплообменом со стенкой, получают систему уравнений, описывающую плоские нестационарные движения (также справедливую, как мы помним, в подобластях гладкости искомых функций):

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_x}{\partial x} = 0, \quad (2.32)$$

где $\mathbf{U} = [\rho, \rho u, \rho E]^T$ и $\mathbf{F}_x = [\rho u, \rho u^2 + p, \rho u E + p u]^T$.

Уравнения (2.32) можно получить и другим путем, а именно упрощением УЧП, следующих из ЗС для пространственных течений, например (2.1), (2.7) и (2.13).

2.5. Законы сохранения для «нульмерной» системы

Получим здесь ЗС, описывающие процесс в объеме смеси, для которого сделано достаточно сильное допущение об однородности распределения характеристик среды. Эти ЗС задают модель пространственно однородной *открытой термодинамической системы*, называемой иногда моделью *емкости мгновенного перемешивания*.

Рассмотрим однородный по всем параметрам объем неподвижной смеси, обменивающийся с внешней средой *массой* (в виде J дискретных потоков масс смеси G_j), и *энергией* — с этими потоками массы, а также

в форме работы и теплоты — через участки непроницаемой для вещества поверхности, отделяющей объем от *внешней среды* (рис. 2.3).

Таким образом, кроме действия дискретных потоков, на границе контрольного объема может иметь место обмен с внешней средой энергией в форме работы сжатия-расширения объема $V(t)$ и в форме теплоты — по механизмам теплообмена со стенкой с температурой $T_w(t)$ и объемного тепловыделения от внешних же источников энергии ($dq_{\text{внеш}}/dt$ на 1 кг или $dQ_{\text{внеш}}/dt$ на m кг смеси). Для бóльшей общности можно учесть объемные источники масс компонентов в химических реакциях.

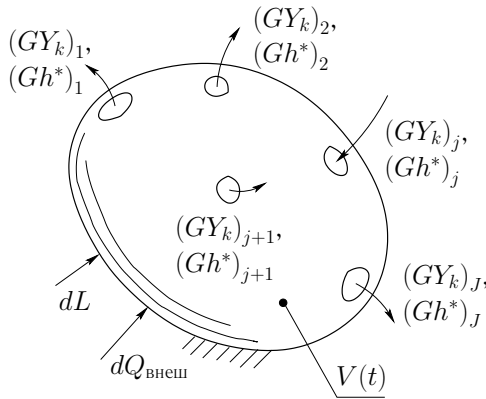


Рис. 2.3. К выводу законов сохранения для «нульмерной» модели емкости мгновенного перемешивания

Тогда условия сохранения масс K компонентов смеси и *внутренней энергии* смеси в объеме выразятся уравнениями:

$$\frac{dm_k}{dt} = \sum_{j=1}^J (GY_k)_j + VW_k \omega_{k\Sigma}, \quad k = 1, \dots, K, \quad (2.33)$$

$$\frac{d(me)}{dt} = \sum_{j=1}^J (Gh^*)_j + \frac{dQ_{\text{внеш}}}{dt} - p \frac{dV}{dt}, \quad (2.34)$$

где $me = m \cdot e(p, T, Y_1, \dots, Y_{K-1})$, $m = \sum m_k$ и $\rho = m/V$; в самом частном случае однородного по составу совершенного газа $e = c_v T$.

Модели для расчета процессов в некоторой емкости, для которой принято допущение о мгновенном перемешивании, должны базироваться на системе *обыкновенных дифференциальных уравнений* (ОДУ) вида (2.33) и (2.34). Уравнения такого вида лежат и в основе моделей (в т. ч. двух- и многозонных), обеспечивающих невысокий уровень детализации при описании процессов в рабочих камерах ДВС и других элементах газоздушных трактов, моделируемых в расчетной схеме элементами типа емкостей. Численным решением подобных систем ОДУ при конкретных условиях однозначности получают искомые зависимости от времени параметров состояния в емкости (или каждой из зон в двух- и многозонных моделях) — $p = p(t)$, $T = T(t)$, $Y_k = Y_k(t)$ и т. д.

Отметим особо, что из уравнений (2.33) и (2.34) могут быть получены многие соотношения *технической термодинамики*. Так, для закрытой (в смысле внешнего массообмена) термодинамической системы, для которой уравнение (2.33) тривиально: $m = \text{const}$, исключив из рассмотрения время и поделив уравнение (2.34) на постоянную массу m (т. е. переходя к *удельным* величинам), получают ЗС энергии, обычно именуемый *первым началом термодинамики*: подведенная извне к 1 кг рабочего тела теплота (здесь: $dq = dq_{\text{внеш}} + 0$) расходуется на совершение работы расширения и приращение удельной внутренней энергии:

$$dq = de + pdv. \quad (2.35)$$

Интегрированием (2.35) можно получить уравнения состояния для энтропии s как параметра состояния, а также выражения для работы в термодинамических процессах частного вида и циклах. В случае *совершенного газа* это сделать особенно просто.

Так, при $de = c_v dT$, где $c_v = \text{const}_1$, $v = 1/\rho$ (удельный объем), $p = \rho RT$, $c_p = c_v + R$ (закон Майера), $\gamma = c_p/c_v = \text{const}_2$ и $ds = dq/T$ (определение элементарного приращения удельной энтропии), можно преобразовать (2.35):

$$\begin{aligned} ds &= \frac{dq}{T} = c_v \frac{dT}{T} + p \frac{dv}{T} = \left| dv = d\left(\frac{1}{\rho}\right) = -\frac{d\rho}{\rho^2} \right| = c_v \frac{dT}{T} - R \frac{d\rho}{\rho} = \\ &= \left| RT = \frac{p}{\rho}, dT = \frac{dp}{R\rho} - \frac{pd\rho}{R\rho^2} \right| = c_v \left(\frac{dp}{\rho RT} - \frac{pd\rho}{\rho RT\rho} \right) - R \frac{d\rho}{\rho} = \\ &= \left| \rho RT = p \right| = c_v \frac{dp}{p} - (c_v + R) \frac{d\rho}{\rho} = c_v \frac{dp}{p} - c_p \frac{d\rho}{\rho}. \end{aligned}$$

Интегрируя между начальной 1 и текущей точками термодинамического процесса, можно получить соотношение, имеющее смысл УС вида $s = s(p, \rho)$, т. е. могущего служить для вычисления энтропии s совершенного газа по параметрам состояния p и ρ :

$$s = s_1 + c_v \ln \left[\frac{p}{p_1} \left(\frac{\rho_1}{\rho} \right)^\gamma \right], \quad (2.36)$$

а выражая из (2.36) давление p — уравнение состояния вида $p = p(s, \rho)$ с теми же постоянными параметрами УС однородного *совершенного газа* c_v и γ :

$$p = p_1 \left(\frac{\rho}{\rho_1} \right)^\gamma \exp \left[\frac{s - s_1}{c_v} \right]. \quad (2.37)$$

Среди моделей технической термодинамики особая роль принадлежит адиабатному изоэнтропному процессу как модели идеального (термодинамически обратимого) изменения состояния частицы или всего рабочего тела. Действительно, пусть внутри частицы жидкости не протекают процессы диссипации (бесконечно медленное, «квазиравновесное» изменение состояния при однородных распределениях параметров). Пусть также отсутствует теплообмен с внешней средой. Тогда должно выполняться $dq = dq_{\text{внеш}} + dq_{\text{вн}} = 0$ и, как следствие — $ds = 0$ и $s = s_1$ (*адиабатное* и *изоэнтропное* сжатие или расширение).

Из уравнения (2.37) при $s = s_1$ следует

$$p = p_1 \left(\frac{\rho}{\rho_1} \right)^\gamma. \quad (2.38)$$

Уравнение (2.38) устанавливает *степенной закон* относительно изменения давления от относительного изменения плотности и носит название уравнения *адиабаты Пуассона (Poisson)*; это уравнение изоэнтропного адиабатного процесса в *совершенном газе*.

Уравнение состояния (2.36) для выражения энтропии имеет вид $s = s(p, \rho)$. Нетрудно получить выражения s от другой пары независимых термодинамических параметров. Например, взяв соотношение

$$dv = d \left(\frac{1}{\rho} \right) = d \left(\frac{RT}{p} \right) = R \frac{pdT - Tdp}{p^2}$$

вместо использованного при выводе (2.36), придем к УС для энтропии вида $s = s(p, T)$:

$$s = s_1 - R \ln \left[\frac{p}{p_1} \left(\frac{T_1}{T} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \right]. \quad (2.39)$$

Исходя из сказанного, нетрудно получить уравнение изоэнтропного процесса в виде степенной зависимости с участием других параметров состояния. Например, из (2.39) получим:

$$p = p_1 \left(\frac{T}{T_1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}. \quad (2.40)$$

Скорость распространения малых упругих возмущений по микрообъему сжимаемой среды — *скорость звука* — параметр состояния, весьма важный для гидрогазодинамики; определяется в общем случае как $c = c(p, \rho)$ в соответствии с (1.8). В частном случае *совершенно-го газа* из уравнения состояния (2.37) при $s = \text{const}$ непосредственно из (2.38) следует конкретное выражение вида $c = c(p, \rho)$ или $c = c(T)$:

$$c = \sqrt{(\partial p / \partial \rho)_s} = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}} = \sqrt{\gamma R T}, \quad (2.41)$$

из чего следует $T = c^2 / (\gamma R)$, а с учетом (2.40) получается уравнение изоэнтропы, связывающее p со скоростью звука:

$$p = p_1 \left(\frac{c}{c_1} \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}. \quad (2.42)$$

Выражения для работы в термодинамических процессах и циклах выводятся в курсах технической термодинамики [15]. Моделирование процессов по более общим уравнениям, например, вида (2.33) – (2.34), требует их численного интегрирования; величина работы при этом определяется суммированием величин $p \frac{dV}{dt}$ на расчетном шаге.

3. ГИДРОСТАТИКА

В этом разд. рассматривается теория неподвижной жидкости, находящейся в состоянии равновесия в поле внешних сил.

Общие положения. Гидростатика — раздел *механики жидкости и газа*, в котором изучается состояние равновесия больших масс жидкости или газа.

Гидростатическое равновесие рассматривают как частный случай, а точнее — как конечное *состояние* после гидродинамического *процесса*, когда во всем объеме жидкости (в данной системе координат) устанавливается $\mathbf{v} \rightarrow 0$. При этом устремляются к нулю и компоненты тензора плотности потока КД, переносимого частицами жидкости ($\rho u_i u_j \rightarrow 0$), и компоненты *тензора «вязких» напряжений* ($\Pi''_{ij} \rightarrow 0$; по крайней мере, в ньютоновских жидкостях).

В гидростатике (как и в гидродинамике) интенсивность «объемных» («массовых») сил, действующих на частицы жидкости, учитывается членами уравнений, выражающими *объемную* плотность распределения этих сил (в H/m^3). По природе это, в первую очередь, *сила гравитации*, интенсивность которой определяет произведение ускорения \mathbf{g} на *объемную* (в $кг/m^3$) *плотность массы* ρ в данной точке (чем и оправдан термин «массовые» для таких сил).

Рассматривая равновесие (как и движение) жидкости в системе координат, движущейся¹ (относительно «инерциальной» системы отсчета), необходимо учитывать в уравнениях дополнительно *силу инерции* — векторным сложением с гравитационной: $\mathbf{g} = \mathbf{g}_r + \mathbf{a}$.

С учетом сказанного суммарные внешние (в данной системе отсчета) силы именуется далее (как и в гл. 2) просто как *массовые силы*, а их объемная плотность выражается как $\rho \mathbf{g}$.

Уравнение гидростатики (общий вид). Из ЗС гидродинамики общего вида легко получить *уравнение гидростатики* также общего вида. Возьмем для этого уравнение движения (выражающее ЗС КД) в форме (2.9). Замечая, что $\frac{\partial}{\partial x_j} (\delta_{ij} p) = \frac{\partial p}{\partial x_i}$, запишем (2.9) как:

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j u_i) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \Pi''_{ji}}{\partial x_j} + \rho g_i,$$

¹В технике важна роль *вращательного* относительного движения; *силу инерции* при этом учитывают как *центробежную*.

После установления *гидростатического равновесия* $u_i = 0$ и $\Pi''_{ji} = 0$, поэтому:

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho g_i, \quad (3.1)$$

или, в векторной форме:

$$\text{grad } p = \rho \mathbf{g}. \quad (3.2)$$

Уравнение (3.2) — общее уравнение гидростатики, записанное в векторной форме. Это дифференциальное УЧП связывает *скалярное поле* давления $p = p(x, y, z)$ в неподвижной жидкости с полем *массовых сил* (объемной плотностью $\rho \mathbf{g}$, где, в частности, $\mathbf{g} = \mathbf{g}(x, y, z)$).

В проекциях на оси декартовых координат:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho(\mathbf{g})_x, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \rho(\mathbf{g})_y, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \rho(\mathbf{g})_z. \quad (3.3)$$

Поле гидростатического давления. Решением (3.1), или (3.2), или (3.3) должна быть функция $p = p(x, y, z)$, удовлетворяющая также ГУ — например, заданному на *свободной поверхности* (СП) условию $p = p_0$ (рис. 3.1).

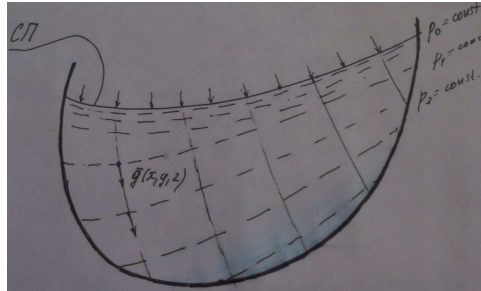


Рис. 3.1. Поле гидростатического давления $p = p(x, y, z)$

В гидростатике давление p часто именуют *гидростатическим*. Заметим, что из исходных гипотез следует, что p , вообще говоря, и здесь связано с ρ и T через УС жидкости или газа. Однако в гидростатике (при $\rho \neq \text{const}$) чаще всего определяют связь $\rho(p)$, называемую условием (или уравнением) *баротропности*.

Тензор напряжений. В неподвижных жидкости или газе тензор плотности потока КД Π_{ij} определяется тензором напряжений Π'_{ij} :

$$\Pi_{ij} = \rho u_i u_j - \Pi'_{ij} = -\Pi'_{ij},$$

который, в свою очередь, имеет вид:

$$\Pi'_{ij} = -\delta_{ij}p + \Pi''_{ij} = -\delta_{ij}p = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

Закон Паскаля. Выражению (3.4) соответствует словесная формулировка: *давление в любой точке неподвижной жидкости действует во всех направлениях одинаково* (рис. 3.2).

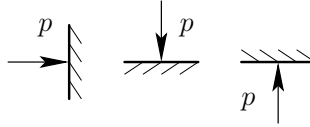


Рис. 3.2. К закону Паскаля

Условия равновесия. К гидростатическому равновесию приходит (с течением времени) выделенный объем реальной жидкости (или газа), если поле внешних сил *стационарно*: $\mathbf{g} = \mathbf{g}(\mathbf{r}, t) \rightarrow \mathbf{g}(\mathbf{r}) = \mathbf{g}(x, y, z)$. Указанное условие — необходимое, но не достаточное.

Приходя к равновесию, жидкость под действием массовых сил *стратифицируется* (от лат. *stratum* — слой) по плотности таким образом, что слои с меньшей плотностью располагаются *выше* слоев с большей плотностью. Однако, если действуют противоположные факторы, равновесие может нарушаться.

Так, при нагревании нижних слоев жидкости (например, от стенок) жидкость придет в движение (режим *свободной конвекции*), описываемое уравнениями гидродинамики с учетом ГУ теплоподвода через стенку и массовых сил, а также с привлечением УС, учитывающего влияние T на p , например, (1.7) на с. 19. И все же поле давления $p(\mathbf{r})$ при этом с достаточной для многих задач точностью может быть найдено из (3.4).

Или же, если в НУ задачи задана аномальная стратификация (слой жидкости с меньшей плотностью сделан нижележащим), — проявится

эффект *неустойчивости Рэля — Тейлора* (англ. *Rayleigh — Taylor instability*). А именно, даже малые возмущения (напр., в самой форме поверхности раздела) приведут к большим возмущениям, разовьется гидродинамический процесс, в ходе которого жидкость с меньшей плотностью «всплывет», т. е., слои жидкости поменяются местами и установится равновесие с нормальной стратификацией.

Форма свободной поверхности. Форму СП капельной жидкости (см. рис. 3.1). определяют, вообще говоря, как массовые силы (гравитации, инерции) так и силы *поверхностного натяжения* (ПН).

Для крупных поверхностей массовые силы преобладают и СП приобретает форму *эквипотенциальной поверхности* — поверхности равного потенциала массовой силы. Из (3.2) следует, что на них $p = \text{const}$, на СП — $p = p_0$. Так, в «плоском» поле \mathbf{g} СП — часть плоскости, в сферически-симметричном — сфера или часть сферы, при комбинации «плоского» гравитационного поля и центробежных сил СП — часть параболоида вращения (см. рис. НЕТ).

Для мелкомасштабных СП (с характерным размером $l \leq 1 \text{ см}$) учитывать также должны силы ПН (и производимые ими *капиллярные эффекты*, см. рис. НЕТ).

Уравнение гидростатики (простой вид). При дополнительных гипотезах (частных предположениях) — а) о *несжимаемой жидкости* ($\rho = \text{const}_1$) и б) о «плоском» поле массовой силы ($\mathbf{g} = g_z \mathbf{k} = g\mathbf{k}$, где $g = \text{const}_2 > 0$) — уравнения (3.2) или (3.3) легко проинтегрировать.

Направим ось z перпендикулярно вниз от СП (рис. 3.3).

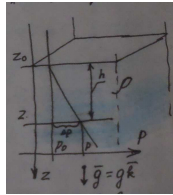


Рис. 3.3. К выводу уравнения (3.5)

Интегрируем третье уравнение (3.3) с $p = p_0$ при $z = z_0$:

$$\int_p^{p_0} dp = \rho g \int_z^{z_0} dz.$$

Получим:

$$p(z) = p_0 + \rho g(z - z_0). \quad (3.5)$$

Уравнение (3.5) адекватно во многих технических приложениях. Часто прирост давления (в слое жидкости глубиной $h = z_1 - z_2 > 0$) определяют просто как $\Delta p = \rho gh$.

Из простого уравнения гидростатики (3.5) можно получить ряд полезных следствий.

Равнодействующая сила гидростатического давления. Можно показать (без вывода), что равнодействующая гидростатического давления $p(h)$ на плоскую площадку сила равна произведению p в точке ее центра тяжести, на ее площадь S , и приложена в той же точке, действуя со стороны жидкости по нормали (т. е. перпендикулярно) к площадке:

$$|\mathbf{P}| = pS.$$

Закон Архимеда. также выводится из (3.5), и в общепринятом виде этот закон справедлив в рамках тех же допущений ($\rho = \text{const}_1$, $|\mathbf{g}| = g_z = g = \text{const}_2$).

Рассмотрим полностью погруженное в жидкость тело. Проекция на ось z главного вектора \mathbf{P}_A выталкивающей («архимедовой») силы определяется (см. рис. НЕТ) интегралом

$$P_A = (\mathbf{P}_A)_z = \rho g \iint [h(x, y) = z_2 - z_1] dx dy. \quad (3.6)$$

как равнодействующая сил гидростатического давления на всей поверхности тела. Выталкивающая сила \mathbf{P}_A других составляющих не имеет, она приложена к *центру тяжести* (ЦТ) объемной фигуры (поэтому погруженное в жидкость тело из однородного материала с плотностью жидкости находилось бы в ней в состоянии безразличного равновесия).

Интегралом в (3.6) выражен объем $V > 0$ погруженного² тела; с учетом этого (известное более 2000 лет) выражение модуля выталкивающей *силы Архимеда* имеет вид:

$$P_A = \rho g V. \quad (3.7)$$

²При неполном погружении — объем фигуры, ограниченной *смоченной поверхностью* тела и «продолжением» СП жидкости в теле.

Легко показать, что (3.7) верно и для тел сколь угодно сложной формы. В тех случаях, когда при погружении тела образуются «карманы» (содержащие воздух, рис. НЕТ), выталкивающая сила должна определяться для суммарной фигуры, а точка приложения этой силы не совпадет с ЦТ собственно тела.

Напомним, что в атмосфере на тела действует выталкивающая сила, равная весу вытесненного воздуха. Так, сплошное тело объемом $0,001 \text{ м}^3$ теряет в весе около $0,01268 \text{ Н}$: а) при *нормальных условиях* (НУ) и б) «на уровне моря» — таков вес литра воздуха (плотностью $\rho = 1,293 \text{ кг/м}^3$) в местности, где $g = 9,80665 \text{ м/с}^2$.

4. ДИНАМИКА ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ И ГАЗА

В этом разделе рассматривается описание течений гипотетической *идеальной жидкости*, деформация частиц которой в потоке не приводит к возникновению в ней напряжений внутреннего трения («вязких» напряжений); жидкость в общем случае описывается как сжимаемая.

Несмотря на то, что все реальные жидкости (и газы) обладают свойством внутреннего трения, подобная идеализация не только упрощает математический аппарат, но бывает оправдана и физически. Так, в поле течения среды с малой вязкостью на достаточном удалении от твердых стенок вязкость жидкости — молекулярный перенос количества движения — существенно не проявляется и можно применять модель идеальной жидкости. Зачастую допустимо рассматривать течение такое жидкости как течение с постоянной плотностью (модель несжимаемой жидкости), что дает более простое математическое описание.

4.1. Уравнения Эйлера

Модель идеальной жидкости. Итак, простейшей моделью текучей среды является модель *идеальной жидкости* — среды, обладающей при движении свойством идеальной текучести. Модель такой (гипотетической) жидкости не учитывает «вязкие» напряжения, возникающие в реальных (вязких) жидкостях и газах при деформации частиц.

В допущении об идеальности *тензора напряжений* имеет том же вид, что и в гидростатике, но давление p уже следует называть не *гидростатическим*, а *гидродинамическим*:

$$\Pi'_{ij} = -\delta_{ij}p, \quad \Pi''_{ij} = 0,$$

при этом, как и всегда в МЖГ: $p = p(\rho, T)$.

Итак, при движении идеальной жидкости не действуют силы внутреннего трения, которые необратимо преобразовывали бы механическую энергию частиц жидкости в тепловую энергию движения молекул.

Внутреннее трение есть процесс, основанный на среднестатистическом переносе количества движения при хаотическом движении молекул. Другой результат этого движения — перенос энергии, описываемый как *поток теплоты*. Обычно, рассматривая жидкость (среду) как идеальную, пренебрегаю как вязкостью, так и теплопроводностью (модель невязкой и нетеплопроводной жидкости или газа). В этом случае (без

доказательства) нет условий для изменения *энтропии* малых индивидуальных частиц жидкости, каждая претерпевает *изоэнтропный* процесс, и вместо уравнения энергии для описания изменения параметров достаточно уравнения изоэнтропии; для совершенного газа $\rho = \rho_0(p/p_0)^{1/\gamma}$. Это — частный случай более общего условия *баротропности* — зависимости плотности от давления — $\rho = \rho(p)$.

Уравнения Эйлера. Уравнения модели, описывающей движение общего вида идеальной жидкости, можно получить, отбросив члены, моделирующие вязкость ($\Pi'_{ij} = 0$) и теплопроводностью ($\mathbf{q} = 0$) в законах сохранения; получим систему законов сохранения в дивергентной форме:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) &= 0, \\ \frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \operatorname{Div}(\rho u_i u_j + \delta_{ij} p) &= \rho g_i, \quad i = 1, 2, 3, \\ \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \operatorname{div}[\rho \mathbf{v}(E + p/\rho)] &= \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{g}). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Уравнения Эйлера (случай постоянной плотности) Модель течения невязкой жидкости с $\rho = \operatorname{const}$ получим из (4.1); запишем первые два уравнения в тензорной форме:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} = 0, \quad \frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i,$$

и преобразуем их, соответственно:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= -\frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} = -\left(\rho \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j}\right), \\ \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_i \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i, \end{aligned}$$

и далее

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i \left(\rho \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j}\right) + \dots = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i,$$

и, сокращая, приведем второе уравнение к эквивалентному виду:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + g_i. \quad (4.2)$$

Уравнение (4.2) часто называют *уравнением движения*.

Только теперь вводя частное предположение, что $\rho = \text{const}$, приведем первое уравнение (4.1) к виду

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0. \quad (4.3)$$

Уравнение (4.3), выражающее ЗС массы при $\rho = \text{const}$, часто называют *уравнением неразрывности*.

Для задач динамики ид. жидкости при $\rho = \text{const}$, искомыми являются поля давления p и скорости \mathbf{v} , получаемые решением системы уравнений (4.3), (4.2).

Уравнение Эйлера как уравнение движения. Строго говоря, уравнением Эйлера следует называть векторное уравнение движения (4.2) или уравнение¹, не учитывающее массовых сил:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\text{grad } p, \quad (4.4)$$

С формой (4.4) «в напряжениях» мы уже знакомы (см. с. ??); учитывая массовые силы и вводя *субстанциональную производную*² оператором

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla) = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z},$$

получим уравнение движения в виде

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\text{grad } p + \mathbf{g} = -\frac{1}{\rho}\text{Div} \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix} + \mathbf{g}, \quad (4.5)$$

из которого видно, что *полное ускорение частицы* определяется в идеальной жидкости неоднородностью поля гидродинамического давления и массовыми силами. Здесь (где выражено полно ускорение индивидуальной частицы) наглядно видна родственность закона сохранения количества ее движения и 2-го закона Ньютона для материальной точки.

¹Установлено впервые Л. Эйлером в 1755 г.

²Её смысл — скорость изменения дифференцируемой функции в точке, движущейся вместе с частицей среды, «субстанции».

Уравнения Эйлера в форме (4.1) удобно представлять в символической «векторной» форме, позволяющей записать систему УЧП в одну строку. В общем случае трехмерного нестационарного течения уравнения Эйлера запишутся как

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{F}_z}{\partial z} = \mathbf{S}, \quad (4.6)$$

где $\mathbf{U} = [\rho, \rho u, \rho v, \rho E]^T$ — «вектор» объемных плотностей сохраняющихся («консервативных») величин,

$$\mathbf{F}_x = [\rho u, \rho u^2 + p, \rho uv, \rho uw, \rho uE + pu]^T;$$

$$\mathbf{F}_y = [\rho v, \rho vu, \rho v^2 + p, \rho vw, \rho vE + pv]^T;$$

$\mathbf{F}_z = [\rho w, \rho wu, \rho wv, \rho w^2 + p, \rho wE + pw]^T$ — «векторы» плотностей соответствующих потоков по x , y и z ;

$\mathbf{S} = [0, \rho g_x, \rho g_y, \rho g_z, \rho(ug_x + vg_y + wg_z)]^T$ — «вектор» объемных плотностей «источников» соответствующих величин, моделирующий здесь влияние массовых сил.

«Векторная» форма уравнений удобна для представления формул численных методов их решения.

Начальные и граничные условия. В данной лекции впервые предметно рассматриваются законы *движения жидкостей*, описываемые системами *уравнений в частных производных* (УЧП). Из теории УЧП известно, что для корректной постановки задач расчета течений по ним требуется указать *начальные условия* (НУ) и *граничные условия* (ГУ)³.

Следует вначале определить, какие искомые функции будут решениями данных уравнений (любыми средствами — как *аналитическими*, так и *численными* методами). Так, в задачах течения несжимаемой жидкости с постоянными коэффициентом вязкости μ искомыми являются поле гидродинамического давления $p = p(\vec{r}, t)$ и векторное поле скорости $v = v(\vec{r}, t)$; в общем случае искомыми функциями будут следующие функции координат и времени: $p = p(x, y, z, t)$, $u = u(x, y, z, t)$, $v = v(x, y, z, t)$ и $w = w(x, y, z, t)$. При $\rho = \text{var}$ к ним добавляется поле плотности $\rho = \rho(x, y, z, t)$. Тогда поля, например, температуры $T =$

³Более широко: необходимо задать *условия однозначности* задачи, включающие (помимо прочего) НУ и ГУ.

$T(\bar{r}, t)$ и внутренней энергии $e = e(\bar{r}, t)$ могут быть получены из полей p и ρ через термической и калорическое УС УС.

Таким образом, для решения гидродинамической задачи задаются определяющие задачу *начальные условия* (НУ) — поля (распределения) искомым функций в начальный момент — при $t = t_0$: $p = p(\bar{r}, t_0)$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t_0)$ и, для сжимаемых течений $\rho = \rho(\bar{r}, t_0)$. На пространственно-временной границе изучаемой области ставятся *граничные условия* (ГУ).

Граница области может представлять собой, в частном случае, поверхность твердого тела. При изучении течения идеальной жидкости достаточно выставить на ней *условие проскальзывания* («непротекания») — равенство нулю только нормальной компоненты вектора скорости: $((\mathbf{v})_n)_w = 0$. Для модели вязкой жидкости естественно *условие прилипания* — равенство всех компонент скорости жидкости нулю на стенке (неподвижной).

Давление в точке жидкости на обтекаемой стенке обычно неизвестно, да и не нужно для постановки ГУ. Давление на свободной границе области, как и скорость, выставляются при необходимости их задания. Различают ГУ «на бесконечности», «периодические» и др.

При необходимости (в модели теплопроводной жидкости) ставятся ГУ для температуры. Используются условие адиабатности $(\partial T / \partial n)_w = 0$ или задается температура стенки и частиц жидкости на ней $(T_f)_w = T_w$ или указывается тепловой поток через стенку q_w как границу области.

Напомним, что в (4.6) или (4.1) — уравнения Эйлера несправедливы для описания полей искомым функций с *разрывами* и для описания таких течений более корректно применять интегральные аналоги уравнений. Разрывы функций могут быть заданы как в НУ, так и возникать в решениях, так как уравнения Эйлера не учитывают явлений диссипации (которые бы сделали образование разрывов невозможным).

Уравнения в форме Громеки — Лэмба. Преобразуем уравнения (4.5):

$$\frac{Du}{Dt} = g_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{Dv}{Dt} = g_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \frac{Dw}{Dt} = g_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}. \quad (4.7)$$

Распишем проекции полных ускорений $\frac{D\mathbf{v}}{Dt}$. Отметим, что полное ускорение частицы жидкости — сумма местного ускорения (предела от-

ношения приращения скорости в точке к промежутку времени) и ускорения вдоль *линии тока*. Линии тока — линии, касательные к которым указывают направление вектора скорости в точке касания в данный момент времени; определяются системой дифференциальных уравнений $dx/u = dy/v = dz/w$. При стационарном (не зависящем от времени) течении линии тока совпадают с траекториями частиц жидкости, так как касательные к траекториям действительно дают направления движения частиц жидкости во все моменты времени.

Наложим определенное ограничение — пусть массовые (объемные силы) имеют потенциал; тогда существуют такая функция — *потенциал объемных сил* P , что

$$g_x = -\frac{\partial P}{\partial x}, \quad g_y = -\frac{\partial P}{\partial y}, \quad g_z = -\frac{\partial P}{\partial z}.$$

Введя P в уравнения (4.7), получим:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} + \dots, \quad \frac{\partial w}{\partial t} + \dots \quad (4.8)$$

Предположим далее, что $\rho = f(p)$ (а не $\rho = \rho(p, T)$). Такая среда называется *баротропной* средой (и само течение — *баротропным*). Для баротропных сред $dp/\rho = f_2(p)$. Тогда $dp/\rho = d\Pi$, где $\Pi = \int dp/\rho$. Конкретный вид $\Pi(p)$ получается, когда задана зависимость $\rho = f(p)$. Так, для $\rho = \text{const}$ (течение несжимаемой жидкости) получается $\Pi = p/\rho$, а когда $\rho = \rho_0(p/p_0)^{1/\gamma}$ (изоэнтропное течение совершенного газа), то $\Pi = \frac{\gamma}{\gamma-1}p/\rho$ — с точностью до произвольной постоянной C .

Из тождества $dp/\rho = d\Pi$ следует, что

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \Pi}{\partial x}, \quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial \Pi}{\partial y}, \quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial \Pi}{\partial z}.$$

Подставим эти соотношения в (4.8), кроме того, перепишем их левые части, прибавив к ним и отняв от них одни и те же количества. На примере первого уравнения, прибавляя и вычитая $(\pm [v\frac{\partial x}{\partial w} + w\frac{\partial w}{\partial x}])$, получим

$$-\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial \Pi}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial x} + w\frac{\partial u}{\partial x} + w\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) - v\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Выражения в скобках — удвоенные компоненты вектора, являющегося результатом применения оператора ротора («вихря») к векторному полю скорости⁴

$$\bar{\omega} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right), \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right), \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right]^T,$$

где $\text{rot } \mathbf{v} = 2\bar{\omega}$,

Учитывая это, а также замечая, что

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (u^2 + v^2 + w^2) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (|\mathbf{v}^2|) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} V^2,$$

можем записать всех три уравнения как

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + 2(u\omega_y - v\omega_z) &= -\frac{\partial}{\partial x} (P + \Pi + V^2/2), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + 2(u\omega_z - w\omega_x) &= -\frac{\partial}{\partial y} (P + \Pi + V^2/2), \\ \frac{\partial w}{\partial t} + 2(v\omega_x - u\omega_y) &= -\frac{\partial}{\partial z} (P + \Pi + V^2/2), \end{aligned}$$

или, в виде векторного уравнения —

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \text{grad} (P + \Pi + |\mathbf{v}^2|/2) + \text{rot } \mathbf{v} \times \mathbf{v} = 0. \quad (4.9)$$

Уравнение (4.9) — уравнение Эйлера в форме Громеки — Лэмба.

4.2. Безвихревые («потенциальные») течения

Движение жидкости, в котором во всей изучаемой области величина ротора («вихря») скорости нулевая: $\text{rot } \mathbf{v} = 0$, называют *потенциальным* (или *безвихревым*) — в отличие от течений, в которых ротор скорости отличен от нуля.

Как любое векторное поле с нулевым ротором,

Скорость \mathbf{v} при безвихревом («потенциальном») движении может быть выражена как градиент от некоторого скаляра — *потенциала скорости*:

$$\mathbf{v} = \text{grad } \varphi \quad (\text{при } \text{rot } \mathbf{v} = 0),$$

⁴Движение частицы жидкости складывается из поступательного движения со скоростью \mathbf{v} и вращательного движения вокруг центральной точки (принятой за полюс) с векторной угловой скоростью $\bar{\omega}$.

или, в проекции на оси прямоугольной системы координат:

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Уравнения Бернулли и Лагранжа – Коши. Потенциал скорости в общем случае может быть функцией вида $\varphi = \varphi(x, y, z, t)$, в стационарных течениях — $\varphi = \varphi(x, y, z)$. Заметим, что ввиду независимости операций дифференцирования — $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ и $\text{grad } \varphi$, можно менять их порядок:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \text{grad } \varphi = \text{grad} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right),$$

и, с учетом сказанного, в данном случае, уравнение (4.9) приводится к виду

$$\text{grad} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + P + \Pi + \frac{V^2}{2} \right) = 0,$$

интегрирование которого приводит к выражению 1-го интеграла уравнений движения

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + P + \Pi + \frac{V^2}{2} = f(t), \quad (4.10)$$

называемого *интегралом Лагранжа – Коши*. Здесь $f(t)$ — одинаковая для всей области зависимость от времени, содержащаяся в условиях однозначности. Интеграл Лагранжа – Коши играет в теории нестационарного движения идеальной жидкости ту же роль, что *интеграл Бернулли* для стационарных движений. В последнем случае $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$, $f(t) = \text{const}$ и равенство (4.10) переходит в интеграл Бернулли

$$P + \Pi + \frac{V^2}{2} = \text{const}, \quad (4.11)$$

в котором константа в правой части — общая для всех точек движущейся жидкости, а не, например, своя для каждой линии тока. Оба интеграла (4.10) и (4.11) служат для выражения давления p через кинематические параметры φ , V и координаты, от которых зависит Π :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] + P + \Pi = f(t).$$

Так, для несжимаемой жидкости при $P = 0$ и $\Pi = p/\rho$, $\text{div } \mathbf{v}$ и $\nabla^2 \varphi = 0$, получаем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} = f(t),$$

а в стационарном случае —

$$p + \frac{\rho V^2}{2} = \text{const},$$

причем, для определения поля скоростей используем уравнение Лапласа для потенциала скорости φ :

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

с соответствующими ГУ. При $P = gz$ имеем интеграл (уравнение) Бернулли для несжимаемой жидкости в плоском поле массовой силы

$$p + \frac{\rho V^2}{2} + \rho qz = \text{const}. \quad (4.12)$$

Из (4.12) видно, что в частном случае $g = 0$ при $V = 0$ давление p максимально:

$$p_{\max} = p^* = p + \frac{\rho V^2}{2}.$$

Это давление p^* носит название *давление стационарного торможения*. Так, при обтекании тела однородным потоком с параметрами на «бесконечности» p_∞ , V_∞ , в «критической» точке на обращенной к потоку поверхности тела для некоторой струйки тока $V \rightarrow 0$, т. е. происходит полное торможение потока несжимаемой жидкости:

$$p^* = p_\infty + \frac{\rho V_\infty^2}{2}.$$

На этом может быть основано измерение скорости потока (трубкой Пито; англ. *Pitot tube*, рис. НЕТ).

Рассматривая истечение из емкости через сужающееся сопло как течение идеальной жидкости, получают модель «идеального сопла».

Давление в емкости при $V_0 = 0$ есть p_0 , что соответствует заторможенному давлению вдоль данной струйки тока, а поскольку параметры в емкости на удалении от сопла принимаются однородными, то полное давление во всех струйках тока в сопле одинаково и равно $p_0^* = p_0$. Тогда, зная скорость потока несжимаемой жидкости в некоторой точке сопла, определим давление в ней из того же уравнения Бернулли:

$$p = (p^* = p_0^* = p_0) - \frac{\rho V^2}{2}.$$

На этом основана методика измерения расхода; расходомером является сужающееся сопло, при течении маловязкой жидкости с достаточной скоростью влияние вязкости сосредоточено лишь вблизи стенок сопла; нетрудно связать скорость на срезе сопла и расход жидкости в нем с перепадом статических давлений между емкостью и срезом: $\Delta p = p_0 - p_c$. Получаем формулу Эйлера для скорости на срезе $V_c = \sqrt{2\Delta p/\rho}$, для массового расхода — $G_{\text{теор}} = \rho V_c F_c$. Действительный расход G оказывается по ряду причин меньше теоретического $G_{\text{теор}}$ (по модели «идеального сопла»); при необходимости это учитывают, вводя коэффициент расхода $\mu = G/G_{\text{теор}} \leq 1$.

При течении идеальной *сжимаемой* жидкости справедливы те же соображения; например, для среды с уравнением состояния совершенного газа, как указано выше, справедливо $\Pi = \frac{\gamma}{\gamma-1} p/\rho$, и вдоль линий тока справедливо уравнение изоэнтропной адиабаты (Пуассона): $p = p_0(\rho/\rho_0)^\gamma$. Рассматривая однородный неограниченный поток (в задачах обтекания) или истечение из емкости (в задачах истечения), также придем к формулам, связывающим скорость потока V с параметрами термодинамического состояния в точке:

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{V_1^2}{2} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{V_2^2}{2}.$$

Теорема Кельвина (В. Томсона) о циркуляции скорости: *при баротропном течении идеальной жидкости под действием поля массовых сил с однозначным потенциалом циркуляция скорости по замкнутому жидкому контуру не изменяется.*

Или: *если силы, действующие в баротропной жидкости, имеют потенциал, то циркуляция скорости по любому жидкому кон-*

туру не изменяется с течением времени:

$$\oint \mathbf{v} \cdot \delta \bar{\mathbf{r}} = \text{const.}$$

Парадокс Даламбера:

Сопротивление F_x и подъемная сила F_y тела, движущегося (1) равномерно в (2) идеальной (3) безграничной жидкости (4) $\rho = \text{const}$, равны нулю.

Строгого доказательства приводить не будем, отметим очевидность этого явления для тел симметричной формы типа цилиндра, шара, эллипсоида — струйки тока расступаются на обращенной против потока поверхности, и картина эта в точности повторяется и на задней поверхности (в правом полупространстве на рис. НЕТ). Распределение гидродинамических давлений по поверхности симметрично, интеграл силы равен нулю. При этом на поверхность тела не действуют касательные напряжения; в объеме потока не протекают процессы диссипации энергии и ее волнового перераспределения по пространству, поэтому при относительном перемещении тела в такой жидкости и не должна совершаться работа, следовательно, сопротивление равно нулю. В силу фундаментальности подобных оснований нет причин, чтобы для тел иной формы, по крайней мере, лобовое сопротивление имело бы место.

При нарушении хотя бы одного из указанных выше условий равенство нулю исчезает:

- вязкость — возникнут касательные напряжения, вязкая диссипация энергии в объеме;
- сжимаемость — возникнут упругие возмущения (волны), уносящие энергию;
- свободная поверхность или границы-стенки — возникнут поверхностные волны и ???;
- нестационарность — потребуется энергия на распространение возмущения (разгон) слоев жидкости;

Двумерное плоское потенциальное движение. . . .

4.3. Изоэнтропные одномерные течения

Газодинамические функции стационарного торможения. Считая процессы вдоль трубки тока (расширения — при истечении из ем-

кости и сжатия — при торможении на пути к критической точке) изоэнтропными, и учитывая УС идеального совершенного газа $\frac{p_1}{\rho_1} = RT_1$, $\frac{\gamma}{\gamma-1}RT = c_p T$, и определение скорости звука $c = \sqrt{\gamma RT}$ получим выражения для параметров стационарного торможения:

$$T^* = T + \frac{V^2}{2c_p} = T \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right),$$

$$p^* = p \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}, \text{ где } M = \frac{V}{c}.$$

На основании этих соотношений вводятся газодинамические функции стационарного торможения:

$$\tau(M, \gamma) = \frac{T}{T^*} = \left(\frac{1}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} \right),$$

$$\pi(M, \gamma) = \frac{p}{p^*} = \left(\frac{1}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}},$$

$$\alpha(M, \gamma) = \frac{c}{c^*} = \left(\frac{1}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\varepsilon(M, \gamma) = \frac{\rho}{\rho^*} = \left(\frac{1}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}.$$

...

4.4. Истечение через отверстия

...

Сверхзвуковое движение газов. На самостоятельное изучение (напр., [12]).

5. ДИНАМИКА ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ И ГАЗА

В этом разделе собран материал об основной модели течения реальной жидкости в МЖГ о режимах течения реальных (вязких и теплопроводных) жидкостей и газов в ламинарном и турбулентном режимах и о подходах к численному моделированию турбулентных течений.

Рассматриваются исключительно «ньютоновские» жидкости, т. е. моделью течения выступают *уравнения Навье – Стокса* (УНС), описывающие течения жидкостей и достаточно плотных газов как в ламинарном, так и в турбулентном режимах. Даются примеры аналитического решения этих уравнений для простейших условий ламинарных течений. Приводятся основные понятия о турбулентном течении, и обсуждаются три основных подхода к численному моделированию, основанных на тех же УНС: *а)* непосредственное решение УНС, *б)* расчет течения по УНС, осредненным по Рейнольдсу и *в)* «моделирование крупных вихрей».

5.1. Уравнения Навье – Стокса

Обобщенная гипотеза Ньютона. Уравнения движения (сохранения импульса) реальной (вязкой) жидкости получаются «добавлением» компонент *тензора «вязких» напряжений* к уравнениям идеальной жидкости. Распишем уравнение движения общего вида, например, (2.8), выделяя явно «вязкие» напряжения и используя для краткости (и разнообразия) *тензорные обозначения*:

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} = -\frac{\partial \Pi_{ji}}{\partial x_j}, \quad i = 1, \dots, 3.$$

Далее, вспоминая, что

$$\Pi_{ij} = p\delta_{ij} + \rho u_i u_j - \Pi''_{ij},$$

где Π''_{ij} — тензор вязких напряжений, зададимся вопросом о его выражении для практически важных моделей жидкости. Если жидкость «ньютоновская», то Π''_{ij} должен выражаться через линейной зависимостью через производные от компонент скорости по пространственным координатам: $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$, $i, j = 1, \dots, 3$. Также компоненты тензора Π''_{ij} должны обрщаться в нуль для случая равномерного вращения объема жидкости как целого, так как при этом отсутствует внутреннее трение.

Наиболее общим видом тензора второго ранга, удовлетворяющим этим условиям (см. [5]), является тензор

$$\Pi''_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \right) + \zeta \delta_{ij} \frac{\partial u_l}{\partial x_l}, \quad (5.1)$$

где скалярные величины μ и ζ — *коэффициенты вязкости* (ζ называют «второй» коэффициентом вязкости), они не зависят от скорости движения среды, а только от параметров состояния: $\mu(\rho, T) > 0$ и $\zeta(\rho, T) > 0$. В обычных условиях считается, что $\zeta \ll \mu$ и в выражении (5.1) второй член опускают.

Для идеальных газов $\mu(\rho, T) \rightarrow \mu(T)$.

Выражение (5.1) — обобщение гипотезы Ньютона, предположившего, что в жидкостях и газах касательные напряжения прямо (через коэфф. вязкости μ) пропорциональны градиентам скорости (см. ранее).

Динамику процессов в течении несжимаемой ($\rho = \text{const}$) «ньютоновской» жидкости с также постоянным (не зависящим от температуры T и давления p) коэффициентом вязкости μ можно описать, используя законы сохранения массы и импульса (упражнение: расписать их подробно с учетом выражения для Π''_{ij}):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} &= \rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \rho \frac{D u_i}{D t} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \Pi''_{ji}}{\partial x_j} = \\ &= - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \right) \right]. \end{aligned}$$

В более общем случае следует включить в систему уравнений также уравнение сохранения (переноса) энергии, учитывающее теплопроводность, которой реальные жидкости обладают, наряду с вязкостью.

Вязкие напряжения в несжимаемой жидкости. Другая общепринятая форма записи того же тензора вязких напряжений:

$$\Pi''_{ij} = 2\mu S_{ij} - \frac{2}{3}\mu \delta_{ij} \text{div} \mathbf{v},$$

где участвуют компоненты *тензора скоростей деформации* S_{ij} :

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2\frac{\partial u}{\partial x} & \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) & 2\frac{\partial v}{\partial y} & \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) & \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) & 2\frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}.$$

Тензор S_{ij} характеризует скорость деформирования частиц среды; компоненты на главной его диагонали «отвечают» за скорость растяжения/сжатия частиц, прочие — за скорость их вращения. Данный вид S_{ij} справедлив как для постоянной, так и для переменной плотности жидкости.

В несжимаемой жидкости, где $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$, тензор вязких напряжений имеет вид

$$\Pi''_{ij} = 2\mu S_{ij},$$

а тензор напряжений —

$$\Pi'_{ij} = -p\delta_{ij} + \Pi''_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

Закон теплопроводности Фурье. Для вычисления локальной векторной величины плотности теплового потока \mathbf{q} используется «градиентная» гипотеза о переносе тепла при хаотическом движении молекул — «закон» Фурье:

$$\mathbf{q} = -\kappa \operatorname{grad} T,$$

или, в тензорных обозначениях —

$$q_j = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x_j},$$

где $\kappa = \kappa(\rho, T)$ — коэффициент теплопроводности, [Вт/(м·К)].

Для идеальных газов $\kappa(\rho, T) \rightarrow \kappa(T)$.

Включив выражения *работы сил вязких напряжений* и *плотность кондуктивного теплового потока* в определение полного потока энергии среды, получают уравнение энергии в виде (2.15). Объединенную систему связанных уравнений в технических приложениях принято называть *уравнениями Навье – Стокса*.

Уравнения Навье – Стокса. Итак, за системой уравнений (2.5), (2.10) – (2.12) и (2.16) в технических приложениях закрепилось

наименование *уравнений Навье – Стокса*. Однако, исторически справедливее было бы называть так векторное уравнение

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\text{grad } p + \mu \Delta \mathbf{v} + \frac{\mu}{3} \text{grad div } \mathbf{v}, \quad (5.2)$$

которое есть *уравнение движения* (ЗС импульса) для «ньютоновских» жидкостей или газов в приближении $\mu = \text{const}$ (доказать самостоятельно). Уравнение (5.2) упрощается при $\rho = \text{const}$, тогда $\text{div } \mathbf{v} \equiv 0$; обозначив $\nu = \mu/\rho = \text{const}$ («кинематический» коэффициент вязкости, m^2/c), получим из (5.2):

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \Delta \mathbf{v}. \quad (5.3)$$

Уравнение (5.3) вывел в 1827 г. Навье (*C. L. Navier*). Вывод уравнений (5.2), близкий к современному, выполнил в 1845 г. Стокс (*G. G. Stokes*), см. [5].

5.2. Ламинарные течения

Ламинарным называют режим течения жидкости или газа, при котором слои жидкости движутся не перемешиваясь, а линии тока имеют вполне гладкий и упорядоченный характер (от. лат. *lamina* — слой, пластинка).

Ламинарные течения — не *безвихревые*. В поле течения вязкой жидкости происходит деформация частиц, их движение при этом имеет как поступательную, так и вращательную составляющие. Однако линии тока имеют в ламинарном течении определенный «предсказуемый» характер и справедливость УНС для них никогда не вызывала особых сомнений (в плане корректности постановок задач и единственности их решений.)

Силы вязкости оказывают сглаживающее, стабилизирующее влияние на поток. Однако при превышении критического значения числа *Re* ламинарный режим течения становится неустойчивым — малые возмущения поля скорости нарастают, что влечет за собой переход к *турбулентному режиму* течения.

Между ламинарным и турбулентным (см. ниже) режимами нет четкой границы. Неустановившееся течение вязкой жидкости, при умеренно большом числе Рейнольдса может «на глаз» восприниматься как турбулентное, в котором, по определению, траектории индивидуальных ча-

стиц имеют «хаотический» вид. Да и в стационарных (по средним условиям) течениях при умеренных же числах Re ламинарный и турбулентный (условно) режимы в данной точке могут «перемежаться». О качественном же отличии турбулентных течений от ламинарных можно уверенно говорить, когда вихреобразование в потоке приобретает хаотический, многомасштабный и «каскадный» характер; молекулярная вязкость «не справляется» с «задачей» стабилизации потока. Такое возможно лишь для течений с весьма высокими значениями Re , т. е. так называемых *развитых* турбулентных течений.

Рассуждения об потере устойчивости лам. режима и явлениях, сопровождающих переход ламинарного режима в турбулентный, продолжаются ниже.

Методы решения уравнений Навье – Стокса. Уравнения Навье – Стокса представляют собой систему связанных *уравнений в частных производных* (УЧП). Аналитическими методами возможно решить небольшое число сравнительно несложных задач. В общем же случае течения, описываемые УНС, должны рассчитываться численными методами на ЭВМ.

Несмотря на то, что строгого доказательства существования и единственности решений УНС в общем случае до сих пор не получено, УНС давно и успешно применяются к решению практических задач.

Существуют несколько классов методов расчета на ЭВМ течений газов и жидкостей по УНС. Несколько различаются подходы к решениям задач для жидкостей, считающихся сжимаемыми, слабосжимаемыми и несжимаемыми. Намного меньшие вычислительные затраты требуются для расчета по УНС *двумерных* (2D, в плоской или осесимметричной постановке), чем *трехмерных* задач, а также задач *стационарных*, по сравнению с *нестационарными*.

Расчеты *ламинарных* течений требуют меньших затрат, чем течений *турбулентных*, с гарантией получения высокой достоверности результатов в первом случае. Стационарное ламинарное течение имеет регулярный и гладкий характер, для его расчета разработаны эффективные методы, использующие местное сгущение узлов сетки (для разрешения тонких сдвиговых слоев), а также неявные и многосеточные методы (ускоряющие получение стационарных решений).

Турбулентное поле течения всегда имеет неустановившийся трехмерный и *многомасштабный* характер, и для расчетов практически

важных задач непосредственно по УНС чаще всего не хватает вычислительных ресурсов ЭВМ. Расчеты турбулентных течений ведут по уравнениям, полученным из УНС с привлечением той или иной формы осреднения и модельных гипотез (для [мелкомасштабных] явлений турбулентного переноса). Это позволяет уже допустимо грубо разбивать область на ячейки по времени и пространству. В пределе, когда поле турбулентного течения рассчитывают как осредненное стационарное (по УНС, осредненным «по Рейнольдсу»), с привлечением не слишком сложных моделей турбулентного переноса, трудности решения и затраты — того же порядка, что и в случае расчета ламинарных установившихся течений, но решения при этом сходятся к точным решениям уравнений приближенных *прикладных моделей*, а не УНС.

Задача о ламинарном течении в плоской щели. Возможность аналитического подхода к решению УНС покажем на простом примере. Пусть требуется найти распределение скоростей и давлений в плоском канале (щели) высотой h при установившемся течении жидкости с $\rho = \text{const}_1$ и $\mu = \text{const}_2$. При этом, во-первых, можно исключить из рассмотрения координату z и w — проекцию вектора скорости \mathbf{v} на z ; во-вторых, можно описать движение уравнением неразрывности и уравнениями движения по x и y , так что искомыми функциями будут лишь, возможно, $p(x, y)$, $u(x, y)$ и $v(x, y)$ (см. рис. 5.1).

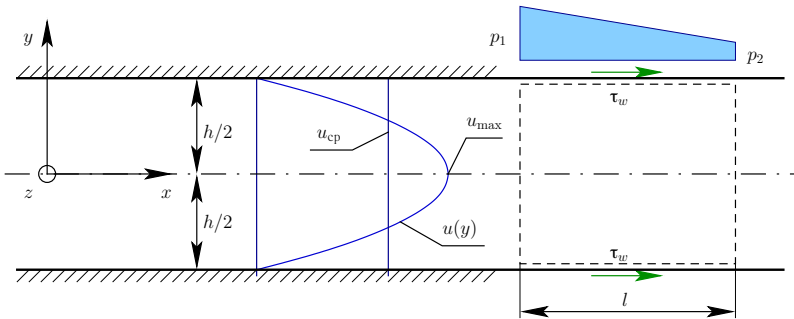


Рис. 5.1. К расчету ламинарного течения в плоской щели

В силу того, что рассматриваемая область не ограничена по x , поперечные профили u и v не зависят от x , т. е. $u = u(y)$ и $v = v(y)$. А ввиду наличия плоскости симметрии ($x0z$) и того, что $v(h/2) = v(-h/2) = 0$,

имеем $v = 0$ во всей области течения. Из УНС в векторной форме

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\text{grad} \left(p + \frac{2}{3}\mu \text{div} \mathbf{v} \right) + 2\mu \text{Div} S_{ij}$$

и для частного случая $\rho = \text{const}_1$ и $\text{div} \mathbf{v} = 0$ получаем

$$\frac{D\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \text{grad} p + 2\mu \text{Div} S_{ij}.$$

Распишем УНС в такой форме в проекциях на оси x и y (на z — не нужно):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \\ & + v \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right], \\ & \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \\ & + v \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right]. \end{aligned}$$

С учетом $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$, $v = 0$ и $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ в уравнениях движения остаются только три члена:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0.$$

Из последнего уравнения сразу следует, что так как $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$, то $p = p(x)$. Нет также причин, чтобы зависимость $p = p(x)$ была нелинейной, поэтому первое уравнение можно записать в виде

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = v \frac{d^2 u}{dy^2} = \text{const},$$

что дает

$$\frac{dp}{dx} = \rho v \frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{d}{dy} \left(\mu \frac{du}{dy} \right) = \frac{d}{dy} \tau(y) = \text{const}.$$

Но если $\frac{d^2u}{dy^2} = \text{const}$, то $u(y) = C_1y^2 + C_2y + C_3$ — квадратичная парабола. Привлекая ГУ «прилипания» $u(y = \pm \frac{h}{2}) = 0$, устанавливаем точный вид $u(y)$:

$$u(y) = u_{\max} \left(1 - \frac{4}{h^2}y^2 \right),$$

где u_{\max} — максимальное значение скорости потока (в плоскости $y = 0$). Среднюю по сечению (точнее — средне-расходную) скорость u_{cp} найдем, учитывая $Q = u_{\text{cp}}F = u_{\text{cp}} \cdot h \cdot 1$, откуда

$$\begin{aligned} u_{\text{cp}} &= \frac{Q}{F} = \frac{u_{\max} \int_0^{h/2} \left(1 - \frac{4}{h^2}y^2 \right) dy}{h/2} = \\ &= \frac{2u_{\max}}{h} \int_0^{h/2} \left[1 - \left(\frac{4}{h^2} \right) y^2 \right] dy = \frac{2}{3}u_{\max}. \end{aligned}$$

Если $u(y) = u_{\max} \left(1 - \frac{4}{h^2}y^2 \right)$, то ее первая производная —

$$\frac{du}{dy} = u_{\max} \left(-\frac{8}{h^2}y \right),$$

а вторая —

$$\frac{d^2u}{dy^2} = -\frac{8u_{\max}}{h^2} = -\frac{12u_{\text{cp}}}{h^2} = \text{const},$$

тогда

$$\frac{dp}{dx} = \rho v \frac{d^2u}{dy^2} = -\frac{12\rho v u_{\text{cp}}}{h^2},$$

или, ввиду линейного характера зависимости $p(x)$:

$$p_1 - p_2 = \frac{12\rho v u_{\text{cp}}}{h^2} \cdot l. \quad (5.4)$$

Результат (5.4) можно было бы получить, применив гипотезу Ньютона (не «обобщенную») и записав интеграл потока x -компонента импульса через контур, показанный на рис. 5.1, справа. Так, поток импульса в сечении есть $I = 1 \cdot \int_{h/2}^{h/2} (\rho u^2 + p) dy$. При том, что профили скоростей в сечениях 1 и 2 идентичны, получим $I_1 - I_2 = (p_1 - p_2) \cdot h \cdot 1$. Потока импульса от сечения 1 к сечению 2 уменьшается от действия касательных напряжений на боковой поверхности контура (т. е. потери

импульса от трения о стенку). На основании равенства нулю полного потока импульса через контур $(p_1 - p_2)h + \tau_w \cdot 2l = 0$ получим

$$p_1 - p_2 = -2\tau_w \frac{l}{h}, \quad (5.5)$$

где

$$\tau_w = \mu \left(\frac{du}{dy} \right)_{y=-h/2} = -\frac{6\mu u_{cp}}{h}. \quad (5.6)$$

Подставив (5.6) в (5.5), вновь получим формулу (5.4). Очевидно, что, согласно (5.4), падение давления на единицу длины тем больше, чем больше динамическая вязкость $\mu = \rho\nu$ и средняя скорость u_{cp} , и тем меньше, чем больше квадрат высоты канала h .

Размерность коэффициента динамической вязкости [Па·с], это легко установить из уравнения (5.4). Удобно преобразовать (5.4) к принятому в гидравлике виду формулы потерь давления от трения на участке трубы. Так (для определенности, при $u_{cp} > 0$):

$$\Delta p = p_2 - p_1 = -\frac{24\rho u_{cp}^2 \nu}{2h^2 u_{cp}} \cdot l = -\frac{24\nu}{hu_{cp}} \cdot \frac{\rho u_{cp}^2}{2h} \cdot l.$$

Очевидно, что

$$\frac{\Delta p}{l} = -\frac{24}{\text{Re}} \cdot \frac{\rho u_{cp}^2}{2h} = -\lambda(\text{Re}) \frac{\rho u_{cp}^2}{2h}, \quad (5.7)$$

где $\text{Re} = \frac{u_{cp}h}{\nu} = \frac{\rho u_{cp}h}{\mu}$ — *число Рейнольдса*, определяемое по среднерасходной¹ скорости u_{cp} и высоте h плоского канала. Отметим также, что принятая в гидравлике форма (5.7) выражения для падения давления по длине канала имеет вид зависимости определяемого безразмерного параметра задачи от (здесь — единственного) определяющего:

$$\frac{\Delta p}{l} \cdot \frac{2h}{\rho u_{cp}^2} = f(\text{Re}) = -\lambda(\text{Re})$$

и задает количественное соотношение для класса физ. процессов — стационарных течений в плоских каналах высотой h несжимаемой жидкости с постоянным μ (см. разд. 6, с. 100). Аналог указанной зависимости

¹Часто вместо u_{cp} пишут просто u , имея в виду все же среднерасходную скорость потока.

в размерных переменных таким свойством не обладает:

$$\frac{\Delta p}{l} = f(\rho, u_{\text{ср}}, \mu, h).$$

Стоит отметить, что зависимость² $\lambda(\text{Re}) = \frac{24}{\text{Re}}$ найдена аналитически и напомним, что здесь всегда подразумевался *ламинарный* режим движения жидкости.

Задача о ламинарном течении в круглой трубе. Получим теперь (сокращенно) решение задачи также о течении жидкости ($\rho = \text{const}_1$ и $\mu = \text{const}_2$) в ламинарном же режиме, но для трубы круглого сечения с диаметром d_0 (или радиусом $r_0 = d_0/2$, см. рис. 5.2).

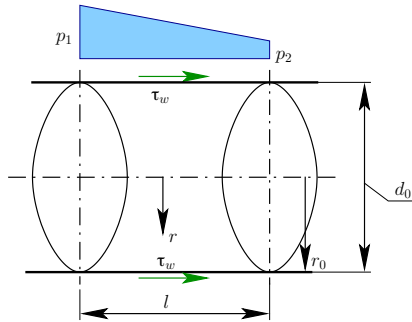


Рис. 5.2. К расчету ламинарного течения в круглой трубе

Решение задачи возможно и по УНС, записанным в осесимметричной системе координат, но в этом, как можно было видеть выше, нет особой необходимости. Действительно, формулу для коэффициента потерь на трение $\lambda(\text{Re})$ можно вывести, используя интегральные соотношения (сохранения массы и импульса) для контура на рис. 5.2. На основе гипотезы Ньютона получаются следующие соотношения (теперь — без вывода):

$$p = p(x) = C_1 + C_2 x, \quad u(r) = u_{\text{max}} \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2} \right), \quad u_{\text{ср}} = \frac{1}{2} u_{\text{max}} = \frac{1}{2} u(0).$$

²Зависимость коэффициента потерь на трение λ от числа Рейнольдса Re .

Из уравнения сохранения (баланса потоков) x -компоненты импульса для контура $\pi r_0^2(p_1 - p_2) + \tau_w 2\pi r_0 l = 0$ получаем

$$\frac{\Delta p}{l} = \frac{p_2 - p_1}{l} = \tau_w \frac{2\pi r_0}{\pi r_0^2} l = \tau_w \frac{2}{r_0}. \quad (5.8)$$

Но $\tau_w = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)_{r=r_0}$; подставляя в (5.8) выражение для τ_w

$$\tau_w = \mu \left[2u_{\text{ср}} \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2} \right) \right]'_{r=r_0} = -2u_{\text{ср}} \frac{2r}{r_0^2} \Big|_{r=r_0} = -\frac{4u_{\text{ср}}}{r_0},$$

получим, что

$$\frac{\Delta p}{l} = -\frac{8\rho \nu u_{\text{ср}}}{r_0^2} = -\frac{64\rho u_{\text{ср}}^2 \nu}{2d_0^2 u_{\text{ср}}} = -\frac{64\nu}{u_{\text{ср}} d_0} \cdot \frac{\rho u_{\text{ср}}^2}{2d_0}.$$

Таким образом, для круглых труб при ламинарном течении

$$\lambda(\text{Re}) = \frac{64}{\text{Re}}, \quad \text{где } \text{Re} = \frac{u_{\text{ср}} d_0}{\nu} = \frac{\rho u_{\text{ср}} d_0}{\mu}.$$

5.3. Турбулентные течения

Турбулентным называют режим течения жидкости или газа, при котором характеристики среды и ее скорость во всей рассматриваемой области (или в соответствующей подобласти) претерпевают пульсации во времени, причиной которых является (кажущееся беспорядочным) движение вихревых структур, существующих в более или менее широком интервале масштабов по пространству и по времени. В *развитом* турбулентном режиме течение основной поток «порождает» крупномасштабные структуры такого типа («вихри»), которые, накладываясь на основное течение, имеют тенденцию к измельчению, разрушению («диссипации»); наличествует широкий диапазон масштабов таких вихрей, а турбулентность устойчиво поддерживается.

Присутствие таких вихревых структур (турбулентных «молей») в потоке обуславливает интенсификацию переноса импульса, массы компонентов и полной энергии по механизму переноса (турбулентными «молями»). Нижний предел масштаба таких «вихрей» или «молей», определяемый подавляющим влиянием молекулярной вязкости на диссипацию структуры называют *колмогоровским* масштабом (в честь А.Н. Колмогорова).

В отличие от ламинарного, для турбулентного течения траектории частиц имеют извилистый, «непредсказуемый» характер³.

Основные закономерности течения в двух этих режимах и особенности перехода *ламинарных* течений в *турбулентные* впервые экспериментально исследованы Осборном Рейнольдсом (в честь которого получила обозначение безразмерная комбинация $\frac{ul}{\nu}$). В этих опытах (с трубопроводами) было выявлено, что при малых расходах слои жидкости текут примерно параллельно стенкам трубы (отдельными слоями); если же скорость течения по трубе u_{cp} превысит некоторое критическое значение, то наблюдается качественно иная картина — введенные в поток струйки красящей жидкости пульсируют, перемешиваются и быстро размываются (рис. 5.3, б).

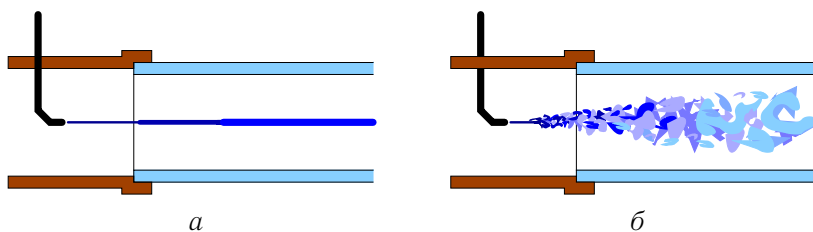


Рис. 5.3. Опыт О. Рейнольдса; режимы течения: а) ламинарный; б) турбулентный

Таким образом, для реальной (вязкой) жидкости возможны (и естественны) два качественно различных режима течения, каждый из них — в своем диапазоне числа

$$\text{Re} = \frac{ul}{\nu} = \frac{\rho ul}{\mu},$$

где l — *характерный* размер области, u — *характерная* скорость потока. При повышении значения числа Re в на том или ином элементе или устройстве, течение на нем переходит в турбулентный режим.

В турбулентном режиме, для которого характерно интенсивное вихреобразование, течение всегда трехмерное и нестационарное. Основную роль в нем играют процессы переноса турбулентными «молями»

³Само слово «турбулентный» произошло от лат. слова, в переводе означающего «бурный, возмущенный».

но и процессы молекулярного переноса интенсифицируются, так как повсеместно возрастают градиенты параметров.

Устойчивость ламинарного движения и его переход к турбулентному. Переход от ламинарного течения к турбулентному имеет характер развития неустойчивости в потоке. Действительно, начальное возмущение любого рода, вводимое в ламинарный поток, может как сойти на нет, так и привести к развитию турбулентности в нем. Малые значения числа Re говорят о том, например, что возмущение в форме появившегося вихря будет сглажено, вместо того, чтобы породить каскад вихревых структур.

Критическое число Рейнольдса. Для каждого течения существует такой диапазон чисел Re , в котором наблюдается переход от ламинарного течения к турбулентному.

Так, есть нижний предел числа $Re = Re_{кр}$, для которого режим течения, даже при наличии возмущений, будет оставаться ламинарным. Для течения в круглой трубе за $Re_{кр}$ на основании опыта принято значение $Re_{кр} \approx 2300$ в качестве нижнего предела (критерия) устойчивого ламинарного режима течения — при котором даже сильные возмущения, внесенные в поток, сглаживаются и режим течения все же остается ламинарным и зависимость для потерь на трение имеет определенный уже известный нам вид. Несколько бóльшим значениям $Re > Re_{кр}$ отвечают переходные режимы течения, для которых характерно чередование в одном месте трубы периодов более-менее развитого турбулентного течения и периодов «реламинаризации». При достаточно больших значениях числа Re режим течения в трубах (и во всех прочих случаях) становится устойчиво турбулентным.

Известны опыты, когда в специальных условиях удавалось «затягивать» ламинарный режим течения в трубах до $Re = 50000$ (спокойный поток на входе в трубу, устранение вибраций, примесей). Далее малейшее возмущение разного рода приводит к «взрыву» турбулентности, после которого течение остается уже устойчиво турбулентным.

Основы моделирования на ЭВМ турбулентных течений. Обычно принимается, что УНС достаточно хорошо описывают течения плотных ньютоновских газов и жидкостей: как ламинарные, так и турбулентные. Это верно на практике, если масштаб мельчайшей структуры потока (например, вихревого образования в турбулентном течении) все же достаточно велик в сравнении с межмолекулярным — для справедливо-

сти исходных для МЖГ гипотез сплошности и ЛТР (и «закрывающих» гипотез Ньютона и Фурье).

В этом смысле (и для этих условий), УНС принимают за основу для прикладных моделей турбулентных течений ньютоновских жидкостей. Течения, во-первых можно численно рассчитывать на ЭВМ) непосредственно по УНС, для чего требуются малые размеры расчетных ячеек и величины шагов по времени — для адекватного разрешения на сетке наиболее мелкомасштабной вихревой структуры⁴ (масштаб Колмогорова). При невозможности расчета, требующего слишком мелкой сетки (из-за несоизмеримых размах характерных размеров расчетной области и колмогоровского масштаба) остается возможность «разрешения» в расчете (на достаточно мелкой сетке) лишь *крупномасштабных* вихревых структур, по модели, лишь приближенно учитывающей воздействие на этот *мелкомасштабных* турбулентных вихрей. (подход, известный как «моделирование крупных вихрей», см. ниже). Наконец, можно рассчитывать на ЭВМ осредненное поле турбулентного течения, по соответствующей модели, в которой осредненный же «турбулентный перенос» приближенно представлен соответствующими *моделями турбулентности*, (на этот раз для — всего диапазона ее масштабов).

Во всех случаях, заметим, в основе моделирования на ЭВМ турбулентных течений ньютоновских жидкостей лежат УНС.

Классические подходы к расчету на ЭВМ. Дадим общую характеристику трех «классических» подходов к расчету на ЭВМ турбулентных течений различных сред⁵.

DNS (от англ. *Direct Numerical Simulation*) — численные расчеты на ЭВМ течений непосредственно по уравнениям адекватной детальной модели; в данном курсе (МЖГ) — по уравнениям Навье — Стокса.

Подход *DNS* — не что иное, как прямое применение методологии моделирования процессов [27] к турбулентным течениям. Неприменим к задачам с большими числами *Re* — ввиду необходимости «разрешения» (т. е., адекватного воспроизведения в численном решении на сетке в 3D и во времени) развития вихревых структур всех масштабов

⁴Можно трактовать это как критерий возможности аппроксимировать УНС на сетке.

⁵Данные подходы применимы и к расчету течений смесей, в т. ч. химически реагирующие, а также многофазных.

и определяемых этим невыполнимых требований к измельчению ячеек сетки. (т. е., к вычислительным ресурсам: объему памяти и быстродействию ЭВМ).

Такие задачи решают, применяя более практичный «компромиссные» подходы (см. ниже).

LES (от англ. *Large-Eddy Simulation*) — подход, при котором в численных решениях в явном виде присутствуют эволюционирующие лишь крупномасштабные вихревые структуры [23].

В рамках подхода *LES* (подробнее изложен в п. 5.4) моделью служит система уравнений переноса, сходная (а часто и неотличимая) по виду от уравнений Навье — Стокса (или подобного вида система для потока смеси, в т. ч. реагирующей смеси, в т. ч. многофазной и т. п.).

Т. е., модель для *LES* — прикладная модель, замкнутая приближенными подмоделями переноса, призванными учесть в модели вклад вихревых структур «подсеточного» масштаба в суммарный («эффективный») перенос.

Параметром в такие модели входит Δ , характеризующий «подсеточный» масштаб расстояний; в качестве Δ чаще всего берут просто «среднеобъемный» размер ячейки сетки:

$$\Delta = (\Delta x \Delta y \Delta z)^{1/3}.$$

Однако, при измельчении сетки модель для *LES* должна переходить в модель для *DNS* течения («исходную»).

Подмодели, замыкающие модели для *LES*, часто основаны на концепции «вихревой» вязкости.

Результаты *LES* сложных течений в целом более точны, чем расчетов по *RANS* (подумайте, почему? см. п. 5.4).

RANS (от англ. *Reynolds-Averaged Navier — Stokes*) — расчеты осредненных по времени (или «по ансамблю») полей турбулентных течений (по уравнениям Навье — Стокса, осредненным «по Рейнольдсу»).

Эти «осредненные» (а не «отфильтрованные», как при *LES*) уравнения замыкают приближенными подмоделями (осредненного же) турбулентного переноса, получая прикладные модели для расчетов.

Решения задач о статистически стационарных течениях по моделям на основе *RANS* имеют вид «квазиламинарных» стационарных полей (и стационарные распределения средних потоков КД и теплоты на стенках, и др.), которые приближенно соответствуют действительным осредненным полям и распределениям.

Поэтому данный подход предъявляет минимальные (из трех подходов) требования к ресурсам ЭВМ (хотя требование более мелкой сетки у стенок и в др. зонах, где высоки градиенты характеристик среды, остается). Подход на основе *RANS*, вместе с тем, дает в общем наименее точные результаты для сложных трехмерных течений (т. к. в основе уравнений моделей — *RANS*, к тому же замкнутые с привлечением приближенных гипотез). Т. е., модели на основе *RANS* — не универсальны (что решается, в принципе, «калибровкой» параметров в замыкающих их подмоделях).

Подход на основе *RANS* подробнее изложен в п. 5.5.

Применяются и плодотворные комбинированные («гибридные») подходы.

В рамках методологических подходов *LES* и *RANS* (и комбинированных) применяют разные подходы к построению «подмоделей», представляющих (в единой модели) эффекты переноса, соответственно «подсеточного», или же осредненного по времени (или по ансамблю).

5.4. Моделирование крупных вихрей (*LES*)

В данном п. кратко описан указанный в заголовке методологической подход к расчету на ЭВМ турбулентных течений.

Численный расчет непосредственно по УНС в качестве модели подразумевает возможность адекватного выявления на сетке турбулентного движения *всех масштабов*. Как мы помним, подход этот, состоящий в «прямом численном моделировании» турбулентного течения по УНС, назван *DNS* (от англ. *Direct Numerical Simulation*).

Если же при численном интегрировании уравнений переноса модели размеры расчетных ячеек не позволяют с хорошей точностью выявить все особенности движения, может быть использован подход «моделирование крупных вихрей» (англ. *Large Eddy Simulation, LES*).

Корректное его применение требует специальной прикладной модели — в ее уравнениях переноса необходимо представить явно не выделяемые в численном решении (но имеющие место в реально-

сти) мелкомасштабных движения — «подсеточную» турбулентность. Модель «подсеточного» масштаба (англ. *Sub-Grid Scale model*, или *SGS model*) позволяет связать (через некую модельную гипотезу о подсеточном переносе) влияние мелкомасштабного движения на крупномасштабное⁶. Поэтому эффект такого неизбежного «фильтрования» должен быть учтен *априорно* и приняты меры по приближенной «реконструкции» информации о мелкомасштабных движениях в самой модели.

Тогда моделью течения станут «отфильтрованные» (и замкнутые моделями мелкомасштабных движений) УНС. Часто предполагают с некоторым приближением (здесь — без строгого вывода), что а) модификация системы уравнений (типа УНС) при этом сведется к замене мгновенных («актуальных») значений искомым параметрам потока параметрами «отфильтрованного»⁷, относительно крупномасштабного движения, а также что б) роль и характер «подсеточного» движения в основном сводятся к *переносу и диссипации по механизму мелкомасштабных турбулентных пульсаций*. Тогда система уравнений модели для *LES* сохранит все особенности исходной (т. е. УНС), но с заменой плотностей потоков молекулярного переноса $\rho_k u_{kj}$, Π''_{ij} и q_j на их «эффективные» значения⁸.

В методологии *LES*, в отличие от методологии *RANS*, приближенно представляется («моделируется») лишь подынтервал наиболее мелких масштабов турбулентного течения (мелкомасштабные вихревые структуры, имеющие малую «длину перемешивания»). Поскольку характеристики мелкомасштабной турбулентности более универсальны (ближе к равновесности и анизотропии), а роль ее меньше, чем при осреднении во всем спектре масштабов *RANS*), методология *LES* успешнее в описании течений весьма общего вида даже при использовании достаточно простых подсеточных моделей. «Платой» за это является необходимость

⁶Если же специальную «модель для *LES*» не использовать, а численно решать, например, УНС, то сам алгоритм решения на применяемой расчетной сетке выполнит некое «фильтрование» масштабов движения с выделением крупных масштабов, а вклад мелких будет имитироваться эффектом «сеточной» (численной) диссипации, т. е. не будет контролироваться исследователем (или расчетчиком) — точнее, не определяться никаким уравнением или параметром самой модели.

⁷Пространственная ширина фильтра — порядка размера ячейки Δ .

⁸Этот прием аналогичен применению моделей «турбулентной» вязкости в методологии моделирования по уравнениям, осредненным по Рейнольдсу. Также и операция «фильтрования» во многом аналогична операции осреднения.

расчета любых потоков как существенно трехмерных и нестационарных, с возможно более высоким разрешением (что и требует значительных ресурсов ЭВМ).

Именно методология (подход) *LES* становится в настоящее время инструментом инженерного анализа течений маловязких газов и жидкостей, а также газофазных и двухфазных смесей (в т. ч. с учетом горения) в пространственной постановке, в частности, при моделировании рабочих процессов тепловых двигателей.

«Отфильтрованные» уравнения типа уравнений Навье – Стокса. Если же, далее, допустить, что дополнительный «подсеточный» турбулентный перенос может быть описан законами, аналогичными законам молекулярного переноса («градиентные» законы Фурье, Фика и обобщенная гипотеза Ньютона со скалярными коэффициентами переноса), то эффективные (суммарные) потоки выразятся так:

$$(q_j)_{\text{эфф}} = -\lambda_{\text{эфф}} \frac{\partial T}{\partial x_j},$$

$$(\Pi''_{ij})_{\text{эфф}} = \mu_{\text{эфф}} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_m}{\partial x_m} \right),$$

$$(\rho k u_{kj})_{\text{эфф}} = -(\rho D_k)_{\text{эфф}} \frac{\partial Y_k}{\partial x_j},$$

где «эффективный» коэффициент получается суммированием «молекулярного» коэффициента и коэффициента, даваемого моделью переноса турбулентными движениями подсеточного масштаба (англ. *Sub-Grid (Scale) Model, SGM*). Приняв полную аналогию — «турбулентных» и молекулярных — процессов переноса для эффектов вязкости, диффузии и теплопроводности (в варианте с постоянными «подсеточными» числом Прандтля Pr_{SGM} и одинаковым для всех компонентов смеси числом Шмидта Sc_{SGM}), «эффективные» коэффициенты теплопроводности и диффузионного переноса можно записать как

$$(\lambda)_{\text{эфф}} = \lambda + \lambda_{SGM} = \frac{\mu c_p}{Pr} + \frac{\mu_{SGM} c_p}{Pr_{SGM}},$$

$$\mu_{\text{эфф}} = \mu + \mu_{SGM},$$

$$(\rho D_k)_{\text{эфф}} = \rho D_k + (\rho D_k)_{SGM} = \frac{\mu}{Sc_k} + \frac{\mu_{SGM}}{Sc_{SGM}}.$$

Таким образом, постоянные Pr_{SGM} и Sc_{SGM} являются константами модели подсеточного турбулентного переноса. Их типичные значения — порядка единицы, например $Pr_{SGM} = Sc_{SGM} = 0,9$.

Наконец, приведем для справки сам вид уравнений «отфильтрованных» уравнений сохранения, справедливых в общем случае для смеси газов:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_k u_j) &= - \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_k u_{k j \lambda})_{\text{эфф}}, \quad k = 1, \dots, K, \\ \frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j) &= - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} [(\Pi''_{ij})_{\text{эфф}}], \\ \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j E + p u_j) &= \frac{\partial}{\partial x_j} [u_i (\Pi''_{ij})_{\text{эфф}}] - \\ &- \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\sum_{k=1}^K (\rho_k u_{k j \lambda})_{\text{эфф}} h_k^* \right] - \frac{\partial}{\partial x_j} [(q_j)_{\text{эфф}}]. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Аналогичная система уравнений получается в частном случае одного компонента — однородной сжимаемой жидкости или газа (УНС).

Модель подсеточного турбулентного переноса Смагоринского. В простейшем приближении можно считать, что мелкомасштабная «подсеточная турбулентность» еще дополнительно локально изотропна и равновесна. Эти допущения позволяют использовать понятие коэффициента вязкости μ_{SGM} и прочих обычного вида соотношений для описания переноса импульса, энергии и массы компонентов смеси турбулентностью на «подсеточном» масштабе.

Кроме того, само локальное и текущее значение $\mu_{SGM}(\mathbf{r}, t)$ может определяться особенно просто. В самом деле, член обычного вида с μ_{SGM} в «отфильтрованных» уравнениях типа УНС обуславливает дополнительную вязкую диссипацию механической энергии крупномасштабного потока в тепловую. При условии локальной равновесности процесса передачи ТКЭ мелкомасштабной турбулентности⁹, «подсеточные» процессы превращают в тепловую столько механической энергии, сколько получают от «надсеточного» движения в каждый момент времени.

⁹С учетом «каскадного» характера ее передачи — от крупных масштабов турбулентных движений к более мелким

Классическая модель Смагоринского получена именно в таком допущении. Согласно этой модели [31]

$$\mu_{SGM} = 2C\rho\Delta^2|\bar{S}|, \quad (5.10)$$

где Δ — пространственная ширина фильтра, в нашем случае $\Delta = \sqrt[3]{\Delta x \Delta y \Delta z}$; $\bar{S} = \sqrt{2S_{ij}S_{ij}}$, $S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$, а $C = C_s^2$, где $C_s = 0,1$ — постоянная Смагоринского: единственная константа данной модели «подсеточной» (турбулентной) вязкости. Данная модель дает относительно простую связь коэффициента μ_{SGM} с размером ячейки применяемой сетки (порядка Δ) и с кинематикой «отфильтрованного» (крупномасштабного) движения, используя его тензор скоростей деформаций S_{ij} .

Можно показать, что μ_{SGM} по модели (5.10) становится много меньше μ , когда характерный размер ячейки сетки Δ становится много меньше колмогоровского масштаба, т. е. там и тогда, где «подсеточные» процессы уже не имеют места. В этом случае автоматически численный расчет будет проводиться непосредственно по УНС.

Существуют и более сложные подходы к представлению явлений переноса на «подсеточном» интервале масштабов — в рамках общей методологии *LES*.

5.5. Моделирование осредненных полей течений (*RANS*)

При данном подходе стремятся получить картину среднего (осредненного) течения. Будем различать турбулентные течения *статистически стационарные* и *статистически нестационарные*. В первом случае ГУ в среднем (статистически) неизменны по времени, тогда к любому параметру

$$\varphi = [\rho, u, v, w, p, \dots]^T$$

в любой точке области потока \bar{r} можно с успехом применить осреднение по времени t , выбрав достаточно большой для этого временной интервал Δt (рис. 5.4, а):

$$\bar{\varphi} = \overline{\varphi(\bar{r})} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_1}^{t_1 + \Delta t} \varphi(\bar{r}, t) dt. \quad (5.11)$$

В дальнейшем будем обозначать чертой сверху символа *зависимой переменной* именно *осредненную по времени* (5.11) величину. Поля

осредненных величин $\overline{\varphi}(\overline{r})$ для статистически стационарного турбулентного течения оказываются гладкими.

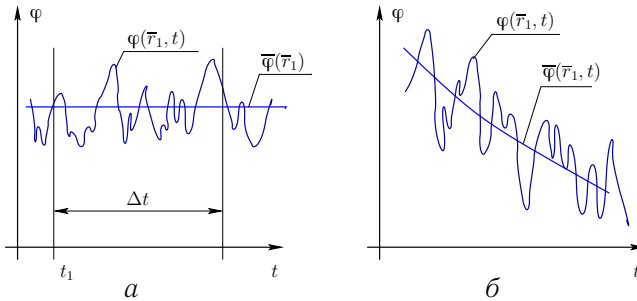


Рис. 5.4. К осреднению параметров потока в точке для течений: а) статистически стационарных; б) статистически нестационарных

Нужно отметить, что средние поля течений имеют вид, свидетельствующий о подавляющем вкладе среднестатистического турбулентного переноса, интенсивность которого в развитых турбулентных течениях (вдали от твердых стенок) *на порядки* превышает интенсивность молекулярного переноса в гипотетическом квазиламинарном течении с тем же числом Re .

При данном подходе моделирование турбулентного течения сводится к расчету именно среднестатистическое поле течения. Именно оно в основном и интересует инженера-проектировщика, а сам подход оказывается экономичным в вычислительном плане, особенно для статистически стационарных течений.

Модель (базовую систему уравнений) для расчета осредненного течения получают, подвергая операции осреднения сами УНС Осредненные таким способом УНС называют *уравнениями Рейнольдса*. Так, актуальное (действительное) турбулентное течение может быть представлено в виде суммы *осредненной* и *пульсационной* составляющих: $\varphi = \overline{\varphi} + \varphi'$, т. е.

$$\varphi(x, y, z, t) = \overline{\varphi}(x, y, z) + \varphi'(x, y, z, t).$$

Представляя искомые функции в УНС в виде $\varphi = \overline{\varphi} + \varphi'$, приводят уравнений к виду, описывающему осредненное течение. Поясним сказанное на примере (подробности — в [7]). Берем для простоты систе-

му УНС для жидкости с $\rho = \text{const}_1$ и $\mu = \text{const}_2$, записывая их для краткости в тензорной форме (уравнение энергии не требуется):

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}, \quad \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0.$$

После осреднения («по Рейнольдсу») уравнения примут вид (плотность постоянна, поэтому в обозначении $\bar{\rho}$ нет необходимости):

$$\rho \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \rho \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(-\rho \overline{u'_i u'_j} \right), \quad \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} = 0.$$

Можно видеть, что осредненные уравнения движения содержат в правой части члены, интерпретируемые как осредненные по времени компоненты дополнительного тензора *турбулентных напряжений*. Эти напряжения появляются в уравнениях из-за наличия среднего переноса импульса турбулентными молями и носят название *напряжений Рейнольдса*:

$$\Pi''_{ij\tau} = \begin{bmatrix} -\rho \overline{u'^2} & -\rho \overline{u'v'} & -\rho \overline{u'w'} \\ -\rho \overline{v'u'} & -\rho \overline{v'^2} & -\rho \overline{v'w'} \\ -\rho \overline{w'u'} & -\rho \overline{w'v'} & -\rho \overline{w'^2} \end{bmatrix}.$$

Необходимо привлечь дополнительные соотношения для того, чтобы «раскрыть» эти величины через характеристики осредненного потока и тем самым «замкнуть» (ставшую незамкнутой) систему осредненных уравнений. Данная «проблема замыкания» возникает при моделировании по осредненным уравнениям, а привлекаемые соотношения кратко называются моделями турбулентного переноса или просто «моделями турбулентности».

Можно выполнить аналогичное осреднение уравнений (законов сохранения) энергии и масс компонентов. В том же приближении (например, при постоянных же теплоемкости c и теплопроводности κ) первое из них в развернутом виде записывается как

$$\rho c \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \dots,$$

а после применения операции осреднения —

$$\rho c \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} - \rho c \overline{u'T'} \right) + \dots,$$

в результате которого появляется вектор среднего турбулентного переноса энергии (эффект *теплопроводности при переносе турбулентными молями*):

$$\mathbf{q}_T = \rho c \left[\overline{u'T'}, \overline{v'T'}, \overline{w'T'} \right]^T.$$

Аналогично, уравнение переноса массы k -го компонента смеси, записываемое как

$$\rho \left(\frac{\partial Y_k}{\partial t} + u \frac{\partial Y_k}{\partial x} + v \frac{\partial Y_k}{\partial y} + w \frac{\partial Y_k}{\partial w} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho D_k \frac{\partial Y_k}{\partial x} \right) + \dots,$$

после осреднения принимает вид

$$\rho \left(\frac{\partial \overline{Y}_k}{\partial t} + \overline{u} \frac{\partial \overline{Y}_k}{\partial x} + \overline{v} \frac{\partial \overline{Y}_k}{\partial y} + \overline{w} \frac{\partial \overline{Y}_k}{\partial w} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho D_k \frac{\partial \overline{Y}_k}{\partial x} - \rho \overline{u'Y'_k} \right) + \dots,$$

в котором к привычному виду уравнений добавляется вектор турбулентного переноса массы k -го компонента (*диффузия турбулентными молями*):

$$\mathbf{j}_{kT} = \rho \left[\overline{u'Y'_k}, \overline{v'Y'_k}, \overline{w'Y'_k} \right]^T.$$

Все дополнительные члены, соответствующие турбулентному переносу, должны быть выражены соотношениями используемой «модели турбулентности».

Осредненные УНС содержат производные по времени и могут использоваться для описания *статистически нестационарных* течений. Однако в этом случае неявно принимается, что результатом расчета по ним будет картина течения, осредненного не по времени (что некорректно в этом случае), а *по множеству независимых реализаций*, т. е. подразумевается осреднение «по ансамблю» (рис. 5.4, б):

$$\overline{\varphi} = \overline{\varphi}(\overline{\mathbf{r}}, t_1) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varphi(\overline{\mathbf{r}}, t_1, i). \quad (5.12)$$

Так, даже турбулентное течение в ГВТ ДВС можно смоделировать в рамках данного подхода. При этом, после «выхода на режим» не может наблюдаться, скажем, межцикловая неравномерность (так как поля параметров потока в ГВТ должны быть по определению средними «по ансамблю»).

Вместо простого осреднения по времени (5.11) или по ансамблю (5.12), удобного для течений с постоянной плотностью (**осреднение по Рейнольдсу**), для течений с $\rho = \text{var}$ чаще применяют **осреднение по Фавру** (англ. *Favre averaging*), т. е. осреднение с использованием плотности в качестве *весовой функции*. При этом, для плотности используется простое осреднение (5.11):

$$\bar{\rho} = \bar{\rho}(\bar{r}) = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_1}^{t_1+\Delta t} \rho(\bar{r}, t) dt,$$

а все прочие параметры потока — $\varphi = [u, v, w, p \dots]^T$ — усредняется по Фавру:

$$\bar{\varphi} = \bar{\varphi}(\bar{r}) = \frac{1}{\bar{\rho}\Delta t} \int_{t_1}^{t_1+\Delta t} \rho(\bar{r}, t)\varphi(\bar{r}, t) dt. \quad (5.13)$$

Вид осредненных по Фавру «сжимаемых» уравнений и дополнительных членов, появляющихся в них при осреднении получается аналогичным виду при простом (по Рейнольдсу) осреднении течений с $\rho = \text{const}$. Так, тензор турбулентных напряжений записывается как

$$\Pi''_{ij\tau} = \begin{bmatrix} -\widetilde{\bar{\rho}u''^2} & -\widetilde{\bar{\rho}u''v''} & -\widetilde{\bar{\rho}u''w''} \\ -\widetilde{\bar{\rho}v''u''} & -\widetilde{\bar{\rho}v''^2} & -\widetilde{\bar{\rho}v''w''} \\ -\widetilde{\bar{\rho}w''u''} & -\widetilde{\bar{\rho}w''v''} & -\widetilde{\bar{\rho}w''^2} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{q}_\tau = \rho c \begin{bmatrix} \widetilde{u''T''} \\ \widetilde{v''T''} \\ \widetilde{w''T''} \end{bmatrix}, \quad \bar{j}_{k\tau} = \rho \begin{bmatrix} \widetilde{u''Y''_k} \\ \widetilde{v''Y''_k} \\ \widetilde{w''Y''_k} \end{bmatrix},$$

где $\varphi = \tilde{\varphi} + \varphi''$.

Описанная методология (подход) именуется в англоязычной литературе как *RANS (Reynolds Averaged Navier – Stokes)* (моделирование турбулентных течений по УНС, осредненным по Рейнольдсу), и вместе с применяемыми в ее контексте моделями турбулентности, используется в инженерной практике уже много десятилетий.

Модели турбулентной вязкости. Некоторая аналогия процессов молекулярного и турбулентного переноса позволяет применить схожий подход к проблеме «замыкания» осредненных по Рейнольдсу уравнений, описывающих среднее турбулентное течение. А именно, связать средние

по времени плотности потоков турбулентного переноса импульса, теплоты и массы компонента с *локальными* величинами *градиентов* соответствующих осредненных параметров потока. Так, для сдвигового течения, в котром превалирует поперечный (по y) перенос x -компоненты КД турбулентными «молями», такая «градиентная» гипотеза имеет (для несжимаемой жидкости) вид

$$-\overline{\rho u'v'} = \rho \nu_T \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \mu_T \frac{\partial \bar{u}}{\partial y},$$

и носит название **гипотезы Буссинеска** (*J. Boussinesq*, 1877 г.); это именно гипотеза, а фактически — *модельное допущение* о том, что произведение *скалярного* коэффициента турбулентной вязкости μ_T на первую производную от скорости способно *адекватно описать* перенос КД *турбулентными молями*.

Гипотеза Буссинеска — прямой аналог гипотезы Ньютона, хорошо обоснованной для молекулярной вязкости. Ее очевидным обобщением для компонент тензора рейнольдсовых напряжений Π''_{ijT} в общем случае будет применение обобщенного выражения вида (5.1) с μ_T вместо μ (и с $\zeta = 0$).

Гипотеза Буссинеска не оговаривает метод вычисления скалярной величины коэффициента турбулентной вязкости μ_T , напротив, она «хороша» тем, что позволяет моделировать турбулентный перенос, «моделируя» именно μ_T , для чего можно применить модели разного уровня сложности; соответствующий класс моделей так и называют — «модели турбулентной вязкости».

Аналогия процессов переноса массы, КД и энергии турбулентными молями позволяет привлекать подобные же «градиентные» замыкающие соотношения также для выражения \mathbf{q}_T и \bar{j}_{kT} через градиенты средних полей соответствующих параметров потока (гипотезы вида «законов» Фурье и Фика):

$$\mathbf{q}_T = -\kappa_T \text{grad } \bar{T}, \quad \bar{j}_{kT} = -\rho D_T \text{grad } \bar{Y}_k.$$

Применительно к «турбулентной» (а не «молекулярной») вязкости обоснованность указанных гипотез градиентного вида значительно слабее, так как осредненный перенос под действием турбулентных движений в широком диапазоне масштабов должен бы в общем случае описываться неким более сложным образом.

Практически, моделируя осредненные течения, идут еще дальше, выражая коэффициенты κ_T и D_T через тот же коэффициент турбулентной вязкости и «турбулентные» числа Прандтля и Шмидта:

$$\kappa_T = \frac{\mu_T c_p}{Pr_T}, \quad D_T = \frac{\mu_T}{\rho Sc_{kT}},$$

которые (числа) принимаются в моделях некоторыми константами порядка единицы — по аналогии с «молекулярными» Pr и Sc_k в газах (вопрос: объясните). Это, конечно, тоже модельные предположения.

Более достоверно (в принципе) турбулентное течение способны описать модели, не основанные на гипотезе Буссинеска¹⁰ — такие, в которых оцениваются отдельно компоненты тензора (турбулентных) напряжений Рейнольдса Π''_{ijT} . В таких моделях используются формально выведенные уравнения переноса для Π''_{ijT} , также «замкнутые» некоторыми допущениями. Но такие модели громоздки, дают малый выигрыш в точности и на практике применяются редко.

Рассмотрены ниже два класса именно «моделей турбулентной вязкости» для расчетов течений по уравнениям Рейнольдса; модели первого класса (условно их называют «алгебраическими»), довольствуются заданием μ_T в зависимости, в основном, от координат точки в потоке. Модели более высоких классов в вычислении μ_T в точке опираются на решения уравнений переноса (чаще — двух) характеристик турбулентности, с тем чтобы учесть «нелокальный» (переносный) характер эволюции этих характеристик в потоке.

Модель «пути перемешивания» Л. Прандтля. Классическая модель («алгебраического» вида) для коэффициента турбулентной вязкости μ_T — модель «пути перемешивания», предложенная Л. Прандтлем еще в 1920-х гг.

Рассмотрим простейшее плоское сдвиговое течение, в котором $\bar{u} = \bar{u}(xy) \approx \bar{u}(y)$. По гипотезе Буссинеска превалирующее напряжение Рейнольдса выражается как

$$(\Pi''_{12})_T = (\Pi''_{xy})_T = \mu_T \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}.$$

¹⁰Не «модели турбулентной вязкости».

Но если выразить в нем $\mu_{\tau} = \rho l^2 \left| \frac{\partial \bar{\pi}}{\partial y} \right|$, то это (касательное) напряжение запишется более наглядно как

$$(\tau_{xy})_{\tau} = -(\Pi''_{xy})_{\tau} = -\rho l^2 \left| \frac{\partial \bar{\pi}}{\partial y} \right| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y},$$

тогда задача «моделирования» μ_{τ} сведется к заданию зависимости для более наглядной величины — l , например, в функции координат точки $l = l(x, y)$ или через обобщенные координаты (см. с. 97).

Очевидно, что «модель пути перемешивания» не добавляет ничего существенного к определению μ_{τ} , полагаясь на эмпирические данные по l с тем, чтобы расчетное поле осредненного течения близко соответствовало экспериментальным данным. Проблемой этой (и других «алгебраических» моделей) является неуниверсальность, когда успешно решаются лишь те задачи, для которых есть проверенные данные по l в поле течения (на которых модель и была откалибрована).

Интерпретация модели — наглядное представление о турбулентном «моле» со среднестатистическими характеристиками, преодолевающим расстояние l («путь перемешивания», нем. *Mischungsweg*) и затем быстро теряющим индивидуальность¹¹.

Модель « $(k - \epsilon)$ ». Эта модель — классический пример модели, использующей уравнения переноса для характеристик турбулентности, по величинам которых в точках потока вычисляется μ_{τ} ; так достигается бóльшая универсальность в описании течений с более произвольной формой области $B(k - \epsilon)$ -модели турбулентной вязкости искомыми в двух дополнительных уравнениях переноса являются осредненные *турбулентная кинетическая энергия* (ТКЭ) k и *скорость диссипации* ТКЭ ϵ . Наиболее простой вид имеет система уравнений с применением $(k - \epsilon)$ -модели турбулентности для случая плоского сдвигового течения¹² вдали от стенок в турбулентном потоке несжимаемой жидкости [7]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} &= 0, \\ \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{d\bar{p}}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \overline{u'v'} \right), \end{aligned}$$

¹¹Интересна оценка l как средней «длины пробега» моля в сравнении с длиной свободного пробега молекулы газа.

¹²По существу, с добавлением «функции стенки» эти уравнения могут описывать течение в *турбулентном пограничном слое* (см. далее).

$$\bar{u} \frac{\partial k}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial k}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\nu_T}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial y} \right) + P - \varepsilon,$$

$$\bar{u} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\nu_T}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) + C_1 \frac{\varepsilon}{k} P - C_2 \frac{\varepsilon^2}{k},$$

В этой системе искомые переменные — \bar{u} , \bar{v} , k и ε ; для них должны быть заданы реалистичные ГУ. (Причем здесь учитывается только «градиентный» перенос поперек потока.)

Для данного частного случая ТКЭ k и скорости ее диссипации ε получаются достаточно простые определения:

$$k = \frac{1}{2} \overline{(u'^2 + v'^2)}, \quad \varepsilon = \nu \left(\frac{\partial u'}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v'}{\partial y} \right)^2.$$

«Генерация» ТКЭ в источниковых членах уравнений для k и ε выражается здесь также упрощенно — как

$$P = \nu_T \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2,$$

а *напряжение Рейнольдса*, деленное на $\rho = \text{const}$ — берется по формуле Буссинеска:

$$-\overline{u'v'} = \nu_T \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}.$$

Для вычисления ν_T по k и ε применяется «связка» Прандтля-Колмогорова, основанная на локальной аналогии с *однородной и изотропной турбулентностью*:

$$\nu_T = C_\nu \frac{k^2}{\varepsilon}.$$

Вообще, $(k-\varepsilon)$ -модель турбулентности привносит с собой в модель течения целый ряд *модельных констант*:

$$C_\nu = 0,09; \quad C_1 = 1,44; \quad C_2 = 1,92; \quad \sigma_k = 1,0; \quad \sigma_\varepsilon = \frac{\kappa^2}{\sqrt{C_\nu(C_2 - C_1)}} \approx 1,3.$$

Константа $\kappa = 0,4$. Константы σ_k и σ_ε называют турбулентными числами Прандтля для переноса молями величин k и ε ; их значения, как видим, порядка единицы.

Подчеркнем, что приведенная модель справедлива для описания осредненной динамики жидкости с $\rho = \text{const}_1$ и $\nu = \text{const}_2$ *вдали от стенок*. Для расчета средних полей температуры и массовой доли *пассивной примеси*¹³, систему уравнений следует соответственно дополнить. Нетрудно перейти к описанию течений с переменной плотностью и течений газовых смесей, считая в системе уравнений поля зависимых переменных осредненными по Фавру. Для учета стенок во всех случаях должны быть введены дополнительные (эмпирические) функциональные связи, позволяющие учесть влияние близости стенки на статистику турбулентности; набор модельных констант расширится.

Несмотря на более гибкий характер моделей с двумя доп. уравнениями переноса, они отягощены сделанными допущениями — гипотезой Буссинеска для переноса всех характеристик и неявным допущением о локально изотропном характере турбулентности, принятым для вычисления скалярной ν_t или μ_t . И все же в рамках подхода моделирования по осредненным уравнениям (*RANS*) именно «модели с двумя уравнениями» позволяют более-менее адекватно рассчитывать сложные течения с приемлемыми затратами; такие модели обязательно присутствуют в программных пакетах для численного моделирования методами *вычислительной гидрогазодинамики* (англ. *Computational Fluid Dynamics — CFD*).

Анализ пристенного турбулентного течения. Рассмотрим пристенную область турбулентного несжимаемой жидкости течения такого вида, когда параметры осредненного течения зависят лишь от поперечной координаты y .

На поверхности $\mu_t = 0$, т. к. $u'_j = 0$ (нет турб. переноса КД, так как нет пульсаций скорости). Напротив, на достаточном удалении от стенки $\mu_t \gg \mu$. Проанализируем осредненный профиль $u(y)$ такого *пристенного сдвигового* течения (продольной компоненты скорости от расстояния до стенки y), опуская здесь и далее символы осреднения. В непосредственной близости от стенки профиль будет линейным, *квазиламинарным*. Действительно, если здесь $\mu \gg \mu_t$, то пренебрегая μ_t , запишем уравнение для касательного напряжения (уравнение переноса КД касательным напряжением) — считая как ρ , так и μ постоянными

¹³Т. е., не влияющей заметно ни на свойства, ни на динамику жидкости.

величинами¹⁴

$$\frac{d\tau}{dy} = \mu \frac{d^2u}{dy^2} = 0,$$

откуда $u(y) = C_1y + C_2$. Но $u(0) = 0$, поэтому $C_2 = 0$, а касательное напряжение на стенке —

$$\mu \left(\frac{d\tau}{dy} \right)_{y=0} = \tau(y=0) = \tau_w.$$

Тогда линейное распределение скоростей в этой области будет иметь вид

$$u = C_1y = \frac{\tau_w}{\mu}y.$$

Теперь найдем теоретически профиль средней скорости $u(y)$ вдали от стенки, где $\mu_\tau \gg \mu$. Учитываем явно турбулентное касательное напряжение τ_τ , фигурирующее в уравнениях Рейнольдса как $-\rho \overline{u'v'}$. Из тех же уравнений, перенос импульса поперек потока определяется вкладом а) молекулярных членов УНС и б) средних напряжений Рейнольдса:

$$\mu \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d\tau_\tau}{dy} = 0.$$

Интегрируя последнее выражение, получим

$$\mu \frac{du}{dy} + \tau_\tau = C_3.$$

На стенке $\tau_\tau \rightarrow 0$, так как там (при $y = 0$) $u' = v' = 0$ и $\mu \frac{du}{dy} = \tau_w$, тогда и

$$\mu \frac{du}{dy} + \tau_\tau = \tau_w.$$

Если раскрыть зависимость $\tau_\tau(y)$ с помощью формулы Прандтля, то в удаленной от стенки области, где $\tau_\tau \gg \mu \frac{du}{dy}$, получим:

$$\rho l^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2 = \tau_w. \quad (5.14)$$

¹⁴Известно также, что в чисто сдвиговом течении $p(y) = \text{const}$.

Здесь «длина пути смешения» l может быть задана только в функции расстояния от стенки y , предполагаем эту связь пропорциональной вида $l = \kappa y$, где κ — постоянная, определяемая из опытов.

Логарифмический профиль скорости. С учетом $l = \kappa y$ нетрудно проинтегрировать соотношение (5.14) и получить *логарифмическую* зависимость для профиля средней скорости в турбулентном сдвиговом течении вдали от стенки:

$$u(y) = \frac{1}{\kappa} \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \ln y + C,$$

Формула показывает, что при сохранении постоянным полного переноса продольной компоненты КД касательным напряжением в поперечном направлении ($\tau + \tau_T = \tau_w = \text{const}$), по мере удаления от стенки градиент скорости снижается, а коэффициент турбулентной вязкости должен увеличиваться.

Постоянная интегрирования C определяется условиями в *ближней пристеночной области* (рис. НЕТ). Постоянная же $\kappa = 0,4$ в логарифмическом законе — универсальная в широком диапазоне Re константа для описания пристеночных областей турбулентных течений.

Пропуская выкладки, приведем формулу

$$\frac{u}{v_*} = 5,75 \lg \frac{yv_*}{\nu} + 5,5,$$

коэффициенты которой уточнены эмпирически (опыты И. Никурадзе для круглых труб, 1932 г., $Re \leq 3,24 \cdot 10^6$). Эта формула универсальна в весьма широком диапазоне чисел Re в турбулентных течениях. В этой формуле $v_* = \sqrt{\tau_w/\rho}$ — «динамическая скорость».

Между линейным распределением осредненной скорости в «вязком» подслое и достаточно широкой зоной логарифмического профиля имеется «буферная» зона (где μ и μ_T — примерно одного порядка).

Для аппроксимации, в простейшем случае сращивают линейное и логарифмическое распределения на условной границе «вязкого» подслоя («двухслойная» модель пристенного течения). В рамках этой модели можно оценить толщину вязкого подслоя δ_B : рекомендуемое для этого значение его безразмерной толщины: $\delta_B v_* / \nu = 11,5$ [7].

6. ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ ПОДОБИЕ

Задачи, решаемые при изучении физических, и в частности гидродинамических явлений, в конечном счете сводятся к отысканию количественных зависимостей между задаваемыми (*определяющими*) величинами и искомыми (*определяемыми*) величинами. Объективно существующие зависимости записывают символически и трактуют как *функциональные зависимости* или *функциональные связи*. Входящие в некоторую связь величины рассматриваются как переменные, так что при конкретном наборе определяющих величин определяемая величина (или набор величин) принимает также вполне определенное значение. Обычно некоторые (если не все) величины, включаемые на раннем этапе рассмотрения в искомую функциональную связь как переменные, оказываются *размерными*.

Описание объектов зависимостями с участием *размерных величин* страдает избыточностью, которая устраняется при переходе к описанию в «обобщенных» переменных, числовые значения которых, как доказывается в *теории размерностей и подобия*, инвариантны по отношению к выбранной конкретной системе *основных единиц измерения*, т. е. являются *безразмерными*. Методами анализа размерностей получается пусть и не решение задачи, то хотя бы до действительно необходимого числа сокращается список параметров искомым функций (функциональных связей). При этом не отыскивается собственно решение (теоретическими либо экспериментальными методами) конкретной задачи, относящейся к выбранному *классу явлений*.

Выражение *функциональной связи* через безразмерные («обобщенные») переменные оказывается справедливым для *класса явлений*; это означает, что переход к таким переменным позволяет одним выражением задать зависимость определяемой величины от определяющих уже бесконечного множества конкретных физических систем, образующих данный класс. *Подобие* явлений, происходящих в геометрически подобных системах при выполнении (обсуждаемых ниже) *динамических* условий подобия, вытекает именно из данного свойства «обобщенных» (безразмерных) функциональных связей описывать классы явлений. В итоге возможно распространение результатов расчетов или экспериментальных данных для некоторой задачи на весь *класс подобных систем* (удовлетворяющих условиям

подобия) или, проще, получать по характеристикам одного объекта характеристики другого объекта, подобного первому.

Использование анализа размерностей и исследование классов физических явлений в обобщенных переменных представляется рациональным и является мощным инструментом в фундаментальных и прикладных исследованиях. Глубокое понимание и овладение методами размерности и подобия совершенно необходимо в практике современного исследователя. Применимость этих методов выходит далеко за рамки МЖГ.

Системы единиц измерения. Основные и производные единицы измерения. Если некоторое определенное число физических величин принять за основные и установить для них какие-то единицы измерения (ввести систему основных единиц), то другие величины (и их размерности) будут выражаться только через них. *Единицы измерения*, принятые для основных величин называются *основными*, для остальных — *производными*. Можно дать такое определение:

Размерность — выражение производной единицы измерения через основные единицы.

Например, приняв в качестве основных величин *массу*, *длину* и *время*, получим что, размерность ускорения является производной. Действительно, в принятой таким образом системе единиц размерность ускорения символически выражается формулой LT^{-2} , где единица длины обозначается символом L , а единица времени — символом T . Точно так же размерность, скажем, давления выражается символической формулой $ML^{-1}T^{-2}$, а обозначение *Па* — просто краткая форма обозначения производной размерности, выражаемой через основные. $ML^{-1}T^{-2}$ — *формула размерности* давления в принятой нами системе основных единиц.

Принятые выше за основные три величины образуют систему величин, достаточных для описания *механических* процессов и величин, характеризующих такие процессы. Для более сложных процессов потребуется большее количество основных величин. Их выбор в принципе произволен, однако эти величины должны образовывать независимую систему. Кроме того, рекомендуется применять стандартизованные наборы основных величин.

В системе СИ (SI — *Système International*), введенной в нашей стране еще в 1963 г., (ГОСТ 9867–61) за основные приняты следующие величины: длины — *метр* [м], массы — *килограмм* [кг], времени — секунда [с] (механические величины), а также силы тока — *ампер* [А], *температуры* — кельвин [К], *силы света* — кандела [кд], *количества вещества* — моль [моль].

Размерные и безразмерные величины. *Размерными* являются величины, численные значения которых зависят от принятых *масштабов*, т. е. от системы единиц измерения. Наоборот, значения **безразмерных** величин от принятой системы единиц не зависят.

Функциональные связи. Входящие в модели уравнения и соотношения представляют собой выражения известных законов, а также соотношения, выражающие сделанные допущения. И те и другие соотношения лимитируют и тем самым задают уровень (огрубления) при представлении явлений в формулировке решаемой физической или технической задачи. Решение задачи может быть получено, если известна модель, заданы все исходные данные — пространственно-временные очертания изучаемого объекта, и другие условия однозначности. Количественно решение будет определяться набором параметров задачи (модели + параметров условий однозначности).

Нетрудно видеть, что решения задач (как теоретические — аналитические и численные, так и эмпирические) во всех случаях могут быть представлены *функциональными связями* (зависимостями) — выражениями зависимости значения некоторой искомой (определяемой) величины (их может быть и несколько на задачу) от значений других (определяющих) величин в виде *явных* и *неявных* функций нескольких переменных, в самом общем случае.

Действительно, результат любого вычисления или измерения физической величины зависит, в конечном счете, от конечного набора (варьируемых) *определяющих* величин, или *факторов*. Определяемая величина может быть как локальный — например, скорость выбранной частицы или скорость в данной точке среды или тела $u(x, y, z, t, \dots)$, или же иметь смысл *средне-интегральной* (осредненной по пространству и или по времени) величины; примеры — средняя скорость, сила сопротивления $F_x(\rho_\infty, u_\infty, L, \dots)$, расход $G(\rho_\infty, u_\infty, \dots)$. Определяющая величина должна быть управляемым и значимым в эксперименте

и расчете фактором (переменной); это и отражает запись функциональной связи в виде *функции нескольких переменных*.

Предполагается, что набор определяющих величин характеризует все наблюдаемые или учитываемые взаимодействия, причем все определяющие величины *независимы*, т. е. неизвестны *другие функциональные связи*, с помощью которых данный список можно было бы *сократить*, выразив хотя бы одну из определяющих величин через одну или несколько других.

Наиболее привычный нам вид функциональной связи — явная функция одной переменной $a = f(a_1)$, в которой две величины — a и a_1 — рассматриваются как связанные зависимостью. Всякую *явную* функцию можно представить и в *неявном* виде: $F(a, a_1) = 0$, так как, например, $F(a, a_1) = f(a_1) - a = 0$. Добавляя больше связанных зависимостью величин, получаем $a = f(a_1, a_2)$ (или $F(a, a_1, a_2) = 0$), $a = f(a_1, a_2, a_3)$ (или $F(a, a_1, a_2, a_3) = 0$) и т. д. Когда неявная функция принимает вид $F(a) = 0$, то это означает, что a принимает постоянное значение (значения), являясь корнем указанного алгебраического уравнения.

Чтобы подчеркнуть, что все величины, входящие в зависимость — безразмерные, применяем обозначения, где a заменяется на Π . Тогда запись $F(\Pi) = 0$ означает, что искомая (определяемая) величина — константа, $\Pi = f(\Pi_1)$ обозначает выражение явной зависимости Π от Π_1 , а $F(\Pi, \Pi_1) = 0$ — неявную зависимость между безразмерными величинами, и т. д.

Π -теорема Бэкингема. Итак, при рассмотрении конкретной задачи нам может быть неизвестна точная формулировка математической модели и, тем более, ее замкнутое (количественное) решение. Тем не менее, общий (качественный) вид искомой функциональной связи между характеризующими явление величинами мы можем установить исходя из а) априорной информации о взаимосвязи явлений в системе u и б) анализа размерностей.

Пусть имеется размерная величина a , про которую известно, что она является функцией n независимых между собой величин a_1, a_2, \dots, a_n :

$$a = f(a_1, a_2, \dots, a_n). \quad (6.1)$$

Выясним структуру $f(\dots)$, предполагая, что она выражает собой некий физический закон (или решение уравнений математической моде-

ли явления), независимый от выбора системы единиц измерения. Пусть среди указанных $n + 1$ размерных величин k величин имеют независимые размерности (и могут служить для введения системы основных единиц в пределах данной задачи!). Независимость размерности некоторой величины означает, что размерность данной величины не может быть представлена *степенным одночленом* из *формул размерности* остальных размерных величин данного набора: $[a_i] = \prod_{j=1, j \neq i}^n [a_j]^{\alpha_j}$ (например, размерности длины L , скорости L/T и энергии ML^2/T^2 взаимно независимы, а размерности длины L , скорости L/T и ускорения скорости L/T^2 — взаимно зависимы). Тогда можно показать, что соотношение (6.1) можно представить как

$$\Pi = f(1, 1, \dots, \Pi_1, \dots, \Pi_{n-k}).$$

т. е. фактически, в виде функции с числом переменных, на k меньшим, чем в (6.1):

$$\Pi = f(\Pi_1 \dots \Pi_{n-k}).$$

или в виде эквивалентной *неявной* функции

$$F(\Pi, \Pi_1, \dots, \Pi_{n-k}) = 0,$$

где $\Pi = \frac{a}{a_1^{m_1} a_2^{m_2} \dots}$, \dots , $\Pi_{n-k} = \frac{a_n}{a_1^{a_1} a_2^{a_2} \dots}$ — безразмерные величины (безразмерные комбинации). Справедливо следующее: связь между $n + 1$ размерными независимыми величинами a, a_1, a_2, \dots, a_n , независимая от выбора единиц измерения, принимает вид соотношения между $n + 1 - k$ величинами $\Pi, \Pi_1, \dots, \Pi_{n-k}$, представляющими собой их независимые *безразмерные комбинации*.

Этот общий вывод теории размерностей носит название Π -теоремы Бэкингема.

Укажем здесь коротко преимущества, которые обеспечивают при приведении функциональных связей к безразмерному виду: во-первых, *число определяющих величин сокращается* — зависимости приобретают более компактный вид, во-вторых, определяющие величины получают смысл четко очерченных *обобщенных факторов*, задающих влияние отдельных парных физических взаимодействий: так, например, в гидродинамике число M отвечает за режим (характер) течения по сжимаемости, число Re характеризует проявления вязких сил в потоке, Pr характеризует теплофизические свойства среды, как отношение коэффициентов температуропроводности и кинематической вяз-

кости, определяет относительную толщину теплового и динамического пограничного слоев и т. п.).

Результаты количественного исследования, выраженные в (обще-принятых!) обобщенных переменных, легче воспринимаются (более универсальны и «переносимы») и т. д.

Априорный характер учета исходной зависимостью связей между величинами в явлении таит в себе определенную опасность, являясь основной причиной ошибок при применении методов теории размерностей и подобия. Неверно составленный перечень *определяющих* величин в описании явления — не редкость, этот этап слабо формализован и опирается на интуицию исследователя. Ошибкой будет как неучет (пропуск) какого-либо значимого фактора, так и включение фактора, не являющегося независимым, т. е. такого, величину которого можно установить (выразить через другие величины из полученного списка) по известной зависимости (например, уравнению состояния). Последняя ошибка равноценная включению, «смешиванию», некоторой известной зависимости в отыскиваемую, что усложняет и ухудшает описание (искомую модель). В примерах ниже это будет пояснено подробнее.

Анализ размерностей на примере задачи о течении в трубе.

Проведем размерный анализ функциональной связи, выражающей величину падения давления при течении несжимаемой вязкой жидкости по трубе. Итак, пусть имеется стационарное течение несжимаемой жидкости по трубе с определенной формой сечения, неизменной по длине. Будем считать внутреннюю поверхность трубы достаточно гладкой.

Нетрудно, казалось бы, сразу выписать следующие размерные величины, связанные между собой искомой функциональной зависимостью: собственно искомая величина падения давления (статического) на участке Δp [Па], длина этого участка (т. е. расстояние между датчиками l [м]), характерный размер поперечного сечения (например, его эквивалентный, или «гидравлический», диаметр d_e [м]), среднерасходная скорость течения u [м/с], а также (постоянная) плотность протекающей жидкости ρ [кг/м³] и (постоянный) коэффициент динамической вязкости μ [Па·с].

Важное замечание: располагая априорно информацией об особенностях течения ньютоновской жидкости с постоянными свойствами ($\rho = \text{const}_1$, $\mu = \text{const}_2$) абсолютное давление p [Па] не будет определяющей величиной. Кроме того, замечая, что в таком течении падение

давления происходит линейно по длине, вместо пары величин Δp и l следует принять одну размерную величину $\Delta p/l$ или $\frac{dp}{dx}$ за определяемую. Таким образом, мы априорно анализируем задачу и используем имеющиеся данные для сокращения списка размерных величин в задаче до действительно необходимого — с тем, чтобы не «отягощать» уже известными соотношениями искомую функциональную связь, для которой, скорее всего, будет строиться и калиброваться эмпирическая или полуэмпирическая модель.

Итак, получаем следующий список параметров задачи: $\frac{dp}{dx}$, ρ , u , μ и d_e . Из них первую величину можно считать *определяемой*, прочие — *определяющими*. Число всех величин — $n + 1 = 5$. Несложно показать, что величин с независимой размерностью три: $k = 3$. Рассуждать можно, например, так: размерности, например, d_e и u не выражаются друг через друга ([м] и [м/с]). Добавляя в набор величину ρ [кг/м³], что теперь размерности нашей тройки выбранных величин все еще независимы. Но теперь среди размерностей встречаются *килограмм, метр, секунда*, т. е. все основные *механические* единицы системы единиц СИ. Очевидно, что размерности остальных двух величин ($\frac{dp}{dx}$ и μ) также выражаются через основные механические единицы как комбинации размерностей взятых ранее трех величин. Следовательно, величин с независимой размерностью — три ($k = 3$), и решение нужно искать в форме функциональной связи между двумя ($n + 1 - k = 2$) безразмерными величинами. Искомую зависимость безразмерного падения давления от безразмерного параметра режима течения можно представить, например, в виде

$$F\left(\frac{dp}{dx} \frac{2d_e}{\rho u^2}, \frac{\rho u d_e}{\mu}\right) = 0,$$

а обозначая $\lambda = \frac{dp}{dx} \frac{2d_e}{\rho u^2}$ и $\text{Re} = \frac{\rho u d_e}{\mu}$, получим $F(\lambda, \text{Re}) = 0$, или, выражая λ как явную функцию числа Re , получим:

$$\lambda = \lambda(\text{Re}). \quad (6.2)$$

Отметим, что именно данная формулировка коэффициента потерь на трение в трубе λ лежит в основе формулы Дарси – Вейсбаха:

$$\frac{dp}{dx} = -\lambda \frac{\rho u^2}{2d_e},$$

которая применима (при $\rho = \text{const}_1$ и $\mu = \text{const}_2$) к расчету падения давления на участке цилиндрической трубы конечной длины: $\Delta p = \left(\frac{dp}{dx}\right) \times l$.

Примечательно, что при подобных выкладках нигде не упоминаются режим течения: турбулентный или ламинарный. Этого при размерном анализе не требуется, и общий вид зависимости (6.2) справедлив для любого из этих режимов.

В заключение отметим, что относительная простота зависимости потерь давления от режима течения по трубе (6.2) определяется предельно простым уравнением состояния «рабочего тела»: $\rho = \text{const}$ (а также $\mu = \text{const}$), что, во-первых, исключает проявления сжимаемости и, главное, «отсекает» от изучаемых здесь динамических эффектов эффекты подогрева частиц вследствие трения, внешнего и внутреннего теплообмена. Поэтому в данной задаче несущественны тепловые эффекты и характерная основная единица для таких эффектов — [К] — среди размерностей параметров задачи не встречается.

Подобие. Определим *моделирование* в «узком смысле», а именно:

Моделирование — замена изучения интересующего нас явления изучением его модели (обычно — физической) уменьшенного или увеличенного масштаба в лабораторных условиях.

В большинстве случаев такое моделирование основано на воспроизведении *подобных* явлений. Причина в том, что наиболее удобным способом получения величин, характеризующих интересующий процесс является получение их простым пересчетом из величин, полученных для сходственных точек *модели* процесса или системы в сходственные моменты времени.

Подобными называются два явления, если по заданным характеристикам одного можно получить характеристики второго простым пересчетом, аналогичным переходу от одной системы единиц к другой ([2]).

Условия подобия явлений *устанавливаются* на основе теории размерностей и П-теоремы. В данном случае нас интересует возможность применить зависимость в обобщенных переменных для *класса подобных объектов*. Используя факт подобия процессов в двух объектах

класса, можно применить (физическую или математическую) модель как раз для предсказания характеристик моделируемого объекта (оригинала) с помощью характеристик моделирующей системы (*модели*). То есть, обеспечив подобие процессов в двух объектах, мы получаем возможность простого пересчета характеристик модели в характеристики оригинала через коэффициенты, имеющие определенное (и известное нам) значение — для каждой из характеристик данной физической природы. С примером такой операции можно ознакомиться в примере на с. 110.

Итак, процессы происходят во времени и в пространстве, вызываясь внешними и внутренними условиями. Поэтому для построения подобной модели, очевидно, в первую очередь нужно обеспечить геометрическое подобие области пространства (в МЖГ — *области течения*), в которой задана исследуемая физическая система, для нестационарных процессов — подобие области четырехмерного пространства-времени. Далее, следует обеспечить *одинаковую природу* физических явлений в модели и исследуемой системе (качественное подобие). Кроме того, необходимо обеспечить количественное подобие определяющих числовых параметров, так сказать, исходных данных, т. е., строго говоря, *условий однозначности* — начальных и граничных условий, задающих те или иные особенности протекания процессов, параметров, задающих физические свойства тел, словом, всех числовых параметров, необходимых для полной определенности постановки конкретной задачи. Можно, таким образом сформулировать условия подобия, т. е. условия, которые одновременно *должны выполняться* для того, чтобы процессы в двух системах были *подобными* в указанном выше смысле:

- геометрическое подобие;
- идентичность *физических законов* и подобие *свойств тел*, входящих в систему;
- подобие величин (полей величин), определяющих *условия на границах* системы в пространстве и во времени.

Можно свести эти три условия в одно, заметив, что все три являются условиями, позволяющими однозначно задать класс подобных явлений в системе (подобие геометрии, идентичность физических процессов и свойств, подобие граничных и начальных условий), т. е. являются условиями подобия для условий однозначности! Таким образом, можно сформулировать условия подобия короче — **подобны те явления**,

условия однозначности которых подобны. Конечно, данная краткая формулировка не снимает требование физической идентичности протекающих в системе процессов и пространственно-временное подобие границ системы.

Но на основании каких же *критериев* устанавливается подобие условий однозначности? Оказывается, здесь-то и приходит на помощь анализ размерностей. Если выписать все необходимые числовые значения величин, характеризующих условия однозначности и составить из них независимый набор безразмерных комбинаций, то полученные величины станут числовыми выражениями *критериев подобия явлений* для данного *класса* систем. Поэтому можно дать еще одно определение — подобны те явления, которые происходят в геометрически подобных системах при одинаковых значениях всех *критериев подобия*.

Числа подобия и критерии подобия. Из вышеприведенного рассуждения следует вывести следующие определения:

Критерии подобия — числа подобия, составленные из величин, входящих в условия однозначности.

Числа подобия — безразмерные комбинации размерных величин, которые в сходственных точках (x, y, z, t) подобных систем имеют одинаковые значения.

Факт (как еще говорят, *динамического*) подобия имеет место, когда выполнены условия подобия, в частности, значения критериев подобия для модели и для оригинала совпадают. А в этом случае, в силу существования функциональной зависимости *определяемого* числа подобия от *определяющих*, значения определяемых чисел подобия (безразмерных комбинаций) совпадут. Тогда, выразив из последних искомую величину (характеристику) в размерной форме, мы сможем найти и величину коэффициента для пересчета некоторой величины, измеренной в модели, в величину для сходственной точки моделируемой системы (изучаемой или проектируемой системы, т. е. оригинала, см., например, подраздел 6).

Многие числа подобия названы в честь ученых: M, Re, Nu, Sh, Pr, Sc, Fr, Gr и др. (см. с. 112). Числа подобия, являющиеся отношениями величин одной физической природы, называются *симплексами*, например: $l/d, x/l$. Требование (или факт) совпадения значений некоторого критерия подобия у модели и у оригинала часто выражают в виде утверждений: $Re = idem, M = idem$ (и т. п.)

Симплексы вида x/l , y/l , z/l и t/τ часто служат для обозначения безразмерных координат и времени, и для указания *сходственных точек* в подобных системах.

Пример на применение подобия при течении жидкости в трубе. Рассмотрим несложный пример, в котором нам придется иметь дело с такими «переводными коэффициентами», имеющими смысл для подобных систем. Служат они для переноса результатов измерений с модели на «натуру». (с физической модели на оригинал). Пусть требуется определить падение давления Δp_1 на участке длиной $l_1 = 20$ м трубы квадратного сечения со стороной $d_1 = 1$ м, по которой протекает воздух с объемным расходом $Q_1 = 3$ м³/с (подстрочный индекс ₁ используем для обозначения характеристик *натурного* объекта).

Для моделирования течения предполагается использовать квадратную же трубу со стороной $d_2 = 100$ мм, располагая два датчика давления на расстоянии $l_2 = 2$ м, причем в качестве «рабочего тела» в данной *модели* предполагается использовать *воду*. Итак, предполагая, что стенки обеих труб гладкие, нужно определить потребный для обеспечения динамического подобия объемный расход воды Q_2 . Пусть свойства обоих «рабочих тел» приняты следующими:

- воздух: $\rho_1 = 1,2$ кг/м³, $\mu_1 = 1,8 \cdot 10^{-5}$ кг/(м·с);
- вода: $\rho_2 = 1000$ кг/м³, $\mu_2 = 1 \cdot 10^{-3}$ кг/(м·с).

Также нужно, проведя соответствующие выкладки, показать вид получающихся безразмерных комбинаций параметров и указать способ пересчета величины падения давления в модели Δp_2 в величину падения давления в моделируемой системе Δp_1 .

Прежде чем приступить к выводу формул, отметим, что исследуемая труба может содержать внутри препятствие, усложняющее картину течения. Но при геометрически подобном расположении датчиков в *модели* и в *оригинале* рассуждения останутся в силе, если только геометрия этого препятствия будет также подобной. Данная задача физически идентична задаче в примере на с. 105. В данном случае в условиях однозначности задан объемный расход Q вместо средней скорости u ; покажем, как получаются безразмерных комбинаций *формальным способом*.

Итак, данная задача описывается следующими 5 (размерными) параметрами: $\frac{\Delta p}{\rho}$ [кг/(м²·с²)], μ [кг/(м·с)], d [м], Q [м³/с], ρ [кг/м³].

Размерности всех этих величин выражаются через 3 основные единицы СИ: [кг], [м], [с]. Нетрудно видеть, что параметров с независимыми размерностями в данной задаче три, для определенности пусть это будут следующие параметры: d [м], Q [м³/с], ρ [кг/м³].

Таким образом, размерности двух параметров задачи — $\frac{\Delta p}{l}$ [кг/(м² · с²)] и μ [кг/(м · с)] — могут быть через них выражены, а значит (согласно той же П-теореме), можно образовать две безразмерные комбинации с участием двух упомянутых параметров. Получим обе комбинации, пользуясь формальным способом вывода.

Для «безразмерная» $\frac{\Delta p}{l}$ представим:

$$\left\{ \frac{\text{КГ}}{\text{М}^2 \cdot \text{С}^2} \right\} = \{ \text{М} \}^a \cdot \left\{ \frac{\text{М}^3}{\text{С}} \right\}^b \cdot \left\{ \frac{\text{КГ}}{\text{М}^3} \right\}^c,$$

что приводит к следующим значениям показателей степени $a = -5$, $b = 2$, $c = 1$, а искомая безразмерная комбинация принимает вид $\frac{(\Delta p/l)d^5}{Q^2\rho}$.

Вторую безразмерную комбинацию получим, «обезразмеривая» μ :

$$\left\{ \frac{\text{КГ}}{\text{М} \cdot \text{С}} \right\} = \{ \text{М} \}^\alpha \cdot \left\{ \frac{\text{М}^3}{\text{С}} \right\}^\beta \cdot \left\{ \frac{\text{КГ}}{\text{М}^3} \right\}^\gamma,$$

что дает $\alpha = -1$, $\beta = 1$, $\gamma = 1$ и вид второй комбинации (аналога числа Re) — $\frac{\mu d}{Q\rho}$.

Комбинация $\frac{\mu d}{Q\rho}$, как мы теперь знаем, является *критерием* подобия для данной задачи, а комбинация $\frac{(\Delta p/l)d^5}{Q^2\rho}$ позволит нам определить константу, выражающую во сколько раз любая разность давлений, измеренная на *модели*, отличается от таковой в объекте-оригинале.

Итак, для обеспечения подобия при течении должно выполняться равенство $\frac{\mu_1 d_1}{Q_1 \rho_1} = \frac{\mu_2 d_2}{Q_2 \rho_2}$ (или, как еще пишут, $\frac{\mu d}{Q\rho} = \text{idem}$), что позволяет нам определить потребное значение объемного расхода в модели:

$$Q_2 = Q_1 \frac{\rho_1 \mu_2 d_2}{\rho_2 \mu_1 d_1} = 3,0 \frac{1,2 \cdot 1 \cdot 10^{-3} \cdot 0,1}{1000 \cdot 1,8 \cdot 10^{-5} \cdot 1} = 0,02 \frac{\text{М}^3}{\text{С}}.$$

А теперь используем равенство $\frac{(\Delta p_1/l_1)d_1^5}{Q_1^2\rho_1} = \frac{(\Delta p_2/l_2)d_2^5}{Q_2^2\rho_2}$ чтобы, измерив падение давления в модели Δp_2 , предсказать падение давления

в моделируемой трубе Δp_1 :

$$\Delta p_1 = \Delta p_2 \frac{l_1 Q_1^2 \rho_1 d_2^5}{l_2 Q_2^2 \rho_2 d_1^5} = \Delta p_2 \frac{20 \cdot 3^2 \cdot 1,2 \cdot 0,1^5}{2,0 \cdot 0,02^2 \cdot 1000 \cdot 1,0^5} = 0,0027 \Delta p_2.$$

Постоянная 0,0027 — не что иное, как *переводной масштаб* для давления ($K_p = 0,0027$), для модели с нашими параметрами.

Использование воды (вместо воздуха) в качестве рабочей среды в физической модели справедливо, если для условий течения в оригинале (в «натуре») числа $M \approx 0$ и $\theta \approx 1$, т. е. отсутствуют эффекты, которые бы влияли на ρ и μ . Тогда течение воздуха при таких условиях в физической модели (при выполнении еще и условия подобия $Re = idem$) будет адекватно моделировать течение воды (как ньютоновской жидкости с постоянными свойствами).

Основные числа подобия в МЖГ. Приведем сводку общепринятых безразмерных комбинаций¹, которые используют в качестве чисел и критериев подобия в МЖГ и теории теплообмена.

Безразмерные комбинации («числа подобия»), как правило, обозначаются первыми буквами фамилий выдающихся исследователей в соответствующих областях. Укажем также на особенности применения данных чисел как критериев подобия.

Начнем с чисел, применяемых в качестве критериев подобия (шире — параметров, характеризующих *режим течения* в моделях) для задач о внешнем обтекания твердых тел или о внутренних течениях химически инертных смесей (или однородных по составу жидкостей и газов):

$Eu = \frac{p}{\rho u^2/2}$ — число Эйлера (*Euler*); формально выражает локальное (или *характерное*) отношение статического давления в потоке к динамическому давлению (по формуле для $\rho = const$); т. е. характеризует отношение статической и «динамической» составляющих полного потока импульса; для политропных газов выражается степенным одночленом из числа M и отношения теплоемкостей:

$$Eu = \frac{1}{\gamma M^2} \text{ (см. ниже);}$$

$M = \frac{u}{c}$ — число Маха (*Mach*); характеризует степень влияния эффектов сжимаемости в течении газа; здесь u — скорость потока, c — скорость звука (при использовании в качестве *критерия*, берутся

¹Вида степенных одночленов из размерных величин.

характерные значения скоростей, т. е., из условий однозначности); также служит в качестве критерия для суждений о реализации в течениях газов: «несжимаемых» ($M \ll 1$), дозвуковых ($M < 1$) и сверхзвуковых ($M > 1$) режимов течения;

$Re = \frac{\rho ul}{\mu}$ — число Рейнольдса (*Reynolds*); характеризует относительный вклад эффекта вязкости в задаче о течении газа или жидкости; определяет, например, относительную толщину динамического пограничного слоя на поверхностях обтекаемых тел; также применяется в качестве критерия для суждений о реализации ламинарного или турбулентного режимов течения;

$\theta = \frac{T_w}{T_\infty}$ — «температурный фактор»; характеризует условия теплоотдачи со стороны влияния на теплофизические свойства жидкости или газа отличия температуры стенки (a , значит, и T среды — в пристенном слое: $T \approx T_w$) от температуры основного потока T_∞ ;

$Sh = \frac{l}{ut}$ — число Струхала (*Strouhal*), характеризующее соотношение характерных времен, одно из которых — присущий системе характерный масштаб времени, а другое — характерное время (период) действия внешнего воздействия на систему; важен для нестационарных процессов (в задачах, имеющих дополнительный временной масштаб — период возмущающего воздействия); применим как критерий «гомохронности» внутренних неустановившихся процессов и возмущающего воздействия;

$Fr = \frac{gl}{u^2}$ — число Фруда (*Froude*), характеризующее влияние массовых сил, как правило, — в задачах со свободной поверхностью капельной жидкости; выступает параметром режима и критерием подобия при движении тел по (или вблизи) свободной поверхности жидкости;

$Gr = \frac{g\beta\Delta T_0 l^3}{\nu^2}$ — число Грасгофа (*Grashof*), характеризующее относительное влияние сил плавучести в поле массовых сил при наличии неоднородностей плотности, вызванной тепловым расширением при нагреве, к силам вязкости.

Следующие числа характеризуют режимы и условия подобия в задачах обтекания твердых тел с нестационарными температурными полями в них, а первое — и собственно в задачах нестационарного распространения тепла в твердых телах:

$Fo = \frac{\alpha t}{l^2}$ — число Фурье (*Fourier*); характеризует степень *гомохронности* изменений нестационарного поля температуры с характерным временем внешнего воздействия и выступает критерием подобия (для соответствующих задач);

$Bi = \frac{\alpha l}{\kappa_s}$ — число Био (*Biot*); учитывает подобие (и отклонения от подобия) при наличии граничного условия третьего рода в нестационарной сопряженной задаче теплообмена.

Следующие числа представляют собой безразмерные комбинации величин, характеризующих теплофизические свойства жидкой или газообразной текучей среды:

$\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ — отношение теплоемкостей; характеризует степень проявления сжимаемости в газодинамических эффектах при течении газов.

$Pr = \frac{\mu c_p}{\kappa}$ — *число Прандтля (Prandtl)*; характеризует относительную интенсивность молекулярных потоков вязкости и теплопроводности; позволяет судить об относительной толщине *теплого* и динамического ламинарных пограничного слоев;

$Sc = \frac{\mu}{\rho D}$ — число Шмидта (*Schmidt*); характеризует относительную интенсивность молекулярных потоков вязкости и *диффузии*; позволяет судить об относительной толщине *концентрационного* и динамического ламинарных пограничного слоев;

Следующие числа используются как *определяемые* величины — меры интегральной (а также и локальной) интенсивности динамического, тепло- и массообменного взаимодействия потока с поверхностями тел:

$C_x = \frac{2F}{\rho u^2 l^2}$ — коэффициент сопротивления, показывающий, какую долю динамического давления (по формуле, верной для $\rho = \text{const}$) в набегающем потоке составляет среднее «дополнительное» давление, соразмерное силе лобового сопротивления; используется как *определяемая* величина в задачах о сопротивлении обтекания тел;

$\zeta = \frac{|\Delta p|_2}{\rho u^2 / 2}$ — коэффициент потерь полного давления, характеризующий потери полного давления (местные или на участке); своего рода аналог C_x для *внутренних* течений;

$\sigma = \frac{p_2^*}{p_2^*}$ — коэффициент сохранения («восстановления») полного давления; также характеризует потери полного давления; для совершенных газов ($\gamma = \text{const}$) имеется аналитическое выражение связи σ с ζ , M и γ ;

$Nu = \frac{\alpha l}{\kappa}$ — число Нуссельта (*Nusselt*), используется как *определяемая* величина в эмпирических и полуэмпирических моделях теплоотдачи; можно рассматривать как *безразмерный коэффициент теплоотдачи*;

$\dots = \dots$ — число Шервуда; *... безразмерный коэффициент массоотдачи*;

Наконец, следующее число служит критерием применимости самой гипотезы сплошности к течениям газов.

$Kn = \frac{\delta}{l}$ — число Кнудсена (*Knudsen*); представляет собой отношение средней длины свободного пробега молекул к характерному размеру задачи; определяет степень разреженности газа в условиях задачи (т. е., проявление отклонений при течении такого газа от течения сплошной среды — в моделях, учитывающих это как *фактор*).

7. СТАЦИОНАРНАЯ ГИДРОГАЗОДИНАМИКА

В этом разделе приведен материал, составляющий основу описания гидрогазодинамических процессов в трубопроводных системах. Стационарное течение описывается здесь в рамках модели, задаваемой уравнениями (законами сохранения) газовой динамики в «квазиодномерном»¹ (или «каналовом») приближении. При том, что эта модель дает зачастую слишком приближенную картину течения, она полезна в технических приложениях. В расчетах по ней учитываются эмпирические данные, получаемые при более точном (теоретическом или экспериментальном) изучении пространственной структуры потоков. К таким данным относятся, например, зависимости для *коэффициентов гидравлических потерь* на местных сопротивлениях или *коэффициентов расхода* при течении через сопла и отверстия.

Материал по данной (довольно частного вида) модели течения намеренно приведен после изложения самых общих основ моделей МЖГ — основных гипотез, законов сохранения, дополнительных гипотез для замыкания законов сохранения и собственно уравнений МЖГ, полученных в рамках принятых гипотез. Это помогает критически осмыслить условности и ограничения описания движения газов и жидкостей в *квазиодномерном приближении*.

Ряд моделей течения, разобранных в этом разд. и справедливых для стационарного течения, используются в следующем разд. (с. 161), посвященной описанию *нестационарных течений* в квазиодномерном приближении.

¹Приставка «квази-» в лат. яз. означает «якобы»; этим подчеркивается, что поток в канале в действительности не является одномерным.

7.1. Течения в трубах, пограничных слоях и в струях

Течение жидкости и газа по трубам. Течения жидкостей и газов в трубах имеют большое практическое значение; они также — удобный объект для изучения (и объяснения) особенностей турбулентных течений.

Вскоре после того, как в 1883 г. О. Рейнольдсом (*O. Reynolds*) было установлено, что режим течения в трубе определяется лишь безразмерным отношением $\frac{u_{\text{ср}}d}{\nu}$ (или $\frac{\rho u_{\text{ср}}d}{\mu}$), стало ясно, что эта величина, названная в его честь *числом Рейнольдса* (англ. *Reynolds number*), определяет не только наступление перехода², но и является главным из факторов, однозначно определяющих величину *коэффициента потерь на трение* («коэффициента трения»): $\lambda = \lambda(\text{Re}, \dots)$. Для ламинарных режимов и труб круглого сечения, как мы помним, справедлива *формула Пуазейля* (*Poiseuille*), полученная аналитически:

$$\lambda = \frac{64}{\text{Re}}, \quad \text{Re} \leq 2,3 \cdot 10^3. \quad (7.1)$$

В 1911 г. Г. Блазиус (*H. Blasius*), обработав большой *эмпирический* материал по потерям при течении жидкостей в гладких трубах, пришел к следующей формуле для «ранней» подобласти турбулентного режима:

$$\lambda = \frac{0,3164}{\text{Re}^{0,25}}, \quad \text{Re} \in [2,3 \cdot 10^3 \dots 10^5]. \quad (7.2)$$

Формула Блазиуса (7.2) соответствует (выкладки опускаем) распределению осредненной скорости в осевом сечении трубы следующего вида, названного «законом одной седьмой степени»:

$$u(r) = u_{\text{max}} \left(1 - \frac{r}{r_0}\right)^{1/7}. \quad (7.3)$$

Но этот «закон» (7.3) не является универсальным. Во-первых, на оси трубы должно быть $\frac{du}{dr} \equiv 0$, что для (7.3) не выполняется. Во-вторых, с увеличением $\text{Re} > 10^5$ для лучшей аппроксимации профиля $u(r)$ зависимостью вида (7.3) — и для уточнения зависимости вида (7.2) — нужно брать показатель степени $\frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}$ и т. д. Таким образом,

²Перехода ламинарного течения в турбулентное.

при увеличении Re в турбулентном течении осредненный профиль скорости становится все «полнее», *как бы* стремясь к равномерному в пределе при $Re \rightarrow \infty$ (см. рис. НЕТ).

Из этого следует, что в широком диапазоне чисел Re закон сопротивления для турбулентных режимов вообще не может быть представлен эмпирической зависимостью в виде степенного одночлена

$$\lambda = \frac{A}{Re^b},$$

и более подходят для этого линейные зависимости от Re^{-b} . Наиболее употребительная формула, полученная по результатам экспериментов, проведенных и обработанных в 1932 г. И. Никурадзе (*I. Nikuradse*) —

$$\lambda = 0,0032 + \frac{0,221}{Re^{0,237}}, \quad Re < 3,24 \cdot 10^6. \quad (7.4)$$

Формулы последнего типа более соответствуют *логарифмическому профилю* скорости $u(r)$ (исключая окрестности стенки и оси трубы).

Потери на трение в шероховатых трубах. Все сказанное выше относилось к течениям жидкости в *гладких трубах*. Внося необходимую строгость, говорят о *технически гладких* трубах, когда их шероховатость (на данном режиме) никак не проявляется. Трубы, которые при малых значениях Re можно рассматривать как технически гладкие, при увеличении этого числа сверх некоторого предела обнаруживают отклонения от закона потерь для гладких труб в сторону увеличения λ . И при достаточно больших Re даже незначительная шероховатость стенок весьма значительно увеличивает коэффициент сопротивления трубы.

Качественно это объясняется тем, что при малых Re выступы шероховатости «тонут» в толще квазиламинарного «подслоя», а при повышении этого числа «выступают» в турбулентный поток, что вносит вклад в динамику взаимодействия стенки и потока и приводит к дополнительному вихреобразованию (рис. НЕТ, (а) и (б)).

Шероховатость задается описанием *формы* и характерного линейного размера. Некоторую стандартную шероховатость внутренней поверхности труб можно придавать, оклеивая их частицами (песчинками) в форме округлых зерен примерно одинакового размера (т. наз. *равномерно-зернистая шероховатость*). Ее можно характеризовать ли-

нейным абсолютным размером частиц или бугорков Δ — или же относительным: $\overline{\Delta} = \Delta/d$. В последнем случае общий закон сопротивления при течении жидкости с постоянными параметрами в шероховатых трубах примет вид

$$\lambda = \lambda (\text{Re}, \overline{\Delta}) .$$

Графически вид зависимостей для шероховатых труб отличается от рис. НЕТ тем, что для каждого значения $\overline{\Delta}_1$ кривая $\lambda (\text{Re}, \overline{\Delta})$ «отходит» от зависимости для гладкой трубы и в итоге «ложится» горизонтально, где $\lambda (\text{Re}, \overline{\Delta}) \rightarrow \lambda (\overline{\Delta}_1)$, что соответствует режиму «полного проявления шероховатости» ($\text{Re} > \text{Re}_*$). Этот режим еще называют «квадратичным», так как на нем, согласно (7.5) при $\lambda (\overline{\Delta}_1) = \text{const}$, потери давления по длине $\Delta p/l$ пропорциональны квадрату средней скорости потока, т. е. величина коэффициента вязкости μ не влияет на величину потерь на трение (начиная с $\text{Re} = \text{Re}_*$).

Для труб с *естественной* (технологической или эксплуатационной) шероховатостью кривая λ переходит в горизонталь квадратичного режима плавно убывая³ (рис. НЕТ). Для этой области имеется формула Кольбрука:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2lg \left(\frac{2,51}{\text{Re}\sqrt{\lambda}} + \frac{k_3}{3,7d} \right) ,$$

или *формула Альтшуля*:

$$\lambda = 0,1 \left(\frac{k_2}{d} + \frac{100}{\text{Re}} \right)^{0,25} ,$$

где k_3 — абсолютная величина шероховатости, эквивалентная зернистой в опытах Никурадзе, k_2 — величина, пропорциональная абсолютной шероховатости.

Формула Дарси — Вейсбаха. Так называется соотношение, связывающее потери напора от трения о стенку трубы с величиной (характерного) динамического давления в данном сечении:

$$\frac{\Delta p}{l} \approx \frac{dp}{dx} = -\lambda \frac{\rho u_{\text{cp}}^2}{2d_r} . \quad (7.5)$$

³В отличие от труб с равномерно-зернистой шероховатостью.

В формуле (7.5) $u_{\text{ср}}$ — средняя (среднерасходная) скорость в сечении трубы, $d_{\text{г}}$ — гидравлический диаметр в данном сечении. Использование гидравлического (или «эквивалентного») диаметра следует из того факта, что в турбулентном течении высокие градиенты профиля осредненной скорости имеют место вблизи стенок, к которым, собственно и приложены касательные напряжения; что позволяет определить этот самый эквивалентный диаметр как *отношение учетверенной площади сечения, деленной на периметр* $d_{\text{г}} = 4F/\Pi$ и с успехом использовать его для расчета по (7.5) потерь на трение по длине для труб некруглого сечения. Нетрудно проверить непосредственно, что для круглых труб $d_{\text{г}} = d$, для квадратных — $d_{\text{г}} = h$, где h — сторона квадрата; для труб с кольцевым сечением — $d_{\text{г}} = D - d$, где D и d — соответственно, внешний и внутренний диаметр.

Отметим, что для ламинарных режимов применение $d_{\text{г}}$ недостаточно адекватно; для них вводят «коэффициент формы поперечного сечения», и приводят (7.1) к виду

$$\lambda = K_{\text{ф}} \frac{100}{\text{Re}},$$

где, например, для круглых труб $K_{\text{ф}} = 0,64$ и т. д.

Трение и теплоотдача при течении в трубах. До сих пор имелись в виду случаи стационарных течений по трубам жидкостей с *постоянными параметрами*: $\rho = \text{const}_1$ и $\mu = \text{const}_2$. В расчетах нестационарных течений в пневмо- и гидро системах и в прочих газоздушных трактах, жидкости, во-первых, принимаются *сжимаемыми* (что обуславливает эффект распространения волн). Кроме того, при этом чаще всего для учета трения от стенку привлекаются модели в виде связей $\lambda = \lambda(\text{Re}, \overline{\Delta})$, полученные в стационарных условиях. При этом «закону» (7.5) в таком расчете применяется локально, вычисляется не градиент давления, а местное значение среднего по периметру касательного напряжения на стенке τ_w , т. е.:

$$\tau_w \frac{\Pi}{F} = -\lambda \frac{\rho u_{\text{ср}} |u_{\text{ср}}|}{2d_{\text{г}}}.$$

Кроме динамического (трение) взаимодействия со стенкой имеет место и теплоотдача — передача энергии в форме теплоты от потока в стенку или от стенки в поток. Местная (средняя по периметру) плот-

ность теплового потока на стенке q_w вычисляется по «закону» Ньютона – Рихмана, например

$$q_w = \alpha (T_w - T),$$

где α — коэффициент теплоотдачи, T_w — температура поверхности стенки, T — осредненная температура в потоке. Здесь приняты положительные направления: для τ_w — в направлении возрастания координаты x , для q_w — для потока теплоты от стенки в газ или жидкость. Величины τ_w и q_w могут использоваться в моделях основанных на уравнениях общего вида (2.29).

Безразмерной формой коэффициента теплоотдачи является *число Нуссельта* (с. 114); для труб: $Nu = \frac{\alpha d_s}{\kappa}$. Критериальным уравнением для описания зависимостей величин λ и Nu от режима (условий) стационарного течения и от свойств, например, газа, являются выражения от следующих чисел подобия: $Eu, Re, Pr, \gamma, \theta = T_w/T$ и $\bar{\Delta}$:

$$\lambda = \lambda (Eu, Re, Pr, \gamma, \theta, \bar{\Delta}),$$

$$Nu = Nu (Eu, Re, Pr, \gamma, \theta, \bar{\Delta}).$$

При фиксированных значениях Pr и γ (задан газ или класс газов) в указанных выражениях их можно опустить и использовать M вместо $Eu = 1/(\gamma M^2)$. Тогда список определяющих параметров сократится до четырех: M, Re, θ и $\bar{\Delta}$. Далее известно, что влияние M на течение в трубе не проявляется до $M < 0,8$, тогда, пренебрегая дополнительно лишь температурным фактором θ , приходим к зависимостям

$$\lambda = \lambda (Re, \bar{\Delta}),$$

$$Nu = Nu (Re, \bar{\Delta}),$$

которые могут быть получены из экспериментов с жидкостями при $\rho = \text{const}_1$ и $\mu = \text{const}_2$. Такой подход применен в СИМ «Альбея» для ГВТ, где в качестве рабочего тела рассматривается *идеальный газ*. Для жидкостей различной природы, для которых характерен разброс значений Pr , результаты экспериментов по теплоотдаче обрабатывают в виде $Nu = Nu (Re, Pr, \bar{\Delta})$ или $Nu = Nu (Re, Pr)$ — в случае технически гладких труб.

Потери импульса потока от трения о стенку и потери энергии вследствие теплоотдачи относят к *путевым потерям* в газоздушных трактах.

Аналогия Рейнольдса. В случае турбулентного течения газов, используя приближенное допущение о том, что эффективное число Прандтля $Pr_{эфф}$ во всем сечении трубы равно единице, можно выразить плотность теплового потока q_w коэффициент трения λ в этом же сечении. Основой для этого служит аналогия между процессами переноса импульса и энергии в стенку — *аналогия Рейнольдса*. Так, из допущения $Pr_{эфф} \equiv 1$ следует, подобие профилей $u(r)/u_{ср}$ и $(T(r) - T_w)/(T_{ср} - T_w)$. Из условий $q_w = \lambda(dT/dr)_w$ и $\tau_w = \mu(du/dr)_w$ (при $Pr_{эфф} = (\mu c_p/\lambda)_w = 1$) следует

$$q_w = \left| \frac{\tau_w}{u} \right| c_p (T_w - T).$$

Для течений газов с заметным отличием T от T^* в соотношении выше следует подставлять T^* , а не T .

Потери полного давления на местных сопротивлениях. Кроме путевых потерь, в расчетах трубопроводных систем учитываются потери на местных сопротивлениях, или *местные потери*. Подробно о местных сопротивлениях и соотношениях на них (для сжимаемых газов) говорится на с. 145, здесь же мы остановимся на выражении для потерь полного давления в жидкости при $\rho = \text{const}$.

Как следует из теории потенциального течения, полное давление $p^* = p + \frac{\rho u^2}{2}$ является мерой (если не рассматривать массовые силы) механической энергии частиц в жидкости с $\rho = \text{const}$. Проводя аналогию среднего течения жидкости в канале с такой струйкой тока, в гидравлике отслеживают снижение p^* вследствие путевых или местных потерь; в отсутствие потерь $p^* = p + \frac{\rho u^2}{2} = \text{const}$, т. е., *полное давление сохраняется*. Что касается местных потерь, то для их оценки для того или иного вида *местного сопротивления* (МС) используется *коэффициент местных потерь полного давления*, представляющий собой отношение падения полного давления $\Delta p_{12}^* = p_1^* - p_2^*$ на МС, к характерному значению динамического давления в сечении до или после МС:

$$\zeta_1 = \frac{\Delta p_{12}^*}{\frac{\rho u_1^2}{2}}, \quad \zeta_2 = \frac{\Delta p_{12}^*}{\frac{\rho u_2^2}{2}}.$$

В редких случаях потери на МС можно определить теоретически, в основном же они задаются в расчетах трубопроводных систем по данным экспериментов. Для конкретной сжимаемой жидкости и газа (течение между сечениями 1 и 2 предполагается адиабатным, см. также материал на с. 145 и далее):

$$\zeta = \zeta (M, Re) .$$

Критериальное уравнение для несжимаемой жидкости —

$$\zeta = \zeta (Re) ,$$

причем для достаточно больших значений числа Re влияние последнего на ζ перестает быть заметным, тогда

$$\zeta = \text{const} .$$

Течение жидкости и газа в пограничных слоях. Сопротивление хорошо обтекаемых тел — имеющих продольно вытянутый (без изломов, в пределе: каплевидный) профиль — при движении относительно потока жидкости определяется главным образом приложенными к поверхности *касательными напряжениями*.

При обтекании *маловязкими* газами и жидкостями, с существенными скоростями⁴, проявления вязкости и теплопроводности заметны лишь в тонком пристенном слое, в котором скорость и температура претерпевают резкие изменения вдоль нормали к поверхности — от нулевого значения относительной скорости (и температуры, массовых долей компонентов) на поверхности и до (асимптотически) их значений во внешнем потоке. Сама область, примыкающая к твердой поверхности тела, в которой при этом наблюдаются существенные изменения скорости, температуры и массовых долей компонентов, получила наименование *пограничного слоя* (ПС).

Для подобных течений сопротивление и подъемная сила, а также интенсивность тепло- и массоотдачи могут рассчитываться: во внешнем потоке — по уравнениям идеальной жидкости, а в ПС — по упрощенным уравнениям движения вязкой жидкости, которые называют *уравнениями пограничного слоя* (УПС). Для турбулентных течений сказанное остается в силе для полей осредненных характеристик потока. Упрощение в УПС состоит в том, что в них сохранены только члены УНС или

⁴Т. е. когда число Re не малó.

уравнений Рейнольдса, отвечающие процессам конвективного переноса в касательном направлении, а «градиентного» переноса — в нормальном (относительно стенки, т. е., «поперек» ПС), уравнение сохранения массы берется в неизменном виде, а давление в поперечном направлении считается постоянным. УПС, в которых учитывается «градиентный» перенос КД вязкостью, энергии теплопроводностью и вещества диффузией лишь в поперечном направлении, решить проще, чем УНС, поэтому комбинация модели «невязкого» внешнего потока и модели УПС для пристеночного ПС оказывается во многих случаях как адекватной, так и вполне экономичной, и давно применяется для решения прикладных задач в авиации и (авиа-)двигателестроении.

Приведенный ниже материал содержит эти и другие положения и некоторые результаты *теории пограничного слоя*. Подробное изложение этой теории можно найти в [18].

Уравнения ПС для несжимаемой жидкости. Покажем УПС на наиболее простом примере двумерного *стационарного* течения *несжимаемой* жидкости ($\rho = \text{const}_1$) с постоянным κ -том вязкости ($\nu = \text{const}_2$). Строгое обоснование проводимого упрощения уравнений опустим, приведем лишь его результат.

Итак для указанного вида течений моделью будет система УНС следующего частного вида:

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0. \end{aligned}$$

Упрощать уравнения будем для случая течения с образованием ПС на плоской пластине, поставленной без наклона навстречу набегающему потоку⁵. Получим:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp_e}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

⁵Если имеется не пластина, а хорошо обтекаемое тело иного вида, то перейдя от координат x, y к координатам η, ψ , связанным с поверхностью тела, получают УПС, содержащие тот же набор слагаемых.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Заметим, что уравнение движения по координате y исключено целиком, это связано с тем, что исключено из числа неизвестных давление p , оно принято для данного сечения x постоянным и равным давлению на (условной) границе ПС — определяемым *внешним* (англ. *external*) потоком. Запись dp_e/dx отражает зависимость давления в ПС на пластинке только от продольной координаты x .

Впервые УПС были получены в таком виде Л. Прандтлем в 1904 г. и поэтому иногда называются уравнениями Прандтля.

Ламинарный ПС на плоской пластинке. Если в рассматриваемой области течения в ПС отсутствуют турбулентные пульсации (течение является ламинарным), то говорят о *ламинарном* ПС. Решение УПС для ламинарного режима в частном случае постоянных свойств жидкости и плоской пластинки относительно просто и впервые было получено Г. Блазиусом в 1908 г.

При обтекании пластинки *однородным* потоком $dp_e/dx \equiv 0$ и УПС принимают вид

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Профиль $u(y)$ в решении Блазиуса, построенный в обобщенных координатах, показан на рис. НЕТ.

Отметим, что для описания ПС ПС могут создаваться теории «асимптотического слоя» или же «слоя конечной толщины». Решение Блазиуса относится к первой группе теорий (моделей) ПС. В них, чтобы указать конкретное значение толщины ПС, задаются критерием. Например, границей ПС считают геометрическое место точек, где «дефект скорости» составляет 0,01 или 1 % от ее величины во внешнем потоке в данном сечении по x . Так, по Блазиусу (см. рис. НЕТ), указанная толщина ПС составляет

$$\delta_{0,01} = 4,90 \sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}}.$$

Из последнего соотношения видно, что граница ПС проходит по закону квадратичной параболы с вершиной в передней кромке пластинки

(см. рис. НЕТ). Отметим, что в окрестности кромки УПС не применимы, так как там не выполняется условие $x \gg \delta_{0,01}$. Отметим также, что плотность линий тока внутри ПС снижается, что учитывают при уточненном расчете обтекающего потока, добавляя (в первом приближении) к размерам тела некоторую *толщину вытеснения*.

Местное значение напряжения трения, соответственно:

$$\tau_w = 0,664 \frac{\rho u_\infty^2}{2} \sqrt{\frac{\nu}{u_\infty x}},$$

а его безразмерное значение, получаемое отнесением к динамическому давлению в потоке, и обозначаемое как коэффициент сопротивления от трения c_f (англ. *friction*) —

$$c_f(\text{Re}_x) = \frac{2\tau_w}{\rho u_\infty^2} = \frac{0,664}{\sqrt{\text{Re}_x}},$$

где $\text{Re}_x = \frac{u_\infty x}{\nu}$ — число Рейнольдса, подсчитанное по расстоянию от передней кромки пластинки.

Сила сопротивления, приложенная к одной ширине пластинки длиной L и шириной 1 м:

$$F_{\text{тр}} = \int_L^0 \tau_w(x) dx = 0,332 \sqrt{\rho \mu u_\infty^3} \int_L^0 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 0,664 \sqrt{\rho \mu u_\infty^3} L,$$

тогда коэффициент сопротивления одной стороны такой пластины выразится как

$$c_{x \text{ тр}} = \frac{2F_{\text{тр}}}{\rho u_\infty^2 L} = \frac{2F_{\text{тр}}}{\rho u_\infty^2 L} = \frac{2 \cdot 0,664 \sqrt{\rho \mu u_\infty^3} L}{\rho u_\infty^2 L} = 1,328 \sqrt{\frac{\nu}{u_\infty L}} = \frac{1,328}{\sqrt{\text{Re}_L}}.$$

Турбулентный ПС (ТПС). О ТПС говорят, когда при обтекании тела имеет место турбулентный режим течения, причем для *среднего* поля течения выполняются соотношения, характерные для ПС ($\delta \ll L$ и т. п.).

Ламинарный режим течения в ПС сохраняется лишь до $\text{Re}_{\delta \text{ кр}} = \left(\frac{u_\infty \delta}{\nu}\right)_{\text{кр}} = 1650 \dots 5750$ и соответствующих $\text{Re}_{x \text{ кр}}$. Наступление турбулентного режима течения в ПС зависит от: (а) степени турбулентности

набегающего потока, (б) шероховатости пластинки и состояния ее передней кромки. Переход к турбулентности происходит и при нетурбулентном набегающем (внешнем) потоке. Итак, при $Re_x > Re_{x\text{кр}}$ наблюдается (схематически) следующая картина течения в ТПС — рис. НЕТ.

Даже при заметной турбулентности внешнего потока в структуре ТПС присутствует участок ламинарного ПС. В этой области возмущающее влияние внешней турбулентности сглаживается силами вязкости. При больших $Re_x \gg Re_{x\text{кр}}$ этим участком можно пренебречь.

Распределение скоростей по сечению ТПС примерно такое же, как по радиусу трубы, и приняв его, например, степенным. Тогда можно получить решение для $\tau_w(Re_L)$, $c_{x,\text{тр}}(Re_L)$ и т. д. Так, для логарифмического профиля

$$\frac{u}{v_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{v_* \delta}{\nu} + \text{const},$$

$$u = u_\infty - \frac{v_*}{\kappa} \ln \frac{\delta}{y},$$

получается неявного вида выражение для $\bar{\tau}_w$. Обычно пользуются интерполяционной формулой

$$\bar{c}_{x,\text{тр}} = \frac{0,455}{(\lg Re_L)^{2,58}},$$

упрощенно принимая чисто турбулентный ПС (пренебрегая наличием ламинарного участка), что допустимо при $Re_x \gg Re_{x\text{кр}}$.

Коэффициент сопротивления в ТПС уменьшается медленнее, чем в ламинарном ПС, соответствующий показатель степени при Re_x равен около $-4/5$ вместо $-1/2$. Так, если бы удалось «затянуть» ламинарный режим течения на пластинке до $Re_L = 500000$, то в этом месте было бы $\bar{c}_{x,\text{лам}} = 0,018$ вместо $\bar{c}_{x,\text{турб}} = 0,050$, т. е. в три раза меньше.

Подробнее теория ПС изложена в [18].

Течение жидкости в струях. Струйные течения интересны тем, что это — свободные течения с преобладанием (как и в ПС) «конвективно» составляющей переноса в продольном и «градиентной» его составляющей — в поперечном направлении.

Струйные течения очень распространены в технике. Сразу же отметим, что в энергомашиностроении приходится чаще иметь дело с турбулентными струями (ТС). Поле осредненного течения в «свободной» ТС имеет простой вид (см. ниже) и может быть рассчитано

по осредненным уравнениям в приближении тонкого сдвигового слоя, замкнутым довольно примитивными моделями турбулентного переноса. Для описания ТС могут строиться теории (модели), уравнения которых строятся на основе простые интегральные соотношений с использованием полуэмпирических соотношений для их замыкания.

Приведенный ниже материал содержит эти и другие теоретические положения и некоторые результаты *теории турбулентных струй*. Подробнее с ней можно ознакомиться по [6]. (Формулы расчета осредненных профилей скорости, температуры, массовой доли примеси в турб. струях²)

Затопленные и спутные струи. ... Схема течения в турбулентной струе. ... Интегральные соотношения в свободных струйных течениях. ...

7.2. Модель одномерного стационарного течения

Установившиеся во времени (стационарные) течения характеризуются независимостью картины течения от времени. Справедливые в рамках квазиодномерного («каналового») приближения соотношения можно получить упрощением описывающих течение газовой смеси на *гладком*⁶ участке канала интегральных уравнений сохранения масс компонентов, количества движения и энергии (2.26) – (2.28).

Соотношения, связывающие параметры потока в сечениях 1 и 2, разделенных конечным расстоянием $\Delta x = x_2 - x_1$, в этом случае принимают вид:

$$(\rho_k u F)_2 = (\rho_k u F)_1, \quad k = 1, \dots, K, \quad (7.6)$$

$$[(\rho u^2 + p) F]_2 = [(\rho u^2 + p) F]_1 + \int_{x_1}^{x_2} \left(p \frac{dF}{dx} + \tau_w \Pi \right) dx, \quad (7.7)$$

$$[(\rho u E + pu) F]_1 = [(\rho u E + pu) F]_2 + \int_{x_1}^{x_2} q_w \Pi dx, \quad (7.8)$$

а эквивалентные им (в подобластях гладкости *искомых функций* ρ_k , u , p и т. п.) уравнения в дифференциальной форме (при $x_2 - x_1 = dx \rightarrow 0$) с учетом $G = \rho u F$, $G_k = \rho_k u F$ и $\rho u E + pu = \rho u h^*$ примут вид

$$dG_k = d(\rho_k u F) = 0, \quad k = 1, \dots, K, \quad (7.9)$$

⁶В смысле гладкости функции $F = F(x)$.

$$dI = d[(\rho u^2 + p)F] = \left[p \frac{dF}{dx} + \tau_w \Pi \right] dx, \quad (7.10)$$

$$d(Gh^*) = d(\rho u F h^*) = q_w \Pi dx. \quad (7.11)$$

Для частного случая энергоизолированного ($q_w = 0$) течения однородной по составу среды между сечениями 1 и 2 уравнения (7.6) – (7.8) принимают вид:

$$G_2 = G_1, I_2 = I_1 + \int_{x_1}^{x_2} \left[p \frac{dF}{dx} + \tau_w \Pi \right] dx, (Gh^*)_2 = (Gh^*)_1. \quad (7.12)$$

Заметим, что уравнение сохранения энергии в (7.12), выражающее постоянство энергосодержания в теплоизолированном стационарном потоке, с учетом $G_2 = G_1$ сводится, очевидно, к $h_2^* = h_1^*$ — условию равенства удельных полных энтальпий в сечениях канала.

Уравнение количества движения в (7.12) записывается в нетривиальном виде — для его применения требуется вычислить интеграл потока импульса сил на стенке⁷. Поэтому обычно для выражения связи параметров стационарного потока в сечении 2 с параметрами в сечении канала 1 взамен уравнения КД привлекают связь между *давлениями стационарного торможения* p_2^* и p_1^* , например, следующего вида:

$$p_2^* = p_1^* \sigma(M_1, Re_1, \dots),$$

где $\sigma \leq 1$ — *коэффициент восстановления полного давления* — функция (определяемая чаще всего экспериментально) условий течения и свойств жидкости или газа, выражающая отношение полного давления в некотором сечении 2 к полному давлению в сечении 1 (которое *выше по потоку* сечения 2).

Введение безразмерной величины σ особенно оправданно для потока, энергетически изолированного на участке между сечениями 1 и 2. Как показано ниже (с. 145), в этом случае коэффициент σ полностью определяет *приращение энтропии* $\Delta s = s_2 - s_1$ на участке 1 – 2 и характеризует необратимые потери в потоке на данном участке (*гидравлические потери*).

⁷Учитывая и нормальное, и касательное напряжения при переменном по длине сечении канала.

К гидравлическим [16, 17] относят потери (полного давления, работоспособности, располагаемой работы), связанные с необратимым превращением части энергии потока в энергию теплового (хаотического) движения молекул, т. е. во внутреннюю энергию частиц жидкости или газа. Реальные течения, включая энергетически изолированные (и теплоизолированные — «адиабатные» — течения) всегда сопровождаются потерями.

Гидравлические потери условно подразделяют на *путевые потери* (потери на трение о стенку; механизм потерь — работа внутреннего трения) и *местные потери* (потери на *местных сопротивлениях*; такие потери связаны с нарушением равномерной структуры потока — его отрывом, присоединением и выравниванием — в областях, где нарушается гладкость профиля канала).

В простейшем случае, заменив уравнение КД в (7.12) условием постоянства полного давления: $p_2^* = p_1^* = \text{const}_1$, придем к идеализированной модели теплоизолированного изоэнтропного ($s_2 = s_1 = \text{const}_2$) течения на гладком участке канала (*сопла* или *диффузора*), расчет которого допустимо вести, пренебрегая как теплообменом со стенкой, так и трением.

7.2.1. Параметры одномерного потока как осредненные по сечению

Отметим особо, что квазиодномерное приближение оперирует однородными распределениями параметров потока в поперечных сечениях канала. Можно в связи с этим принять, что действительные распределения параметров⁸ потока заменяются *осредненными величинами*, получаемыми, например, из действительных локальных значений потоков: массы G , полного импульса $I = Gu + pF$ (потока КД) и энергии Gh^* в сечениях. Другой (также корректный) способ осреднения — осреднение по объемным плотностям массы, КД и полной энергии в сечении.

Для сечений, расположенных вдали от *местных сопротивлений*, величина статического давления p , получаемая при осреднении, мало отличается от получаемой приемником статического давления (в виде отверстия или отверстий по периметру стенки канала). Выполнение этого условия для некоторой задачи — критерий адекватности описания в квазиодномерном приближении.

⁸Для турбулентных течений — распределения, полученные осреднением по времени.

Отметим, что при обоих способах найденный по осредненным параметрам *поток энтропии* $Gs = \rho usF$ окажется выше действительного $\int_F s dG = \int_F \rho us dF$.

В расчетной схеме одномерного течения скорость потока u принимается положительной; таким образом, течение рассчитывается как движение газа или жидкости в положительном направлении оси x .

Число $M = u/c$, определяемое как отношение *скорости потока* в сечении к *скорости звука* в этом же сечении, играет важную роль параметра режима течения, определяющего степень проявления эффекта *сжимаемости* в потоке.

7.2.2. Газодинамические функции для параметров стационарного изоэнтропного торможения

Сказанное выше верно независимо от вида уравнения состояния. Ограничимся далее в данной главе течениями однородного по составу идеального *совершенного газа*, термическое УС которого $p = \rho RT$, где $R = c_p - c_v = \text{const}_1$, $c_p = \text{const}_2$, $c_v = \text{const}_3$, $\gamma = c_p/c_v = \text{const}_4$, а калорическое уравнение состояния берется также в частном виде:

$$h = h(\rho, T) = h(T) = c_p T,$$

вместо УС $h = h(\rho, T) = h(T) = h(T_0) + \int_{T_0}^T c_p(T) dT$, справедливого для идеальных газов вообще.

Введем для температуры T^* полного *стационарного торможения* определяющее соотношение $h^* = c_p T^*$, где $h^* = h + u^2/2$ — энтальпия стационарного торможения (*полная энтальпия*, удельное энергосодержание) в данной точке или сечении потока. Как известно из теории⁹ движения невязкого газа, величина T^* есть температура частицы газа в точке полного торможения: $|\mathbf{v}| \rightarrow 0$ (например, для струйки тока, набегающей на препятствие). Таким препятствием может быть «трубка Пито» (англ. *Pitot tube*, рис. 7.1).

Переход от статического давления p к давлению стационарного торможения p^* в той же точке происходит примерно при постоянной полной энтальпии и энтропии частиц газа, т. е. считается, что частица среды претерпевает адиабатный изоэнтропный процесс, для которого в част-

⁹На практике это оправдано для течений маловязких газов, обладающих малой же теплопроводностью, т. е. при больших $Re = \frac{\rho ul}{\mu}$, где l — характерный поперечный размер препятствия.

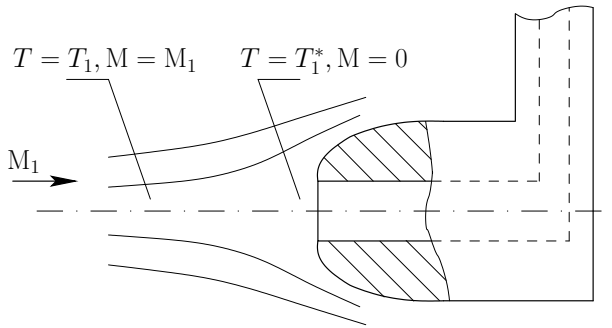


Рис. 7.1. К определению параметров торможения трубкой Пито в точке 1 потока

ном случае идеального совершенного газа справедливо уравнение адиабаты Пуассона, например (2.40).

При выполнении с достаточной точностью этого условия определяемая приемником полного давления (трубкой Пито) величина давления стационарного торможения p^* близка к теоретической; исключения составляют сверхзвуковые течения, где частицы газа на пути к трубке Пито пересекают отошедший прямой скачок уплотнения (с. 140), что должно учитываться при интерпретации измерений p^* .

Определим зависимость параметров стационарного торможения (p^* , T^* и др.) от статических параметров потока в том же сечении p , T , c и скорости u . С учетом выражений для T^* , h^* , $M = u/c$, $c_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$ и $c = \sqrt{\gamma RT}$:

$$h^* = c_p T^* = c_p T + \frac{u^2}{2},$$

$$T^* = T + \frac{u^2}{2c_p} = T \left(1 + \frac{u^2}{2c_p T} \right) = T \left(1 + \frac{u^2}{\frac{2}{\gamma - 1} c^2} \right) = T \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right),$$

а с учетом уравнения изоэнтропы в формах (2.38), (2.40) и (2.42) получим выражения для отношений статических параметров к параметрам стационарного торможения (рис. 7.2) в одном и том же сечении:

$$\frac{T}{T^*} = \tau(M, \gamma) = \frac{1}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2}, \quad (7.13)$$

$$\frac{p}{p^*} = \pi(M, \gamma) = \left(\frac{1}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}, \quad (7.14)$$

$$\frac{c}{c^*} = \alpha(M, \gamma) = \left(\frac{1}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (7.15)$$

$$\frac{\rho}{\rho^*} = \varepsilon(M, \gamma) = \left(\frac{1}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}. \quad (7.16)$$

Выражения (7.13) – (7.16) носят название *газодинамических функций* (ГДФ) для параметров *стационарного изоэнтропного торможения* (параметров стационарно заторможенного потока: p^* , T^* , ...); они удобны для пересчета статических параметров состояния в параметры стационарного изоэнтропного торможения и обратно в данной точке или в сечении *однородного* потока. (Табл. ГДФ см. в прил. А.)

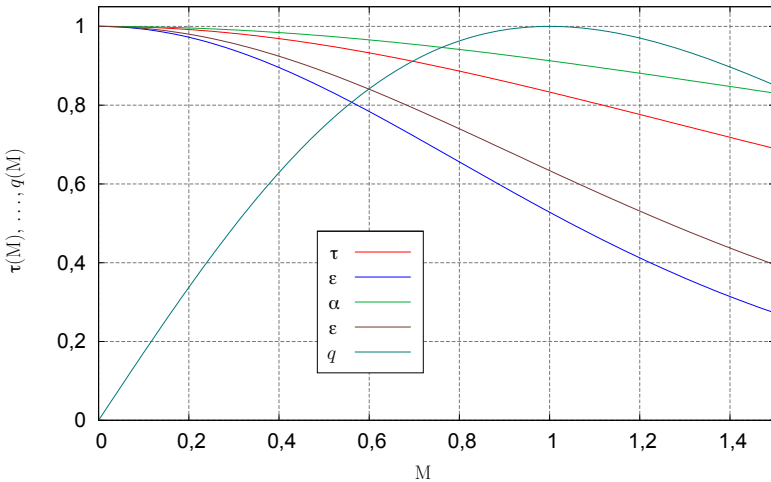


Рис. 7.2. Графики $\tau(M, \gamma)$, $\pi(M, \gamma)$, $\alpha(M, \gamma)$, $\varepsilon(M, \gamma)$ и $q(M, \gamma)$ для $\gamma = 1,40$

7.2.3. Модель изоэнтропного течения в каналах и соплах

Особенно удобно связывать через ГДФ (7.13) – (7.16) параметры состояния в разных сечениях канала в рамках модели идеального (обратимого) течения в каналах и соплах. В таком допущении температура

торможения T^* , давление торможения p^* и энтропия $s = s^*$ сохраняются постоянными при переходе от сечения к сечению.

Рассмотрим сужающееся сопло, в которое поток попадает из емкости 1 , где $p_1^* = p_1$, $T_1^* = T_1$ и $F_1 \rightarrow \infty$. В сечениях ниже по потоку нетрудно определить статические параметры, если известно соответствующее сечению число M . Опуская в записи ГДФ зависимость от отношения теплоемкостей γ , имеем:

$$\frac{p}{p^*} = \frac{p}{p_1} = \pi(M), \quad \frac{T}{T^*} = \frac{T}{T_1} = \tau(M) \text{ и т. д.}$$

Значение $M_c < 1$ (в узком сечении сужающегося сопла, т. е. на его *срезе*) соответствует дозвуковой скорости потока во всем сопле (рис. 7.3, а). Для этого режима характерно равенство $p_c = p_2$ (граничное условие «стыковки» с емкостью 2), которое означает, что частицы газа внутри сопла претерпевают полное расширение от давления p_1 до p_2 , теоретически, при $q_w = \tau_w = 0$ — по изоэнтропе.

Критический режим истечения и критическая скорость. Как известно [15], возрастание массового расхода G в изоэнтропном течении через сужающееся сопло при понижении давления p_2 (в емкости за соплом) возможно только до достижения на его срезе числа $M_c = 1$, при котором скорость в этом *критическом сечении* становится равной местной скорости звука $u = u_{кр} = c = c_{кр}$ (*критическая скорость*). Этому («критическому») режиму соответствует максимальный G , для него статические параметры в сечении среза определяются соотношениями $p_c = p_{кр} = p_1 \pi(M_c = 1)$, $c_c = c_{кр} = c_1 \alpha(M_c = 1)$ и т. д. При отношении теплоемкостей $\gamma = 1,40$ (двухатомный газ или смесь таких газов) критическое отношение давлений $(p_2/p_1)_{кр}$ составляет $\pi(1) \approx 0,528$.

Критическую скорость $c_{кр}$ удобно применять в расчетах, поскольку эта величина в энергоизолированном стационарном течении не изменяется (как и T^*) от сечения к сечению канала:

$$c_{кр} = c^* \alpha(1) = c_1 \alpha(1) = c_1 \sqrt{\frac{2}{\gamma + 1}} = \sqrt{\frac{2\gamma RT^*}{\gamma + 1}}. \quad (7.17)$$

Таким образом, меньшим давлениям газа в емкости 2 за срезом сужающегося сопла будут соответствовать большие значения расхода G и скорости потока в сечениях сопла и на его срезе и меньшие значения

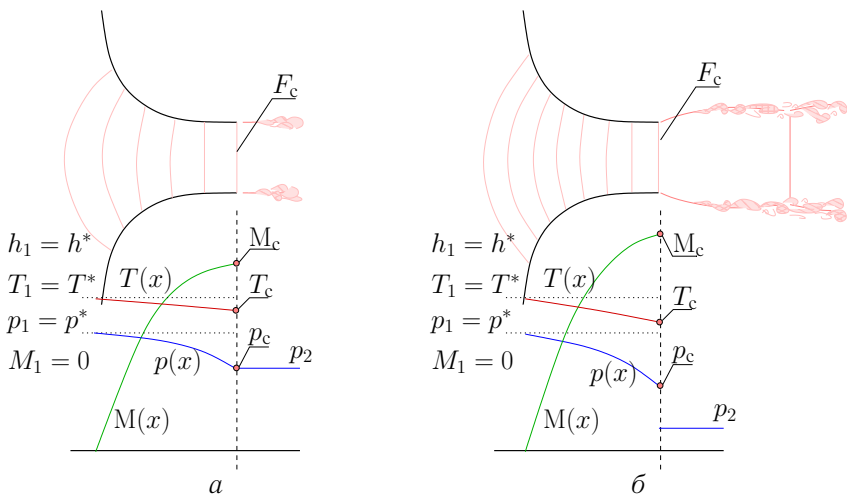


Рис. 7.3. Профили параметров при истечении газа через сужающееся сопло при: а) докритических; б) сверхкритических ($p_2/p_1 < \pi(1)$) отношениях давлений

статических параметров газа, но только до критического отношения давлений, т. е. до установления звуковой скорости потока $M_c = 1$ в сечении среза сопла.

Втекание струи в емкость является необратимым процессом: кинетическая энергия газа в струе переходит (в конечном счете) во внутреннюю энергию в процессе перемешивания с газом в емкости 2. Полные давления в сечении среза и в емкости 2 (при $M_c \leq 1$) относятся как

$$p_c/p_1 = p_c/p_1^* = p_c/p_c^* = \pi(M_c) = p_2/p_c^* = p_2^*/p_c^* < 1,$$

что отражает возможные или действительные необратимые процессы в емкости 2 при выравнивании параметров газа в ней.

При *сверхкритических* перепадах давлений

$$p_2 < p_{кр} = p_1 \pi(M_c = 1)$$

расход G при течении через такое сопло остается равным максимальному («критическому»), так как распределения параметров потока вдоль сопла соответствуют *критическому* отношению давлений $p_2/p_1 = \pi(1)$. Но при этом струя, истекающая в емкость 2, становится звуковой ($M_c = 1$) *недорасширенной*. Расширение частиц газа происходит уже

за соплом, в струе с образованием характерной структуры, содержащей местные области разгона до сверхзвуковой скорости и торможения со скачками уплотнения (рис. 7.3, б).

Приведенная скорость. Безразмерное отношение

$$\lambda = \frac{u}{c_{кр}}$$

называется *приведенной скоростью* потока; как и для числа M , существуют выражения газодинамических функций через λ [6, 14].

Сверхзвуковое сопло. Дальнейшее увеличение M в сопле (канале) после узкого сечения с $M = 1$ возможно далее при возрастании площади его сечения: $dF/dx > 0$ (рис. 7.4, а). На этом (сверхзвуковом) участке сопла для определения статических параметров в сечениях идеального сопла также применимы ГДФ (7.13) – (7.16).

Давление на срезе p_c такого сопла должно быть меньше критического, и если оно совпадает с давлением в емкости 2, говорят о *расчетном* режиме течения в сверхзвуковом сопле (*сопло Лавала*). При постоянном энергосодержании потока газа ($T^* = \text{const}$) в сечениях участка $dF/dx > 0$ при $M > 1$ увеличивается доля кинетической энергии потока в его энергосодержании и соответственно уменьшается доля энергии теплового движения молекул — снижается статическая температура T .

Режим и скорость стационарного истечения в вакуум. В пределе $F_c \rightarrow \infty$ температура T_c на срезе сверхзвукового сопла достигнет (теоретически) абсолютного нуля ($T_c \rightarrow 0$) и все удельное энергосодержание (энтальпия торможения h^*) будет определяться *удельной кинетической энергией* газа $u^2/2$; наступит режим *стационарного истечения в вакуум* при $M_c \rightarrow \infty$, $p_c \rightarrow 0 = p_2$ и максимальном теоретическом значении скорости потока:

$$u_{\max} = (u_c)_{\max} = \sqrt{2h^*}, \quad (7.18)$$

где, строго говоря, $h^* = h_1$ по параметрам в емкости, а $h(T = 0) = 0$. В частном случае идеального совершенного газа с $h^* = c_p T^*$

$$u_{\max} = \sqrt{2h^*} = \sqrt{2c_p T^*} = \sqrt{\frac{2\gamma R T^*}{\gamma - 1}} = \sqrt{\frac{2}{\gamma - 1}} c_1.$$

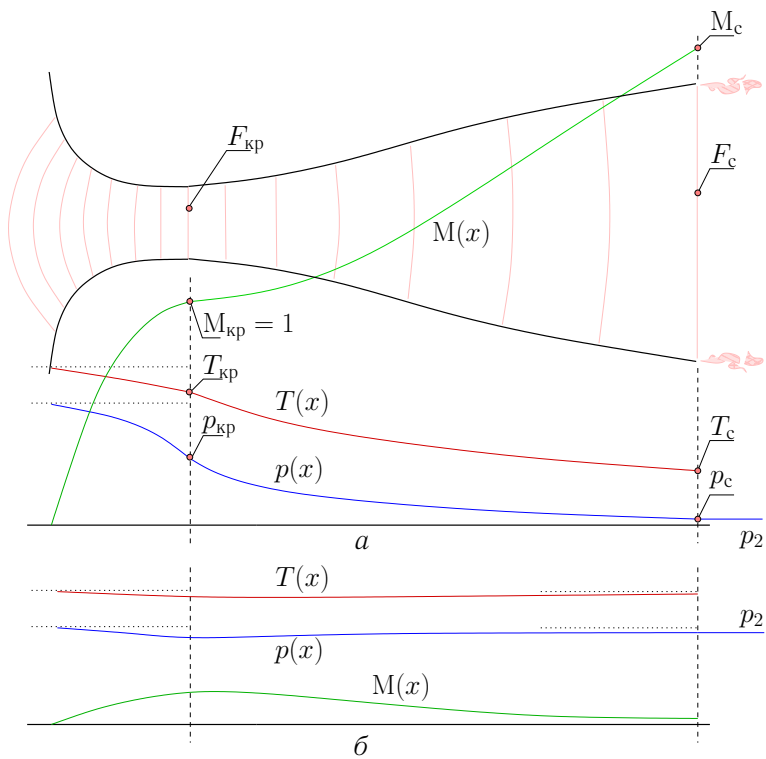


Рис. 7.4. Расчетные режимы течения в сопле Лавали: течение а) сверхзвуковое и б) дозвуковое

Понижение T на участке $dF/dx > 0$ сверхзвукового сопла может выйти за пределы диапазона применимости УС идеального газа для данного вещества; могут даже создаваться условия для конденсации. Проведенный же анализ выполнен в приближении совершенного газа, в котором простые формы УС справедливы вплоть до условий $p \rightarrow 0$, $T \rightarrow 0$, и, соответственно, $M \rightarrow \infty$ и $u \rightarrow u_{\max}$.

Дозвуковое течение в идеальном диффузоре или конфузоре.

В случае, когда в узком сечении *сопла Лавалья* звуковая скорость не достигается ($M < 1$), в последующем (расширяющемся) участке число M продолжит снижаться и течение по всей длине такого сопла останется *дозвуковым* (рис. 7.4, б).

В идеале стационарное течение в сужающемся участке канала (*конфузор*) может рассматриваться как *обратимый процесс* разгона газа и, соответственно, течение в расширяющемся участке (*диффузор*) — как обратимый процесс его торможения. В пределе $F \rightarrow \infty$ на выходе из такого канала поток, ускоренный в конфузоре, окажется стационарно заторможенным в диффузоре до тех же значений статических p и T , что и на входе в канал, так как протекает обратимый процесс. Конечная величина G в таком идеализированном (изоэнтропном) течении получится при теоретически бесконечно малом перепаде давления $\Delta p_{12} = p_1 - p_2$, что не может иметь места в действительности.

Реальное течение всегда сопровождается потерями на трение о стенку, и обычно существенна неоднородность распределения параметров по сечению канала, вплоть до отрыва потока от стенок, чему особенно подвержено течение в *диффузорах*. Поэтому действительный расход газа или жидкости через каналы, сопла, насадки и отверстия определяется условиями на входе и выходе из него, физическими свойствами рабочего тела и геометрией канала.

Напомним, что учет подвода или отвода тепла по длине канала (отклонения от адиабатности), трения о стенку (путевые потери) и влияния резких перераспределений потока в сечении (потери на местных сопротивлениях) в рамках *гидравлического (квазиодномерного) приближения* может выполняться с применением коэффициентов местных потерь, коэффициентов теплоотдачи и потерь на трение.

7.2.4. Газодинамические функции для расхода

Часто удобно бывает связать массовый расход G с параметрами торможения p^* , T^* и числом M в некотором поперечном сечении F кана-

ла. Выразим расход $G = \rho u F$ в сечении через следующие величины:

$$\rho = \rho^* \varepsilon(M, \gamma) = \frac{p^*}{RT^*} \left(\frac{1}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}},$$

$$u = Mc = M \sqrt{\gamma RT^*} = \frac{M}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{\frac{1}{2}}} \sqrt{\gamma RT^*},$$

тогда

$$G = \frac{p^*}{RT^*} F \frac{M}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}} \sqrt{\gamma RT^*}.$$

Умножив обе части этого равенства на $c_{кр}$ (7.17), после сокращений получим

$$G c_{кр} = \left(\frac{2}{\gamma-1} \right)^{\frac{1}{2}} \gamma p^* F \frac{M}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}}. \quad (7.19)$$

Уравнение (7.19) выражает расход газа в данном сечении через полное давление, критическую скорость звука и некоторую функцию числа M . Подбором коэффициента пропорциональности преобразуем эту функцию так, чтобы при $M = 1$ она была равна также 1. Полученная таким образом газодинамическая функция примет вид (см. рис. 7.2)

$$q(M, \gamma) = \frac{M}{\left[\frac{2}{\gamma+1} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right) \right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}} \quad (7.20)$$

и физический смысл *безразмерной плотности потока массы* $\frac{\rho u}{(\rho u)_{кр}}$, где $(\rho u)_{кр}$ — максимальное значение плотности потока массы при заданных параметрах торможения и движения со скоростью звука. Подставляя в (7.19) функцию $q(M)$, в обозначении которой для краткости опустим зависимость от γ , получим:

$$G c_{кр} = \frac{2\gamma}{\gamma+1} \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} p^* F q(M). \quad (7.21)$$

Наконец, заменяя в (7.21) величину $c_{кр}$ ее выражением по (7.17), получаем формулу, связывающую расход газа G в сечении с его площадью F и параметрами торможения p^* и T^* :

$$G = m \frac{q(M)p^*F}{\sqrt{T^*}}, \text{ где } m = \sqrt{\frac{\gamma}{R} \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}}. \quad (7.22)$$

Для воздуха с $R = 287,1 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$ до температур около 1000 К можно принимать $\gamma = 1,40$; $m = 0,04041 \text{ м}^{-1} \cdot \text{с} \cdot \text{К}^{0,5}$.

Для продуктов сгорания углеводородных топлив можно брать приближенно $\gamma = 1,33$; $R = 288,3 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$; $m = 0,03961 \text{ м}^{-1} \cdot \text{с} \cdot \text{К}^{0,5}$.

При решении некоторых задач удобнее связывать расход газа не с полным, а со статическим давлением в потоке (пример — на с. 152). Для таких случаев можно ввести газодинамическую функцию $y(M) = q(M)/\pi(M)$:

$$G = m \frac{y(M)pF}{\sqrt{T^*}}. \quad (7.23)$$

7.3. Виды газодинамических разрывов

Предположим, что в одномерном потоке имеется устойчивый разрыв характеристик среды, который движется с собственной скоростью w относительно неподвижной системы координат (рис. 7.5).

Заклучим разрыв в контрольный объем, с входным 1 и выходным 2 сечениями одинаковой площади ($F_2 \rightarrow F_1$). Определим скорость разрыва относительно среды: $u_r = w - u$, тогда абсолютные скорости частиц среды: $u_1 = w - (u_r)_1$, $u_2 = w - (u_r)_2$.

Запишем следующие из (7.12) законы сохранения в интегральной форме для этого контрольного объема, используя скорость среды u_r по координате x_r (см. рис. 7.5), связанной с движущимся разрывом:

$$\rho_2 \cdot (u_r)_2 = \rho_1 \cdot (u_r)_1, \quad (7.24)$$

$$\rho_2 \cdot (u_r)_2^2 + p_2 = \rho_1 \cdot (u_r)_1^2 + p_1, \quad (7.25)$$

$$h_2 + \frac{(u_r)_2^2}{2} = h_1 + \frac{(u_r)_1^2}{2}. \quad (7.26)$$

Анализ системы (7.24) – (7.26) показывает, что возможны два вида устойчивых разрывов параметров газа. Так, в случае $(u_r)_2 = (u_r)_1$ поток среды через поверхность разрыва отсутствует. Из уравнения (7.25) следует для этого случая равенство также $p_2 = p_1$. Других ограничений на значения параметров газа по обе стороны от скачка система (7.24) – (7.26) не накладывает, т. е. скачки плотности $\Delta\rho_{12} = \rho_2 - \rho_1$ или температуры $\Delta T_{12} = T_2 - T_1$ и т. д. могут быть произвольными. Рассмотренный разрыв носит название *контактного разрыва* (КР).

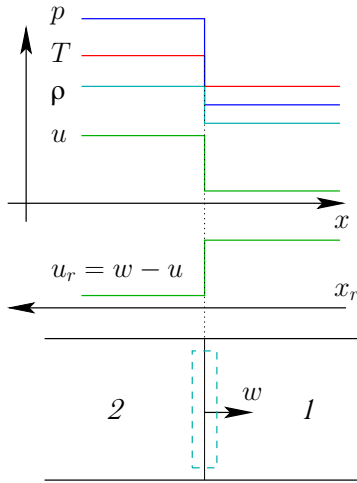


Рис. 7.5. Скачок параметров потока и замкнутый контур

Если в рассмотренном случае также и другой (помимо давления) параметр состояния при переходе через КР не изменяется, то такой КР не существует (*фиктивный КР*) и система условий сохранения массы, количества движения и энергии (7.24) – (7.26) удовлетворяется тривиально.

Более сложен случай, когда поток среды через поверхность разрыва существует, при этом $(u_r)_2$ и $(u_r)_1$ отличны от нуля и не равны: $(u_r)_2 \neq (u_r)_1$. Тогда давление, температура и другие параметры состояния испытывают скачок на поверхности разрыва, связь между ними оказывается нелинейной и должна устанавливаться в соответствии с системой законов сохранения (7.24) – (7.26). Поверхность разрыва в этом

случае называется фронтом *ударной волны* (УВ) или *скачком уплотнения* (о невозможности скачка разрежения см. с. 144).

Задавая вновь свойства среды уравнениями состояния идеального совершенного газа (для которого $h = c_p T$, $c_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$), получим (вывод см. в [14]) выражения, связывающие параметры потока по обе стороны от скачка уплотнения.

Относительное приращение скорости потока при переходе через ударную волну:

$$\frac{u_2 - u_1}{c_1} = \frac{2}{\gamma + 1} \left(M_y - \frac{1}{M_y} \right). \quad (7.27)$$

Относительное повышение давления на фронте УВ:

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M_y^2 - 1). \quad (7.28)$$

Относительное повышение плотности:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \left[1 - \frac{2}{\gamma + 1} \left(1 - \frac{1}{M_y^2} \right) \right]^{-1}. \quad (7.29)$$

Формулы (7.27) – (7.29) имеют вид газодинамических функций от M_y — «числа M ударной волны», определяемого как

$$M_y = \frac{w - u_1}{c_1} = \frac{(u_r)_1}{c_1} > 1,$$

выражающего отношение скорости *ударной волны* относительно газа перед ней $w - u_1$ к скорости звука в этом газе c_1 .

Разложение (7.28) и (7.29) в ряд Тейлора в окрестности $M_y = 1$ приводит к выражениям, связывающим значения одноименных параметров состояния по обе стороны от фронта простой изоэнтропной волны — *волны Римана*. В п. 8.6 показано, как соответствующие *газодинамические функции* можно получить из системы уравнений, описывающих частного вида одномерные *нестационарные течения*.

Адиабата Гюгонио. Выразив M_y через $\frac{p_2}{p_1}$ в (7.28) и подставив его в (7.29), получим зависимость $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ от $\frac{p_2}{p_1}$:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{p_2}{p_1} + 1}{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} + \frac{p_2}{p_1}}. \quad (7.30)$$

Выражение (7.30) носит название уравнения *адиабаты Гюгонио* (*Hugoniot*) и связывает относительное повышение плотности $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ при переходе частицы через скачок уплотнения со степенью повышения давления $\frac{p_2}{p_1}$. Известно, что для *изоэнтропного адиабатного процесса* подобная связь задается уравнением *адиабаты Пуассона* (2.38), в данном случае

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{1/\gamma}. \quad (7.31)$$

Сравнивая выражения (7.30) и (7.31), видим, что (7.30) — уравнение адиабаты (течение через скачок энергоизолировано), отличающейся от изоэнтропной. Можно заключить, что прохождение газа через скачок уплотнения не является изоэнтропным процессом, поскольку, как мы увидим ниже, сопровождается необратимым переходом части механической энергии потока в тепловую.

На рис. 7.6 показаны для сравнения графики двух адиабат: изоэнтропной адиабаты Пуассона и ударной *адиабаты Гюгонио* (7.30).

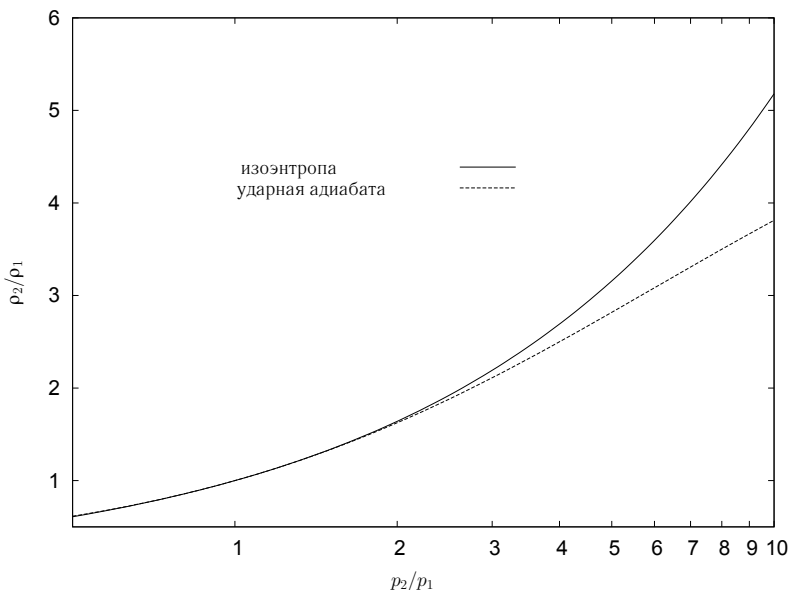


Рис. 7.6. Графики изоэнтропной и ударной адиабат для $\gamma = 1,40$

Из графиков видно, что при $\frac{\rho_2}{\rho_1} > 1$ ударная адиабата проходит ниже изоэнтропной, имея горизонтальную асимптоту

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \text{ при } \frac{p_2}{p_1} \rightarrow \infty.$$

Т. е., в отличие от изоэнтропного адиабатного сжатия, при сжатии частиц газа в УВ создаваемое уплотнение $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ не может превзойти величины $\frac{\gamma+1}{\gamma-1}$. Так, для $\gamma = 1,40$ предельное отношение $\frac{\rho_2}{\rho_1} = 6$. В то же время, как видно из рис. 7.6, при отклонениях $\frac{p_2}{p_1}$ от единицы на несколько десятков процентов можно без большой погрешности использовать «изоэнтропные» соотношения и на скачке уплотнения — фронте УВ (см. с. 174).

Можно показать, что удельная энтропия частицы газа при прохождении ею скачка уплотнения должна возрастать. Возьмем выражение для изменения энтропии совершенного газа, которое можно получить из (2.36):

$$s_2 - s_1 = c_v \ln \left[\frac{p_2}{p_1} \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^\gamma \right]. \quad (7.32)$$

При $\frac{\rho_2}{\rho_1} > 1$ аргумент логарифма больше единицы для ударной адиабаты (для изоэнтропы — равен 1), логарифм положителен, следовательно $s_2 > s_1$.

О невозможности скачка разрежения. Из формулы (7.32) следует, что устойчивый разрыв вида «скачок разрежения» невозможен, — в таком случае энтропия частицы газа в адиабатных условиях должна была бы уменьшаться, что противоречит второму началу термодинамики. Это можно показать и чисто физически — если в какой-то момент удалось бы создать ударную волну разрежения, то в следующий момент разрыв бы сгладился (это становится очевидным после обсуждения свойств волн конечной амплитуды на с. 169).

Связь потерь полного давления с приращением энтропии. Пересечение частицами газа скачка уплотнения — пример стационарного энергоизолированного течения с возрастанием энтропии. Подставляя в уравнение состояния (2.39) вместо статических параметров состояния параметры стационарного торможения, получим

$$s_2 - s_1 = s_2^* - s_1^* = -R \ln \left[\frac{p_2^*}{p_1^*} \left(\frac{T_1^*}{T_2^*} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \right],$$

и, принимая во внимание, что $T_2^* = T_1^*$, получим

$$s_2 - s_1 = -R \ln \frac{p_2^*}{p_1^*}.$$

В энергоизолированном потоке при возрастании энтропии s давление торможения (*полное давление*) также уменьшается $p_2^* < p_1^*$. Вводя коэффициент восстановления полного давления $\sigma = \frac{p_2^*}{p_1^*} \leq 1$, получим важное выражение, связывающее приращение энтропии с коэффициентом восстановления (сохранения) полного давления в энергоизолированном *стационарном течении* совершенного газа:

$$\Delta s = -R \ln \sigma. \quad (7.33)$$

О структуре фронта ударной волны. Подчеркнем, что *газодинамический разрыв* — математическая абстракция. В действительности, например, в случае УВ существует переходный слой толщиной порядка нескольких длин свободного пробега молекул, в котором однородный поток 1 преобразуется в однородный поток 2 в быстро протекающем термодинамически неравновесном процессе и при выполнении интегральных законов сохранения на макромасштабе. Можно сказать, что структура скачка (редко интересующая нас сама по себе) *подстраивается* так, чтобы удовлетворялись интегральные законы сохранения, а энтропия частиц получала бы известное приращение $\Delta s_{12} = s_2 - s_1$.

Скачок сечения. При моделировании течений в одномерном приближении приходится иметь дело с еще одним (помимо УВ и КР) видом устойчивого газодинамического разрыва — *скачком площади сечения* в месте скачкообразного изменения $F(x)$ сечения канала. Такой разрыв является устойчивым по определению, введение его в рассмотрение (в рамках квазиодномерного или «гидравлического» приближения) дает полезную модель *местного сопротивления*, которая и обсуждается в следующем разделе.

7.4. Модель местного сопротивления

Модель *местного сопротивления* (МС) является математической абстракцией и служит для задания соотношений между параметрами потока на стыке протяженных участков трубопровода вида *каналов*

и емкостей — т. е. на скачках площади сечения. Модель МС применима в рамках квазиодномерного («гидравлического») подхода к описанию процессов в сложных трубопроводах; применяется она и в нестационарной гидрогазодинамике трубопроводных систем (разд. 8).

В данном разделе рассматриваются только простые, «однопоточные» МС — такие, течение через которые происходит без разделения или слияния потоков (рис. 7.7).

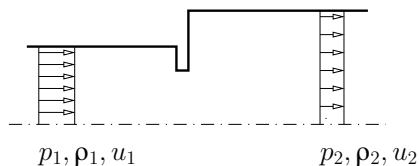


Рис. 7.7. Скачок сечения трубопровода — местное сопротивление

На расчетной схеме трубопровода МС задается как *скачок сечения* трубопровода (в общем случае $F_2 \neq F_1$) с установленным в месте скачка сечения конструктивным элементом, ограничивающим расход. Конечные значения величин F_i задаются для *каналов*, а для *емкостей* условно $F_1 \rightarrow \infty$ или $F_2 \rightarrow \infty$.

Течение через МС обычно рассматривается как стационарное ($G_1 = G_2$) и энергоизолированное ($h_1^* = h_2^*$) течение, в котором часть механической энергии на пути между сечениями 1 и 2 переходит в тепловую вследствие резкого перераспределения потока, часто ввиду образования отрывного течения, с последующим выравниванием до сечения 2. В таких условиях, как получено выше, $s_2 > s_1$ и $p_2^* < p_1^*$. Сразу отметим, что в модели МС, ввиду недостаточности и условности гидравлического подхода, сечения 1 и 2 могут (и должны) считаться сечениями канала (или емкости), непосредственно примыкающими к элементу, вызывающему резкое перераспределение потока и потери полного давления.

Для определения течения на конкретном МС, кроме соотношений непрерывности потоков массы и энергии при стационарном течении, необходимо выражение для связи полных давлений в сечениях 1 и 2, зависящее от геометрии МС и режима течения на нем.

Общеприняты [16, 17, 14] определения *коэффициента восстановления полного давления*

$$\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \frac{p_2^*}{p_1^*} = \frac{p_1^* - \Delta p_{12}^*}{p_2^*}, \quad (7.34)$$

а также *коэффициента местных потерь полного давления*

$$\zeta_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\Delta p_{12}^*}{0,5\rho_1 u_1^2} \quad \text{или} \quad \zeta_2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\Delta p_{12}^*}{0,5\rho_2 u_2^2}. \quad (7.35)$$

Расчет течения на МС в типичном случае сводится к задаче определения трех параметров одномерного потока *за* МС, в сечении 2. Для этого нужны три замыкающих соотношения, первые два из них — условия непрерывности потоков массы и энергии на МС, третье соотношение связывает полные давления.

Анализ размерностей для определения вида функции σ . Проводя эксперименты по определению характеристики потерь, достаточно полностью определить поток в сечении 1 и получить измерением *один* параметр потока в сечении 2; практически это будет, скорее всего, давление p_2 . В самом деле, получив в эксперименте с совершенным газом (разд. 7.5) четыре параметра потока, скажем, ρ_1 , p_1 , u_1 и p_2 , легко определить M_2 из уравнения $y(M_2)F_2 p_2 = y(M_1)F_1 p_1$, справедливого при $G_1 = G_2$ и $T_1^* = T_2^*$, температуру T_2 из $T_2 = T_1^* \tau(M_2)$, скорость потока — из $u_2 = M_2 \sqrt{\gamma RT_2}$, плотность ρ_2 — из уравнения состояния $\rho_2 = p_2 / (RT_2)$.

Получим форму представления σ и ζ в зависимости от определяющих («режимных») параметров течения с привлечением *анализа размерностей* величин (см. разд. 6).

Имеем функциональную связь, определяемую из опытов в виде $F(p_2, \rho_1, p_1, u_1) = 0$ или, в явной форме: $p_2 = f(\rho_1, p_1, u_1)$. Согласно II-теореме [9, 10, 2], безразмерные параметры, описывающие задачу, должны быть независимыми безразмерными комбинациями размерных параметров задачи. Таких безразмерных комбинаций две — $n + 1 - k = 2$, так как параметров, имеющих независимую размерность в приведенном списке, только два ($k = 2$) из четырех. Так, размерности ρ_1 и u_1 независимы, а размерность p_1 составляется из размерностей первых двух: $\rho_1 u_1^2$. Таким образом, связь в безразмерных переменных имеет вид, например $F\left(\frac{p_2}{p_1}, \frac{p_1}{\rho_1 u_1^2}\right) = 0$ или $\frac{p_2}{p_1} = f\left(\frac{p_1}{\rho_1 u_1^2}\right)$, а учиты-

вая, что $\frac{p_1}{\rho_1 u_1^2} = \frac{1}{\gamma M_1^2}$, искомая связь, которую следует определять, обрабатывая эксперименты, может быть представлена (при $\gamma = \text{idem}$), например, в виде:

$$\frac{p_2}{p_1} = f_1(M_1). \quad (7.36)$$

С учетом равенства $y(M_2)F_2p_2 = y(M_1)F_1p_1$ и (7.36) имеем

$$y(M_2) = y(M_1) [f_1(M_1)]^{-1} (F_1/F_2)$$

и приходим к выводу о существовании однозначной связи между числами M_1 и M_2 :

$$M_2 = f_2(M_1). \quad (7.37)$$

Знакомый нам вид выражения для связи параметров потока при переходе через МС получим, обозначая $\sigma = \frac{p_2^*}{p_1^*} = \frac{p_2}{p_1} \frac{\pi(M_1)}{\pi(M_2)}$, а учитывая (7.36) и (7.37):

$$\sigma = \sigma(M_1). \quad (7.38)$$

Итак, выражение (7.38) обоснованно является обобщенной формой представления характеристики гидравлических потерь в адиабатном течении на «однопоточном» МС. При выводе не делалось предположений о структуре течения между сечениями 1 и 2 и о том, каким — дозвуковым или сверхзвуковым — является течение. Поэтому выражения имеют достаточно общий характер; в указанном виде они справедливы для течений с малым влиянием вязкости среды и эффектов теплоотдачи в стенку — т. е. как раз для энергоизолированных течений через МС на режимах, *автомодельных* по Re.

Ввиду того, что количественное проявление *сжимаемости* зависит от отношения теплоемкостей $\gamma = c_p/c_v$, зависимость¹⁰ для газов с разными γ должна браться в виде

$$\sigma = \sigma(M_1, \gamma).$$

На режимах с проявлением влияния вязкости среды на потери полного давления («неавтомодельные» по числу Re режимы течения) включение коэффициента вязкости μ_1 в число определяющих факторов приведет к зависимости

$$\sigma = \sigma(M_1, \text{Re}_1, \gamma).$$

¹⁰Отметим сходство с газодинамическими функциями: $\pi(M, \gamma)$ и т. п.

Теперь покажем эквивалентность использования зависимостей для σ и ζ при обработке экспериментов или в расчетах по модели МС. Действительно:

$$\sigma(M_1) = 1 - \frac{\Delta p_{12}^*}{p_2^*} = 1 - \zeta_1(M_1) \frac{\rho_1 u_1^2}{2} \frac{\pi(M_1)}{p_1} = 1 - \frac{\gamma}{2} \zeta_1(M_1) \pi(M_1) M_1^2,$$

а в случаях, когда справедливо $\sigma = \sigma(M_1, Re_1)$, должно быть справедливым $\zeta_1 = \zeta_1(M_1, Re_1)$ и т. п.

Итак, как следует из теории размерностей и подобия, σ следует представлять зависимостями от чисел M и Re . Эти зависимости — *индивидуальные характеристики* потерь на МС, которые определяются натурными или вычислительными экспериментами.

При достаточно больших значениях числа Re (как правило, при $Re > 10^4$ по параметрам в номинальном сечении, согласно [16, 17]), коэффициент потерь ζ и коэффициент восстановления полного давления σ не зависят от этого режимного параметра — это *режим автономности* по Re , на нем $\zeta_1 = \zeta_1(M_1)$, или $\zeta_2 = \zeta_2(M_1)$ и $\sigma = \sigma(M_1)$.

Аналитические формулы для потерь на МС частного вида. Зависимость для σ имеет вид ГДФ, индивидуальной для данного МС. В общем случае для получения данных по σ необходимо воспроизводить поле течения, т. е. прибегать к натурному (продувка, см. п. 7.5) или вычислительному экспериментам.

Однако, например, при втекании в трубопровод из емкости через плавный вход, выполненный по *лемнискате Бернулли* (или достаточно плавно выполненный переход на стыке трубопроводов), малой величиной гидравлических потерь можно пренебречь и считать, что $\sigma \equiv 1$.

Нетривиальная же зависимость для σ может быть (в редких случаях) задана аналитически; так, например:

- при дозвуковом ($M < 1$) течении через внезапное расширение; в частности, при $\rho = \text{const}$, справедлива известная в гидравлике формула Борда – Карно;
- при дозвуковом же истечении из трубопровода в емкость ($F_2 \rightarrow \infty$) можно задавать $\sigma = \pi(M_c)$;
- при втекании из емкости в трубопровод с острыми кромками (*насадок Борда*, см. [4, 14] и п. 7.6.1).

Всегда при $\sigma \neq 1$ успех в получении аналитической формулы связан с тем, возможно ли «охватить» МС контрольной поверхностью, распределение потока КД по которой достоверно известно; так, во всех упомянутых выше конфигурациях МС нет стенок, расположенных навстречу потоку. (Подробнее об этом — в п. 7.6 на с. 157.)

Коэффициент расхода. Отверстие, сопло или короткий насадок, сообщающий между собой две емкости, — особая разновидность МС. Расчет течения через такое МС имеет целью определить мгновенные значения потоков массы и энергии. В данном случае задача расчета энергоизолированного течения будет решена, если будет определен действительный расход G , а поток энергии, согласно (2.34), определится произведением $Gh_1 = Gh_1^*$, где h_1^* — удельная энтальпия газа в емкости, из которой происходит истечение.

Характеристику такого МС (а также, что важно, и МС на рис. 7.7) можно задать и через *коэффициент расхода*, определяемый¹¹ как

$$C_d \stackrel{\text{def}}{=} \frac{G}{G_{\text{теор}}}.$$

Коэффициент расхода — также в общем случае не константа, а величина, определяемая условиями истечения. Теоретическая величина расхода $G_{\text{теор}}$ вычисляется как расход в адиабатическом и изоэнтропическом течении с $p^* = p_1^*$ и $T^* = T_1^*$ через сужающееся сопло с площадью сечения среза F_c (равной номинальному проходному сечению МС) в среду с давлением p_2 , т. е. $G_{\text{теор}}(p_1^*, T_1^*, p_2, F_c, \dots)$.

При истечении маловязких сжимаемых сред C_d зависит от отношения давлений на МС:

$$C_d = C_d \left(\frac{p_2}{p_1^*} \leq 1 \right). \quad (7.39)$$

В (7.39) отношение давлений — параметр режима течения, характеризующий проявления сжимаемости газа в потоке. Итак, для течений, автомодельных по Re (при $Re > 10^4$ по параметрам потока в номинальном сечении), для представления зависимости $C_d(\dots)$ достаточно связи

¹¹ Таким образом, *коэффициент расхода* C_d — отношение действительного расхода газа или жидкости к «теоретическому» значению расхода, определяемому по теории «идеального» сужающегося сопла с равным номинальному сечению МС сечением среза F_c , т. е. в предположении, что коэффициенты: *к-т сохранения полного давления* σ_{1c} (до этого сечения!), *к-т скорости* φ и *к-т сужения струи* ϵ равны единице.

вида (7.39). В противном случае в список определяющих величин в (7.39) следует включить некоторый аналог числа Re .

Характеристики MC , в рамках гипотез о стационарном и теплоизолированном течении, могут исчерпывающе задаваться функциональными связями вида $C_d(M_1' = p_2/p_1^*, Re_1, \bar{h}_{кл})$, или $\sigma(M_1, Re_1, \bar{h}_{кл})$, или даже $\zeta_1(M_1, Re_1, \bar{h}_{кл})$, где $\bar{h}_{кл}$ — некоторая безразмерная координата подвижного элемента в запорном органе (при наличии). Отдельная сложная задача — адекватно представить конкретными моделями указанные зависимости по всем указанным безразмерным определяющим эти k -ты величинам. «Калибруют» такие модели по первично обработанным данным статических продувок MC (п. 7.5).

7.5. Экспериментальное определение характеристик MC

Вообще говоря, наиболее надежный способ получения данных по потерям полного давления и коэффициентам расхода — натурный эксперимент (статическая продувка MC).

Ниже приведены схемы измерения параметров потока при продувках MC для определения потерь *полного давления* на стыках емкости и канала, двух каналов, а также *коэффициента расхода* — на стыке емкостей. Во всех случаях считается, что входное устройство на входе воздуха из атмосферы в канал (трубопровод) имеет плавные очертания, так что потерями полного давления в нем можно пренебречь. На всем интересующем участке (от атмосферы до ресивера-успокоителя) течение считается адиабатным и при обработке экспериментов можно пользоваться условием постоянства T^* в потоке. В таких допущениях техника продувок и методика обработки предельно просты — можно ограничиться измерением четырех параметров: массового расхода G , температуры T_0 и давления p_0 в атмосфере, а также давления в ресивере-успокоителе p_2 ; при необходимости методика может быть уточнена.

7.5.1. Потери при течении из емкости в канал

Первый вариант схемы продувки MC (рис. 7.8) следует использовать для изучения потерь на MC на режиме истечения из емкости в канал; на рис. 7.8 роль емкости играет цилиндр ДВС.

Здесь (как и во всех четырех вариантах) необходимо, варьируя производительность откачивающей системы, измерить на каждом режиме течения 4 параметра: давление p_0 и температуру T_0 воздуха в атмосфере,

давление в ресивере-успокоителе p_2 , а также массовый расход G . Метод измерения и обработки полученных данных един, например, как для окна в боковой стенке цилиндра 2-тактного ДВС (рис. 7.8, а), так и для тарельчатого клапана 4-тактного ДВС (рис. 7.8, б) и т. п.

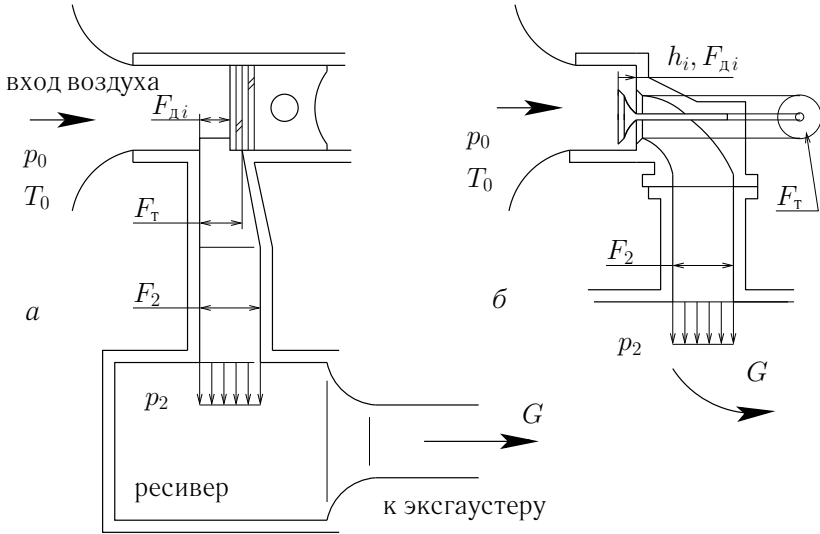


Рис. 7.8. Схема продувки МС при истечении из емкости (цилиндра ДВС)

Знать площадь сечения трубы F_2 на выходе в ресивер-успокоитель нужно, чтобы из уравнения расхода определить давление торможения p_2^* на ее срезе. Примыкающее к МС сечение F_T трубы служит для расчета «приведенного» к нему значения M_T числа M (именно M_T — определяющий фактор в модели течения на МС). Площадь же сечения $F_{ди}$ нигде не учитывается именно как площадь; эта величина (или высота подъема клапана h_i) лишь отмечает положение «запорного органа» и должна также варьироваться в экспериментах для снятия нескольких ветвей характеристики МС — $\sigma(M_T, h_i)$ или $\sigma(M_T, F_{ди})$.

При обработке используется допущение об адиабатности течения: $T_2^* = T_0^* = T_0$. Для каждой экспериментальной точки (величины расхода G) выполняются следующие действия. Полное давление на выходе из канала p_2^* определяется как $p_2^* = p_2 / \pi(M_2)$, где M_2 — из уравнения $G = m \frac{y(M_2) p_2}{\sqrt{T_2^*}} F_2$ (где $T_2^* = T_0$, определение $y(M)$ — на с. 140). Да-

лее определяется число M_T , «приведенное» к начальному сечению канала — в соответствии с допущением о проявлении потерь полного давления уже в начальном сечении трубы (квазиодномерное приближение); тогда можно считать течение на участке $t - 2$ изэнтропным ($p_2^* = p_T^*$ и $T_2^* = T_T^*$) и определить M_T из уравнения расхода $q(M_T)F_T = q(M_2)F_2$. Наконец, подсчитывается коэффициент восстановления полного давления $\sigma = p_T^*/p_0^*$, причем $p_0^* = p_0$ и $p_T^* = p_2^*$. Полученная пара значений $\{\sigma, M_T\}_i$ дает одну экспериментальную точку характеристики потерь $\sigma = \sigma(M_T)$ для направления течения из емкости в канал.

7.5.2. Потери при течении в емкость из канала

Противоположный случай (рис. 7.9) — течение из трубопровода в емкость, например, как показано на рисунке; емкость может быть также и цилиндром ДВС.

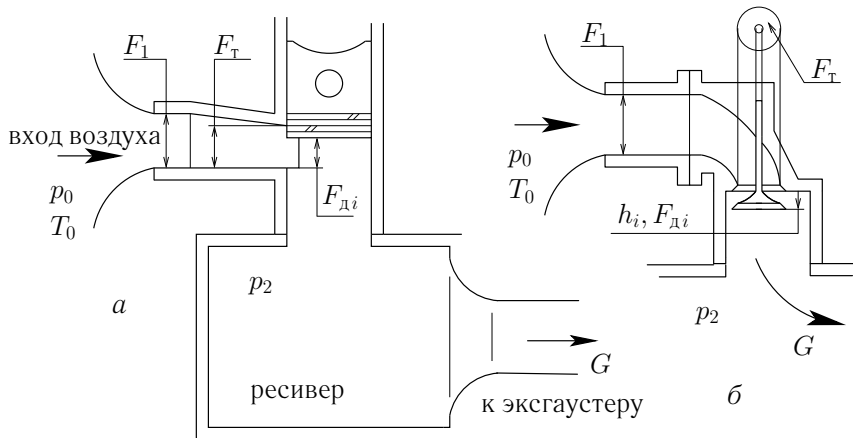


Рис. 7.9. Схема продувки МС при втекании в емкость (цилиндр ДВС)

При плавном входе из атмосферы подавляющая часть потерь полного давления связана с перетеканием из канала через узкое сечение $F_{ди}$ в цилиндр, тогда можно считать, что $p_T^* = p_1^* = p_0^* = p_0$. Допущение об адиабатности течения позволяет принять $T_2 = T_2^* = T_T^* = T_1^* = T_0$. Параметр режима течения — число M_T на входе в МС определяется (при $T_T^* = T_0$ и $p_T^* = p_0$) из уравнения $G = m \frac{q(M_T)p_T^*}{\sqrt{T_T^*}} F_T$, а коэффициент восстановления полного давления $\sigma = p_2^*/p_T^*$ вычисляется с учетом того,

что $p_T^* = p_0$ и $p_2^* = p_2$ (цилиндр и ресивер-успокоитель образуют условно единую емкость). Пара значений $\{\sigma, M_T\}_i$ дает одну экспериментальную точку характеристики потерь полного давления для направления течения из канала в емкость.

7.5.3. Потери при течении на стыке двух каналов

Третий случай — измерение потерь полного давления на МС, установленном на стыке двух трубопроводов — рис. 7.10 («скачок сечения»). Такая конфигурация типична для трубопроводов с запорным органом — подвижной дроссельной заслонкой, клапаном, расходомерной шайбой и т. п. Для МС с изменяемой геометрией требуется снять ряд ветвей характеристики потерь, соответствующих ряду положений запорного органа — подъема клапана h , величины номинального проходного сечения F_d или угла поворота заслонки φ .

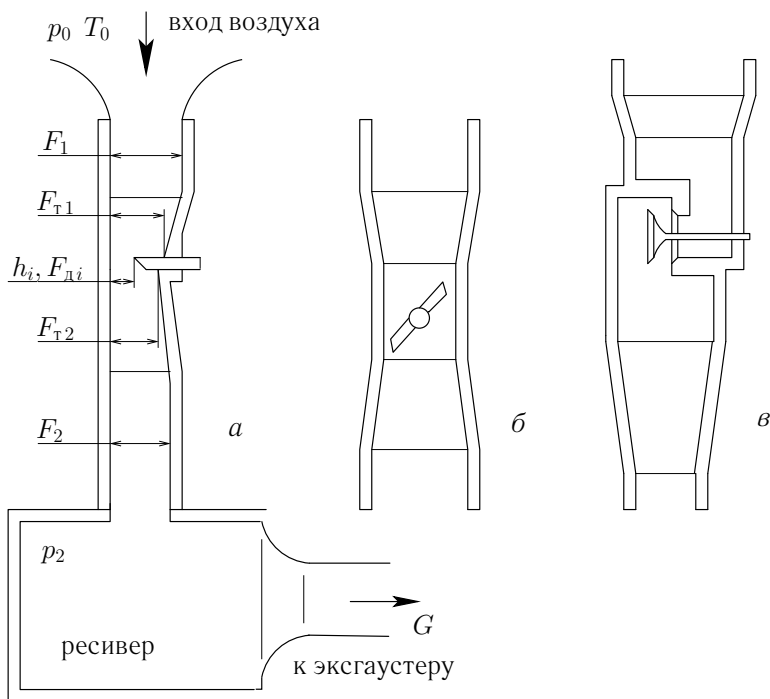


Рис. 7.10. Схема продувки МС в виде скачка площади сечения канала

И в данном случае при каждом измерении нужно знать четыре параметра, характеризующих течение: p_0 , T_0 , p_2 и G . Так же, как и для случая течения из емкости в канал (рис. 7.8), определяется давление торможения $p_2^* = p_2/\pi(M_2)$, где M_2 — из уравнения $G = m \frac{q(M_2)p_2}{\pi(M_2)\sqrt{T_2^*}} F_2$, причем считается, что $T_2^* = T_0$. Коэффициент $\sigma = p_{T2}^*/p_{T1}^*$, причем $p_{T1}^* = p_0$ (т. е. потерями во входном устройстве пренебрегаем) и $p_{T2}^* = p_2^*$ (т. е. потери давления на МС «приводятся» к начальному сечению трубы). Соответствующее этому σ значение числа M_{T1} на входе в МС определяем аналогично случаю *втекания* из канала в емкость (см. рис. 7.9) — из уравнения

$$G = m \frac{q(M_{T1})p_{T1}^*}{\sqrt{T_{T1}^*}} F_{T1},$$

где $p_{T1}^* = p_0$. Если изучается зависимость σ от числа M_{T2} на выходе из МС, поступаем аналогично случаю на рис. 7.8: находим M_{T2} из $G = m \frac{q(M_{T2})p_{T2}^*}{\sqrt{T_{T2}^*}} F_{T2}$, где $T_{T2}^* = T_0$ и $p_{T2}^* = p_2^*$.

В рассмотренных случаях с одной стороны (или же с обеих сторон) от МС имелся канал с отличной от нуля скоростью потока. Обработкой результатов продувок канала, выполненных для достаточно широких диапазонов режимов течения (как минимум, по параметру M_T), выявляется индивидуальная для данного МС *характеристика потерь полного давления*. Эта характеристика необходима для квазистационарного описания течения через местные сопротивления таких видов с учетом эффекта сжимаемости в моделях, описывающих стационарное или нестационарное течение газа в трубопроводе на основе *квазиодномерного приближения*.

Следует отметить, что канал после МС (по меньшей мере, в конфигурациях на рис. 7.8 и 7.10) должен иметь протяженность как минимум 8–10 калибров после МС, иначе зона отрыва потока за МС не локализуется и потери будут определены неправильно.

7.5.4. Расходная характеристика отверстия между емкостями

В рассматриваемом здесь случае наличия отверстия (сопла, насадка) на стыке двух емкостей мгновенного перемешивания (рис. 7.11) расчет передачи массы и энергии газа опирается на *расходную характеристику* такого МС.

При продувке по схеме рис. 7.11 роль емкости выше МС по потоку может играть атмосфера в лаборатории, роль второй емкости — сам ресивер-успокоитель. Регистрируя на каждом режиме все те же четыре величины — p_0 , T_0 , p_2 , G — и принимая во внимание (на этот раз) *номинальную* величину площади проходного сечения F_d , следует определять коэффициент расхода $C_d(p_2/p_0) = G/G_{\text{теор}}$, где G — действительный расход; теоретический расход $G_{\text{теор}}(p_2/p_0, T_0, F_d)$ определять на данном режиме, например, по модели идеального течения в дозвуковом сопле.

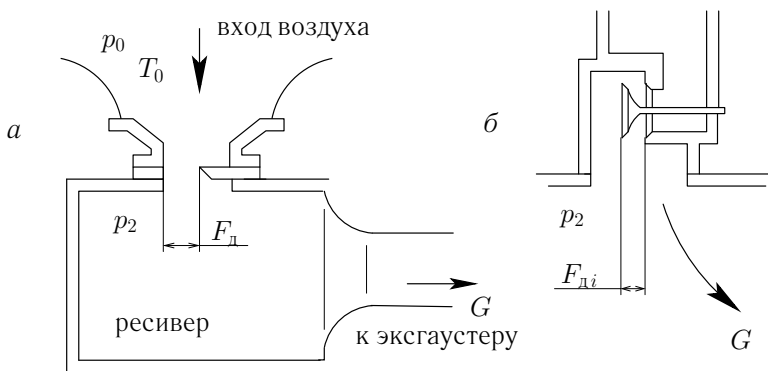


Рис. 7.11. Схема продувки МС, расположенного между емкостями

А именно, на режимах с докритическим отношением давлений $p_2/p_0 > (p_2/p_0)_{\text{кр}} = \pi(M_d = 1,0)$ — для газа с $\gamma = 1,40$ это отношение равно 0,528 — число M_d на срезе (т. е. в наиболее узком сечении) условного идеального сопла меньше единицы и определяется уравнением $p_2/p_0 = \pi(M_d)$. При критическом и закритических уровнях давлений p_2 число M_d равно 1,0.

Тогда «теоретический» массовый секундный расход газа (при площади сечения среза идеального сопла, равной «номинальной» площади F_d) определяется по выражению

$$G_{\text{теор}} = m \frac{q(M_d) p_d^*}{\sqrt{T_d^*}} F_d,$$

в котором (в силу изоэнтропности: $s_d = s_0$ процесса расширения в идеальном сопле) параметры торможения в этом сечении равны параметрам в первой «емкости» — атмосфере: $p_d^* = p_0$ и $T_d^* = T_0$.

7.6. Применение интегральных соотношений

В заключение покажем подход, позволяющий в некоторых случаях с достаточной точностью теоретически оценивать интегральные характеристики потоков жидкостей или газов.

Применительно к *стационарным течениям* подход состоит в задании правдоподобных гипотез о распределении параметров в потоке на контрольной поверхности («контуре») для замыкания ЗС в интегральной форме для выбранного контура. Достоверностью указанных гипотез и определяется точность оценки количественных показателей без привлечения численных расчетов или натуральных экспериментов.

7.6.1. Потери полного давления в насадке Борда

Насадком Борда называют сопло в виде тонкостенного участка цилиндрического канала, «вдвинутого» в емкость I . При истечении газа или жидкости поток вначале испытывает сужение, а затем, выравниваясь, заполняет канал, и в сечении среза F_c *полное давление* оказывается меньше давления в емкости I .

Потери полного давления в насадке Борда можно выразить аналитически, записав уравнение КД по контуру на рис. 7.12.

Действительно, $I_c = Gu_c + p_c F_c = p_1 F_c$, откуда

$$p_1 = p_c + \rho_c u_c^2 = p_c \left(1 + \frac{\rho_c u_c^2}{p_c} \right) = p_c (1 + \gamma M_c^2),$$

$$\sigma = \frac{p_c^*}{p_1^*} = \frac{p_c^*}{p_1} = \frac{p_c}{\pi(M_c, \gamma)} \cdot \frac{1}{p_c (1 + \gamma M_c^2)},$$

$$\sigma = \sigma(M_c, \gamma) = \frac{1}{\pi(M_c, \gamma) (1 + \gamma M_c^2)}.$$

Можно показать, что предельное значение $(M_c)_{кр}$ для насадки Борда равно единице (как и для идеального сужающегося сопла); на этом (критическом) режиме достигаются: критическое отношение статических давлений на насадке Борда — $(p_2/p_1)_{кр} \approx 0,417$ и коэффициентов — $(C_d)_{кр} = \sigma_{кр} \approx 0,789$ (для $\gamma = 1,40$).

7.6.2. Максимальная тяга сопла

Наибольшую силу тяги, при прочих равных условиях, создаст сверхзвуковое *реактивное сопло*, в выходном сечении которого

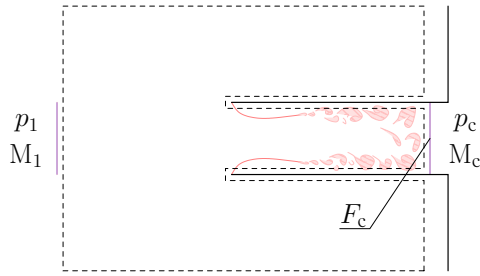


Рис. 7.12. К определению потерь в насадке Борда

го $M_c \gg 1$. Для получения высокой удельной тяги в реальных *реактивных двигателях* (РД) используются топлива и окислители, выделяющие большую химическую энергию на 1 кг рабочего тела. Этим обеспечиваются высокие значения h_1 , а $F_{кр}$, F_c и G подбираются по заданной тяге P так, чтобы получить расчетный режим течения ($M_{кр} \approx 1$ и $M_c \gg 1$) для заданных T_1 и $p_1 \gg p_2$.

Оценку максимальной (теоретической) тяги РД дает описание течения в сопле как адиабатного изоэнтропного истечения (модель изоэнтропного течения в сверхзвуковом сопле). Силовое воздействие потока на проточную часть можно получить, применив ЗС КД к замкнутому контуру (рис. 7.13).

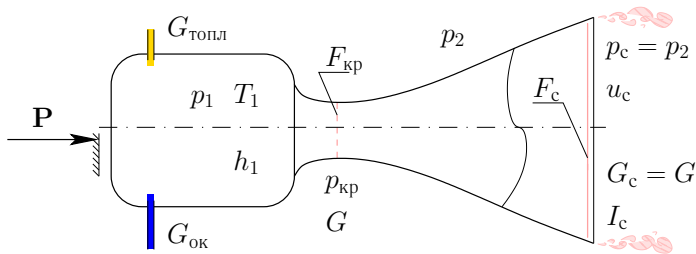


Рис. 7.13. К определению тяги РД

Пренебрегая потоками КД от подводимых топлива и окислителя, запишем равенство, справедливое на расчетном режиме:

$$P + p_2 F_c = I_c,$$

где P — модуль силы реакции опоры, уравнивающей силу тяги, $I_c = Gu_c + p_2 F_c$ — *полный импульс* потока на выходе из сопла; получим:

$$P = Gu_c,$$

а при истечении в вакуум ($p_2 = 0$, $u_c = u_{\max} = \sqrt{2h_1}$) —

$$P_{\max} = Gu_{\max} = G\sqrt{2h_1}, \text{ при } h(T = 0) = 0.$$

В пределах грубого допущения $h(T) = c_p T$ максимальная сила тяги равна $P_{\max} = G\sqrt{2c_p T_1}$, что проясняет влияние температуры продуктов сгорания РД на его тягу. Расход G через сопло определяется режимом течения со звуковой скоростью в его узком (критическом) сечении:

$$G = m \frac{q(M_{\text{кр}} = 1)p_{\text{кр}}^* F_{\text{кр}}}{\sqrt{T_{\text{кр}}^*}} = m \frac{p_1 F_{\text{кр}}}{\sqrt{T_1}}.$$

7.6.3. Наполнение исходно вакуумированной емкости

Нетрудно показать [14], что при наполнении совершенным газом вакуумированной емкости (рис. 7.14) температура газа в ней T_2 будет в γ раза выше, чем T_1 в окружающей атмосфере: $T_2 = \gamma T_1$.

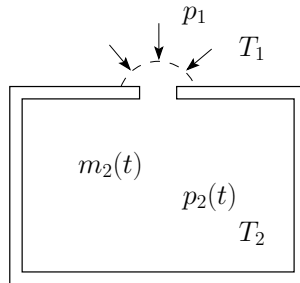


Рис. 7.14. Схема наполнения вакуумированной емкости

В начальных условиях задается равной нулю масса газа в емкости: $m_2(t = 0) = 0$. Согласно (2.33) и (2.34) при $K = 1$, элементарная масса dm_2 , попадая в емкость, вносит порцию энергии, увеличивающую *внутреннюю энергию* газа в ней: $d(m_2 e_2) = h(T_1) dm_2$. В результате в любой момент процесса наполнения $e_2 = m_2 e_2 / m_2 = h_1$, а с учетом

$e = c_v T$ и $h = c_p T$ (для совершенного газа) очевидна справедливость равенства $T_2(t) = (c_p/c_v) \times T_1 = \gamma \times T_1 = T_2 = \text{const}$.

При пересечении частицами газа границы атмосферы и емкости переносится *внутренняя* энергия и *кинетическая* энергия частиц газа, а также совершается *работа проталкивания* — термодинамической подсистемой «атмосфера» над подсистемой «емкость».

8. НЕСТАЦИОНАРНАЯ ГИДРОГАЗОДИНАМИКА

В главе изложена модель, описывающая *нестационарное течение* газовой смеси в газоздушном тракте как сложной расчетной области, состоящей условно из участков вида *каналов* и *емкостей*.

Течение описывается в рамках *квазиодномерного приближения*, т. е. как процесс с одной пространственной координатой. В основу модели положены (2.26) – (2.28) — *законы сохранения* (ЗС) «квазиодномерной» газовой динамики (на участках *каналов*), а также (2.33) и (2.34) — ЗС для «нульмерной» открытой термодинамической системы (на участках вида *емкостей*).

Многие положения и соотношения, примененные здесь в составе «квазиодномерной» модели *нестационарного* течения, получены в предыдущей главе (с. 116) как справедливые для условий *стационарного течения*. Поэтому для цельного восприятия материала главы полезно внимательно прочесть гл. 7.

Методы численного решения уравнений модели на участках каналов обсуждаются в гл. 9.

В данной же главе подробно показан подход, позволяющий корректно задавать условия совместности для граничных сечений (*местных сопротивлений*, разветвлений, ступеней турбомашин и т. п.), в которых сопрягаются участки трубопроводных систем.

8.1. Характеристическая форма уравнений

В подобластях гладкости искомых функций системе (2.26) – (2.28) ЗС эквивалентна система уравнений (2.29). Эта система *уравнений в частных производных* (УЧП), описывающая нестационарное движение газов и их смесей как квазиодномерное, относится к замечательному классу *систем квазилинейных гиперболических УЧП* [20, 21].

Такие уравнения можно преобразовать к так называемой *характеристической форме*, которая наглядно выявляет математическую природу исходных уравнений. Что еще важнее, на основе уравнений в такой форме получают частного вида выражения, на которых строятся: а) методы численного решения исходных уравнений и б) вспомогательные модельные соотношения, задающие условия совместности на граничных сечениях расчетной области в численных методах.

Покажем способ вывода характеристической формы уравнений квазиодномерного движения (2.29) для частного случая $K = 1$, т. е. для течения однородной по составу сжимаемой жидкости или газа. Напомним, что система (2.29) записана в *дивергентной* (или *консервативной*) форме и эквивалентна соответствующей системе интегральных законов сохранения лишь в подобластях, не содержащих разрывов искомым функций.

Прежде всего заменим уравнение энергии в (2.29) на эквивалентное ему (см. [14]) уравнение энтропии частицы, здесь —

$$\frac{d^0 s}{dt} = \frac{\partial s}{\partial t} + u \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{1}{T} \frac{dq}{dt}, \quad (8.1)$$

в котором $\frac{dq}{dt} = \frac{dq_{\text{вн}}}{dt} + \frac{dq_{\text{внеш}}}{dt}$ — удельная мощность энергии, переходящей в тепловую энергию частицы и подводимой как из внутренних источников (здесь: внутреннее трение, обусловленное наличием стенок канала), так и от внешних (здесь: теплоотдача со стенкой канала). Уравнение (8.1) уже записано в характеристической форме. В нем u — скорость частицы, задающая на плоскости (x, t) первую из характеристических кривых — траекторию частицы $u = dx^0/dt$. Производная $\frac{d^0 s}{dt}$ (называемая *субстанциональной*) берется вдоль траектории частицы и выражает изменение *энтропии* индивидуальных частиц — сохраняющих свою индивидуальность поперечных слоев сжимаемой жидкости. В частности, из (8.1) следует, что при $q_w = 0$ и $\tau_w = 0$ энтропия s движущейся частицы сжимаемой жидкости или газа неизменна.

Приведем к характеристической форме и два оставшихся уравнения системы. Вначале преобразуем уравнение (2.31) сохранения массы:

$$\frac{\partial \rho F}{\partial t} + \frac{\partial \rho u F}{\partial x} = F \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial F}{\partial t} + F \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \rho u \frac{\partial F}{\partial x} = 0,$$

но $\frac{\partial F(x)}{\partial t} = 0$, поэтому

$$F \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} \right) = -\rho u \frac{\partial F}{\partial x}. \quad (8.2)$$

Преобразуем предварительно уравнение движения из (2.29):

$$F \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial F}{\partial t} + F \frac{\partial (\rho u^2 + p)}{\partial x} + (\rho u^2 + p) \frac{\partial F}{\partial x} = \tau_w \Pi + p \frac{dF}{dx},$$

$$F \left(\rho \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) + F \left(\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} \right) = -\rho u^2 \frac{dF}{dx} + \tau_w \Pi,$$

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + u \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} \right) = -\frac{\rho u^2}{F} \frac{dF}{dx} + \frac{\tau_w \Pi}{F},$$

и, принимая во внимание (8.2), запишем систему уравнений в *недивергентной* форме, эквивалентную системе (2.29) при $K = 1$ в подобластях гладкости (дифференцируемости) искомым функций:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} &= -\frac{\rho u}{F} \frac{dF}{dx} = b_1, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\tau_w \Pi}{\rho F} = b_2, \\ \frac{\partial s}{\partial t} + u \frac{\partial s}{\partial x} &= \frac{1}{T} \frac{dq}{dt} = b_3. \end{aligned} \quad (8.3)$$

Умножим первое уравнение (8.3) на $-\frac{c}{\rho}$, сложим со вторым уравнением (8.3) и к результату прибавим третье уравнение, умноженное на $-\frac{1}{\rho c} \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)$. Перед этим второе уравнение, учитывая, что $p = p(\rho, s)$ и, в силу этого,

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right) \frac{\partial \rho}{\partial x} + \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right) \frac{\partial s}{\partial x},$$

преобразуем к виду

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right) \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right) \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\tau_w \Pi}{\rho F} = b_2.$$

С учетом $c = \sqrt{(\partial p / \partial \rho)_s}$ получим характеристическую форму УЧП

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + (u - c) \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{c}{\rho} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + (u - c) \frac{\partial \rho}{\partial x} \right] - \frac{1}{\rho c} \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right) \left[\frac{\partial s}{\partial t} + (u - c) \frac{\partial s}{\partial x} \right] &= \\ &= -\frac{c}{\rho} b_1 + b_2 - \frac{1}{\rho c} \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right) b_3 = b^-. \end{aligned} \quad (8.4)$$

Аналогично, умножив первое уравнение (8.3) на $\frac{c}{\rho}$, сложив результат с преобразованным вторым уравнением (8.3) и к результату прибавив

третье уравнение, умноженное на $\frac{1}{\rho c} \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)$, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + (u+c) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{c}{\rho} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + (u+c) \frac{\partial \rho}{\partial x} \right] + \frac{1}{\rho c} \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right) \left[\frac{\partial s}{\partial t} + (u+c) \frac{\partial s}{\partial x} \right] = \\ (8.5) \\ = \frac{c}{\rho} b_1 + b_2 + \frac{1}{\rho c} \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right) b_3 = b^+. \end{aligned}$$

Особенность уравнений (8.4) и (8.5) в том, что они связывают между собой приращения искомым функций $u(x, t)$, $\rho(x, t)$ и $s(x, t)$ вдоль определенных *характеристических направлений* (рис. 8.1).

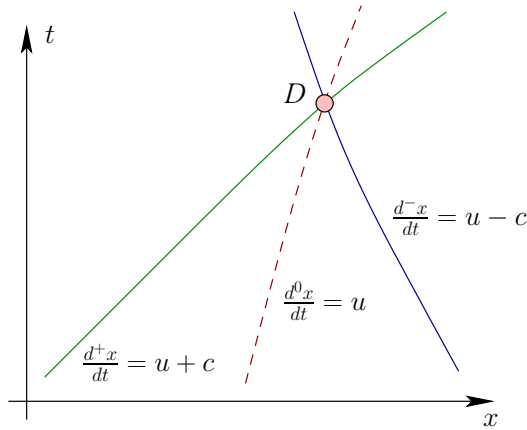


Рис. 8.1. К характеристической форме уравнений одномерного движения

Введя операторы дифференцирования в этих направлениях

$$\frac{d^\pm}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (u \pm c) \frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{d^0}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x},$$

запишем систему из трех уравнений как

$$\begin{aligned} \frac{d^-u}{dt} - \frac{c}{\rho} \frac{d^- \rho}{dt} - \frac{1}{\rho c} \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right) \frac{d^- s}{dt} = b^-, \\ \frac{d^+u}{dt} + \frac{c}{\rho} \frac{d^+ \rho}{dt} + \frac{1}{\rho c} \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right) \frac{d^+ s}{dt} = b^+, \end{aligned} \quad (8.6)$$

$$\frac{d^0 s}{dt} = b_3.$$

Теперь, поскольку $dp = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right) d\rho + \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right) ds = c^2 d\rho + \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right) ds$, то

$$dp - c^2 d\rho = \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right) ds = \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right) \frac{dq}{T} \quad \text{и} \quad \frac{1}{\rho c} dp = \frac{c}{\rho} d\rho + \frac{1}{\rho c} \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right) ds,$$

и можно переписать (8.6) в более компактном виде:

$$\frac{d^- u}{dt} - \frac{1}{\rho c} \frac{d^- p}{dt} = b^-,$$

$$\frac{d^+ u}{dt} + \frac{1}{\rho c} \frac{d^+ p}{dt} = b^+, \quad (8.7)$$

$$\frac{d^0 p}{dt} - c^2 \frac{d^0 \rho}{dt} = \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right) b_3 = b^0.$$

Поскольку при выводе системы (8.7) не делалось дополнительных предположений, она будет эквивалентна системе (2.29) при $K = 1$ также в подобластях гладкости искомых функций $u(x, t)$, $p(x, t)$ и $\rho(x, t)$.

Характеристические кривые. Уравнения (8.6) или (8.7) связывают между собой производные от искомых функций в направлениях, задаваемых на плоскости (x, t) уравнениями трех семейств характеристических кривых («характеристик», см. рис. 8.1):

$$\frac{d^\pm x}{dt} = u(x, t) \pm c(x, t), \quad \frac{d^0 x}{dt} = u(x, t). \quad (8.8)$$

Интегральные кривые уравнений (8.8) — «характеристики» уравнений одномерного течения в форме (8.6) или (8.7) — можно интерпретировать в (x, t) как *траектории элементарных возмущений* (волн); при этом (0)-характеристика — траектория движущейся частицы газа (элементарная волна вещества), (+)- и (-)-характеристики — траектории малых упругих возмущений (элементарных волн сжатия или разрежения), которые расходятся с местной *скоростью звука* в обе стороны от движущейся частицы.

Такая интерпретация позволяет установить важное свойство их решений — только решение, заключенное между крайними характеристическими кривыми (при $t \geq t_D$), может оказать влияние на решение в точке D , и наоборот, решение в точке D (см. рис. 8.1) может повлиять на величины термогазодинамических параметров в точках на (x, t) , заключенных между этими характеристиками при $t \geq t_D$. Соответствующие области получили названия *область влияния* и *область зависимости*.

Характеристическая форма уравнений для смеси. Вид системы уравнений в характеристической форме для движения *многокомпонентной смеси* (2.29) при $K > 1$ изменится не принципиально (без вывода). Несколько усложнятся правые части первых двух уравнений (8.7) или (8.6) — ввиду более сложного вида УС смеси: $p = p(\rho, s, Y_1, \dots, Y_{K-1})$.

Кроме того, в систему добавятся $K - 1$ уравнений, выражающих неизменность массовых долей компонентов $Y_k, k = 1, \dots, K - 1$ в движущейся частице смеси — условия нулевых значений субстанциональных производных от Y_k :

$$\frac{d^0 Y_k}{dt} = \frac{\partial Y_k}{\partial t} + u \frac{\partial Y_k}{\partial x} = 0, \quad k = 1, \dots, K - 1. \quad (8.9)$$

Характеристические кривые, совпадающие для этих $K - 1$ уравнений, соответствуют траектории частицы — характеристике (0)-го семейства, с наклоном $\frac{d^0 x}{dt} = u$ на плоскости (x, t) . Физическая интерпретация и выражения для наклонов траекторий элементарных упругих возмущений — (+)- и (-)-характеристик (для которых также $\frac{dx^\pm}{dt} = u \pm c$) не изменятся.

8.2. Граничные условия

Указанные особенности системы уравнений одномерной газовой динамики позволяют сформулировать требование к числу параметров, которые могут задаваться произвольно в *граничных условиях* (ГУ) с внешней стороны границ рассматриваемой области по времени. Так, в задачах для нестационарных квазиодномерных уравнений газовой динамики *число таких параметров в точке границы $(x_1, t_1)_\Gamma$ равно числу характеристических кривых, входящих извне в область в данном сечении x_1 в данный момент времени t_1* . Это число может быть в пределах от 0 до 3. Так, при сверхзвуковом втекании в область

на ее границе должны задаваться три независимых параметра одномерного потока (или алгебраические соотношения для независимого определения всех трех параметров). А при истечении со сверхзвуковой скоростью никакой информации о потоке извне при постановке ГУ не требуется и т. д.

8.3. Инварианты Римана

Характеристическая форма уравнений одномерного движения (8.7) справедлива для сжимаемой однородной среды с достаточно произвольным уравнением состояния вида $p = p(\rho, s)$ или $p = p(c, s)$.

В частном же случае идеального газа с постоянным *отношением теплоемкостей* (т. е. *совершенного газа*¹, для которого $c_p = \text{const}_1$, $c_v = \text{const}_2$ и $\gamma = c_p/c_v = \text{const}_3$) возможны некоторые упрощения. Для такого газа

$$dp = \left(\frac{\partial p}{\partial c} \right) dc + \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right) ds = \frac{2\gamma}{\gamma - 1} \frac{pdc}{c} + \frac{p}{R} ds,$$

$$\frac{1}{\rho c} dp = \frac{2}{\gamma - 1} dc + \frac{c}{\gamma R} ds.$$

Подставив последнее равенство в первые два уравнения системы (8.7) и изменив знак первого из уравнений, а вместо третьего взяв уравнение энтропии из (8.6), получим

$$\frac{d^- I_-}{dt} + \frac{c}{\gamma R} \frac{d^- s}{dt} = -b^- = -\frac{cu}{F} \frac{dF}{dx} - \frac{\tau_w \Pi}{\rho F} + \frac{c}{c_p T} \frac{dq}{dt},$$

$$\frac{d^+ I_+}{dt} + \frac{c}{\gamma R} \frac{d^+ s}{dt} = b^+ = \frac{cu}{F} \frac{dF}{dx} + \frac{\tau_w \Pi}{\rho F} + \frac{c}{c_p T} \frac{dq}{dt}, \quad (8.10)$$

$$\frac{d^0 s}{dt} = b_3 = \frac{1}{T} \frac{dq}{dt}.$$

В системе (8.10) фигурируют комплексные термогазодинамические величины

$$I_{\pm} = \frac{2}{\gamma - 1} c \pm u, \quad (8.11)$$

¹Приближение *совершенного газа* будет использоваться в дальнейшем без каких-либо оговорок. В конце главы обоснована применимость полученных соотношений для условий совместности на граничных сечениях трубопроводов при численном расчете течений калорически несовершенного газа или смеси газов.

получившие название² *инвариантов Римана*.

Складывая I_+ с I_- , а также и вычитая I_- из I_+ , получим простые выражения скорости звука c и скорости потока u в некоторой точке на плоскости (x, t) через I_+ и I_- :

$$c = \frac{\gamma - 1}{4} (I_+ + I_-), \quad u = \frac{1}{2} (I_+ - I_-).$$

Если известна также энтропия s в точке³, то прочие параметры состояния определяются из УС вида $\bar{\varphi} = \bar{\varphi}(c, s)$, где $\bar{\varphi} = [p, T, \rho, \dots]^T$.

Инварианты Римана (8.11) играют важную роль при анализе нестационарных течений частного вида. Покажем это, сделав для рассматриваемой подобласти (x, t) дополнительные предположения.

Во-первых, пусть рассматривается течение в канале постоянного сечения $F = \text{const}$ (либо это плоское одномерное неограниченное стенками течение); **во-вторых**, пусть отсутствуют трение о стенку ($\tau_w = 0$) и любого рода внешний теплообмен ($q_w = 0$); **в-третьих**, пусть в начальный момент времени t_0 распределение энтропии совершенного газа в рассматриваемой области однородно: $s = s(x, t_0) = s_0 = \text{const}$.

При выполнении этих условий правые части всех трех уравнений (8.10) обращаются в нуль. В соответствии с третьим уравнением удельная энтропия индивидуальных частиц газа останется постоянной и при $t > t_0$; т. е. однородное поле энтропии в подобласти останется также однородным: $s(x, t > t_0) = s_0$. Члены с $\frac{d^\pm s}{dt}$ в левых частях первых двух уравнений (8.10) обращаются в нуль, а уравнение переноса энтропии — третье УЧП в (8.10) — заменяется условием постоянства s в подобласти.

Итак, при выполнении вышеуказанных условий система (8.10) принимает частный вид

$$\frac{d^\pm I_\pm}{dt} = 0, \quad s(x, t) = s_0. \quad (8.12)$$

Уравнения (8.12) справедливы для «плоского» одномерного движения совершенного газа в подобластях, где искомые функции глад-

²Введены впервые Б. Риманом (*B. Riemann*) в XIX в. (в более общем виде) при рассмотрении уравнений газовой динамики.

³Это величина энтропии s проходящей через точку частицы (ее траектория задается «прибывающей» в точку (0)-характеристикой).

кие, а поле энтропии s однородно. Только тогда *инварианты Римана* (8.11) неизменны⁴ вдоль соответствующих характеристических кривых $\frac{dx^\pm}{dt} = u \pm c$.

8.4. Акустическое приближение

Уравнения *акустики* — линейные УЧП, которые можно получить, например, приняв коэффициенты перед производными в (8.7) за постоянные, определяемые параметрами состояния ρ_0 и c_0 в невозмущенной (в частном случае — неподвижной) среде — газе, жидкости и упруго деформируемом твердом теле.

Акустическое (линейное) приближение строго справедливо для *бесконечно малых возмущений* параметров состояния и скорости. На практике такое приближение хорошо «работает» для упругих волн в средах при *достаточно малых*⁵ *возмущениях* (относительно значений в невозмущенной упругой среде) т. е. $\Delta\rho \ll \rho_0$, $\Delta c \ll c_0$, $\Delta p \ll p_0$, $|u| \ll c_0$. Согласно этой модели, возмущения распространяются в среде с постоянной скоростью звука $c = c_0$, уединенные (изолированные) волны сохраняют неизменный профиль⁶ и общее решение задачи по уравнениям акустики может быть получено суммированием сколь угодно большого числа частных решений (принцип суперпозиции).

Для *нелинейных УЧП газовой динамики* это не так: скорости элементарных возмущений, согласно (8.8), переменные, которые равны $u \pm c$ (скоростям элементарных волн), и u — скорости частиц среды.

8.5. Волны конечной амплитуды

Будем называть *волнами конечной амплитуды* (ВКА) любое одномерное возмущение в среде, при котором скорости частиц u и параметры состояния среды (ρ , c , p и др.) изменяются на конечную величину. Этим подчеркнем основную особенность ВКА — скорости распространения *элементарных возмущений*, выражаемые *наклонами* характе-

⁴Слово *invariant* переводится именно так.

⁵Например, возмущения давления Δp , воспринимаемые человеческим ухом, лежат в диапазоне от порядка 10^{-4} Па (порог слышимости) до порядка 10 Па (болевого порог) при уровне давления в $p_0 \approx 10^5$ Па; акустическое приближение адекватно описывает столь малые возмущения в газах.

⁶Верно для плоских волн и обратимых процессов в идеально упругих средах.

ристик на плоскости (x, t) , в общем случае непостоянны (т. е. процесс нелинейный).

Уединенные волны конечной амплитуды. Удобно изучать особенности ВКА на примере *уединенной ВКА*. Будем называть так волну, в которой конечное по величине возмущение получает только один из инвариантов Римана на фоне однородного (как частный случай — неподвижного: $u = u_0 = 0$) газа. Такое возмущение может быть задано либо в *начальных условиях* (НУ), либо в ГУ.

Из сказанного в разделе 8.3 ясно, что если (см. с. 168): а) «закон» возмущения I_+ или I_- гладкий, б) сечение канала F постоянное, в) течение адиабатное ($q_w = 0$) и нет трения о стенку ($\tau_w = 0$), то вначале возникнет *изоэнтропная ВКА* (УВКА) сжатия или разрежения, движущаяся вправо при возмущении I_+ или влево — при возмущении I_- . Знак возмущений параметров состояния будет определяться знаком возмущения инварианта: при $\Delta I_{\pm} > 0$ образуется *волна сжатия* (рис. 8.2), в которой $\Delta p > 0$, $\Delta c > 0$, $\Delta \rho > 0$ и т. д.), иначе (при $\Delta I_{\pm} < 0$) образуется *волна разрежения*.

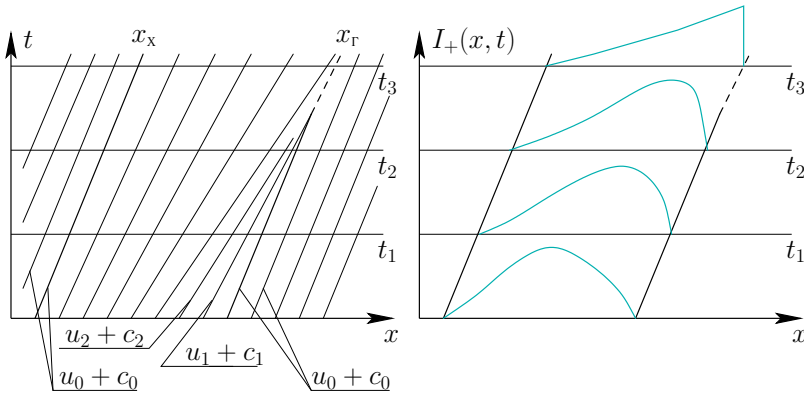


Рис. 8.2. Эволюция профиля исходно изоэнтропной УВКА сжатия

Рассмотрим УВКА сжатия (см. рис. 8.2). «Хвост» и «голова» такой волны вначале должны двигаться со скоростью звука по невозмущенному газу; так, для волны сжатия $u + c = (u_0 = 0) + c_0 = c_0$. Частицы газа с приходом волны вовлекаются в движение и в итоге перемещаются на конечную величину, претерпевая обратимое сжатие и расширение (процесс изоэнтропный). После прохождения такой УВКА перемещен-

ные частицы газа останутся в покое — с параметрами состояния, равными их исходным значениям.

Отметим, что в ВКА разрежения частицы газа перемещаются в направлении, противоположном направлению движения самой волны, а расширение частиц в волне разрежения *предшествует* их сжатию.

Уединенная ВКА переносит массу и энергию. Перенос массы связан с перемещением частиц и рассмотрен выше. Рассмотрим перенос энергии, заключенной в самой волне. Избыточное количество *полной энергии*

$$F \int_{x_x}^{x_r} [\rho E - (\rho E)_0] dx \quad (8.13)$$

при изоэнтропном течении в УВКА (рис. 8.2), а также длина такой волны $|x_r - x_x|$ некоторое время остаются постоянными⁷.

Нетрудно показать, что профиль *уединенной ВКА* с течением времени должен изменяться. Для УВКА сжатия скорость возмущений в теле волны нарастает при приближении параметров в ней к пиковым, в результате точка с пиковыми параметрами постепенно перемещается в сторону фронта («головы») волны (см. рис. 8.2). Действительно, здесь $u_1 + c_1 > u_0 + c_0$, $u_2 + c_2 > u_1 + c_1$ и т. д.

На плоскости (x, t) возникает (рис. 8.2) сгущение характеристик к фронту волны сжатия, с тенденцией к их пересечению — т. е. надвигается так называемая *градиентная катастрофа*. В действительности пересечения характеристик не происходит — противоречие разрешается образованием *скачка уплотнения* в области фронта волны.

На скачке уплотнения утрачивают смысл УЧП вида (8.6) или (8.7). Для описания этой особенности решения (разрыва искоемых функций) нужно привлекать интегральные соотношения на скачках (с. 140). Для частиц газа, пересекающих скачок, процесс не будет изоэнтропным — энтропия частиц будет необратимо увеличиваться в скачке. Параметры состояния таких частиц за хвостом волны уже не вернутся к значениям для невозмущенного газа, частица получит избыток внутренней энергии вследствие необратимого перехода (на скачке) части механической энергии потока в тепловую энергию хаотического движения молекул. Вследствие этого переносимая волной полная энергия (а также рас-

⁷Можно показать, что в данных идеализированных условиях не только *количество*, но и «качество» переносимой энергии сохраняется: *максимальная работа* [15] — аналогичный (8.13) интеграл по длине волны (с заменой E на l_{\max}) — постоянная величина.

полагаемая работа и максимальная работа) будут со временем только *убывать*.

Уединенные ВКА при наличии путевых потерь. Представим теперь, как должны повлиять на поток в виде исходно изоэнтروпной УВКА: а) только трение о стенки канала; б) совместное действие трения и теплообмена со стенкой.

В первом случае процессы, учитываемые лишь членом с τ_w в уравнении КД, приводят к снижению КД частиц в волне. В адиабатных условиях ($q_{\text{внеш}}/dt \equiv 0$) энтропия частиц газа будет увеличиваться сообразно теплоте $q_{\text{вн}}/dt \geq 0$, эквивалентной *работе сил внутреннего трения* в сечении канала. При этом «тепловая» составляющая полной энергии частиц получит приращение за счет «механической» составляющей. Полная же энергия всего нестационарного потока в канале сохранится, если такой канал закрыт и по концам, так как отсутствует обмен энергией с внешней средой. В этих условиях суммарная энтропия газа в канале будет возрастать, а количество полезной энергии (интегрально оцениваемое величиной *располагаемой работы*, а также *максимальной работы* L_{max} газа) — уменьшаться. С течением времени уменьшается количество всех видов заключенной между «головой» и «хвостом» волны энергии, как и интенсивность волны.

Если существенны также процессы теплоотдачи, учитываемые членом с q_w в уравнении энергии, возможен как дополнительный подогрев, так и охлаждение частиц газа. Случай движения УВКА с $T(x, t) \gg T_w$ моделирует реальные условия в нестационарном потоке нагретого рабочего тела на некотором участке тракта теплового двигателя. В этом случае на уменьшение энергии и интенсивности волны может влиять в основном именно теплоотдача в стенки тракта. Характер рассмотренных ранее процессов качественно останется прежним.

Уединенные ВКА в профилированных каналах. Приведенные выше соображения о характере течения в УВКА относились к случаю $F = \text{const}$. Движение УВКА в канале с плавным изменением площади сечения $F = F(x)$ сложнее, чем при $F = \text{const}$.

После взаимодействия исходной УВКА, например, с участком плавного перехода из узкого канала с $F_1 = \text{const}_1$ в широкий ($F_2 = \text{const}_2$, $F_2 > F_1$), волновой процесс в трубопроводе составляют *две* УВКА, которые назовем *прошедшей* и *отраженной* волнами. Итак, прохождение исходной УВКА через *плавное* сужение порождает

ет прошедшую и отраженную волны; последняя в данном случае имеет знак, противоположный знаку исходной волны. Так, если исходная волна — волна сжатия, то отраженная от участка с плавным сужением канала — волна разрежения; прошедшая волна имеет тот же знак, что и исходная. Данный качественный вывод можно сделать из анализа соотношений на характеристиках при $F = F(x)$ или же исследуя модель *распада разрыва на скачке сечения* (см. пп. 8.9.2).

Если $\tau_w \equiv 0$, $q_w \equiv 0$ и нет разрывов решения, движение частиц в волне — изоэнтропное, и сумма избыточной энергии в образовавшихся двух волнах — такая же, как в исходной УВКА. При наличии же трения, а также теплоотдачи в стенку, будет наблюдаться падение интенсивности обеих волн (качественно такое же, как в случае $F = \text{const}$), а при образовании скачка (скачков) уплотнения на фронте (фронтах) волн сжатия — еще и вследствие диссипации энергии на скачке и удлинения волн со скачком, движущимся быстрее звука в невозмущенном газе.

Заметим, что если имеют место загромождение сечения, отрыв потока и т. п., модель перехода с гладким профилем несостоятельна, и для описания в квазиодномерном приближении необходимо привлекать интегральные соотношения на *скачке сечения* канала ($F_2 \geq F_1$). Такие соотношения (для местных сопротивлений, разветвлений, ступеней турбомашин) содержат эмпирические данные по характеристикам конкретного устройства в стационарном течении. Условия совместности на скачках сечения (и др. видах граничных сечений) для алгоритма расчета нестационарного течения показаны в данной главе, начиная с пп. 8.9.2 (с. 188).

Заметим, что расчет движения даже уединенной ВКА в общем случае ($F = F(x)$, $\tau_w \neq 0$, $q_w \neq 0$, НУ и ГУ общего вида, разрывные решения) возможен лишь численными методами — с выделением особенностей (разрывов искомых функций) или же методами «сквозного» счета. Соответственно, аналитические решения одномерных нестационарных задач газовой динамики могут быть получены в основном для задач, содержащих *простые ВКА*.

Простые волны. Определим здесь⁸ *простую ВКА* как устойчивый структурный элемент «плоского» одномерного течения, состоящий из более или менее протяженного фронта, к которому примыкают с обеих сторон зоны с однородными распределениями параметров состояния

⁸Более строгое определение *простых волн* (называемых также *волнами Римана*) см. в [11].

и скорости, причем один из инвариантов Римана и энтропия s не изменяются при переходе через фронт такой волны.

Таким образом, *простая волна* — возмущение одного из инвариантов Римана. Волна, несущая возмущение I_- , движется относительно «невозмущенного» газа влево ((-)-волна, или l -волна), возмущение I_+ распространяется вправо ((+)-волна, или r -волна, см. рис. 8.3), согласно наклону характеристик, «несущих» возмущенное значение соответствующего инварианта.

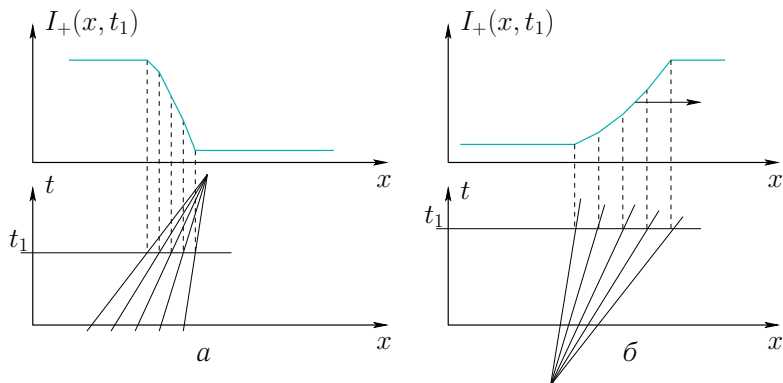


Рис. 8.3. Простые (+)-волны (волны Римана): а) сжатия; б) разрежения

Характеристики во фронтах *простых волн* — лучи, сходящиеся в точку плоскости (x, t) или расходящиеся из такой точки [11]. В первом случае речь идет о волне сжатия (при пересечении фронта возрастает плотность частиц в изоэнтропном процессе), во втором случае имеет место волна разрежения.

Далее в данной главе рассматриваются задачи, в решениях которых имеются определенные выше *простые волны разрежения*; по традиции они называются *центрированными волнами разрежения* (ЦВР) — лучи характеристик во фронтах расходятся из точки на (x, t) , заданной условиями задач.

Волны же сжатия простого вида, возникающие в решениях задач, *простыми волнами сжатия* не являются. Фронты этих волн суть скачки уплотнения, при пересечении которых энтропия частиц возрастает.

Однако практически всегда (если не оговорено особо) для описания фронтов таких волн сжатия далее будут привлекаться не условия

на скачках, а соотношения на фронтах *простых волн сжатия* (т. е. *волнах Римана*). Такая замена справедлива для волн сжатия достаточно малой интенсивности. Чтобы подчеркнуть данную условность, такие (гипотетические) волны именуются *изоэнтропными волнами сжатия* (ИВС). Практика показывает, что применение модели *волны Римана* вместо модели *ударной волны* не ведет к отклонениям в результатах решения задач, содержащих ударные волны умеренной интенсивности (и тем более — в результатах численных расчетов течений в газозвудушных трактах).

8.6. Газодинамические функции нестационарного торможения

Проанализируем случай, когда скорость частиц в волне Римана становится нулевой, т. е. происходит торможение волной среды перед ней. Процесс изменения параметров состояния частицы в волне — изоэнтропический, и можно говорить о (полном) изоэнтропном *нестационарном торможении*.

Рассмотрим сначала торможение совершенного газа (–)-волной сжатия или разрежения (рис. 8.4). Эту волну справа пересекают: траектория плоской частицы газа (где $s = \text{const}$) и (+)-«характеристика» (на которой $I_+ = \text{const}$).

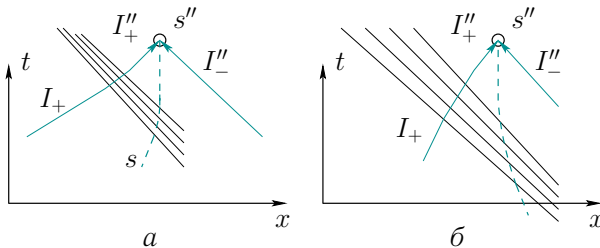


Рис. 8.4. Торможение (–)-волной Римана: а) сжатия; б) разрежения

Величины в зоне после торможения («параметры торможения волной, движущейся влево») отмечены на рис. 8.4 двумя штрихами (").

Из условия $I_+'' = I_+$ найдем скорость звука c'' в газе, нестационарно заторможенном ($u'' = 0$) этой волной:

$$I_+'' = \frac{2}{\gamma - 1} c'' + (u'' = 0) = I_+ = \frac{2}{\gamma - 1} c + u, \quad c'' = c + \frac{\gamma - 1}{2} u.$$

Обозначая $M = u/c$, получим:

$$\frac{c}{c''} = \frac{1}{1 + \frac{\gamma-1}{2}M}.$$

Равенство уд. энтропии $s'' = s$ позволяет привлечь уравнения изоэнтропы для выражения прочих параметров состояния в зоне нестационарно заторможенного газа. Отношения параметров в исходном потоке газа с $\gamma = c_p/c_v = \text{const}$ к параметрам нестационарного торможения этого потока волной, движущейся по нему влево, выразим группой ГДФ от числа M в исходном потоке:

$$\frac{c}{c''} = \frac{1}{1 + \frac{\gamma-1}{2}M} = \alpha''(M, \gamma),$$

$$\frac{p}{p''} = \left[\frac{c}{c''} = \alpha''(M, \gamma) \right]^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} = \frac{1}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M\right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}} = \pi''(M, \gamma),$$

$$\frac{T}{T''} = \left[\frac{p}{p''} = \pi''(M, \gamma) \right]^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \frac{1}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M\right)^2} = \tau''(M, \gamma),$$

$$\frac{\rho}{\rho''} = \left[\frac{p}{p''} = \pi''(M, \gamma) \right]^{\frac{1}{\gamma}} = \frac{1}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M\right)^{\frac{2}{\gamma-1}}} = \varepsilon''(M, \gamma).$$

Теперь рассмотрим торможение потока газа (+)-волной сжатия или разрежения. При переходе через ее фронт не изменяются: (-)-инвариант Римана: $I'_- = I_-$ и также уд. энтропия: $s' = s$ (рис. 8.5).

Действуя аналогично, из условия $I'_- = I_-$, найдем скорость звука c' в газе, нестационарно заторможенном ($u' = 0$) такой волной:

$$I'_- = \frac{2}{\gamma-1} c' - (u' = 0) = I_- = \frac{2}{\gamma-1} c - u, \quad c' = c - \frac{\gamma-1}{2} u,$$

и выразим отношение скорости звука в потоке к c' после нестационарно-го торможения:

$$\frac{c}{c'} = \frac{1}{1 - \frac{\gamma-1}{2}M}.$$

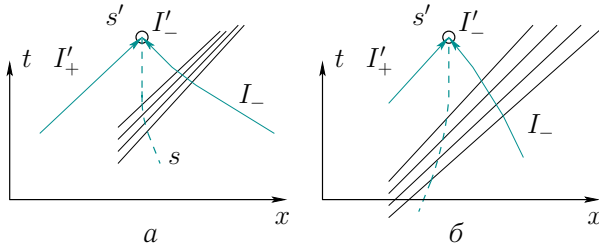


Рис. 8.5. Торможение (+)-волной Римана: а) сжатия; б) разрежения

Здесь величины в зоне после торможения (+)-волной (движущейся вправо; см. рис. 8.4) отметим одним штрихом (').

Привлекая уравнение изоэнтропы для прочих параметров состояния, получим группу ГДФ для случая торможения простой (+)-волной:

$$\frac{c}{c'} = \frac{1}{1 - \frac{\gamma-1}{2} M} = \alpha'(M, \gamma),$$

$$\frac{p}{p'} = \left[\frac{c}{c'} = \alpha'(M, \gamma) \right]^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} = \frac{1}{\left(1 - \frac{\gamma-1}{2} M\right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}} = \pi'(M, \gamma),$$

$$\frac{T}{T'} = \left[\frac{p}{p'} = \pi'(M, \gamma) \right]^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \frac{1}{\left(1 - \frac{\gamma-1}{2} M\right)^2} = \tau'(M, \gamma),$$

$$\frac{\rho}{\rho'} = \left[\frac{p}{p'} = \pi'(M, \gamma) \right]^{\frac{1}{\gamma}} = \frac{1}{\left(1 - \frac{\gamma-1}{2} M\right)^{\frac{2}{\gamma-1}}} = \varepsilon'(M, \gamma).$$

Графики полученных ГДФ показаны на рис. 8.6.

Итак, одномерный (стационарный или нестационарный) поток в некотором сечении характеризуется как наборами статических параметров состояния (p, T, ρ, c, \dots) и параметров *стационарно изоэнтропно заторможенного* потока ($p^*, T^*, \rho^*, c^*, \dots$), так и двумя наборами (p', T', ρ', c', \dots и $p'', T'', \rho'', c'', \dots$) параметров потока, *нестационарно изоэнтропно заторможенного* в плоских волнах Римана соответствующего направления.

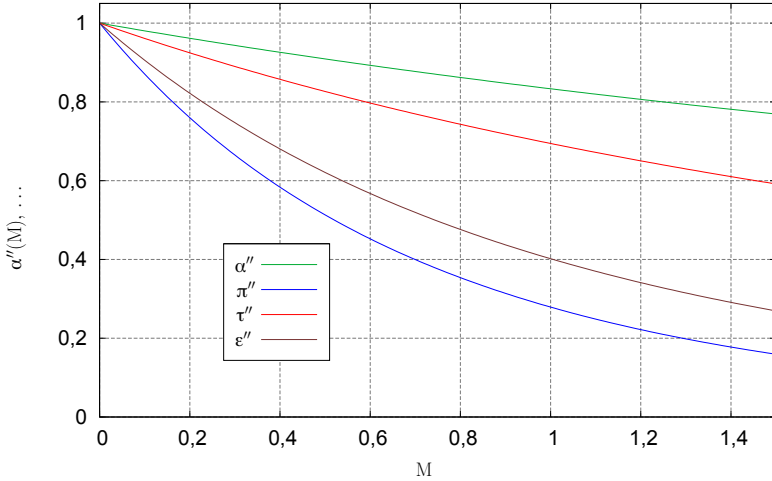


Рис. 8.6. Графики функций $\alpha''(M, \gamma) = \alpha'(-M, \gamma)$ и др. для $\gamma = 1,40$

Полученные ГДФ применяют вместо соотношений вдоль характеристик для удобства записи отношений параметров газа на простых изоэнтропных волнах (волнах Римана) в элементарных задачах нестационарной ГД.

Так, для (+)-волны *любого знака* (рис. 8.7, а и б) справедливо $p'_2 = p'_1$ и т. д. Учитывая определение $p/p' = \pi'(M, \gamma)$, отношение давлений на такой волне выражается отношением ГДФ π' :

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{p_2}{p'_2} \cdot \frac{p'_1}{p_1} = \frac{\pi'(M_2, \gamma)}{\pi'(M_1, \gamma)} = \frac{\pi'_2}{\pi'_1}.$$

Аналогично выражаются отношения прочих параметров состояния по обе стороны от (+)-волны:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\tau'(M_2, \gamma)}{\tau'(M_1, \gamma)}, \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\varepsilon'(M_2, \gamma)}{\varepsilon'(M_1, \gamma)}, \quad \frac{c_2}{c_1} = \frac{\alpha'(M_2, \gamma)}{\alpha'(M_1, \gamma)}.$$

Так же доказывается, что отношения параметров состояния на (-)-волнах выражаются отношениями ГДФ (рис. 8.7, в и г):

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\pi''(M_2, \gamma)}{\pi''(M_1, \gamma)}, \quad \frac{T_2}{T_1} = \frac{\tau''(M_2, \gamma)}{\tau''(M_1, \gamma)}, \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\varepsilon''(M_2, \gamma)}{\varepsilon''(M_1, \gamma)}, \quad \frac{c_2}{c_1} = \frac{\alpha''(M_2, \gamma)}{\alpha''(M_1, \gamma)}.$$

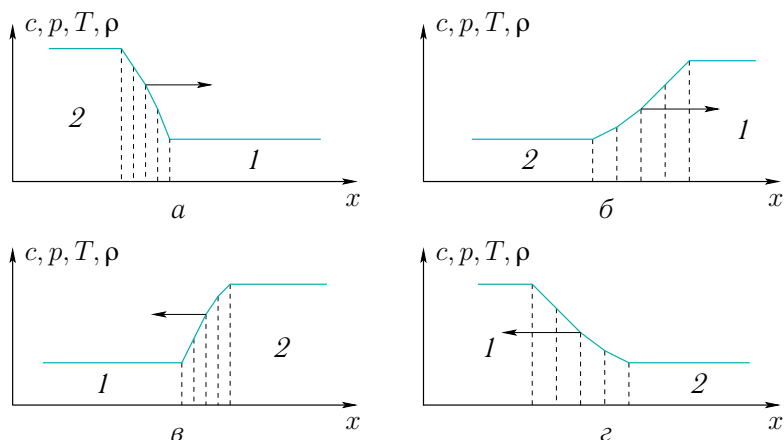


Рис. 8.7. Изменение параметров состояния среды во фронте: а) (+)-волны сжатия, б) (+)-волны разрежения, в) (-)-волны сжатия, г) (-)-волны разрежения

8.7. Задача о поршне

Рассмотрим задачу о течении, возникающем в однородном и исходно неподвижном ($u_1 = 0$) газе, если в некоторый момент времени t_1 в нем мгновенно приводится в движение с постоянной скоростью $u_{\text{п}}$ перегородка или *поршень*.

По газу, по отношению к которому поршень вдвигается, распространяется *ударная волна* со скачком уплотнения на фронте.

В противоположном направлении (от поршня, который выдвигается из газа) образуется *центрированная волна разрежения* (ЦВР), все характеристики фронта которой выходят из точки (x_1, t_1) . Рассмотрим именно этот случай (рис. 8.8); примем для простоты: $x_1 = 0$ и $t_1 = 0$.

Здесь *голова* ЦВР движется влево по неподвижному газу (зона с параметрами 1) со скоростью звука в нем: $x_{\text{г}}(t) = -c_1 t$ — скорость головной элементарной волны разрежения, определяемая наклоном (-)-характеристики $u_1 - c_1$, равна $(-c_1)$, так как здесь $u_1 = 0$. Давление за *хвостом* волны (в зоне с постоянными параметрами при $x \geq x_{\text{х}}(t)$) определяется скоростью поршня $u_{\text{п}} > 0$, причем ход профилей давления, др. параметров и скорости $u(x, t_2 > t_1)$ между $x_{\text{г}}$ и $x_{\text{х}}$ не зависит от $u_{\text{п}}$.

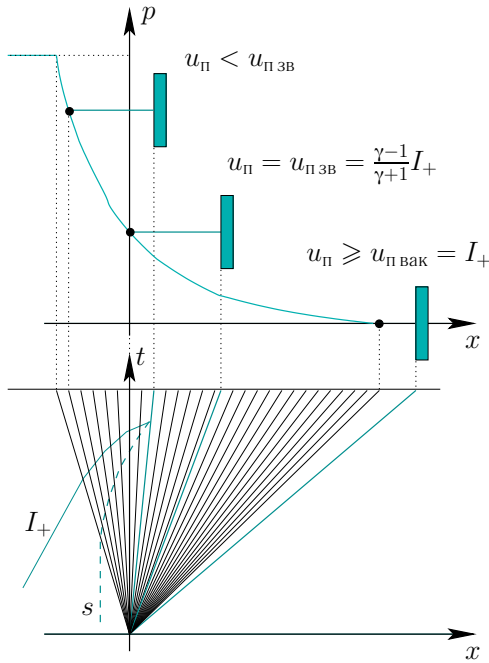


Рис. 8.8. К задаче о поршне

При весьма малой u_π возникает ЦВР малой интенсивности; голова и хвост ее почти совпадают (предел — волна акустического диапазона).

При существенных значениях u_π хвост волны заметно отстает, находясь (при дозвуковых скоростях: $u_\pi < c_\pi$) в левом полупространстве. Звуковой скорости течения газа в зоне, примыкающей к поршню ($u_\pi = c_\pi$), соответствует определенная $u_{\pi \text{зв}} = u_\pi = c_\pi$. Потребную для этого скорость поршня $u_{\pi \text{зв}}$ определим из условия постоянства инварианта Римана $I_{+\pi} = I_{+1}$ и энтропии частиц $s_\pi = s_1$ в ЦВР:

$$\begin{aligned}
 I_{+1} = I_{+\pi} &= \frac{2}{\gamma-1} c_\pi + u_{\pi \text{зв}} = |c_\pi = u_{\pi \text{зв}}| = \\
 &= u_{\pi \text{зв}} \left(\frac{2}{\gamma-1} + \frac{\gamma-1}{\gamma-1} \right) = u_{\pi \text{зв}} \frac{\gamma+1}{\gamma-1},
 \end{aligned}$$

откуда

$$u_{\pi \text{зв}} = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} I_{+1} = \frac{2}{\gamma+1} c_1.$$

При еще бóльших значениях $u_{\text{п}}$ течение в примыкающей к поршню зоне будет сверхзвуковым («звуковая линия», где $c_{\text{п}} = u_{\text{п}}$ — вертикальная характеристическая прямая).

А при скорости поршня, превышающей определенное значение (кратно большее, чем $u_{\text{п зв}}$), газ будет «оторван» от поршня с образованием между ними зоны вакуума. Такой режим⁹ называется режимом *нестационарного истечения в вакуум*.

При этом параметры состояния совершенного газа на хвосте ЦВР (в точке x_x , здесь: на границе с вакуумом) примут нулевые значения в соответствии с его уравнением изоэнтропы. Скорость газа в этой точке $u_{\text{п вак}}$ определяем также из условия $I_{+1} = I_{+\text{п}}$, здесь $I_{+\text{п}} = u_{\text{п вак}}$ при $c_{\text{п}} \rightarrow 0$. Скорость $u_{\text{п вак}}$ — минимальная скорость поршня для реализации режима *нестационарного истечения в вакуум*. Имеем:

$$I_{+1} = I_{+\text{п вак}} = \frac{2}{\gamma - 1} 0 + u_{\text{п вак}},$$

откуда

$$u_{\text{п вак}} = \frac{2}{\gamma - 1} c_1 + 0 = I_{+1}.$$

Полученная скорость ничтожной части газа при *нестационарном истечении в вакуум* превышает скорость *стационарного истечения в вакуум* всего потока — при идентичном исходном состоянии газа — вследствие каскадной передачи энергии в волне. Напомним, согласно (7.18), при стационарном истечении

$$u_{\text{max}} = \sqrt{2h_1^*} = \sqrt{\frac{2\gamma RT_1}{\gamma - 1}} = \sqrt{\frac{2}{\gamma - 1}} c_1.$$

Для газа с $\gamma = 1,40$ отношение максимальных скоростей нестационарного и стационарного истечения в вакуум составит $\sqrt{5} \approx 2,24$.

8.8. Задача о распаде произвольного разрыва

Классическая задача о *распаде произвольного разрыва* (РПР) ставится следующим образом. Пусть в точке $x = x_0$ в момент времени $t = t_0$ терпят *разрыв* значения параметров состояния и скорости газа,

⁹Задача о поршне в таком варианте иногда также называется задачей о нестационарном истечении в вакуум.

заданные однородными для каждого из полупространств. Требуется найти точное решение¹⁰ задачи о нестационарном течении с плоскими волнами (рис. 8.9), возникающем после распада начального (произвольного и потому неустойчивого) разрыва.

В силу произвольности значений p_4, T_4, u_4, p_1, T_1 и u_1 (см. рис. 8.9), начальный разрыв не удовлетворяет соотношениям на разрывах двух устойчивых видов — *контактного разрыва* и *прямого скачка уплотнения*. Произвольный разрыв распадается с образованием одной из 5 волновых конфигураций.

Задача о РПР имеет решение, если заданы уравнения состояния для сжимаемой среды. Если при РПР не образуется *зона вакуума* (случай «разлета» газов на рис. 8.9, *д*), то в волновой картине течения обязательно присутствует КР, по обе стороны от которой одинаковы давление и скорость, и две ВКА, отделяющие зоны 2 и 3 от «невозмущенных» зон 1 и 4 (рис. 8.9, *а – з*).

Если какая-либо из волн — волна разрежения, то это ЦВР. Фронты же волн сжатия, строго говоря — *скачки уплотнения*, для которых справедливы соотношения (7.27) — (7.29) на с. 142.

Варианты процедур точного и приближенного решения задачи применяются в численных методах решения одно- и многомерных задач о течении сжимаемых жидкостей. Так, метод «распада разрыва» С. К. Годунова (см. с. 220) численного решения уравнений газовой динамики использует точное решения задачи для определения потоков на границах ячеек. В [19] изложены итерационные процедуры решения задачи о РПР (для совершенного газа), а также решение в акустическом приближении.

Решение задачи о РПР в приближении простых волн. Получим систему нелинейных уравнений модели течения при РПР, в которой плоские волны сжатия (рис. 8.10) описываются через ГДФ, что справедливо для простых изоэнтропных волн (волн Римана). Случай «разлета» газов (рис. 8.9, *д*) не рассматриваем.

Ограничимся частным случаем идентичных по свойствам совершенных газов по обе стороны от разрыва: $R = R_4 = R_1$ и $\gamma = \gamma_4 = \gamma_1$ и в обозначениях ГДФ указывать γ не будем.

¹⁰В зарубежной литературе задача о РПР именуется *задачей Римана* (англ. *Riemann problem*). Точное решение газовой динамики задачи о РПР изложено впервые в 1924/25 гг. в работах русского советского математика и механика Н. Е. Кочина.

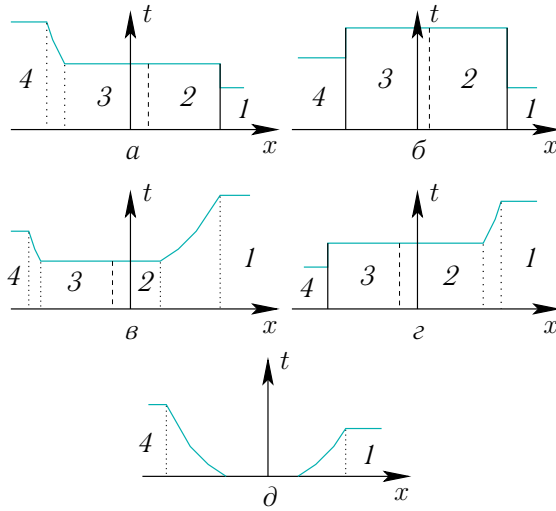


Рис. 8.9. Возможные конфигурации плоских волн при РПР

При сделанных допущениях конфигурацию течения после РПР составляют две *простые волны* и КР. Запишем тождество:

$$\frac{p_4}{p_1} = \frac{p_4}{p_3} \cdot \frac{p_3}{p_2} \cdot \frac{p_2}{p_1}$$

и подставим в него соотношения на волнах и на КР. На движущейся влево (-)-волне $p'_3 = p''_4$, откуда $\frac{p_4}{p_3} = \frac{\pi''(M_4)}{\pi''(M_3)}$. Давления в зонах 3 и 2 по обе стороны от КР равны: $p_3 = p_2$. На (+)-волне, движущейся вправо, $p'_2 = p'_1$, поэтому $\frac{p_2}{p_1} = \frac{\pi'(M_2)}{\pi'(M_1)}$. Имеем:

$$\frac{p_4}{p_1} = \frac{\pi''(M_4)}{\pi''(M_3)} \cdot \frac{\pi'(M_2)}{\pi'(M_1)}.$$

С учетом того, что $M_4 = \frac{u_4}{c_4}$ и $M_1 = \frac{u_1}{c_1}$ входят в условия задачи, группируем:

$$\frac{p''_4}{p'_1} = \frac{\pi'(M_2)}{\pi''(M_3)}, \quad (8.14)$$

где $p''_4 = \frac{p_4}{\pi''(M_4)}$ и $p'_1 = \frac{p_1}{\pi'(M_1)}$.

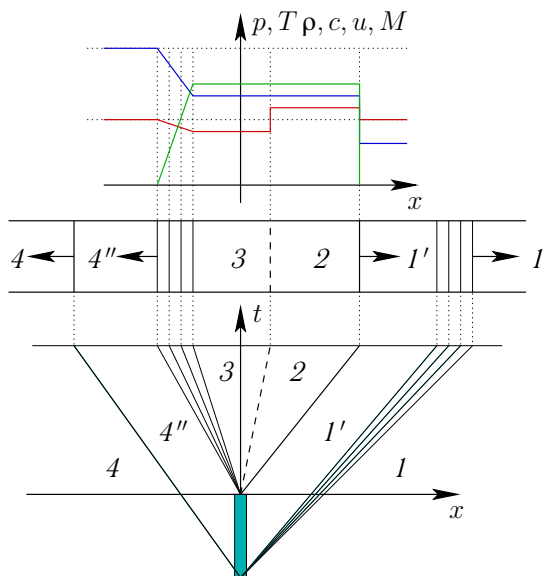


Рис. 8.10. Простые волны при РПР (показана фиктивная перегородка)

В уравнении (8.14) два неизвестных — числа M_3 и M_2 . Заметим, что оба эти корня будут положительны при $\frac{p_4''}{p_1} > 1$ и наоборот. Очевидно, направление течения после РПР определяется указанным отношением давлений нестационарного торможения. Физическая интерпретация: если в момент $t = 0$ в точке $x = 0$ возникнет (на неопределенное время) бесконечно тонкая перегородка, образуется разрыв с новыми значениями параметров: $p_4'', T_4'', c_4'', u_4'' = 0, M_4'' = 0$ и $p_1', T_1', c_1', u_1' = 0, M_1' = 0$. Если затем эта перегородка исчезнет, новый разрыв распадется с образованием конфигурации из двух простых волн и КР, с теми же значениями параметров состояния и скорости потока в зонах 3 и 2, что и в исходной задаче о РПР (без перегородки).

Уравнение (8.14) — с двумя неизвестными M_3 и M_2 , но не все независимые соотношения на элементах течения при РПР в нем учтены. Для замыкания задачи составим второе уравнение, записав условие на КР $u_3 = u_2$ в виде

$$c_3 M_3 = c_2 M_2.$$

По обе стороны фронта изоэнтропных волн неизменны скорости звука нестационарного торможения, поэтому $c_3 = c_4 \frac{\alpha''(M_3)}{\alpha''(M_4)}$ и $c_2 = c_1 \frac{\alpha'(M_2)}{\alpha'(M_1)}$. Группируя $c_4'' = \frac{c_4}{\alpha''(M_4)}$ и $c_1' = \frac{c_1}{\alpha'(M_1)}$ в правую часть, получим:

$$\frac{c_4''}{c_1'} = \frac{M_2}{M_3} \frac{\alpha'(M_2)}{\alpha''(M_3)}. \quad (8.15)$$

Уравнения (8.14) и (8.15) образуют систему, корни которой M_3 и M_2 определяют значения параметров газа и скорости потока в зонах 3 и 2. При их выводе учтены все необходимые соотношения на КР и на фронтах простых изоэнтропных волн. На практике при решении задачи о РПР удобно применить их все последовательно, сведя поиск решения к итерационной процедуре, например, по переменной M_3 . Если отношение давлений $\frac{p_4''}{p_1'}$ весьма близко к единице, можно принять $M_3 \approx M_2 \approx 0$, т. е. приравнять нулю скорость потока, потоки массы и энергии после РПР. Назовем такого рода решения задач о РПР *тривиальными* и приведем ниже способ отыскания нетривиального решения.

Можно использовать *метод хорд* для итерационного уточнения M_3 в диапазоне от 0 до $M_{3\max}$ (при $\frac{p_4''}{p_1'} > 1$), где $M_{3\max}$ берется равным достаточно большому положительному числу (например, единице — если наперед известно, что скорость потока в зоне 3 будет дозвуковой).

Пусть M_3 задано в некотором приближении (начальном или после предыдущей итерации). По нему определяем параметры в зоне 3: $c_3 = c_4'' \alpha''(M_3)$, $u_3 = c_3 M_3$, $p_3 = p_4'' \pi''(M_3)$. Давление в зоне 2 получается из первого условия на КР $p_2 = p_3$, а из соотношения $p_2 = p_1' \pi'(M_2)$ определяется M_2 , после чего вычисляются скорость звука и скорость потока в зоне 2: $c_2 = c_1' \alpha'(M_2)$, $u_2 = c_2 M_2$. Второе условие на КР $u_2 = u_3$ используется для вычисления невязки $u_2 - u_3$; итерации прекращаются при выполнении с заданной точностью условия $|u_2 - u_3| < \varepsilon_u$.

Рассчитанные величины в точке $x = 0$ после РПР (при $t > 0$) позволят вычислить газодинамические потоки через границу расчетных ячеек, если процедура используется в численном методе типа метода С. К. Годунова (с. 220).

Если по условиям задачи $\frac{p_4''}{p_1'} < 1$, описанная выше процедура применима после обмена значений параметров газов в исходных данных —

в зонах I и 4 . Причем помимо обмена значений скоростей u_1 и u_4 нужно изменить их знаки. В решении задачи о РПР нужно также изменить знак скорости потока (и числа M).

8.9. Взаимодействие волн со скачками сечения трубопровода

8.9.1. К обобщению задачи о РПР для скачков сечений

Модель (на основе 1D допущения) неустановившегося процесса в трубопроводе принимает конкретный вид прежде всего в подобластях, выделяемых как его элементы (*каналы* и разного рода *емкости*). Такие конкретные варианты единой модели неустановившегося течения формулируется отдельно (и модульно реализуется в ПО [28]), например, как модель ТРУБКА (для канала; 1D) или модели АТМОСФЕРА, ЕМКОСТЬ (РЕСИВЕР), ЦИЛИНДР, КРИВОШИПНАЯ КАМЕРА (для емкостей; 0D).

Как и с *моделями элементов*, единая модель процесса в трубопроводе должна принимать частный вид и в точках по x , к которым «приурочены» границы между описанными элементами. Моделями границ (или — *моделями связей* между элементами) выступают системы уравнений «под-моделей», описывающих (квазистатически) перетекание через проточные части:

- местных сопротивлений (МС: конкретная модель связи);
- органов газообмена ДВС (модели КЛАПАН и ОКНО);
- разветвлений трубопровода (например, в конфигурациях «тройник» или «щель» разнообразных видов);
- ступеней лопаточных машин (если также представлены квазистатическими моделями связей: ТУРБИНА, КОМПРЕССОР).

При корректном описании процессов в элементах и связях, и корректном же алгоритме¹¹ численного расчета следует ожидать, что корректны будут и численные решения задач. (В том смысле, что к ним будут применимы представления [27] о *единственности* решения задачи и о *сходимости* численного решения к этому «точному» решению — при неограниченном разбиении сетки, и т. д.)

В связи с этим отметим, что разобранный в пп. 8.8 «академическая» задача о РПР служит основой процедур вычисления потоков через «рядовые» границы расчетных ячеек сетки по 1D модели, реализованной в ПО для прикладных расчетов. Показанный подход корректен в алгоритмах численного расчета течения через границы и «рядовых» ячеек каналов, и границы элементов — а именно, — путем решения локальных

¹¹Для произвольных трубопроводных систем, «декомпозированных» на элементы и связи (а это — особенность технологии *I-D CFD*).

задач о РПР и ее всевозможных обобщений — на случаи¹², представляемые (в 1D моделях) в общем виде как *скачки площади сечения* $F(x)$ *трубопроводов*.

8.9.2. Распад разрыва на скачке сечения

Расчет взаимодействия одномерного нестационарного потока с *местом сопряжения каналов неодинакового сечения* («скачком площади сечения») основан на обобщении задачи о РПР. Обобщение состоит в привлечении модели течения с гидравлическими потерями на стыке каналов.

Пусть два канала имеют в общем случае различные площади сечения F_2 и F_1 , на стыке которых — имеется *скачок сечения* (рис. 8.11).

Течение через скачок сечения будем трактовать как квазистационарное перетекание через *местное сопротивление* (МС), модель кото-

¹²Далее в этой теме (раздела «Прикладная нестационарная гидрогазодинамика» курса МЖГ) показан данный подход к решению обобщенных задач о РПР или же, по существу, к расчету взаимодействий *простых волн* со скачками сечения.

Прикладное значение этого подхода в том, что в расчетах на ЭВМ волновых процессов *произвольного вида* по 1D моделям (в том числе и в ППП ALLBEA [28]) обобщенные задачи о РПР описывают «условия совместности» на границах элементов трубопровода — скачках его сечения, к которым приурочены те или иные устройства (со своими характеристиками в потоке). Параметры же газа (среды) в условиях однозначности таких задач о РПР на каждом шаге определяются условиями в смежных расчетных ячейках.

Подход этот показан с применением «аппарата» газодинамических функций, т. е. для течений *совершенного газа*. Для сжимаемых сред со сложными уравнениями состояния (включая сжимаемые, собственно, *жидкости*) вместо таких функций следует применять более общие уравнения — соотношения в «характеристических» направлениях для систем УЧП прикладной НГГД — как квазилинейных систем УЧП гиперболического типа [20, 21].

(Об этом — далее в пп. «Численные методы для одномерных задач» на с. 214.)

Подчеркнем, что использование в процедурах вычисления потоков на границах известных линеаризаций, а именно:

– линеаризации температурной зависимости $e(T)$ для перехода (локально: на границе) к модели совершенного газа;

– применение НГДФ для приближенного описания скачков уплотнения в совершенном газе (что тоже есть линеаризация, см. [14, с. 60]);

или же

– линеаризация, связанная с записью (вместо НГДФ) в конечных разностях «характеристической» формы уравнений моделей 1D прикладной НГГД —

не нарушают, по большому счету, корректности решений задач по единой 1D модели (что установлено десятилетия тому назад).

рого содержит уравнения сохранения массы $G_4 = G_3$, сохранения энергии $T_3^* = T_4^*$ и выражение потерь полного давления $p_3^* = p_4^* \sigma_{43}(M_4)$.

Начальные параметры состояния газов заданы:

- для $x < 0$: p_5, T_5, u_5 ,
- для $x > 0$: p_1, T_1, u_1 .

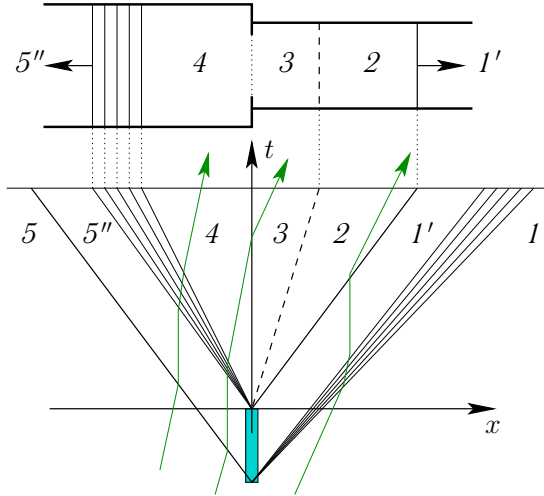


Рис. 8.11. Течение вправо при распаде разрыва на скачке сечения

Для простоты изложим вариант модели для совершенного газа (газов с одинаковыми R и γ в обоих каналах). Применим НГДФ для описания не только ЦВР, но и волн сжатия (ударных; применение НГДФ поэтому даст не точное, а приближенное решение). При этом подходе направление течения при РПР даст описанный выше прием с торможением потока фиктивной перегородкой. Т. е. по исходным данным задачи сразу вычислим значения параметров нестационарного торможения в зоне $5''$ и в зоне $1'$:

$$p_5'' = \frac{p_5}{\pi''(M_5)}, \quad M_5 = \frac{u_5}{c_5}, \quad c_5 = \sqrt{\gamma RT_5},$$

$$p_1' = \frac{p_1}{\pi'(M_1)}, \quad M_1 = \frac{u_1}{c_1}, \quad c_1 = \sqrt{\gamma RT_1}.$$

Если $\frac{p_5''}{p_1} > 1$, то газ в зонах 4, 3 и 2 при РПР потечет вправо, как показано на рис. 8.11 — с ЦВР между зонами 5'' и 4 и простой *изоэнтропной волной сжатия* — между зонами 2 и 1'.

Взяв набор известных соотношений на элементах волновой картины (на КР, на *простых волнах* и на МС) в качестве соотношений совместности на *скачке сечения* и выразив их через ГДФ, получим систему из трех нелинейных уравнений, связывающую три неизвестные — M_4 , M_3 и M_2 :

$$\frac{p_5''}{p_1} = \frac{\pi'(M_2)}{\pi''(M_4)} \cdot \frac{\pi(M_4)}{\pi(M_3)} \cdot \frac{1}{\sigma_{43}(M_4)}, \quad (8.16)$$

$$\frac{c_5''}{c_1'} = \frac{\alpha'(M_2)}{\alpha''(M_4)} \cdot \frac{\alpha(M_4)}{\alpha(M_3)} \cdot \frac{M_2}{M_3}, \quad (8.17)$$

$$\frac{F_5}{F_1} = \frac{q(M_4)}{q(M_3)} \cdot \sigma_{43}(M_4). \quad (8.18)$$

Система нелинейных уравнений (8.16) – (8.18) «канонического» вида (см. [14]) содержит все нелинейные соотношения совместности на *скачке сечения* и описывает решение обобщенной (на случай скачка сечения) задачи о РПР. Система переходит в систему (8.14), (8.15), описывающую РПР в гладком канале — в частном случае отсутствия скачка сечения и потерь на МС: $F_5 = F_1$, $\sigma_{43} = 1$.

Так же, как в случае РПР на гладком канале, удобно находить решение, используя цепочку известных соотношений, а отнюдь не отыскивая одновременно три корня системы уравнений (8.16) – (8.18). Например, можно итерационно уточнять корень M_4 из интервала $(0, M_{4\max}]$, где $M_{4\max}$ определяется зависимостью $\sigma_{43}(M_4)$. По известному на итерации M_4 вычисляются значения статических параметров в зоне 4: $c_4 = c_5''\alpha''(M_4)$, $u_4 = c_4 M_4$, $p_4 = p_5''\pi''(M_4)$ и параметры стационарно заторможенного потока: $p_4^* = p_4/\pi(M_4)$ и $T_4^* = T_4/\tau(M_4)$. Затем все три условия на МС привлекаются для определения расхода и параметров торможения в зоне 3: $G_3 = G_4 = \rho_4 u_4 F_5 = m q(M_4) F_5 p_4^*/\sqrt{T_4^*}$, $T_3^* = T_4^*$, $p_3^* = p_4^* \sigma_{43}(M_4)$.

Число M_3 определяется из уравнения расхода в зоне 3:

$$G_3 = m \frac{q(M_3) F_1 p_3^*}{\sqrt{T_3^*}}, \quad (8.19)$$

далее определяются статические параметры состояния в этой зоне:

$$T_3 = T_3^* \tau(M_3), \quad p_3 = p_3^* \pi(M_3), \quad (8.20)$$

а также скорость звука и скорость потока:

$$c_3 = \sqrt{\gamma RT_3}, \quad u_3 = c_3 M_3. \quad (8.21)$$

Затем определяются параметры в зоне 2 — способом, аналогичным изложенному на с. 185. Так, число M_2 явно выражается из условия

$$p_2 = p_3 = p_1' \pi'(M_2), \quad (8.22)$$

затем вычисляются скорость звука и скорость потока в зоне 2:

$$c_2 = c_1' \alpha'(M_2), \quad u_2 = c_2 M_2. \quad (8.23)$$

Итерации по M_4 прекращаются при выполнении условия равенства скоростей на КР с наперед заданной точностью: $|u_3 - u_2| < \epsilon_u$.

Если процедура используется в численном методе расчета нестационарного течения в трубопроводе, параметры состояния и скорости газов, а также площади сечения канала в зонах 5 и 1 соответствуют параметрам в расчетных ячейках на концах примыкающих к скачку сечения каналов в дискретные моменты времени.

Полученное решение дает возможность вычислить газодинамические потоки и приписать их крайним сечениям соответствующих каналов. Так, в соответствии с моделью (8.16) — (8.18), потоки массы G_i и энергии $(Gh^*)_i$ через сечения примыкающих к МС каналов будут одинаковы, потоки КД в сечениях каналов, примыкающих к МС, следует вычислять по выражению $I_i = G_i u_i + p_i F_i$, где $i = 3, 4$ (если скорость потока в указанных зонах дозвуковая).

Если газ после РПР должен течь в направлении, обратном показанному на рис. 8.11 (случай $\frac{p_5'}{p_1'} < 1$), следует находить решение по описанной расчетной схеме, но после переиндексации параметров в исходных данных задачи о РПР.

8.9.3. Распад разрыва на стыке емкости и канала

Если с одной стороны от МС находится не канал, а емкость, задача о РПР обобщается несколько иначе.

Возможны два направления течения при РПР в такой конфигурации — режим *истечения из емкости* (рис. 8.12, а) и режим *втекания в емкость* (рис. 8.12, б).

На режиме *истечения* (рис. 8.12, а) в трубопровод поступает газ из емкости, оставаясь отделенным от газа в трубопроводе контактным разрывом. Запишем систему уравнений «канонического» вида, связывающую искомые числа M_3 и M_2 для этого случая. Считаем, что на этом режиме течение через МС задается выражениями $T_3^* = T_0^* = T_0$ и $p_3^* = p_0^* \sigma_{03}(M_3) = p_0 \sigma_{03}(M_3)$:

$$\frac{p_0}{p_1'} = \frac{\pi'(M_2)}{\pi(M_3)} \cdot \frac{1}{\sigma_{03}(M_3)}, \quad (8.24)$$

$$\frac{c_0}{c_1'} = \frac{\alpha'(M_2)}{\alpha(M_3)} \cdot \frac{M_2}{M_3}. \quad (8.25)$$

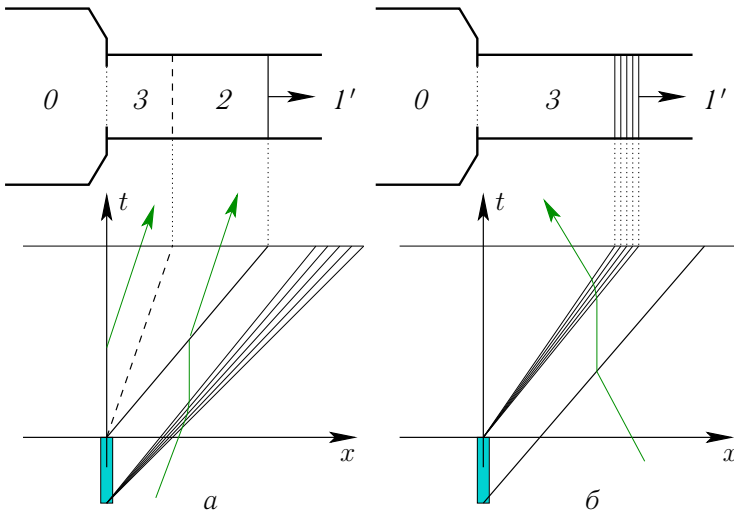


Рис. 8.12. Два режима течения при РПР на стыке емкости и канала

И здесь удобно искать решение задачи, уточняя каким-либо итерационным методом значение корня, например, M_3 в интервале $(0, M_{3\max}]$, при $\frac{p_0}{p_1'} > 1$ (в противном случае реализуется режим *втекания*, см. ниже). При некотором M_3 вычисляются статические параметры в зоне 3:

$p_3 = p_0 \sigma_{03}(M_3) \pi(M_3)$, $T_3 = T_0 \tau(M_3)$, $c_3 = \sqrt{\gamma R T_3}$ и скорость потока $u_3 = M_3 c_3$. Затем так же, как это делалось для РПР на гладком канале (с. 185) и на скачке сечения, определяются параметры в зоне 2 — из (8.22) и (8.23). Условие $u_3 = u_2$ также служит для проверки сходимости итераций.

На режиме *втекания* в емкость (рис. 8.12, б), имеющем место при $\frac{p_0}{p_1} < 1$ и $M_3 < 0$, формируется ЦВР. Подлежит решению уравнение

$$\frac{p_0}{p_1} = \frac{\pi'(M_3)}{\pi(M_3)} \cdot \sigma_{30}(-M_3, \dots). \quad (8.26)$$

Здесь использована характеристика МС $p_0 = p_0^* = p_3^* \sigma_{30}(M_3, \dots)$ для потерь полного давления при втекании в емкость. Поиск корня M_3 нелинейного уравнения (8.26) в интервале от $M_{3 \min} < 0$ до 0 выполняется в общем случае также итерационным методом.

По параметрам состояния и скорости в зоне 3 определяются потоки массы компонентов смеси, КД и энергии в граничном сечении канала. В численном расчете величины этих потоков используются на расчетном шаге для обновления параметров потока в ячейке канала и в емкости.

8.9.4. Распад разрыва с подводом или отводом энергии в форме работы

Рассмотрим теперь случай расположения на стыке каналов устройства, изменяющего энергосодержание потока газа в основном путем *подвода/отвода механической работы*. На практике таким устройством является компрессионная или расширительная машина объемного или динамического действия (рис. 8.13).

Представляя компрессионные и расширительные машины в виде модели граничного сечения, придется по существу пренебречь размерами машин в сравнении с характерными длиновыми размерами каналов трубопровода. В таком допущении модель взаимодействия *нестационарного* течения в трубопроводе с машиной получается как обобщение задачи о РПР на скачке сечения.

Если связываемые элементы — емкость и гладкий участок трубопровода (рис. 8.13, а и б), процедура должна решать обобщенную задачу о РПР, подобную описанной в пп. 8.9.3, а если на турбине или компрессоре сходятся два гладких участка трубопровода (рис. 8.13, в), то — задачу о РПР, подобную описанной в пп. 8.9.2. Течение же через турбину

или компрессор на границе двух емкостей (рис. 8.13, *з*) должно рассчитываться как квазистационарное перетекание.

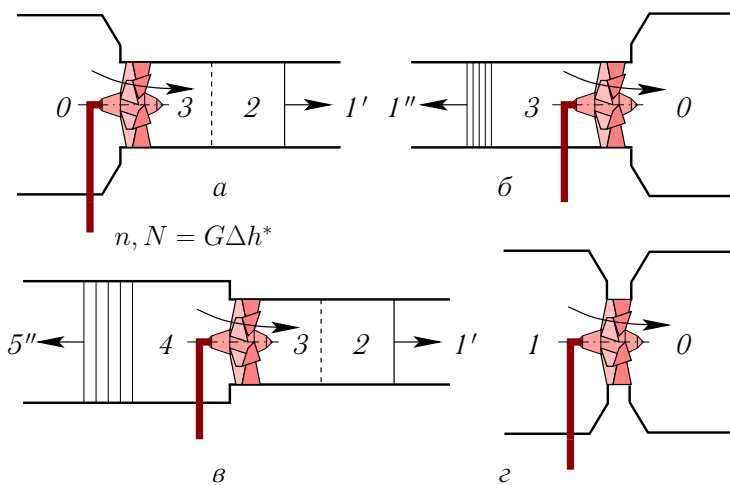


Рис. 8.13. Течение при РПП с подводом технической работы к потоку или отводом ее от потока

Обобщение задачи об РПП здесь состоит в усложнении вида статической *характеристики устройства* в граничном сечении, которому соответствует (согласно знаку подводимой к потоку работы) компрессионная или расширительная машина.

Так, универсальная характеристика простых геометрически подобных между собой МС в адиабатном и автомоделном по Re режиме — зависимость (в обозначениях рис. 8.13, *в*) вида $\sigma_{43} = \sigma_{43}(M_4)$, получаемая статической прудувкой.

Для описания особенности течения в проточной части ступени конкретной компрессионной и расширительной машины нужны более сложные зависимости. Давление и температура торможения p^* и T^* при перетекании через машину существенно изменяются, и (ввиду необратимости процессов в машине) удельная энтропия газа s возрастает вниз по потоку. Т. е. необходимо задать *универсальную характеристику* ступени.

В рамках тех же допущений¹³ — о внешней адиабатности течения в машине, а также об автомоделности течения в ней по числу Re , *уни-*

¹³Принимаемых, как правило, для условий работы агрегатов наддува ДВС.

версальную характеристику турбомашины (или ее ступени) составляют две двухпараметрические зависимости, снимаемые на стенде и обрабатываемые по известной методике.

Это могут быть зависимости показателей, например *степени повышения давления* $\pi_k^* = p_3^*/p_4^* > 1$ (для компрессора; или *степени понижения давления* $\pi_t^* = p_4^*/p_3^* > 1$ — для турбины) и *внутреннего изоэнтропического КПД* $\eta_{k,t}^*$, от параметров вида $G\sqrt{T_4^*/p_4^*}$ и $n_{k,t}/\sqrt{T_4^*}$, определяющих режим течения (в обозначениях рис. 8.13, в):

$$\pi_{k,t}^* = \pi_{k,t}^* \left(\frac{G\sqrt{T_4^*}}{p_4^*}, \frac{n_{k,t}}{\sqrt{T_4^*}} \right), \quad \eta_{k,t}^* = \eta_{k,t}^* \left(\frac{G\sqrt{T_4^*}}{p_4^*}, \frac{n_{k,t}}{\sqrt{T_4^*}} \right), \quad (8.27)$$

где $G = G_4 = G_3$ — массовый расход, $n_{k,t}$ — частота вращения ротора турбомашины.

Соотношения (8.27) — зависимости в обобщенных переменных, комплексные определяющие параметры которых характеризуют (в принятом приближении) распределения безразмерных параметров газа в проточной части и интегральных показателей турбомашины. Так, ими учитывается (для одной и той же машины и фиксированных параметрах УС рабочего тела как совершенного газа $R = \text{idem}$, $\gamma = \text{idem}$ и $Pr = \text{idem}$) определяющее влияние «осевой» M_{4a} и «окружной» M_{4u} составляющих скорости потока на входе в турбомашину относительно элементов ее ротора.

Модель и практическая процедура для вычисления мгновенных значений потоков приведены в пп. 8.9.5 для расчетной схемы РПР на компрессоре, показанной на рис. 8.13, в. Аналогичная модель и процедура для турбины — в пп. 8.9.6 (с. 198).

Как и в случае модели МС на скачке сечения (с. 188), исходные данные задачи о РПР здесь (рис. 8.13, в) — параметры состояния, скорости и параметры уравнений состояния газовых смесей и площади сечений на концах примыкающих каналов: p_i, T_i, M_i, F_i , где $i = 1, 5$, а также текущее число оборотов в минуту $n_{k,t}$ ротора машины. Перед расчетом РПР вычисляются параметры нестационарного торможения $p_5'', T_5'', c_5', p_1', T_1'$, и c_1' .

По этим параметрам выполняется проверка исходных данных задачи о РПР на предмет осуществимости течения после РПР в «штатном» направлении ($M_4 > 0$, на расчетной схеме — вправо); так, при $p_5'' < p_1'$ течение в этом направлении не может иметь места.

Как и ранее, примем (непринципиальное) допущение об идентичности параметров УС газов в обоих каналах: R и γ , и покажем выражения для «штатного» направления ($M_4 > 0$, $M_3 > 0$, $M_2 > 0$) потока через компрессор или турбину.

8.9.5. Расчетная схема РПР на компрессоре

Выразив соотношения на всех элементах показанной на рис. 8.13, в волновой картины течения при РПР на компрессоре через ГДФ и показатели работы компрессора π_k^* и $\eta_{k,s}^*$, получим систему нелинейных уравнений «канонического» вида с неизвестными M_4 , M_3 и M_2 :

$$\frac{p_5''}{p_1'} = \frac{\pi'(M_2)}{\pi''(M_4)} \cdot \frac{\pi(M_4)}{\pi(M_3)} \cdot \frac{1}{\pi_k^*}, \quad (8.28)$$

$$\frac{c_5''}{c_1'} = \frac{M_2}{M_3} \cdot \frac{\alpha'(M_2)}{\alpha''(M_4)} \cdot \frac{\alpha(M_4)}{\alpha(M_3)} \cdot \left\{ 1 + \frac{1}{\eta_{k,s}^*} \left[(\pi_k^*)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right] \right\}^{-\frac{1}{2}}, \quad (8.29)$$

$$\frac{F_5}{F_1} = \frac{q(M_3)}{q(M_4)} \cdot \pi_k^* \cdot \left\{ 1 + \frac{1}{\eta_{k,s}^*} \left[(\pi_k^*)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right] \right\}^{-\frac{1}{2}}. \quad (8.30)$$

Решение системы нелинейных уравнений (8.28) – (8.30) удобно находить любым методом минимизации невязки, получаемой в цепочке использованных при ее выводе соотношений на элементах волновой картины течения при РПР — двух изоэнтропных *простых волнах*, устойчивым разрыве параметров на компрессоре и на *контактном разрыве*.

Итерационный поиск корней системы можно вести, например, задаваясь $M_4 > 0$ из интервала $[M_{4\min}, M_{4\max}]$. Левая граница $M_{4\min}$ этого интервала предварительно определяется (методом последовательных приближений) из системы условий

$$T_4^* = T_5'' \frac{\tau''(M_{4\min})}{\tau(M_{4\min})}, \quad (8.31)$$

$$m q(M_{4\min}) F_5 = \left(\frac{G \sqrt{T_4^*}}{p_4^*} \right)_{\min}, \quad (8.32)$$

где $(G \sqrt{T_4^*}/p_4^*)_{\min}$ определяется по интерполированной зависимости от $n_k/\sqrt{T_4^*}$ координаты левой границы области определения характеристики компрессора. Аналогично определяется и правая граница $M_{4\max}$ интервала, в котором идет поиск решения.

Кроме того, границы интервала $[(n_k/\sqrt{T_4^*})_{\min}, (n_k/\sqrt{T_4^*})_{\max}]$ накладывают пределы на допустимые значения температуры торможения T_4^* на входе в компрессор при заданном числе оборотов ротора n_k :

$$T_{4\max}^* = \frac{n_k^2}{\left(\frac{n_k}{\sqrt{T_4^*}}\right)_{\min}^2}, \quad T_{4\min}^* = \frac{n_k^2}{\left(\frac{n_k}{\sqrt{T_4^*}}\right)_{\max}^2}.$$

Поиск корня $M_4 > 0$ в подготовленном таким образом интервале $[M_{4\min}, M_{4\max}]$ эффективно и надежно проводится методом хорд.

На каждой итерации по текущему значению M_4 в зоне 4 определяются статические параметры p_4, T_4 , параметры стационарного торможения p_4^*, T_4^* и расход G_4^* на входе в компрессор, а по ним — определяющие параметры универсальной его характеристики:

$$\left(\frac{G_4\sqrt{T_4^*}}{p_4^*}\right) = \frac{G_4\sqrt{T_4^*}}{p_4^*}, \quad \left(\frac{n_k}{\sqrt{T_4^*}}\right) = \frac{n_k}{\sqrt{T_4^*}},$$

и затем по аппроксимационным зависимостям для универсальной характеристики вида (8.27) — безразмерные показатели работы компрессора в точке характеристики на текущей итерации:

$$\pi_k^* = \pi_k^* \left[\left(\frac{G_4\sqrt{T_4^*}}{p_4^*}\right), \left(\frac{n_k}{\sqrt{T_4^*}}\right) \right], \quad (8.33)$$

$$\eta_{ks}^* = \eta_{ks}^* \left[\left(\frac{G_4\sqrt{T_4^*}}{p_4^*}\right), \left(\frac{n_k}{\sqrt{T_4^*}}\right) \right]. \quad (8.34)$$

По известным на итерации значениям расхода G_4 , параметров стационарного торможения на входе p_4^*, T_4^* , числу оборотов в минуту ротора n_k и показателям π_k^* и η_{ks}^* , найденным из (8.33) и (8.34), вычисляются

$$p_3^* = \pi_k^* p_4^*, \quad l_{ks}^* = c_p T_4^* \left[(\pi_k^*)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - 1 \right] > 0,$$

$$l_k^* = \frac{l_{ks}^*}{\eta_{ks}^*}, \quad T_3^* = T_4^* + l_k^*/c_p;$$

последнее соотношение следует из ЗС энергии для адиабатного течения через компрессор: $h_3^* = h_4^* + l_k^*$ при $h^* = c_p T^*$ и $c_p = \text{const}$.

Число M_3 определяется решением уравнения (8.19), после чего из (8.20) вычисляются параметры состояния p_3 , T_3 , а из (8.21) — скорость звука c_3 и скорость потока u_3 в зоне 3.

Далее из уравнения (8.22) определяется число M_2 , а затем из (8.23) вычисляются скорость звука c_2 и скорость потока u_2 в зоне 2. Итерации по M_4 прекращаются по достижении равенства $u_2 = u_3$ с заданной точностью.

8.9.6. Расчетная схема РПР на турбине

Математическую модель течения через турбину как описание решения задачи о РПР на турбине или ступени турбины и процедуру ее решения покажем также для расчетной схемы на рис. 8.13, в.

На практике характеристика турбины задается в виде, отличном от (8.27), а именно — степень понижения давления $\pi_T^* = p_4^*/p_3^*$ берется в качестве одного из определяющих параметров. В обозначениях рис. 8.13, в:

$$\frac{G_4 \sqrt{T_4^*}}{p_4^*} = \frac{G_4 \sqrt{T_4^*}}{p_4^*} \left(\pi_T^*, \frac{n_T}{\sqrt{T_4^*}} \right), \quad \eta_{T_s}^* = \eta_{T_s}^* \left(\pi_T^*, \frac{n_T}{\sqrt{T_4^*}} \right). \quad (8.35)$$

Выражение соотношений на всех элементах течения при РПР на турбине (рис. 8.13, в) через ГДФ и показатели ее работы π_T^* и $\eta_{T_s}^*$ при принятых допущениях дает следующую систему уравнений с неизвестными M_4 , M_3 и M_2 :

$$\frac{p_5''}{p_1'} = \frac{\pi'(M_2)}{\pi''(M_4)} \cdot \frac{\pi(M_4)}{\pi(M_3)} \cdot \pi_T^*, \quad (8.36)$$

$$\frac{c_5''}{c_1'} = \frac{M_2}{M_3} \cdot \frac{\alpha'(M_2)}{\alpha''(M_4)} \cdot \frac{\alpha(M_4)}{\alpha(M_3)} \cdot \left\{ 1 - \eta_{T_s}^* \left[1 - (\pi_T^*)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \right] \right\}^{-\frac{1}{2}}, \quad (8.37)$$

$$\frac{F_5}{F_1} = \frac{q(M_3)}{q(M_4)} \cdot \frac{1}{\pi_T^*} \cdot \left\{ 1 - \eta_{T_s}^* \left[1 - (\pi_T^*)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \right] \right\}^{-\frac{1}{2}}. \quad (8.38)$$

Решение задачи о РПР на турбине по (8.36) — (8.38) удобно находить любым методом минимизации невязки в цепочке используемых соотношений совместности в данном граничном сечении; для уточнения корня $M_4 \in [M_{4\min}, M_{4\max}] > 0$ можно применить *метод хорд*.

Уточнив границы интервала поиска корня способом, зависящим от представления характеристики в расчете, можно приступить к итерациям. На каждой итерации по текущему значению M_4 в зоне 4 определяются статические параметры p_4, T_4 , параметры стационарного торможения p_4^*, T_4^* и расход G_4 на входе в турбину, и по ним — величины, используемые в качестве определяющих в универсальной характеристике турбины (8.35) — $(G_4\sqrt{T_4^*/p_4^*})$ и $n_T/\sqrt{T_4^*}$.

Далее степень понижения полного давления π_T^* для данной итерации находится как корень уравнения, задаваемого первой из зависимостей характеристики (8.35):

$$\left(G_4\sqrt{T_4^*/p_4^*}\right) = \left(G_4\sqrt{T_4^*/p_4^*}\right) (\pi_T^*, n_T/\sqrt{T_4^*}),$$

которое эффективно решается методом хорд, а внутренний изоэнтропический КПД $\eta_{T_s}^*$ вычисляется из второй зависимости (8.35):

$$\eta_{T_s}^* = \eta_{T_s}^*(\pi_T^*, n_T/\sqrt{T_4^*}).$$

По известным на итерации $G_4, p_4^*, T_4^*, \pi_k^*$ и $\eta_{k_s}^*$ вычисляются

$$p_3^* = p_4^*/\pi_T^*, \quad l_{T_s}^* = c_p T_4^* \left[1 - (\pi_T^*)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}\right] > 0,$$

$$l_T^* = \eta_{T_s}^* l_{T_s}^*, \quad T_3^* = T_4^* - l_T^*/c_p;$$

последнее соотношение следует из ЗС энергии для адиабатного течения через турбину: $h_3^* = h_4^* - l_T^*$; здесь $h^* = c_p T^*$ и $c_p = \text{const}$.

Параметры одномерного потока в зонах 3 и 2 рассчитываются так же, как и в моделях скачка сечения и компрессора, т. е. по (8.19) — (8.23). Выполнение на итерации условия $|u_2 - u_3| < \varepsilon_u$ и в данном случае служит критерием окончания итераций по M_4 .

8.9.7. Распад разрыва на разветвлении

Часто необходимо рассчитать взаимодействие нестационарного потока с сечением трубопровода, на котором происходит слияние или разделение потока. Из всех вариантов разветвлений трубопровода рассмотрим два простых и практически наиболее важных: модель *тройника* — сечения, в котором сходятся три канала (см. п. 8.9.7), и модель *«щели»* — сечения на стыке двух участков вида канала, в котором имеется боковое отверстие, выходящее в емкость (п. 8.9.8).

Модели разветвлений, основанные на обобщении задачи о РПР, корректно задают условия совместности на граничном сечении; здесь — соответствующем разветвлении трубопровода. Именно такого класса модели следует применять при численном моделировании неустановившихся течений.

Расчетная схема РПР на тройнике. На рис. 8.14 показана обобщенная расчетная схема течения при РПР на тройнике — с тремя фиктивными *контактными разрывами* (КР).

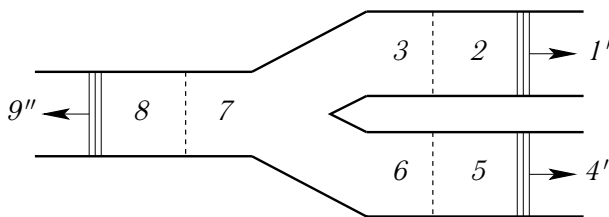


Рис. 8.14. Обобщенная расчетная схема течения при РПР на тройнике

Исходные данные задачи о РПР — параметры одномерного потока в зонах $9''$, $1'$ и $4'$, т. е. в концевых сечениях сопрягаемых каналов¹⁴, а также площади сечений F_i и значения параметров УС — R_i , γ_i , где $i = 1, 4, 9$ (рис. 8.14).

Схема на рис. 8.14 обобщает все шесть возможных режимов течения для нетривиальных решений задачи о РПР, когда тройник может являться либо *вытяжным*, либо *проточным* (рис. 8.15 а и б) со стороны одного из трех каналов, соответственно с одним и с двумя КР.

Возможны и предельные («тривиальные») режимы течения при РПР, когда на входе хотя бы в один канал устанавливается приблизительно нулевой расход G . Такие режимы рассмотрены не будут.

Ввиду возможности слияния и разделения потоков газовых смесей нужно отслеживать состав в зонах и корректно учитывать его влияние на параметры УС. Несмотря на то, что в общем случае для рабочего тела ДВС принимается многокомпонентное описание, для простоты изложим вариант модели, учитывающей массовую долю Y первого из двух

¹⁴Скорость потока в этих зонах сразу исключим из рассмотрения — пересчетом термодинамических параметров к нестационарно заторможенным (прием с перегородкой).

компонентов двухкомпонентной смеси. Значения Y_i , где $i = 1, 4, 9$, должны быть также заданы в исходных данных задачи о РПР.

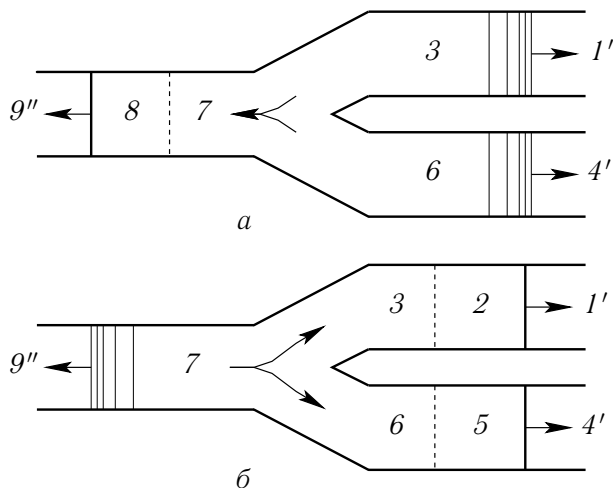


Рис. 8.15. Расчетные схемы для режимов течения при РПР на тройнике: а — вытяжном; б — проточном

(Системы нелинейных уравнений, соответствующую расчетным схемам на рис. 8.14 или 8.15 — в общем, «незамкнутом» виде, — предлагается, в порядке упражнения, вывести самостоятельно.)

Характеристика тройника в нестационарном потоке. В моделях МС, обобщающих задачу о РПР (см. пп. 8.9.2 и 8.9.3), соотношения непосредственно на МС замыкались зависимостью для потерь полного давления традиционного вида. Аналогичные модели турбомашин — более сложными статическими характеристиками (с. 195). В случае же разветвлений трубопровода проблематично как получить статическую характеристику элемента (на всевозможных режимах течения), так и включить ее в процедуру решения задачи о РПР.

Подходы к замыканию, основанные на простых гипотезах, оказываются недостаточно адекватными. Так, допущение о равенстве статических давлений ($p_3 = p_6 = p_7$, см. рис. 8.14) на тройнике после РПР приближенно и вообще применимо не для всех конфигураций. Также и применение коэффициентов гидравлических потерь ζ_{ij} обычного вида, зада-

ваемых постоянными или в функции числа M в одном из каналов, черевато заметными количественными отклонениями в результатах расчета.

Ниже описаны модели разветвлений, построенные на другом подходе к замыканию — расчетными характеристиками тройников, получаемых массовым решением (в $2D$ или в $3D$) серий задач о РПП с варьированием параметров в начальных условиях (исходных данных задач о РПП). Результаты серии расчетов при реалистичной геометрии разветвления, сведенные в интерполяционные таблицы, могут затем использоваться в одномерном расчете движения волн по трубопроводу с указанного вида разветвлением.

Таким образом, вместо стационарной характеристики потерь в потоке на разветвлении в предлагаемых моделях тройников используется пара зависимостей

$$\bar{p}_2 = \bar{p}_2 \left(\bar{p}'_1, \bar{p}'_4, \bar{T}'_1, \bar{T}'_4 \right), \quad \bar{p}_5 = \bar{p}_5 \left(\bar{p}'_1, \bar{p}'_4, \bar{T}'_1, \bar{T}'_4 \right), \quad (8.39)$$

образующих *нестационарную гидрогазодинамическую характеристику* (НГХ) разветвления, в которой искомые безразмерные давления в волнах

$$\bar{p}_2 = \frac{p_2 - p''_9}{p''_9} \quad \text{и} \quad \bar{p}_5 = \frac{p_5 - p''_9}{p''_9}$$

могут быть вычислены интерполяцией по таблице, заполненной по результатам решения большой серии задач о РПП с варьированием всех четырех безразмерных определяющих факторов (в приближении $R = \text{idem}$, $\gamma = \text{idem}$):

$$\bar{p}'_1 = \frac{p'_1 - p''_9}{p''_9}, \quad \bar{p}'_4 = \frac{p'_4 - p''_9}{p''_9},$$

$$\bar{T}'_1 = \frac{T'_1 - T''_9}{T''_9}, \quad \bar{T}'_4 = \frac{T'_4 - T''_9}{T''_9}.$$

Приведенными *критериальными зависимостями* учитываются конкретные очертания разветвлений и свойства газовой смеси, влияющие на решения задач о РПП.

Вытяжной режим на тройнике. Последовательность расчета течения при РПП на тройнике в *вытяжном* режиме приведем для расчетной схемы, показанной на рис. 8.15, а и справедливой для дозвукового

течения в зонах 3, 6 и 7. Для данного вида течения при РПР условия $p_3 \leq p'_1$ и $p_6 \leq p'_4$, что указывает на образование газовой смеси в зоне 7 слиянием (в предположении об идеальном смешении) потоков газовых смесей из зон 3 и 6 при $M_3 \leq 0$ и $M_6 \leq 0$.

Применение обычных соотношений на элементах волновой картины течения после РПР в этом режиме (рис. 8.15, а) при $Y_8 = Y_9$, $R_8 = R_9$, $Y_3 = Y_1$, $R_3 = R_1$, $c_{p3} = c_{p1}$, $Y_6 = Y_4$, $R_6 = R_4$, $c_{p6} = c_{p4}$ дает систему нелинейных уравнений относительно неизвестных M_8 , M_7 , M_6 и M_3 :

$$\frac{p_9''}{p_1'} = \frac{\pi'(M_3, \gamma_3)}{\pi''(M_8, \gamma_8)} \cdot \frac{p_7}{p_3}, \quad (8.40)$$

$$\frac{p_9''}{p_4'} = \frac{\pi'(M_6, \gamma_6)}{\pi''(M_8, \gamma_8)} \cdot \frac{p_7}{p_6}, \quad (8.41)$$

$$\frac{c_9''}{c_7^*} = \frac{M_7}{M_8} \cdot \frac{\alpha(M_7, \gamma_7)}{\alpha''(M_8, \gamma_8)}, \quad (8.42)$$

$$m_7 \frac{y(M_7, \gamma_7) F_7 p_7}{\sqrt{T_7^*}} = \sum_{i=3,6} m_i \frac{y(M_i, \gamma_i) F_i p_i}{\sqrt{T_i^*}}. \quad (8.43)$$

Здесь температура T_7^* и скорость звука c_7^* стационарного торможения, а также параметры уравнений состояния R_7 , c_{p7} и γ_7 определяются по M_6 и M_3 на основе модели идеального смешения потоков:

$$G_7 = G_3 + G_6, \quad (Gh^*)_7 = (Gh^*)_3 + (Gh^*)_6,$$

$$h_7^* = \frac{(Gh^*)_3 + (Gh^*)_6}{G_7}, \quad T_7^* = h_7^*/c_{p7},$$

$$c_{p7} = \frac{(Gc_p)_3 + (Gc_p)_6}{G_7}, \quad R_7 = \frac{(GR)_3 + (GR)_6}{G_7},$$

$$c_{v7} = c_{p7} - R_7, \quad \gamma_7 = \frac{c_{p7}}{c_{v7}}, \quad c_7^* = \sqrt{\gamma_7 R_7 T_7^*}.$$

Связь между величинами давлений p_7 , p_6 и p_3 определяется способом замыкания системы (8.40) – (8.43).

При предлагаемом способе замыкания на реализацию вытяжного режима течения прямо указывает (для конкретной задачи и в принятых обозначениях) выполнение условий $p_3 = p_2 \leq p'_1$ и $p_6 = p_5 \leq p'_4$ для p_2

и p_5 , получаемых из НГХ (8.39). Если указанные условия выполняются для двух других каналов, для приведения к данной расчетной схеме и описанной ниже процедуре достаточно обмена (переиндексации) значений параметров задачи.

По $p_3 = p_2 = \bar{p}_2 \cdot (p_9'' + 1)$ из уравнения $p_3 = p_1' \pi'(M_3, \gamma_3)$ определяется M_3 , после чего (при $F_3 = F_1$, $\gamma_3 = \gamma_1$ и $R_3 = R_1$) можно определить остальные параметры потока в зоне 3:

$$c_3 = c_1' \left(\frac{p_3}{p_1'} \right)^{\frac{\gamma_3 - 1}{2\gamma_3}}, \quad T_3 = \frac{c_3^2}{\gamma_3 R_3}, \quad \rho_3 = \frac{p_3}{R_3 T_3}, \quad (8.44)$$

$$u_3 = c_3 M_3, \quad T_3^* = T_3 + \frac{u_3^2}{2c_{p3}}, \quad G_3 = \rho_3 u_3 F_3, \quad h_3^* = c_{p3} T_3^*. \quad (8.45)$$

Совершенно аналогично по $p_6 = p_5 = \bar{p}_5 \cdot (p_0'' + 1)$ определяются параметры в зоне 6: c_6 , T_6 , ρ_6 , u_6 , T_6^* , G_6 и h_6^* (при $F_6 = F_4$, $\gamma_6 = \gamma_4$ и $R_6 = R_4$).

Параметры смеси в зоне 7 (G_7 , h_7^* , T_7^* и др.) рассчитываются по приведенной выше модели смешения, т. е. с учетом сохранения энергии и массы компонентов смеси при слиянии и смешении потоков из зон 3 и 6.

Учет соотношений на КР (разделяющем зоны 7 и 8) и на фронте простой изоэнтропной волны (зоны 9'' и 8) позволяет замкнуть задачу и определить поток количества движения в зоне 7 (рис. 8.15, а).

На каждой итерации по $M_7 \in [-1, 0]$ из уравнения расхода и энергии в форме (7.23) определяется давление

$$p_7 = \frac{G_7 \sqrt{T_7^*}}{m_7 F_7 y(M_7, \gamma_7)},$$

и другие параметры потока в зоне 7:

$$c_7^* = \sqrt{\gamma_7 R_7 T_7^*}, \quad c_7 = c_7^* \alpha(M_7, \gamma_7), \quad u_7 = c_7 M_7.$$

При $R_8 = R_9$ и $\gamma_8 = \gamma_9$ из $\pi''(M_8, \gamma_8) = (p_8 = p_7)/p_9''$ определяют M_8 и скорость потока в зоне 8: $u_8 = c_8 M_8$, где $c_8 = c_9'' \alpha''(M_8, \gamma_8)$. Итерации по M_7 прекращаются по выполнении условия равенства скоростей по обе стороны от КР $u_8 = u_7$ с наперед заданной точностью.

Приточный режим на тройнике. В том случае, когда «нетривиальное» течение при РПР на тройнике характеризуется условиями $p_3 = p_2 \geq p'_1$ и $p_6 = p_5 \geq p'_4$, следует применить расчетную схему *приточного* режима течения (рис. 8.15, б); если указанные условия выполняются для двух других каналов, путем переиндексации параметров задачи она приводится к данной расчетной схеме.

Опишем модель и процедуру расчета РПР на тройнике для данного режима и принятого способа замыкания (с применением НГХ), ограничиваясь случаем дозвукового течения в зонах 7, 3 и 6 (рис. 8.15, б).

В этом случае за фронтом движущейся влево волны $Y_7 = Y_9$, $c_{p7} = c_{p9}$, $\gamma_7 = \gamma_9$; для движущихся вправо волн — $Y_2 = Y_1$, $c_{p2} = c_{p1}$, $\gamma_2 = \gamma_1$, $Y_5 = Y_4$, $c_{p5} = c_{p4}$, $\gamma_5 = \gamma_4$, а для зон 3 и 6, куда смесь поступает квазистационарно при разделении потока из зоны 7 — $Y_3 = Y_6 = Y_7$, $c_{p3} = c_{p6} = c_{p7}$, $\gamma_3 = \gamma_6 = \gamma_7$ с сохранением удельного энергосодержания — $h_3^* = h_6^* = h_7^*$ и, как следствие — $T_3^* = T_6^* = T_7^*$.

Тогда соотношения для параметров потока на структурных элементах одномерного течения при РПР составляют систему нелинейных уравнений с неизвестными M_7 , M_3 , M_2 , M_6 и M_5 :

$$\frac{p_9''}{p_1'} = \frac{\pi'(M_2, \gamma_2)}{\pi''(M_7, \gamma_7)} \cdot \frac{p_7}{p_3}, \quad (8.46)$$

$$\frac{p_9''}{p_4'} = \frac{\pi'(M_5, \gamma_5)}{\pi''(M_7, \gamma_7)} \cdot \frac{p_7}{p_6}, \quad (8.47)$$

$$\frac{c_9''}{c_1'} = \frac{M_2}{M_3} \cdot \frac{\alpha(M_7, \gamma_7)}{\alpha(M_3, \gamma_3)} \cdot \frac{\alpha'(M_2, \gamma_2)}{\alpha''(M_7, \gamma_7)}, \quad (8.48)$$

$$\frac{c_9''}{c_4'} = \frac{M_5}{M_6} \cdot \frac{\alpha(M_7, \gamma_7)}{\alpha(M_6, \gamma_6)} \cdot \frac{\alpha'(M_5, \gamma_5)}{\alpha''(M_7, \gamma_7)}, \quad (8.49)$$

$$y(M_7, \gamma_7) F_7 p_7 = y(M_3, \gamma_3) F_3 p_3 + y(M_6, \gamma_6) F_6 p_6. \quad (8.50)$$

Соотношения для p_7 , p_3 и p_6 , входящих в систему (8.46) – (8.50), определяются принятым в модели тройника способом замыкания.

На практике (при предлагаемом способе замыкания с применением НГХ тройника) искомые параметры потока в зонах 7, 3 и 6 удобно находить итерационным уточнением значения одной переменной. На каждой итерации, например, по $M_7 \in [0, 1]$, вычисляются параметры газа в зоне 7:

$$T_7 = T_9'' \tau''(M_7, \gamma_7), \quad p_7 = p_9'' (T_7/T_9'')^{\frac{\gamma_7}{\gamma_7-1}},$$

$$c_7 = \sqrt{\gamma_7 R_7 T_7}, \quad u_7 = c_7 M_7, \quad T_7^* = T_7 + \frac{u_7^2}{2c_{p7}}.$$

Поток после разделения рассчитывается с учетом статических давлений $p_2 = p_3$ и $p_5 = p_6$, получаемых из НГХ (8.39). Так, при расчете зон 3 и 2 с учетом $F_3 = F_2 = F_1$ вычисляется (однократно) скорость потока в зоне 2

$$u_2 = M_2 c_2 = M_2 c_1' \left(\frac{p_2}{p_1'} \right)^{\frac{\gamma_2 - 1}{2\gamma_2}}, \quad (8.51)$$

где $p_2 = \bar{p}_2 \cdot (p_9'' + 1) = p_3$, а M_2 определяется из $p_2 = p_1' \pi'(M_2, \gamma_2)$.

Условия на КР — $p_2 = p_3$ и $u_2 = u_3$, а также условия $T_3^* = T_7^*$, $R_3 = R_7$ и $c_{p3} = c_{p7}$, позволяют определить параметры и расход в зоне 3:

$$T_3 = T_3^* - \frac{u_3^2}{2c_{p3}}, \quad \rho_3 = \frac{p_3}{R_3 T_3}, \quad G_3 = \rho_3 u_3 F_3. \quad (8.52)$$

Параметры и расход в зоне 6 определяются совершенно аналогично по $p_5 = \bar{p}_5 \cdot (p_9'' + 1)$. Итерации по M_7 прекращаются по выполнении условия $G_7 = G_3 + G_6$ с заданной точностью.

8.9.8. Распад разрыва в сечении с боковым отверстием

Боковое отверстие («щель») на стыке гладких участков, сообщающее трубопровод с емкостью — вид разветвления, где вместо одного из трех каналов имеется емкость. Опишем модель нестационарного течения через такое граничное сечение.

Конфигурации течения при РПР рассматриваемого вида, возможные при дозвуковой скорости потока в зонах 4 и 3, обобщает рис. 8.16. Решением задачи о РПР определяются параметры потока в зонах 2, 3, 4 и 5, потоки масс компонентов, потоки КД и энергии смеси в каналы, а также потоки масс и энергии в емкость на этапе расчетного шага численного расчета.

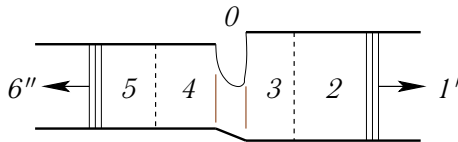


Рис. 8.16. Обобщенная расчетная схема РПР на «щели»

В конкретных условиях могут реализоваться четыре различных *нетривиальных* режима течения при РПР, которые назовем условно *проточным*, *вытяжным*, *полупроточным* и *полувытяжным* (рис. 8.17): конфигурации с двумя КР, без КР и две — с одним КР соответственно.

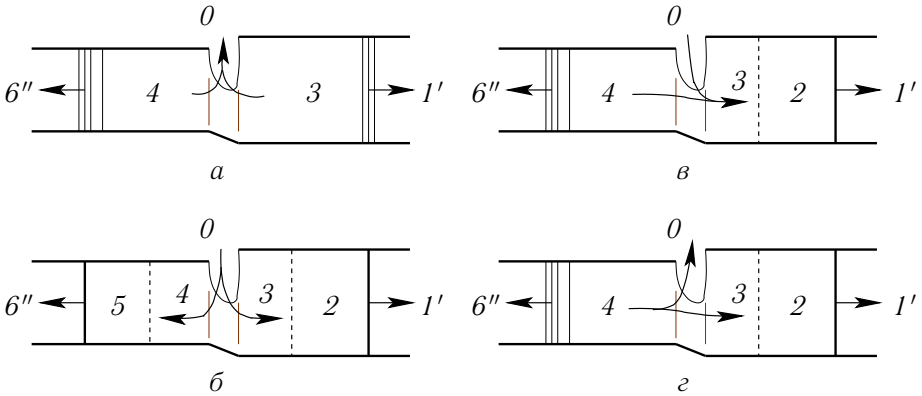


Рис. 8.17. Варианты РПР на «щели»: а — вытяжной; б — проточный; в — полупроточный при течении вправо; г — полувытяжной при течении вправо

Сказанное в п. 8.9.7 (с. 201) о сложности замыкания задачи о РПР на разветвлении относится и к данному случаю. Легко, однако, видеть, что в приближении однородного совершенного газа ($R = \text{idem}$, $\gamma = \text{idem}$) решение задачи о РПР на граничном сечении данного вида автомодельно и для фиксированной геометрии определяется параметрами нестационарного торможения в каналах p_6'', T_6'', p_1', T_1' и параметрами в емкости: p_0 и T_0 . Для «реконструкции» решения в ID , как и в п. 8.9.7, модель «щели» использует НГХ из серии вычислительных экспериментов. Так, знание величин p_2 и p_5 по обе стороны от «щели» позволяет замкнуть рассматриваемую задачу о РПР.

Связь между *определяющими* и *определяемыми* параметрами НГХ для указанной задачи, представленная в безразмерных переменных, имеет вид

$$\bar{p}_2 = \bar{p}_2 \left(\bar{p}_6'', \bar{p}_1', \bar{T}_6'', \bar{T}_1' \right), \quad \bar{p}_5 = \bar{p}_5 \left(\bar{p}_6'', \bar{p}_1', \bar{T}_6'', \bar{T}_1' \right), \quad (8.53)$$

где *определяемые* параметры —

$$\bar{p}_2 = \frac{p_2 - p_0}{p_0}, \quad \bar{p}_5 = \frac{p_5 - p_0}{p_0},$$

а *определяющие* —

$$\bar{p}_6'' = \frac{p_6'' - p_0}{p_0}, \quad \bar{p}_1' = \frac{p_1' - p_0}{p_0},$$

$$\bar{T}_6'' = \frac{T_6'' - T_0}{T_0}, \quad \bar{T}_1' = \frac{T_1' - T_0}{T_0}.$$

Рассмотрим процедуру расчета параметров потока в зонах 2, 3, 4 и 5 по заданным начальным данным для всех четырех режимов течения (рис. 8.17).

Считая расход смеси G_0 , потоки масс компонентов $(GY_k)_0$ и поток энергии смеси $(Gh^*)_0$ положительными в направлении емкости, получаем, что для всех режимов верны следующие условия сохранения масс и энергии:

$$G_3 = G_4 - G_0, \quad (8.54)$$

$$(GY_k)_3 = (GY_k)_4 - (GY_k)_0, \quad (8.55)$$

$$(Gh^*)_3 = (Gh^*)_4 - (Gh^*)_0. \quad (8.56)$$

Вытяжной режим на щели. Реализуется при $p_4 = p_5 \leq p_6''$ и $p_3 = p_2 \leq p_1'$ (рис. 8.17, а); на этом режиме не образуется ни одного КР, а состав и параметр уравнений состояния газовых смесей в зонах 3 и 4 соответствуют таковым для зон 1 и 6.

Соотношения на элементах одномерного течения при РПР для этого случая позволяют записать два уравнения для определения неизвестных величин M_4 и M_3 :

$$p_6'' = \frac{p_4 = p_5}{\pi''(M_4, \gamma_4)}, \quad (8.57)$$

$$p_1' = \frac{p_3 = p_2}{\pi'(M_3, \gamma_3)}, \quad (8.58)$$

где связь давлений p_2 и p_5 с определяющими параметрами задачи определяется конкретными условиями замыкания, принятыми в модели для описания квазистационарного течения в окрестности отверстия на граничном сечении.

В частном случае предлагаемой модели параметры, например, в зоне \mathcal{Z} вычисляются так: величина давления p_3 берется равной значению p_2 по НГХ (8.53), свойства газа соответствуют таковым в зоне I : $\gamma_3 = \gamma_1$, $R_3 = R_1$ и $c_{p3} = c_{p1}$, число M_3 — из уравнения $p_3/p_1' = \pi'(M_3, \gamma_3)$. Прочие параметры потока в зоне \mathcal{Z} задаются соотношениями (8.44) и (8.45). Аналогично определяются параметры в зоне $\mathcal{4}$ (рис. 8.17, а).

Приточный режим на щели. На этом режиме, который реализуется при $p_4 = p_5 \geq p_6''$ и $p_3 = p_2 \geq p_1'$, образуются два КР (газовая смесь из емкости поступает в оба канала, рис. 8.17, б). Поэтому свойства газа в зонах \mathcal{Z} и $\mathcal{4}$ и температура стационарного торможения соответствуют таковым для емкости: $\gamma_3 = \gamma_4 = \gamma_0$, $R_3 = R_4 = R_0$, $c_{p3} = c_{p4} = c_{p0}$ и $T_3^* = T_4^* = T_0$.

Соотношения на элементах одномерного течения при РПР для этого случая составляют уравнения с неизвестными M_5 , M_4 , M_3 и M_2 :

$$p_6'' = \frac{p_5}{\pi''(M_5, \gamma_5)}, \quad (8.59)$$

$$p_1' = \frac{p_2}{\pi'(M_2, \gamma_2)}, \quad (8.60)$$

$$\frac{c_6''}{c_0} = \frac{M_4}{M_5} \cdot \frac{\alpha(M_4, \gamma_4)}{\alpha'(M_5, \gamma_5)}, \quad (8.61)$$

$$\frac{c_1'}{c_0} = \frac{M_3}{M_2} \cdot \frac{\alpha(M_3, \gamma_3)}{\alpha'(M_2, \gamma_2)}, \quad (8.62)$$

где способ расчета давлений p_2 и p_5 также определяется конкретной моделью замыкания уравнений (8.59) — (8.62).

Для предлагаемой модели замыкающие соотношения составляют НГХ (8.53) конкретной щели и расчет РПР не требует итераций. Действительно, например, после определения M_2 из $p_2/p_1' = \pi'(M_2, \gamma_2)$ (по известному из НГХ значению $p_2 = p_0 \cdot (\bar{p}_2 + 1)$ и при $\gamma_2 = \gamma_1$, $R_2 = R_1$ и $c_{p2} = c_{p1}$) скорость $u_3 = u_2$ определяется из (8.51), а параметры в зоне \mathcal{Z} — из (8.52), также с учетом обоих условий на КР: $p_2 = p_3$ и $u_2 = u_3$. Параметры потока в зоне $\mathcal{4}$ (рис. 8.17, б) рассчитываются аналогично.

«Полуприточный» режим на щели, как и описанный далее «полувывтяжной», реализуются при $p_4 = p_5 \leq p_6''$ и $p_3 = p_2 \geq p_1'$, но в данном

случае (при течении газа вправо и $G_4 < G_3$) «дефицит» расхода восполняется за счет газа, поступающего из емкости: $G_0 = G_4 - G_3 < 0$, при принятом в (8.54) – (8.56) правиле знаков для потоков массы и энергии в емкость. Если же $p_4 = p_5 \geq p_6''$ и $p_3 = p_2 \leq p_1'$, то имеет место течение влево, и после переиндексации применима одна из расчетных схем, показанных на рис. 8.17, в или г.

На этом режиме по известному из НГХ (8.53) давлению $p_4 = p_5$ параметры потока в зоне 4 (за фронтом изоэнтропной волны, рис. 8.17, в) можно вычислить, явно выразив M_4 (при $\gamma_4 = \gamma_6$, $R_4 = R_6$ и $c_{p4} = c_{p6}$) из $p_4/p_6'' = \pi''(M_4, \gamma_4)$:

$$T_4 = \frac{c_4^2}{\gamma_4 R_4}, \quad T_4^* = T_4 + 0,5u_4^2/c_{p4}, \quad h_4^* = c_{p4}T_4^*,$$

$$\rho_4 = \frac{p_4}{R_4 T_4}, \quad c_4 = c_6'' \left(\frac{p_4}{p_6''} \right)^{\frac{\gamma_4 - 1}{2\gamma_4}}, \quad u_4 = c_4 M_4, \quad G_4 = \rho_4 u_4 F_4.$$

Параметры потока в зоне 3 позволяет определить модель слияния потоков, из равенств вида (8.54) – (8.56) которой следует:

$$h_3^* = \frac{G_4 h_4^* - G_0 h_0^*}{G_3}, \quad c_{p3} = \frac{G_4 c_{p4} - G_0 c_{p0}}{G_3}, \quad T_3^* = \frac{h_3^*}{c_{p3}},$$

$$R_3 = \frac{G_4 R_4 - G_0 R_0}{G_3}, \quad c_{v3} = c_{p3} - R_3, \quad \gamma_3 = \frac{c_{p3}}{c_{v3}}.$$

Параметры потока в зонах 2 и 3 при известных $p_2 = p_3$ и T_3^* , а также параметрах УС смеси вычисляются по (8.51) и (8.52).

Систему из трех уравнений для связи параметров через ГДФ от чисел M_4 , M_3 и M_2 в зонах при «полуприточном» режиме РПР на «щели» образуют первое уравнение (8.57) «вытяжной» модели, а также второе (8.60) и четвертое (8.62) уравнения «приточной» модели.

«Полувытяжной» режим на щели (рис. 8.17, г) отличается от «полуприточного» только тем, что при направлении течения вправо $G_4 > G_3$ избыток расхода ($G_0 = G_4 - G_3 > 0$) газовой смеси из зоны 4 «сбрасывается» в емкость (зона 0). В используемом здесь адиабатном приближении температура стационарного торможения и параметры УС смеси, поступающей в зону 3, соответствуют таковым для зоны 4. В остальном расчет ничем не отличается от расчета для предыдущего режима. Приведение к базовой расчетной схеме (рис. 8.17, г) для

расчета РПР при обратном направлении течения (влево) также требует только переиндексации параметров в условиях задачи.

Систему уравнений модели, где скомбинированы выражения отношений параметров через ГДФ, для данного режима течения при РПР на «щели» также образуют уравнения (8.57), (8.60) и (8.62).

9. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ГИДРОГАЗОДИНАМИКА

Глава посвящена численным методам решения задач газовой динамики. Рассматриваются только методы для расчетов по уравнениям МЖГ для сжимаемых сред в нестационарной форме, в вариантах, где по состоянию в расчетных ячейках на известном временном слое пересчет идет по явным выражениям состояния на следующий слой (*явные методы*).

Уравнения, описывающие течение газа, представляют собой¹ системы *уравнений с частными производными* (УЧП). Решение таких систем уравнений для практически важных задач невозможно получить в аналитическом (замкнутом) виде. Поэтому решение УЧП (как и *обыкновенных дифференциальных уравнений*, ОДУ) получают численно — методами *вычислительной гидрогазодинамики* (ВГД, англ. *Computational Fluid Dynamics, CFD*), посредством расчетов на цифровых ЭВМ. Применение численных методов обязательно подразумевает *дискретизацию* — переход от континуального (непрерывного) к дискретному («прерывистому») представлению как *независимых переменных* — x, y, z, t , так и *зависимых переменных* — искомым функций $\rho, v_x, v_y, v_z, p, T, e, q_x, \dots, \Pi''_{xx}, \dots, k, \epsilon$ и др.

Дискретизация здесь означает введение в расчетной области (в пространстве независимых переменных) *расчетной сетки* — более или менее упорядоченной совокупности точек («узлов») или же малых *конечных объемов* — ячеек. Соотношения численных методов ВГД задают арифметические (и другие) операции над *сеточными функциями* — массивами значений искомым функций в узлах (или же ячейках) расчетной сетки.

Важное свойство численных методов ВГД — *аппроксимация* соотношениями метода производных, входящих в исходные уравнения. Необходимо, чтобы при измельчении шага сетки по всем независимым переменным численное решение, получаемое данным методом, сходилось к точному решению, однозначно определяемому набором УЧП и условиями однозначности (НУ, ГУ и др.) конкретной задачи. Второе необходимое для *сходимости* численных решений к точным решениям условие — *устойчивость* расчетных процедур численного метода для

¹При применении дифференциальной формы записи основных уравнений МЖГ.

а) данной сетки, б) уравнений конкретной модели и в) заданных условий однозначности.

При этом степень соответствия модели реальному описываемому явлению определяется адекватностью принятых для вывода уравнений а) гипотез и б) соотношений, замыкающих уравнения. Вопросы адекватности модели и достоверности получаемых по ней решений задач на этапе применения численного метода для решения ее уравнений не рассматриваются.

Среди применяемых в ВГД численных методов [19, 22, 24] можно выделить группы *методов конечных объемов* (МКО), *методов конечных разностей* (МКР) и другие. МКО характерны тем, что их соотношения — конечно-разностные аналоги *законов сохранения*; в соотношениях имеются члены, которыми выражаются текущие значения потоков через границы расчетных ячеек массы, количества движения и энергии, т. е. сохраняющихся («консервативных») величин в ЗС. Свойство *консервативности* этих методов гарантирует отсутствие в ходе расчета неконтролируемых «нефизичных»² источников и «стоков» сохраняющихся величин.

Далее обсуждаются в основном МКО — *консервативные* методы для простой регулярной и равномерной сетки ячеек (конечных объемов). Они пригодны для численного решения *одномерных* и *пространственных* задач о течениях идеальных сжимаемых жидкостей и газов (дифференциальная форма — уравнения Эйлера) и о течениях реальных сред (с учетом вязкости и теплопроводности: уравнения Навье — Стокса), включая турбулентные (по уравнениям, замкнутым *моделями турбулентного переноса*), а также для расчета течений *реагирующей многокомпонентной смеси*.

Многообразие методов ВГД и решаемых задач не исчерпывается обсуждаемыми методами и классами задач. Однако и на их основе в принципе возможно численно решить и практически важные задачи о течениях реальных (вязких и теплопроводных) однородных сжимаемых жидкостей или химически реагирующих смесей (одно- и многофазных). Знакомство с этими методами дает базу для осмысления проблематики численного решения практических задач по моделям МЖГ. Методы показаны «от простого к сложному» — вначале описаны методы решения одномерных задач газовой динамики.

²Т. е. происходящих от вычислительной погрешности, а не заложенных в модель.

Специфика численных методов и программных инструментов для моделирования на ЭВМ общего вида течений по уравнениям моделей МЖГ кратко освещена в п. 9.3 данной главы (с. 238).

9.1. Численные методы для одномерных задач

Изложение численных методов для уравнений газовой динамики начнем с двух методов, где соотношения вдоль характеристических кривых используются для вычисления искомых функций в узлах *расчетной сетки* — *метода характеристик* и *сеточно-характеристического метода* [14].

9.1.1. Метод характеристик

В классическом *методе характеристик* для решения уравнений одномерной нестационарной газовой динамики на плоскости (x, t) вводится сетка, узлы которой располагаются в точках пересечения характеристических кривых («характеристик») трех семейств, а положение точек определяется в ходе численного решения. Параметры газа в узлах сетки определяются из соотношений вдоль характеристик для выбранной модели течения. Метод применялся для расчета пульсирующих воздушно-реактивных двигателей еще до появления ЭВМ.

Метод характеристик, как метод решения систем УЧП гиперболического типа с двумя независимыми переменными, может служить не только для расчета одномерных неустановившихся течений, но и для стационарных сверхзвуковых течений и др. Например, при расчетах двумерных сверхзвуковых течений маршевой координатой будет пространственное направление, в котором составляющая скорости по данному направлению в рассчитываемой подобласти превышает местную скорость звука.

При численном расчете нестационарного течения совершенного газа с одной пространственной координатой для определения решения в узлах в общем случае нужно использовать конечно-разностные соотношения вдоль характеристических кривых вида (8.10). Данные соотношения несправедливы на разрывах искомых функций, и при наличии разрывов в численном решении возникнут погрешности (на разрывах теряется *аппроксимация* исходных интегральных законов сохранения). Можно обойти указанное затруднение, если явно выделять поверхности разрывов в процессе расчетов и применять к ним специфические соотношения на разрывах, что значительно усложняет логику расчетов.

Все численные методы, описываемые ниже, не требуют упомянутого *явного выделения разрывов*. По этому признаку такие методы относят к классу методов (или *разностных схем*) *сквозного счета* (англ. *shock-capturing schemes*).

При расчете методом характеристик в подобластях гладкости решения достигается второй порядок аппроксимации как по времени t , так и по координате x , если параметры в узле D и его координату в (x, t) определять итерационно, с подстановкой средних арифметических значений параметров в узлах A, B, C , и D в разностные формулы на основе (8.10) для определения приращений *инвариантов Римана* $I_{\pm D}$ и удельной энтропии s_D (см. рис. 9.1).

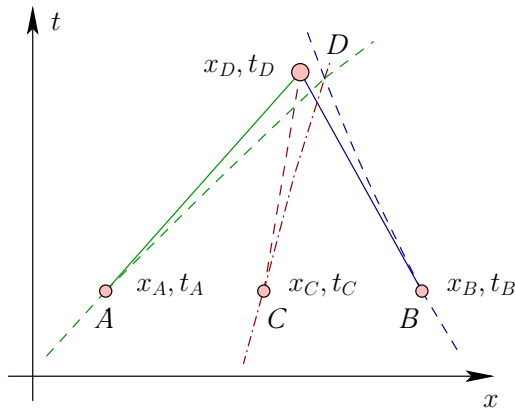


Рис. 9.1. К построению характеристических методов; конечно-разностная аппроксимация соотношений вдоль характеристик (см. рис. 8.1 на с. 164)

Достоинством метода характеристик является наглядность при проведении расчетов, недостатком — сложность метода в варианте с явным выделением разрывов или же потеря аппроксимации при использовании его в качестве метода сквозного счета. Кроме того, не во всех приложениях удобно бывает построение *расчетной сетки* в ходе расчета.

Для реализации на ЭВМ более удобны методы расчета на фиксированной по x и t сетке.

9.1.2. Сеточно-характеристический метод

Так, *сеточно-характеристический метод* использует те же соотношения вдоль характеристик для обновления параметров в узлах

сетки на новом слое по t . Опишем вариант метода с фиксированной и равномерной по x и t сеткой, в котором распределения искомым величин — I_{\pm} и s — на *старом временном слое* находятся линейной интерполяцией между узлами сетки, разрывы искомым функций не рассматриваются. Конечно-разностные формулы метода для вычисления термогазодинамических параметров в узле (x_i, t^{n+1}) получим из соотношений вида (8.10) для частного случая квазиодномерного движения совершенного газа

$$\begin{aligned}\frac{d^- I_-}{dt} &= -\frac{c}{\gamma R} \frac{d^- s}{dt} - \frac{cu}{F} \frac{dF}{dx} - \frac{\tau_w \Pi}{\rho F} + \frac{c}{c_p T} \frac{dq}{dt} = S_-, \\ \frac{d^+ I_+}{dt} &= -\frac{c}{\gamma R} \frac{d^+ s}{dt} + \frac{cu}{F} \frac{dF}{dx} + \frac{\tau_w \Pi}{\rho F} + \frac{c}{c_p T} \frac{dq}{dt} = S_+, \\ \frac{d^0 s}{dt} &= \frac{1}{T} \frac{dq}{dt} = \frac{\gamma R}{c^2 d_3} \left[\lambda \frac{|u^3|}{2} + \frac{4\alpha}{\rho} (T_w - T) \right] = S_0.\end{aligned}$$

Для показанного на рис. 9.2 шаблона сетки формулы метода имеют вид:

$$\begin{aligned}I_{-i}^{n+1} &= I_{-D} = I_B + \Delta t \cdot S_{-BD}, \\ I_{+i}^{n+1} &= I_{+D} = I_A + \Delta t \cdot S_{+AD}, \\ s_i^{n+1} &= s_D = s_C + \Delta t \cdot S_{0CD},\end{aligned}$$

где «источниковые» члены S_{\pm} и S_0 вычисляются по средним арифметическим значениям ρ , c , u , F , $\frac{dF}{dx}$, τ_w , T , $\frac{dq}{dt}$, λ , d_3 , T_w и α (но не s !) в соответствующих точках, например $c_{AD} = \frac{1}{2}(c_A + c_D)$ и т. д.

При этом для уточнения значений величин в точке D требуется применять формулы метода итерационно, уточняя на каждой итерации также координаты x точек A , B и C , а также значения параметров газа в них. Примем для определенности, что $u_{AD} + c_{AD} \geq 0$, $u_{BD} - c_{BD} \leq 0$ и $u_{CD} \geq 0$, тогда для линейного интерполирования решения на «старом» слое по времени (рис. 9.2) справедливы формулы

$$\begin{aligned}I_A &= I_{+i-1}^n + \left(\frac{x_A - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \right) (I_{+i}^n - I_{+i-1}^n), \\ I_B &= I_{-i}^n + \left(\frac{x_A - x_i}{x_{i+1} - x_i} \right) (I_{-i+1}^n - I_{-i}^n),\end{aligned}$$

$$s_C = s_{i-1}^n + \left(\frac{x_C - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \right) (s_i^n - s_{i-1}^n),$$

где $x_A = x_i - (u_{AD} + c_{AD})\Delta t$, $x_B = x_i - (u_{BD} - c_{BD})\Delta t$, $x_C = x_i - u_{CD}\Delta t$.

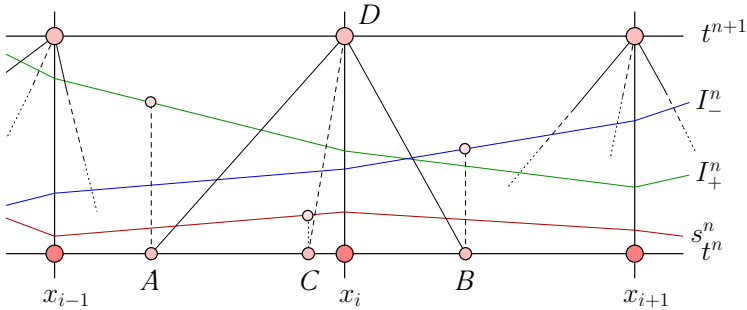


Рис. 9.2. Схема сеточно-характеристического метода на сетке с равномерным шагом узлов

После определения в некоторой точке (x_i, t^{n+1}) параметров потока I_- , I_+ и s прочие параметры досчитываются по известным соотношениям:

$$c = \frac{\gamma - 1}{4} (I_+ + I_-), \quad u = \frac{1}{2} (I_+ - I_-),$$

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{c}{c_0} \right)^{\frac{2}{\gamma-1}} \exp \left(\frac{s_0 - s}{R} \right), \quad T = \frac{c^2}{\gamma R}, \quad p = \rho RT.$$

Уже на примере сеточно-характеристического метода можно показать (см. рис. 9.2), что шаг по времени Δt ограничен выражением вида условия *устойчивости* Куранта (*Courant*)

$$\Delta t < CFL \frac{\Delta x}{\max(|u_i| + c_i)}, \quad CFL \approx 1.$$

Поскольку в этом методе отсутствует понятие ячейки как конечного объема и разностные формулы метода не являются разностными аналогами интегральных законов сохранения, метод не является консервативным, так как не *аппроксимирует* уравнения ГД в интегральной форме.

Полученные подобными методами численные решения *не сходятся* к точным решениям задач для интегральных законов сохранения, когда решения содержат разрывы. Поэтому применение данного метода

в качестве метода сквозного счета к задачам с разрывами дает численные решения, отягощенные неустранимыми погрешностями.

Отсутствие у метода свойства аппроксимации уравнений в интегральной форме при сквозном счете течений с разрывами видно на рис. 9.3 и рис. 9.4, где сравниваются решения двух тестовых задач о распаде разрыва, полученные описанным *сеточно-характеристическим методом*, с точными решениями. Значения параметров потока в узлах сетки из численного решения отмечены точками-маркерами.

Первая задача содержала двукратный, а вторая — двадцатикратный разрыв по плотности и давлению в исходных данных, при исходно нулевой скорости газа с $\gamma = 1,4$ по обе стороны от начального разрыва параметров, расположенного в центре. На рис. 9.3 показано решение задачи с $p_L/p_R = \rho_L/\rho_R = 2$, с развитием дозвукового течения с числом $M \approx 0,26$ за фронтом волны разрежения, а на рис. 9.4 — задачи со сверхзвуковым течением ($M = 1,36$ за фронтом ЦВР) после распада исходного разрыва при $p_L/p_R = \rho_L/\rho_R = 20$. Решения получены сеточно-характеристическим методом на равномерной сетке из 100 узлов. В численных расчетах было сделано 100 шагов по времени; число Куранта CFL в расчетах было близко к 0,5.

Как можно видеть, характер погрешности численного решения по виду такой же, как у наименее точного — классического *метода Годунова* первого порядка аппроксимации, см. п. 9.1.3. Кроме того, численное решение существенно отличается от точного в области скачка уплотнения — численное «отстает», что не исправляется переходом к более мелкой сетке и объясняется несправедливостью соотношений вдоль характеристик в окрестности сильного разрыва.

Из рис. 9.4 видно, что неконсервативность метода проявляется здесь значительно — заметно занижена скорость движения КР и очень существенно — скорость движения УВ. Отметим, что амплитудные значения параметров потока по обе стороны от КР представлены удовлетворительно, но профиль скорости не вполне горизонтальный. Эти недостатки не были заметны в «дозвуковом» течении при РПР (рис. 9.3).

Наращение погрешности метода особенно остро проявляется в расчетах движения УВКА, где фронт волны в численном решении заметно отстает по сравнению с точным решением, полнота профиля решения нефизично уменьшается со временем — происходит «сеточное» уменьшение массы и энергии газа в расчетной области, что по опре-

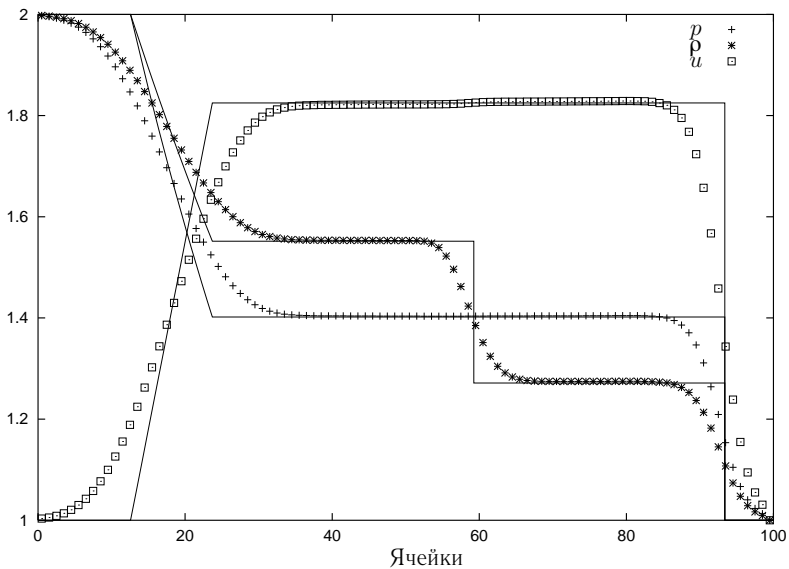


Рис. 9.3. «Дозвуковой» распад разрыва, сеточно-характеристический метод

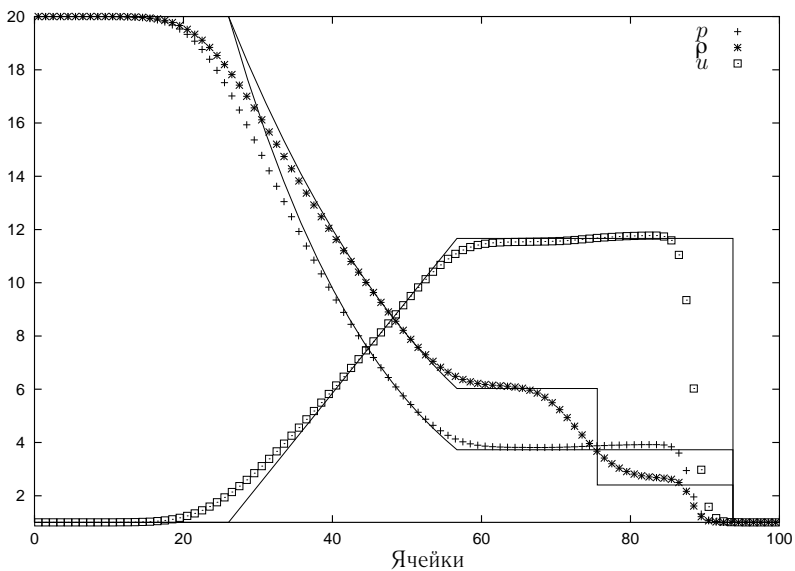


Рис. 9.4. «Сверхзвуковой» распад разрыва, сеточно-характеристический метод

делению невозможно в консервативных методах. На таких (неавтомодельных) задачах видны недостатки сеточно-характеристического метода; они существенны на практике, но слабо проявляются в решениях автотомельных задач (рис. 9.3 и рис. 9.4).

Сеточно-характеристический метод и метод характеристик широко использовались в прошлом для численного моделирования нестационарных течений газа в каналах и соплах, в том числе для моделирования процессов в сложных трубопроводных системах и газозвудушных трактах ДВС. В настоящее время им на смену практически повсеместно пришли высокоточные консервативные методы сквозного счета, например, методы типа С. К. Годунова.

Методы типа метода характеристик и других классов, более или менее непосредственно использующих соотношения вдоль характеристических кривых (и поверхностей), могут с успехом использоваться для решения *многомерных* нестационарных задач *газовой динамики* (см., например, [22, 19]).

9.1.3. Метод распада разрыва С. К. Годунова

Изучение семейства консервативных явных методов решения нестационарных задач газовой динамики начнем с классического «метода распада разрыва» (предложенного советским ученым С. К. Годуновым [19]) и получившего его имя.

До С. К. Годунова для численного решения задач газовой динамики применялись (помимо конечно-разностных методов, основанных на характеристических соотношениях) методы, основанные на формальных конечно-разностных аппроксимациях уравнений. В явных консервативных вариантах таких методов потоковые члены вычисляются фиксированным способом, при этом решение в узле сетки на новом слое линейно зависит от решения в нескольких смежных узлах сетки, из-за чего методы получили наименование *линейных*. При применении линейных методов, особенно с порядком аппроксимации выше первого, в областях резкого изменения сеточных функций (например, на разрывах в точном решении) проявляются нефизичные дефекты численных решений, главным образом осцилляции *сеточных функций*. Методы, дающие подобные решения, характеризуются поэтому как *немонотонные*.

Часто для получения бездефектных численных решений задач с разрывами приходилось отказываться от простых в реализации «сквозных» методов (т. е. не учитывающих *особенностей* решения)

и применять методы в рамках программ счета *с выделением особенностей*. Как вариант решения проблемы использования высокоточных методов с сохранением монотонности решений при «сквозном» счете применялись методы «гибридного» типа, которые в областях, чреватых осцилляциями сеточных функций, «переключались» на метод низкого порядка, обладающий значительной численной диссипацией, тогда как в основной части расчетной области безопасно использовался немонотонный метод более высокого порядка, с пониженной диссипацией. Таким образом удавалось проводить «сквозные» расчеты задач с разрывами.

С. К. Годуновым [19] показано, что *среди линейных методов с порядком аппроксимации выше первого не существует методов, гарантирующих монотонность решения* (теорема Годунова). Причина нефизичного поведения численных решений в таких случаях — неадекватное описание линейным методом нелинейных эффектов, присутствующих в системах уравнений *газовой динамики*.

В линейных консервативных методах даже первого порядка часто не гарантируется монотонность решений в случае наличия сильных скачков в решении задач. Тем не менее некоторые из них дают неосциллирующие (монотонные) решения, чему способствует, во-первых, то, что в методах первого порядка аппроксимации присутствует значительная нефизичная (численная) диссипация. Во-вторых, при расчете потоков желателен учет «характеристических» свойств исходной системы УЧП. А именно, возможно использовать в численном методе решения систем гиперболических УЧП [21] свойство *противопоточности* (англ. *upwinding*) — когда в процедуре расчета потоков на границе используются соотношения типа соотношений на прибывающих характеристиках.

Нововведением С. К. Годунова в деле создания гарантированно монотонной версии консервативного метода сквозного счета стал способ расчета газодинамических потоков на границах расчетных ячеек из *точного решения задачи о распаде произвольного разрыва* (РПР) — задачи о течении после соприкосновения газов с произвольно отличающимися газодинамическими параметрами (см. с. 181), т. е. способ определения потоков из локальной задачи о нелинейном волновом плоском движении. К этой задаче приводит использование (в этом методе)

кусочно-постоянных (т. е. в пределах ячеек, см. рис. 9.5) распределений параметров газа в начале каждого расчетного шага.

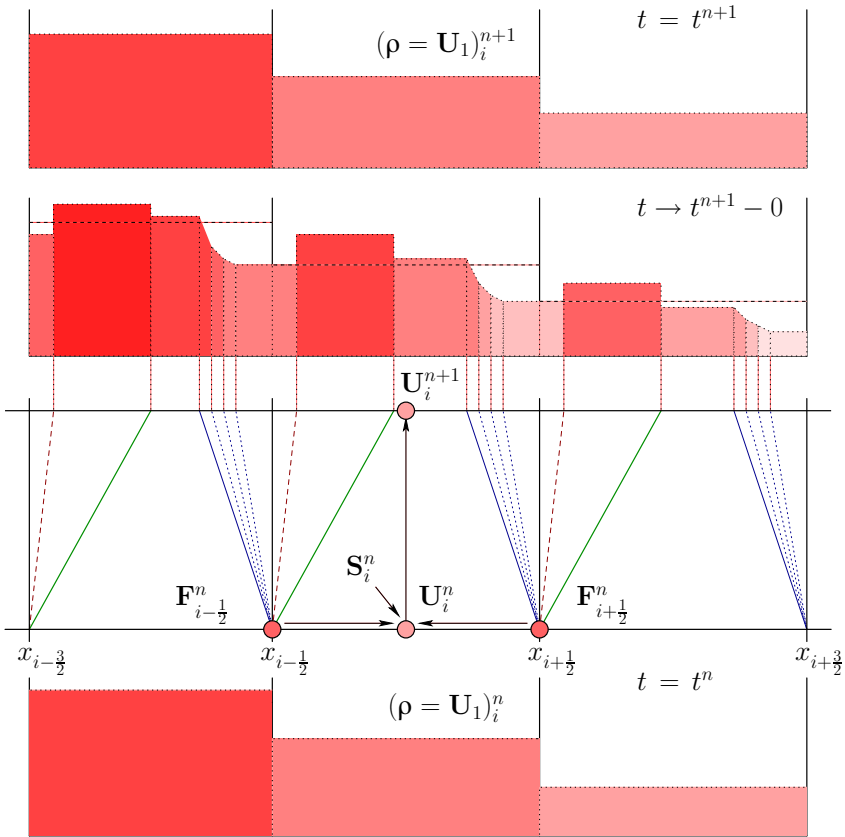


Рис. 9.5. Обновление решения в ячейках (конечных объемах) методом «распада разрыва» С. К. Годунова; вид решения характерен для плотности $\rho = \mathbf{U}_1$

Консервативный метод обновления параметров газа в ячейке для системы уравнений (2.30), соответствующий методу С. К. Годунова, одноступенчатый и «трехточечный» на «старом» слое по времени, имеет вид

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x \cdot F_i} \left[(\mathbf{F}_x \cdot F)_{i-1/2}^n - (\mathbf{F}_x \cdot F)_{i+1/2}^n \right] + \Delta t \mathbf{S}_i^n,$$

где $(\mathbf{F}_x)_{i-1/2}^n$ — потоки из точных решений задач о РПР на $i - \frac{1}{2}$ -й границе на «старом» временном слое; \mathbf{S}_i^n — источниковый член, учитывающий трение, теплообмен со стенкой и переменность сечения.

Использование в методе процедуры решения РПР позволяет определять потоки физически обоснованно, на базе интегральных законов сохранения. Поэтому метод С. К. Годунова может применяться как метод сквозного счета, позволяющий получать монотонные решения, *сходящиеся* (при измельчении сетки) к точным решениям, удовлетворяющим интегральным законам сохранения при наличии, в общем случае, слабых и сильных разрывов искомых функций.

Отметим, что возможен расчет потоков по данным на «прибывающих» характеристиках³, что, по сравнению с точным решением задачи о РПР, означает линеаризацию. Такой подход применен в консервативных методах из п. 9.1.4 и 9.1.5.

На рис. 9.6 можно видеть решения упомянутой выше тестовой задачи о РПР при небольших значениях M в волнах, а на рис. 9.7 — при сверхзвуковом течении за «хвостом» волны разрежения, полученные классическим методом Годунова на расчетной сетке, содержащей 100 ячеек — конечных объемов. В этих задачах также было сделано по 100 шагов по времени с тем же числом Куранта (0,5), что и ранее для сеточно-характеристического метода.

Заметно значительное численное «размазывание» решения во всех случаях, хотя положение разрывов воспроизводится очень хорошо (общее свойство консервативных методов). На профилях решения «сверхзвуковой» задачи виден дефект решения, присущий методу Годунова первого порядка — скачок параметров на звуковой линии, имеющий численный характер. К недостаткам классического метода Годунова относятся его невысокая точность — следствие сильной *численной диссипации* при низком (первом) порядке аппроксимации в подобластях гладкости решения и большие вычислительные затраты на массовое решение задач о РПР на границах.

При решении практических задач значительная численная диссипация делает метод Годунова малоэффективным, а для многомерных задач, где необходимо выявить тонкости структуры решения при медленном течении — практически неприменимым.

³Решение локальной характеристической задачи (ЛХЗ).

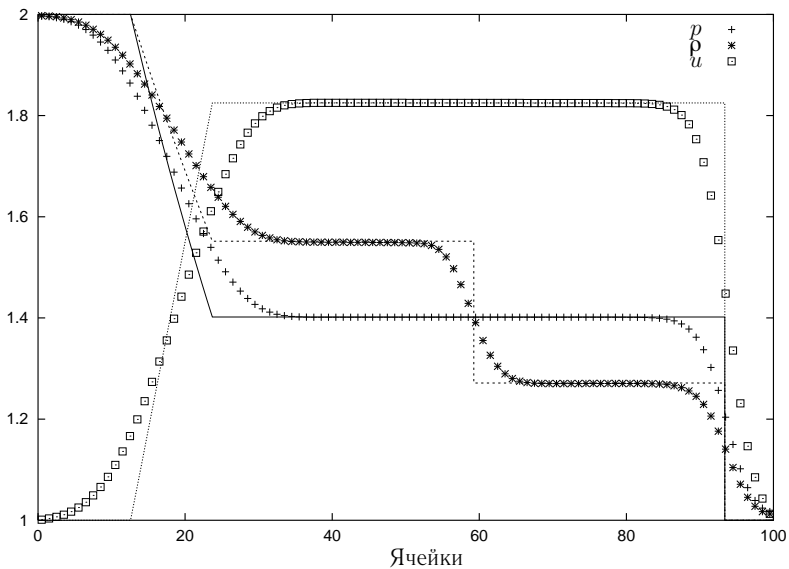


Рис. 9.6. «Дозвуковой» распад разрыва, рассчитанный методом С. К. Годунова

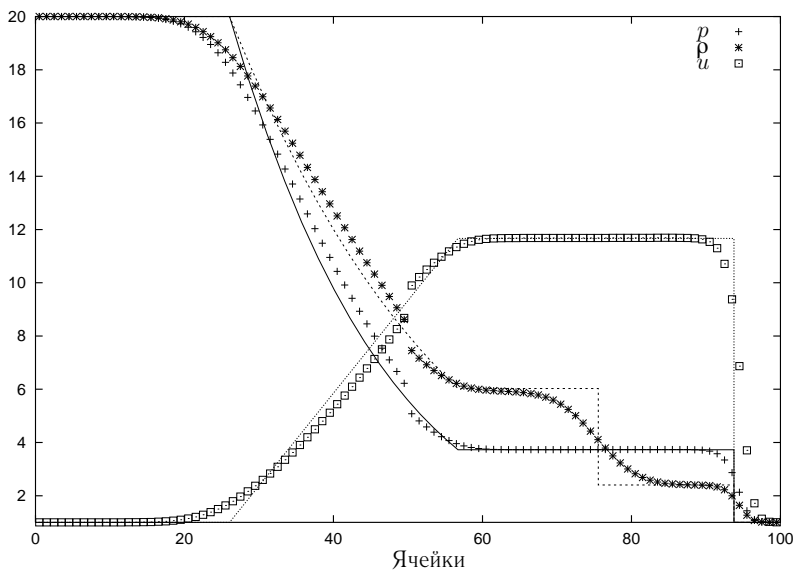


Рис. 9.7. «Сверхзвуковой» распад разрыва, метод С. К. Годунова

9.1.4. Метод повышенной точности типа метода Годунова

В 70-х и 80-х годах XX века исследовалась возможность создания высокоточных эффективных консервативных монотонных методов сквозного счета. Были предложены разные варианты так называемых *MUSCL-*, *TVD-*, *ENO-*, *FCT-*методов. Среди них — класс методов типа Годунова *повышенной точности*, обобщающих классический метод уточненным способом аппроксимации производных по пространству (т. е. потоков на границах) — на расширенном шаблоне ячеек.

Если бы без вреда для монотонности решений можно было использовать по две ячейки с обеих сторон от данной, то можно «реконструировать» решение в пределах ячейки по закону квадратичной параболы и достичь *третьего порядка аппроксимации* в методе для решения одномерных (по координате x) задач. Согласно теореме Годунова (с. 221), такой метод на фиксированном шаблоне ячеек, будучи линейным, окажется немонотонным. Поэтому во всех методах повышенной точности описываемого здесь класса сеточный шаблон не фиксирован, а приспособливается к решению (по существу, делая такой метод *повышенного порядка аппроксимации* «гибридным»): в области резкого изменения решения метод переключается на шаблон, дающий достаточную для монотонности численную диссипацию.

В настоящее время методы повышенной точности с *кусочно-параболической* реконструкцией решения в ячейке применяются как стандартный инструмент решения многомерных стационарных и нестационарных задач, в том числе *неявными методами* и с преобразованием в криволинейную систему координат. Использование их значительно повышает эффективность вычислений за счет улучшения аппроксимации, а также применения линеаризованных процедур решения ЛХЗ вместо процедур точного решения задачи о РПР на границах. Такой подход оправдан, так как благодаря параболической реконструкции решения в ячейке разрывы на границах ячеек в массе своей небольшие и ошибки линеаризации заметно не проявляются.

Наряду с улучшением пространственной аппроксимации становится разумным (и необходимым) повышение порядка также и по времени. Это осуществимо, во-первых, с применением многошаговых методов интегрирования состояния в каждой ячейке по времени в духе методов *Рунге — Кутты*; на практике применяются двух-, трех- и четырехэтапные

методы соответственно второго, третьего и четвертого порядков аппроксимации по времени. Кроме того, остается возможность однократного (на шаге) вызова процедур реконструкции и решения ЛХЗ в методе второго порядка по времени, расчет потоков ведется в точке «на полушаге» между старым и новым временными слоями. Ниже, на с. 232 будет описан исключительно эффективный метод данного типа.

Двухэтапный метод (типа «предиктор-корректор») пересчета состояния в ячейках на новый слой по времени, схематично показанный на рис. 9.8, может быть записан как

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_i^{(1)} &= \mathbf{U}_i^n + \Delta t L(\mathbf{U}_i^n), \\ \mathbf{U}_i^{n+1} &= \frac{1}{2}\mathbf{U}_i^n + \frac{1}{2}\left[\mathbf{U}_i^{(1)} + \Delta t L(\mathbf{U}_i^{(1)})\right]. \end{aligned}$$

Возможно применение и трехэтапного метода, что соответствует методу Рунге – Кутты третьего порядка по времени:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_i^{(1)} &= \mathbf{U}_i^n + \Delta t L(\mathbf{U}_i^n), \\ \mathbf{U}_i^{(2)} &= \frac{3}{4}\mathbf{U}_i^n + \frac{1}{4}\left[\mathbf{U}_i^{(1)} + \Delta t L(\mathbf{U}_i^{(1)})\right], \\ \mathbf{U}_i^{n+1} &= \frac{1}{3}\mathbf{U}_i^n + \frac{2}{3}\left[\mathbf{U}_i^{(2)} + \Delta t L(\mathbf{U}_i^{(2)})\right]. \end{aligned}$$

В этих методах $L(\mathbf{U}_i^n)$ — разностный пространственный оператор, который применительно к системе (2.29) имеет вид:

$$L(\mathbf{U}_i^n) = \frac{1}{\Delta x \cdot F_i} \left[(\mathbf{F}_x \cdot F)_{i-\frac{1}{2}}^n - (\mathbf{F}_x \cdot F)_{i+\frac{1}{2}}^n \right] + \mathbf{S}_i^n.$$

Процедура реконструкции решения \mathbf{U} по обе стороны от границы, например, с индексом $i + \frac{1}{2}$, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{i+\frac{1}{2}}^{n-} &= \mathbf{U}_i^n + [\mathbf{S}]_i^{-1} \left\{ \frac{1+\varphi}{4} \tilde{\Delta} \mathbf{W}_i^n + \frac{1-\varphi}{4} \tilde{\nabla} \mathbf{W}_i^n \right\}, \\ \mathbf{U}_{i+\frac{1}{2}}^{n+} &= \mathbf{U}_{i+1}^n - [\mathbf{S}]_{i+1}^{-1} \left\{ \frac{1+\varphi}{4} \tilde{\nabla} \mathbf{W}_{i+1}^n + \frac{1-\varphi}{4} \tilde{\Delta} \mathbf{W}_{i+1}^n \right\}, \end{aligned} \quad (9.1)$$

$$\tilde{\Delta} \mathbf{W}_i^n = \min\text{mod}(\Delta \mathbf{W}_i^n, b \nabla \mathbf{W}_i^n), \quad \tilde{\nabla} \mathbf{W}_i^n = \min\text{mod}(\nabla \mathbf{W}_i^n, b \Delta \mathbf{W}_i^n),$$

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{W}_i^n &= [S]_i^n \Delta \mathbf{U}_i^n, & \Delta \mathbf{U}_i^n &= \mathbf{U}_{i+1}^n - \mathbf{U}_i^n, \\ \nabla \mathbf{W}_i^n &= [S]_i^n \nabla \mathbf{U}_i^n, & \nabla \mathbf{U}_i^n &= \mathbf{U}_i^n - \mathbf{U}_{i-1}^n. \end{aligned}$$

Ограничительная функция $\text{minmod}(\cdot, \cdot)$ определяется как

$$\text{minmod}(x, y) = \begin{cases} 0, & xy \leq 0 \\ \text{sign}(x) \min(|x|, |y|), & xy > 0 \end{cases}, \quad (9.2)$$

где $1 \leq b \leq b_{\max}$, $b_{\max} = \frac{3-\varphi}{1-\varphi}$, $\varphi \leq 1$; приняты следующие величины, обеспечивающие третий порядок аппроксимации по x в аналогичном методе для модельного линейного уравнения — $\varphi = \frac{1}{3}$, $b = b_{\max} = 4$.

Матрица преобразования $[S]$ и обратная ей матрица $[S]^{-1}$ взяты из преобразования бесконечно малых приращений искомого консервативных переменных в приращения вектора плотностей потоков, справедливого для системы уравнений (2.32) — для однородного совершенного газа или смеси совершенных газов постоянного состава:

$$[A] = [S]^{-1}[\Lambda][S], \quad [\Lambda] = \text{diag}(u, u + c, u - c), \quad \delta \mathbf{F} = [A]\delta \mathbf{U}, \quad (9.3)$$

$$[S] = \begin{bmatrix} -c^2 + \frac{\gamma-1}{2}u^2 & (1-\gamma)u & \gamma-1 \\ -cu + \frac{\gamma-1}{2}u^2 & c + (1-\gamma)u & \gamma-1 \\ cu + \frac{\gamma-1}{2}u^2 & -c + (1-\gamma)u & \gamma-1 \end{bmatrix},$$

$$[S]^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{c^2} & \frac{1}{2c^2} & \frac{1}{2c^2} \\ -\frac{u}{c^2} & \frac{u}{2c^2} + \frac{1}{2c} & \frac{u}{2c^2} - \frac{1}{2c} \\ -\frac{u^2}{2c^2} & \frac{u^2}{4c^2} + \frac{u}{2c} + \frac{1}{2(\gamma-1)} & \frac{u^2}{4c^2} - \frac{u}{2c} + \frac{1}{2(\gamma-1)} \end{bmatrix}.$$

Расчет потоков на границах в описываемом методе проводится приближенной процедурой, основанной на соотношениях вдоль характеристик одномерной плоско-симметричной системы уравнений газовой динамики (2.32). В процедуре может быть использована и система соотношений вдоль характеристик исходной системы уравнений достаточно общего вида, например (2.29). Опыт расчетов показывает, что если для смежных ячеек отличие молярных масс газовых смесей, сечений канала, а также интенсивность трения и теплообмена со стенкой соответствуют реально встречающимся условиям, то можно брать соотношения для плоского нестационарного потока однородного совершенного газа.

Такие соотношения следуют из (8.7) и имеют вид:

$$\begin{aligned} d^-u - \frac{1}{\rho c} d^-p &= 0, \\ d^0p - c^2 d^0p &= 0, \\ d^+u + \frac{1}{\rho c} d^+p &= 0, \end{aligned}$$

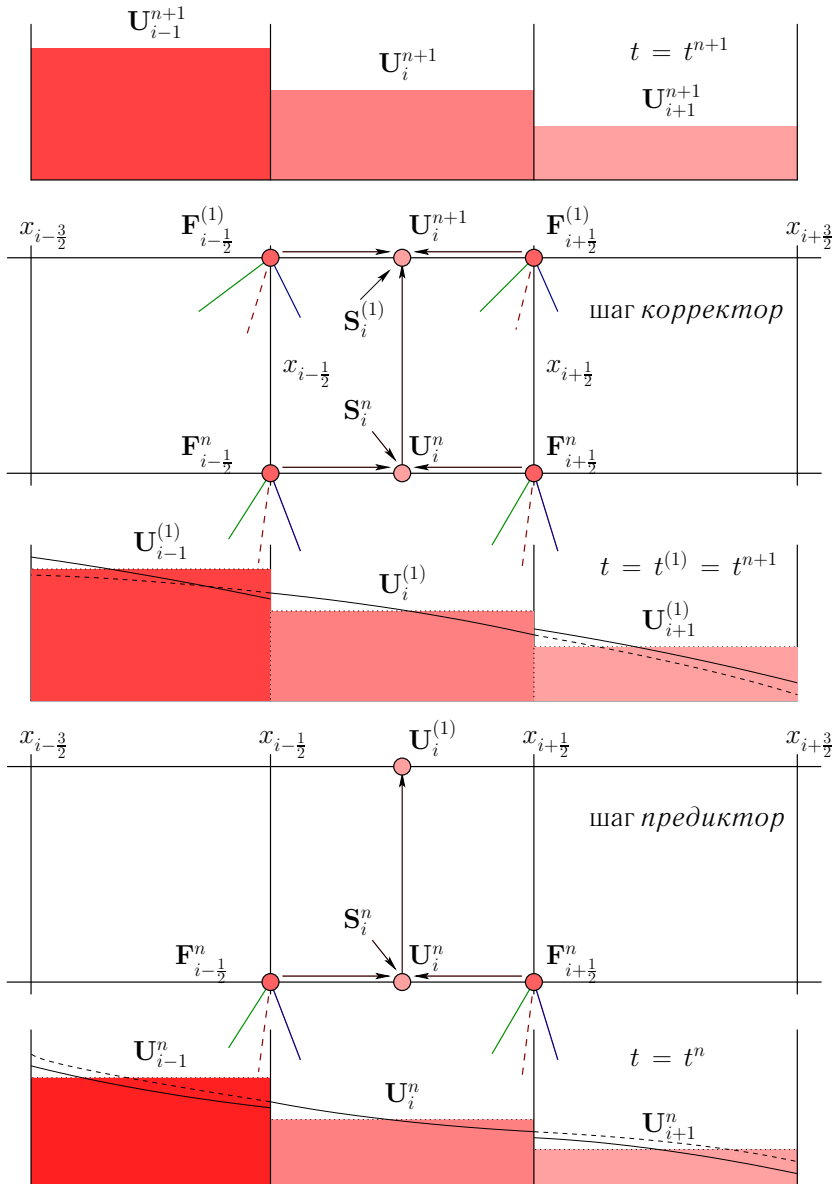


Рис. 9.8. Схема обновления решения в ячейках по методу повышенной точности (двух-этапная; сравн. с рис. 9.5 на с. 222)

где характеристические направления на плоскости (x, t) задаются выражениями (8.8).

Дополнительно линеаризовав соотношения вдоль характеристик, приведем их к виду УЧП для инвариантов Римана линеаризованной одномерной системы уравнений:

$$\begin{aligned} d^- I_- &= 0, \\ d^0 I_0 &= 0, \\ d^+ I_+ &= 0. \end{aligned} \tag{9.4}$$

В (9.4) «инварианты»: $I_- = u + \alpha_- p$, $I_0 = p + \alpha_0 \rho$, $I_+ = u + \alpha_+ p$, в которых $\alpha_- = -1/\rho c$, $\alpha_0 = -c^2$, $\alpha_+ = 1/\rho c$ — постоянные коэффициенты. И хотя соотношения (9.4) строго справедливы в случае гладких функций и бесконечно малых возмущений параметров потока, на их основе получается эффективная процедура приближенного решения задачи о РПР с конечным разрывом в начальных данных (рис. 9.9) как *локальной характеристической задачи (ЛХЗ)*.

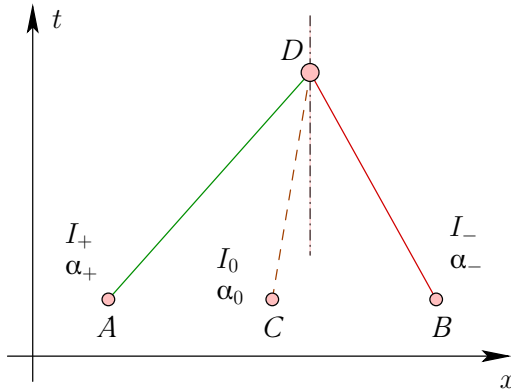


Рис. 9.9. Шаблон для решения ЛХЗ при $(u - c) \leq 0$, $u \geq 0$, $(u + c) \geq 0$

При решении задач по модели течения смеси переменного состава используем тот факт, что форма записи уравнения для массовой доли компонента является характеристической, поэтому необходимая для аппроксимации потоков масс каждого из компонентов кусочно-параболическая реконструкция может (и должна) выполняться по соотношениям (9.1), для значений Y_k^n , $k = 1, \dots, K$ в ячейках шаблона.

Для простоты рассмотрим случай, когда $(u - c) < 0$, $u > 0$ и $(u + c) > 0$, показанный на рис. 9.9. Определим «инварианты», прибывающие в точку D , используя (9.4) и др. величины из A , B и C :

$$\begin{aligned} I_{-D} &= u_B + \alpha_- p_B, \\ I_{0D} &= p_C + \alpha_0 \rho_C, \\ I_{+D} &= u_A + \alpha_+ p_A. \end{aligned}$$

Линеаризация проявляется в том, что константы вычисляются в точках с существенно различными параметрами и используются как таковые для определения параметров решения в одной точке — D (простейший способ — $\alpha_- = \alpha_B$, $\alpha_0 = \alpha_C$, $\alpha_+ = \alpha_A$).

Далее вычисляются параметры на границе, т. е. в точке D (см. рис. 9.9). Опуская индексы « D », имеем:

$$p = \frac{I_+ - I_-}{\alpha_+ - \alpha_-}, \quad u = I_+ - \alpha_+ p, \quad \rho = \frac{I_0 - p}{\alpha_0}.$$

После чего по уравнению состояния рассчитывается температура на границе: $T = p/(R\rho)$, где газовая постоянная берется для того газа (смеси), который, согласно знаку скорости потока, течет через границу. Так же определяется и массовый состав этой смеси на границе — $Y_k = \rho_k/\rho$, а по массовому составу и температуре находится удельная *внутренняя энергия* смеси: $e = e(T, Y_1, \dots, Y_{K-1})$.

На рис. 9.10 можно видеть решения тестовой задачи о РПР при дозвуковом течении, на рис. 9.11 — при сверхзвуковом течении за «хвостом» ЦВР; для сравнения показаны также точные решения задач о РПР.

Видно, что в данных решениях при отсутствии нефизичных осцилляций численное «размазывание» решения значительно меньше, чем в методе Годунова, а положение разрывов в решении воспроизводится по-прежнему правильно. Малая численная диссипация (что особенно заметно в решениях с малыми значениями числа M) выгодно отличает данный метод от метода Годунова.

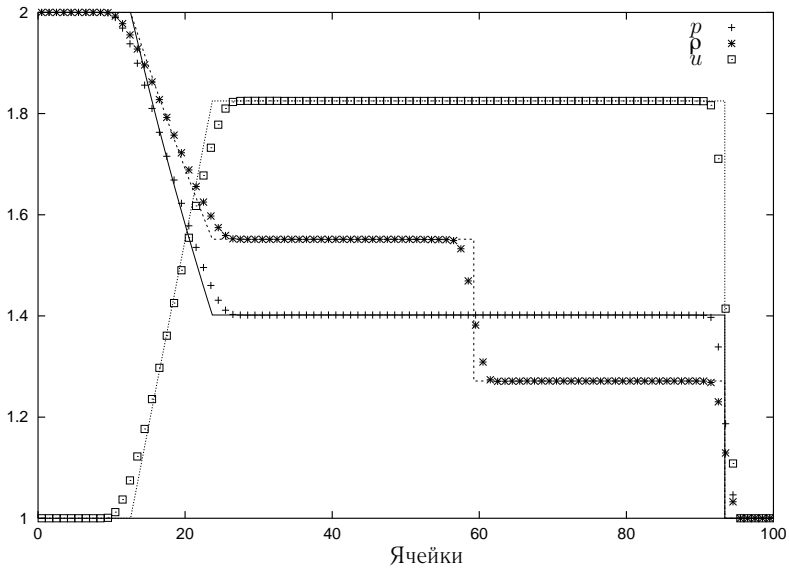


Рис. 9.10. «Дозвуковой» распад разрыва, метод типа Годунова повышенной точности

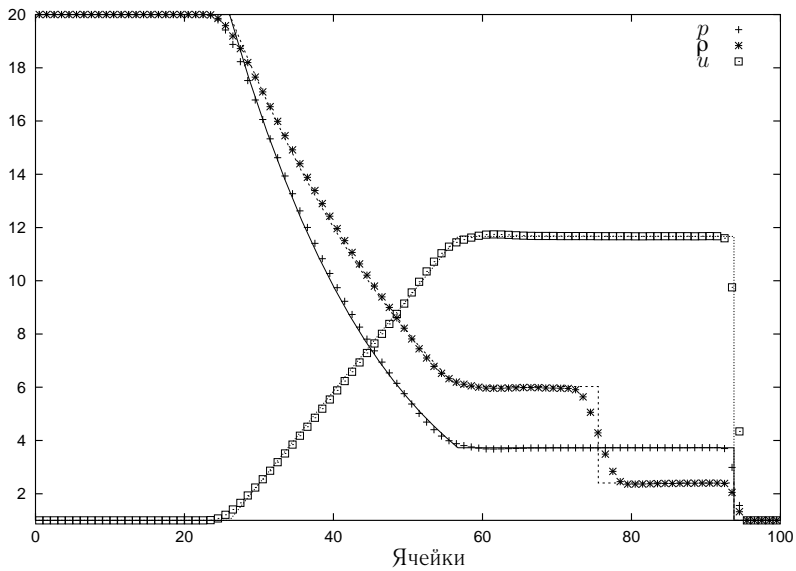


Рис. 9.11. «Сверхзвуковой» распад разрыва, метод типа Годунова повышенной точности

9.1.5. Экономичный консервативный одноэтапный метод

Использование «инвариантов» (9.4), полученных линеаризацией уравнений одномерной газовой динамики, позволяет построить весьма экономичный и эффективный монотонный метод решения одномерных нестационарных задач.

Используем тот факт, что соотношения для инвариантов (9.4) имеют вид набора простых УЧП в характеристической форме; будучи линеаризованными, они приближенно выражают характеристические свойства исходной системы, и можно использовать их зависимые переменные, чтобы по ним реконструировать решение в ячейке. А именно, можно взять кусочно-параболические монотонизированные распределения самих этих инвариантов на «старом» слое по времени и тем самым исключить преобразование матриц в процедуре реконструкции:

$$\mathbf{I}_i^n(x) = \mathbf{I}_i^n + \frac{\tilde{\Delta}\mathbf{I}_i^n + \tilde{\nabla}\mathbf{I}_i^n}{2\Delta x}(x - x_i) + \varphi \frac{\tilde{\Delta}\mathbf{I}_i^n - \tilde{\nabla}\mathbf{I}_i^n}{(\Delta x)^2}(x - x_i)^2, \quad (9.5)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}\mathbf{I}_i^n &= \min\text{mod}(\Delta\mathbf{I}_i^n, b\nabla\mathbf{I}_i^n), & \Delta\mathbf{I}_i^n &= \mathbf{I}_{i+1}^n - \mathbf{I}_i^n, \\ \tilde{\nabla}\mathbf{I}_i^n &= \min\text{mod}(\nabla\mathbf{I}_i^n, b\Delta\mathbf{I}_i^n), & \nabla\mathbf{I}_i^n &= \mathbf{I}_i^n - \mathbf{I}_{i-1}^n, \end{aligned}$$

где в число «инвариантов» $\mathbf{I} = [I_-, I_0, I_+, Y_1, \dots, Y_{K-1}]^T$, помимо (9.4), включены массовые доли $K - 1$ компонентов смеси, уравнения сохранения для которых (в неконсервативной форме) также сами имеют вид характеристических уравнений. Заметим, что отсутствие матричного преобразования в процедуре реконструкции приводит к заметному ее упрощению.

Вычисление параметров и потоков на границах в таком методе (рис. 9.12) проводится с помощью характеристической процедуры, подобной описанной в п. 9.1.4). В данном же случае для расчета потоков на границах i -ой ячейки нужно определить параметры потока в узлах сетки ($i \pm \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}$), как в точке D на рис. 9.9 по значениям «инвариантов» и коэффициентов в точках A, B , и C , определяя их с учетом распределений «инвариантов» $\mathbf{I}_i^n(x)$ на «старом» временном слое.

В результате получим одноэтапный метод повышенного порядка аппроксимации по x и второго порядка по времени t

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x \cdot F_i} \left[(\mathbf{F}_x \cdot F)_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - (\mathbf{F}_x \cdot F)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right] + \Delta t \mathbf{S}_i^{n+\frac{1}{2}}, \quad (9.6)$$

в котором потоки «на полушаге» $\mathbf{F}_{i+1/2}^{n+1/2}$ вычислены указанным выше способом, а возможный источниковый член (для сохранения второго порядка по времени) может быть задан как среднее арифметическое

$$\mathbf{S}_i^{n+1/2} = (\mathbf{S}_i^n + \mathbf{S}_i^{n+1})/2$$

методом последовательных приближений.

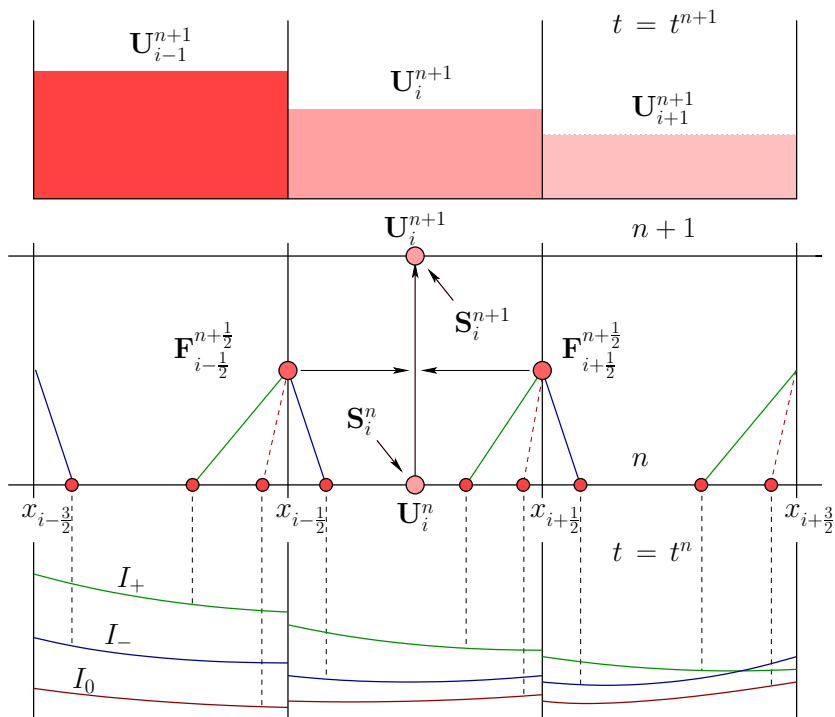


Рис. 9.12. Схема обновления решения в ячейках экономичным одноэтапным методом (сравн. рис. 9.8 на с. 228). I_+, I_- и I_0 — инварианты линеаризованных соотношений вдоль характеристик (9.4), с. 229

На рис. 9.13 и рис. 9.14 можно видеть численные решения двух тестовых задач о РПР. Для сравнения с численными приводятся точные решения тестовых задач. Видно, что при отсутствии нефизичных осцилляций численное «размазывание» решения значительно меньше, чем в методе Годунова, а положение разрывов в решении воспроизводится по-прежнему правильно.

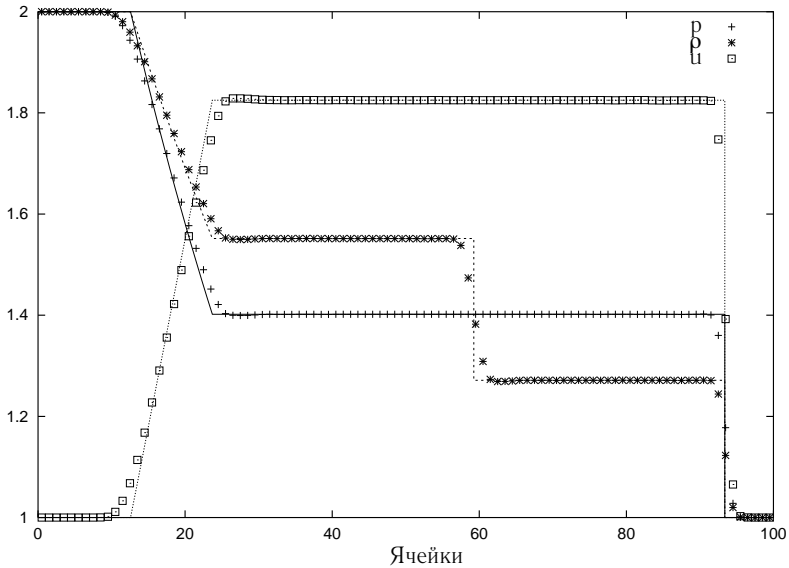


Рис. 9.13. «Дозвуковой» распад разрыва; экономичный одноэтапный метод повышенной точности

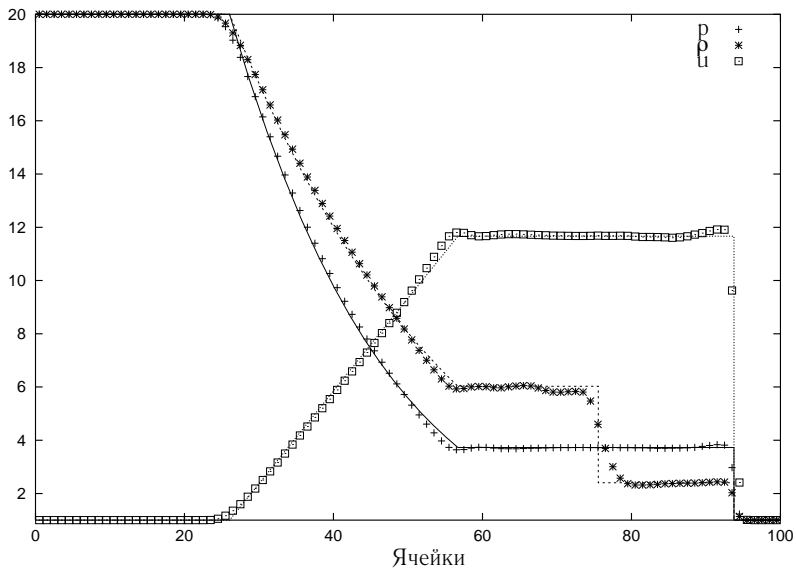


Рис. 9.14. «Сверхзвуковой» распад разрыва; экономичный одноэтапный метод повышенной точности

Можно считать, что именно ввиду одноэтапности метода численная диссипация оказывается весьма малой. Что касается вычислительной экономичности, то время счета данным методом требует только 17 % от времени счета трехэтапным методом повышенной точности и 45 % времени счета методом Годунова. Некоторая «шероховатость» решений, однако, позволяет рекомендовать данный метод только для задач, в которых это не проявится заметно.

9.2. Численный метод для пространственных задач

Приведем здесь численный метод для решения достаточно общей системы уравнений (2.3), (2.8) и (2.14) — например, для непосредственного интегрирования уравнений, описывающих течение реагирующей смеси или для расчета турбулентного течения по технологии МКВ (англ. *LES*). Метод описывается в простейшем варианте: для использования на трехмерной декартовой *расчетной сетке* ячеек — конечных объемов в форме прямоугольных параллелепипедов, см. рис. 9.15.

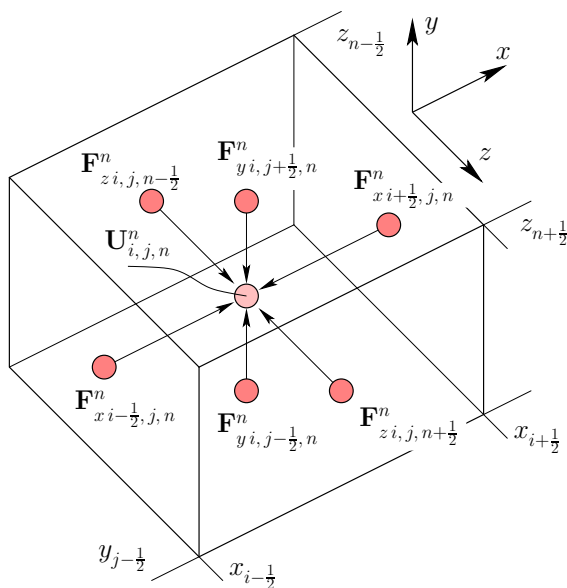


Рис. 9.15. Расчетная ячейка трехмерной декартовой сетки ячеек

Отметим, что консервативный метод первого порядка (такой, как метод Годунова) совершенно непригоден для детальных расчетов по тех-

нологии МКВ. Для таких расчетов более применим метод, базирующийся на численном методе типа С. К. Годунова повышенной точности, включающем все ту же кусочно-параболическую интерполяцию и решение ЛХЗ в акустическом приближении.

В данном методе процедура кусочно-параболической реконструкции (интерполяции) параметров на границы ячеек с последующим решением задачи о РПР применяется для вычисления «невязких» составляющих полных потоков через границы. Прочие составляющие потоков («градиентного» типа) вычисляются через центрально-разностную аппроксимацию соответствующих частных производных (со вторым порядком аппроксимации по пространству).

Запишем общую систему уравнений пространственного нестационарного течения реагирующей смеси [29, 26] в «векторной» форме:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{F}_z}{\partial z} = \mathbf{S}, \quad (9.7)$$

где $\mathbf{U} = [\rho_1, \dots, \rho_K, \rho u, \rho v, \rho w, \rho E]^T$ — «вектор» неизвестных (объемных плотностей сохраняющихся величин); \mathbf{S} — «вектор» объемной мощности источников/стоков:

$$\mathbf{S} = [W_1 \omega_{\Sigma_1}, \dots, W_K \omega_{\Sigma_K}, 0, 0, 0, 0]^T,$$

где $W_k \omega_{\Sigma_k}, k = 1, \dots, K$ — мощность источников, соответствующих химическим реакциям.

«Векторы» плотностей потоков сохраняющихся величин в координатных направлениях ($x, y, \text{ и } z$) соответственно могут быть представлены суммами «невязкой» и «градиентной» составляющих:

$$\mathbf{F}_x = (\mathbf{F}_x)_{nv} + (\mathbf{F}_x)_{gr}, \text{ и т. д.}$$

Способ расчета «невязкой» составляющей газодинамических потоков в системе (9.7) следующий. Уравнения масс компонентов суммируются для получения уравнения плотности смеси и определения векторов потоков полученной системы:

$$(\mathbf{F}_x)_{nv} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ \rho uE + pu \end{bmatrix}, \text{ и т. д.} \quad (9.8)$$

Вектор (9.8) выражает потоки в частном случае невязкого нетеплопроводного газа или однородной сжимаемой жидкости.

Алгоритм определения значений термодинамических параметров — плотности, давления, температуры и скорости звука на границах ячеек перед вызовом процедуры решения задачи о РПР — следующий. Сначала проводится обычная реконструкция газодинамических параметров в ячейках с их интерполяцией на границы, в которой зависимые переменные вычисляются по обе стороны от, например, x -границы:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{i+\frac{1}{2},j,k}^n(x^-) &= \mathbf{U}_{i,j,k}^n + [\mathbf{S}_x]_{i,j,k}^{-1} \left\{ \frac{1+\varphi}{4} \tilde{\Delta}_x \mathbf{W}_{i,j,k}^n + \frac{1-\varphi}{4} \tilde{\nabla}_x \mathbf{W}_{i,j,k}^n \right\}, \\ \mathbf{U}_{i+\frac{1}{2},j,k}^n(x^+) &= \mathbf{U}_{i+1,j,k}^n - [\mathbf{S}_x]_{i+1,j,k}^{-1} \left\{ \frac{1+\varphi}{4} \tilde{\nabla}_x \mathbf{W}_{i+1,j,k}^n + \frac{1-\varphi}{4} \tilde{\Delta}_x \mathbf{W}_{i+1,j,k}^n \right\}. \end{aligned} \quad (9.9)$$

В процедуре реконструкции (здесь — для *трех* координатных направлений) также используется процедура (9.2) ограничения приращений *сеточной функции* $\mathbf{U}_{i,j,k}$ в направлениях x , y и z . При реконструкции также используются матричные преобразования; например, для координатного направления x диагональная матрица собственных значений

$$[\Lambda_x] = \text{diag}(u, u, u, u + c, u - c).$$

Вид матриц $[S_x]$, $[S_x]^{-1}$, $[S_y]$, $[S_y]^{-1}$, $[S_z]$ и $[S_z]^{-1}$ для краткости приводить не будем.

Итак, стандартные процедуры реконструкции (9.9) и решения задачи о РПР позволяют найти соответственно параметры ρ, u, v, w, E на границах ячеек и по ним — потоки в формулировке (9.8). В случае смеси, однако, нужны плотности массовых потоков отдельно по каждому компоненту, для чего нужно лишь умножить плотность потока массы смеси на массовую долю компонента на границе с той ее стороны, с которой происходит течение.

Выполняем для массовых долей $Y_k = \rho_k/\rho, k = 1, \dots, K$ реконструкцию распределений в ячейках непосредственно (без преобразования матриц — так как «невязкая» составляющая уравнений для массовых долей имеет простой вид уравнений переноса); например, в направлении x :

$$\begin{aligned} Y_{k,i+\frac{1}{2},j,k}^n(x^-) &= Y_{k,i,j,k}^n + \left\{ \frac{1+\varphi}{4} \tilde{\Delta}_x Y_{k,i,j,k}^n + \frac{1-\varphi}{4} \tilde{\nabla}_x Y_{k,i,j,k}^n \right\}, \\ Y_{k,i+\frac{1}{2},j,k}^n(x^+) &= Y_{k,i+1,j,k}^n - \left\{ \frac{1+\varphi}{4} \tilde{\nabla}_x Y_{k,i+1,j,k}^n + \frac{1-\varphi}{4} \tilde{\Delta}_x Y_{k,i+1,j,k}^n \right\}, \end{aligned} \quad (9.10)$$

где

$$\begin{aligned}\widetilde{\Delta}Y_{k_i, j, k}^n &= \min\text{mod}(\widetilde{\Delta}Y_{k_i, j, k}^n, b\widetilde{\nabla}Y_{k_i, j, k}^n), & \Delta Y_{k_i, j, k}^n &= Y_{k_{i+1}, j, k}^n - Y_{k_i, j, k}^n, \\ \widetilde{\nabla}Y_{k_i, j, k}^n &= \min\text{mod}(\widetilde{\nabla}Y_{k_i, j, k}^n, b\widetilde{\Delta}Y_{k_i, j, k}^n), & \nabla Y_{k_i, j, k}^n &= Y_{k_i, j, k}^n - Y_{k_{i-1}, j, k}^n.\end{aligned}$$

Составляющие потоков, задаваемые «градиентными» членами уравнений переноса в реагирующей смеси, описывающими молекулярный (или, при моделировании переноса турбулентными пульсациями — *эффективный*) перенос, аппроксимируются на границах ячеек обычными центральными разностями со вторым порядком аппроксимации по пространству и в таком виде участвуют в численном выражении для *полных* потоков; соответствующие выражения здесь не приводятся.

Явный метод интегрирования уравнений в случае трех пространственных измерений соответственно имеет вид:

$$\begin{aligned}U_{i, j, k}^{(1)} &= U_{i, j, k}^n + \Delta t L_{xyz} \left(U_{i, j, k}^n \right), \\ U_{i, j, k}^{n+1} &= \frac{1}{2} U_{i, j, k}^n + \frac{1}{2} \left[U_{i, j, k}^{(1)} + \Delta t L_{xyz} \left(U_{i, j, k}^{(1)} \right) \right],\end{aligned}$$

где разностный пространственный дифференциальный оператор:

$$\begin{aligned}L_{xyz} \left(U_{i, j, k}^n \right) &= S_{i, j, k} + \frac{(\mathbf{F}x)_{i-\frac{1}{2}, j, k}^n - (\mathbf{F}x)_{i+\frac{1}{2}, j, k}^n}{\Delta x} + \\ &+ \frac{(\mathbf{F}y)_{i, j-\frac{1}{2}, k}^n - (\mathbf{F}y)_{i, j+\frac{1}{2}, k}^n}{\Delta y} + \frac{(\mathbf{F}z)_{i, j, k-\frac{1}{2}}^n - (\mathbf{F}z)_{i, j, k+\frac{1}{2}}^n}{\Delta z}.\end{aligned}$$

9.3. О методологии моделирования в CFD-пакетах

Изложенный в п. 9.2 метод расчета пространственного течения сжимаемого газа пригоден для решения как УНС, так и уравнений, замкнутых в предположении о расчете «в режиме» МКВ. Данный метод для простейшей «декартовой» равномерной сетки ячеек затруднительно приспособить, например, для корректного решения задач детального моделирования течений, в которых очертания расчетной области — произвольные и зачастую переменные во времени.

Реализация подобных методов может быть оправдана при создании расчетных программ *специального назначения*, нацеленных на решение ограниченного круга *исследовательских* и *учебных* задач.

Производители же *CFD*-пакетов общего назначения, предназначенных для решения широчайшего круга прикладных задач гидрогазодинамики, вынуждены удовлетворять множеству противоречивых требований. Поэтому общепринятым при создании расчетных программ (солверов) таких *CFD*-пакетов является следование примерно такой общей методологии:

- исходная система уравнений модели течения среды рассматривается как набор обобщенных уравнений переноса в интегральной форме, что обеспечивает гибкость выбора как уравнений переноса для их совместного решения, так и моделей замыкания — при использовании:
 - предположений о сжимаемом, слабо- и несжимаемом течении;
 - уравнений состояния — от $\rho = \text{const}$ до задаваемых пользователем;
 - моделей одно- и многокомпонентной, реагирующей или инертной смеси, в т.ч. модели многофазного течения и излучения;
 - моделей влияния эффектов турбулентности на перенос (в т.ч. в пристенной зоне), химические реакции, межфазный обмен и излучение;
- дискретизация уравнений по пространству — не выше 2-го порядка аппроксимации, в духе МКО, рассчитанная на применение сеток с ячейками в форме многогранников (рис. 9.16) — для обеспечения корректности и удобства:
 - задания произвольных, в т.ч. изменяющихся со временем очертаний расчетной области, причем для численных методов существенно требование о сопряжении слоев ячеек сетки с границами области;
 - произвольного измельчения ячеек сетки для выявления детальной местной структуры решения, в первую очередь — в пристенных зонах с повышенными градиентами характеристик потока;

- *дискретизация* уравнений по времени — с применением *неявных методов*, позволяющих существенно увеличить шаг по времени Δt и
 - ослабить жесткие ограничения для явных аналогов применяемого метода — вследствие местного измельчения ячеек сетки, наличия ячеек «плохой» формы и др. факторов, снижающих *устойчивость* счета данным методом;
 - в некоторой степени ослабить вредное влияние «жесткости» конкретных частных моделей и сочетания конкретных УЧП в системе;
 - в расчетах, нацеленных на получение *стационарной* (англ. *stationary*) картины течения — использовать шаги по времени, характеризующиеся $CFL \gg 1$, и получать стационарные решения за умеренное число *итераций* (англ. *iterations*);
 - в расчетах *нестационарных* (англ. *non-stationary, unsteady, transient*) течений — получать физически достоверную картину развития решения по времени (англ. *time-resolved solution*).

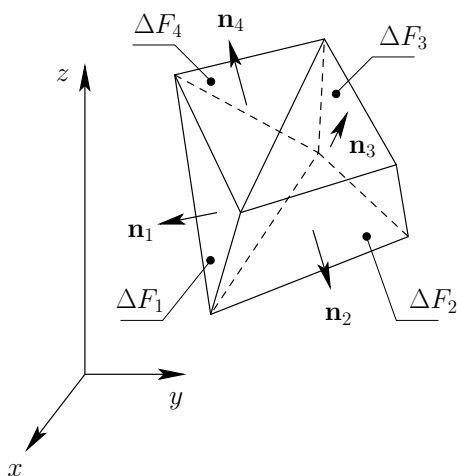


Рис. 9.16. Ячейка сетки — малый конечный объем (сравн. с рис. 2.1)

Описанная методология приводит к удовлетворительным (с точностью до гипотез, лежащих в основе моделей) результатам для течений с преобладанием конвективного и градиентного переноса (диффузии, вязкости и теплопроводности, в т. ч. турбулентных). Но течения, где важны упругие возмущения (от звуковых волн до ВКА и скачков), движущиеся по потоку со скоростями порядка c , в ряде случаев могут рассчитываться с заметными отклонениями. В то же время *явные высокоточные методы* как раз лучше выявляют такие структуры в сжимаемых течениях, но становятся неэффективными на сетках с локальным измельчением и для «медленных» ($|v|/c \ll 1$) течений.

Следует учесть, что применяемый в последние десятилетия *инженерный* подход к моделированию турбулентных течений в технических приложениях предполагает численный расчет по уравнениям *модели осредненного течения* (подход *RANS*), а отнюдь не выделение в расчете хотя бы крупномасштабной составляющей структуры (подход *LES*). В рамках последнего практические задачи во многих случаях решаются все еще на пределе возможностей доступных ЭВМ. При данном подходе достоверность результатов также может быть неудовлетворительной ввиду недостаточной детализации в численном расчете.

Указанная и ряд других⁴ причин невысокой достоверности расчетов пространственных течений действуют при использовании коммерческих *CFD*-пакетов, поэтому планируя расчетные работы нужно не полагаться лишь на *заявленные* возможности пакетов, а осознавать ограничения, присущие конкретным методологиям, пакетам и моделям.

Прилагаемая к пакету документация может и должна служить отправной точкой для ознакомления с моделями и особенностями их численной реализации. И ничто не заменит опыта — как собственного, так и опыта решения сходных задач другими исследователями.

Для наиболее ответственных (а значит, наиболее детальных) расчетов течений в трактах двигателей также применимы имеющиеся *CFD*-пакеты, в которых реализован подход (методология) *LES* («моделирование крупномасштабных вихрей»), и пакеты *специального назначения*, реализующие высокоточные *явные* и *неявные* методы расчетов на ЭВМ с большим числом (сотни и тысячи) процессорных ядер.

⁴Ограничения модели осредненного течения, не вполне адекватные модели турбулентных эффектов и модели межфазного взаимодействия и излучения, применение не адекватных задаче грубых расчетных сеток и особенности численных методов.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- 1-D CFD, 187
- DNS, 82
- LES, 83
- RANS, 83
- адиабата Пюгонио, 142, 143
- адиабата Пуассона, 49, 143
- анализ размерностей, 147
- аппроксимация, 212, 214, 217, 225, 229, 236
- баротропность, 52
- вектор, 13, 21, 23, 24, 29, 30, 34, 45
- волна конечной амплитуды, 144, 169
- волна конечной амплитуды уединенная, 170, 171
- волна простая, 190, 196
- волна Римана, 142, 173–175, 177, 182
- волна ударная, 142, 175, 179
- вычислительная гидрогазодинамика, 212
- вязкость, 21
- газ идеальный, 13, 15, 121
- газ совершенный, 17, 48–50, 131, 132, 142, 167
- газа совершенный, 188
- газовая динамика, 173, 220, 221, 227, 232
- гидрогазодинамика вычислительная, 97
- гидростатика, 8
- гипотеза ЛТР, 7, 14, 43, 82
- гипотеза Ньютона, 21
- гипотеза Ньютона обобщенная, 21, 30
- гипотеза сплошности, 7, 12, 43, 82
- гипотезы дополнительные, 21
- гипотезы исходные, 8, 23
- граничные условия, 61
- давление, 15, 30, 37, 43, 49
- давление гидростатическое, 52
- давление полное, 10, 145, 151, 157
- двигатель реактивный, 158
- дискретизация, 239, 240
- диссипация численная, 223
- диффузия, 20, 25
- диффузор, 130, 138
- емкость, 161, 199
- жидкости идеальная, 57
- жидкость, 7, 15, 22
- жидкость идеальная, 9
- жидкость капельная, 7, 15
- жидкость несжимаемая, 19, 54, 57
- жидкость ньютоновская, 9, 22, 34, 35, 37, 38, 69
- задача Римана, 182
- закон Архимеда, 55
- закон Майера, 16
- закон Паскаля, 53
- закон сохранения количества движения, 31
- закон сохранения массы, 28, 29

- закон сохранения энергии, 33
закон Фика, 24
закон Фурье, 23, 32
законы сохранения, 7, 8, 46, 161, 213
- импульс полный, 5, 130, 159
инварианты Римана, 168–170, 215
- кавитация, 7, 19
канал, 161, 199
кинематика жидкости, 38
количество движения, 7, 13, 20, 21
конвекция свободная, 19, 53
консервативность, 213
конфузор, 138
коэффициент восстановления полного давления, 129, 145, 147
коэффициент вязкости, 5, 20, 119
коэффициент диффузии, 20, 25
коэффициент переноса, 20, 21
коэффициент потерь, 116, 147
коэффициент потерь на трение, 117
коэффициент расхода, 116, 150, 151
коэффициент скорости, 150
коэффициент сужения струи, 150
коэффициент температурного расширения, 19
коэффициент теплопроводности, 20, 23
- лемниската Бернулли, 149
- массовый расход, 28
местное сопротивление, 188, 190
метод Рунге – Кутты, 225, 226
метод С. К. Годунова, 182, 218, 220
- метод сеточно-характеристический, 218
метод сеточно-характеристический, 214, 219
метод характеристик, 214
метод хорд, 185, 198
методы конечных объемов, 213
методы конечных разностей, 213
методы неявные, 225, 240, 241
методы явные, 212, 220, 240, 241
механика жидкости и газа, 7, 51
механика сплошных сред, 7
- напряжения касательные, 123
напряжения Рейнольдса, 98
насадок Борда, 149, 157
натяжение поверхностное, 54
начальные условия, 61
неустойчивость Рэлея – Тейлора, 54
- объем конечный, 212, 213, 240
осреднение по Рейнольдсу, 92
осреднение по Фавру, 92
отношение теплоемкостей, 17, 167
- параметр состояния, 14
переменные зависимые, 212
переменные независимые, 212
перенос молекулярный, 7, 9, 12, 21, 27, 34, 57, 238
- плаучесть, 19
плотность, 12, 18
поверхность свободная, 52, 54
пограничный слой, 10, 123
поле скалярное, 52
поле стационарное, 53

- порядок аппроксимации, 220, 221, 223, 225–227, 236, 238, 239
 потери гидравлические, 129, 130
 потери местные, 130
 потери путевые, 130, 172
 приближение акустическое, 169
 приближение квазиодномерное, 10, 116, 128, 130, 138, 145, 153, 155, 161
 примесь пассивная, 20, 38
 процесс адиабатный, 49, 143
 процесс изоэнтропный, 49, 143
 процесс обратимый, 138

 работа максимальная, 172
 работа располагаемая, 172
 равновесие гидростатическое, 52
 разрыв контактный, 36, 141, 182–185, 190, 196, 200, 204, 206, 208, 209
 распад произвольного разрыва, 6, 181, 182
 распад разрыва, 173, 188, 189, 191, 193, 199

 сетка расчетная, 212, 214, 215, 235
 сечение критическое, 134, 159
 сжимаемость, 18, 19, 131, 148
 сила Архимеда, 9, 55
 сила гравитации, 51
 сила центробежная, 51
 силу инерции, 51
 силы массовые, 51, 52
 скаляр, 20, 22, 23, 25, 30, 40
 скачок сечения, 10, 145, 146, 154, 173, 188, 190
 скачок уплотнения, 36, 132, 136, 142, 144, 171
 скорость звука, 4, 12, 20, 50, 131, 165
 скорость критическая, 134
 скорость потока, 13, 131
 скорость приведенная, 136
 сопло, 130, 150, 157
 сопло Лавая, 136, 138
 сопротивление местное, 10, 130, 145, 161, 173
 сохранения полного давления, 150
 среда сплошная, 7, 12, 27, 34, 37, 43
 стратификация, 53
 струя турбулентная, 10
 сходимость, 212, 217, 223

 температура, 15
 температурный фактор, 5
 тензор, 21, 22, 30, 31
 тензор «вязких» напряжений, 51
 теория пограничного слоя, 10
 теплоемкость, 16, 17, 20
 теплопроводность, 23
 техническая термодинамика, 48
 течение адиабатное, 130
 течение дозвуковое, 137, 138
 течение изоэнтропное, 134, 170, 171
 течение квазиодномерное, 8
 течение ламинарное, 72
 течение нестационарное, 8, 19, 116, 142, 161, 173
 течение потенциальное, 9, 63
 течение сверхзвуковое, 137
 течение стационарное, 8, 116, 128, 138, 145, 146, 157, 161

течение турбулентное, 9, 10, 42, 69, 79
торможение нестационарное, 175, 177
торможение стационарное, 131, 133
уравнение гидростатики, 51, 54
уравнение движения, 37–39, 59
уравнение критериальное, 9
уравнение неразрывности, 59
уравнение переноса, 20
уравнение состояния, 7, 12, 14, 15, 19, 27
уравнения акустики, 169
уравнения в характеристической форме, 161
уравнения в частных производных, 8, 33, 34, 36, 39, 42, 163, 168, 169, 171, 212, 214, 221, 229, 232, 240
уравнения газовой динамики, 169
уравнения дифференциальные обыкновенные, 48, 212
уравнения Навье – Стокса, 8, 9, 34, 69, 71, 213
уравнения пограничного слоя, 123
уравнения Рейнольдса, 89
уравнения состояния, 34
уравнения Эйлера, 8, 9, 57, 213
условия граничные, 166, 170
условия начальные, 170
устойчивость, 212, 217, 240
формула Альтшуля, 119
формула Сазерленда, 22
функция газодинамическая, 10, 133
функция сеточная, 212, 220, 237
число Маха, 5, 40, 131, 138
число Нуссельта, 5, 115, 121
число Прандтля, 5, 24, 86, 94, 114
число Рейнольдса, 5, 23, 77, 113, 117, 151
число Шмидта, 5, 25, 86, 94
энергия внутренняя, 4, 12, 13, 15, 16, 32, 44, 47, 159, 160, 230
энергия кинетическая, 13, 32, 44, 160
энергия полная, 4, 13, 32, 44, 171
энтальпия, 4, 12
энтальпия полная, 131
энтропия, 4, 8, 12, 20, 48, 162, 168, 171, 172, 174, 194
эффекты капиллярные, 54

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Седов, Л. И. Механика сплошной среды: В 2 ч. Ч. 1. — 5-е изд., испр. — Рос. АН, 1994. — 528 с.
2. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1977. 440 с.
3. Гиршфельдер Д., Кертисс Ч., Берд Э. Молекулярная теория газов и жидкостей. М.: Иностран. лит., 1961. 929 с.
4. Черный Г. Г. Газовая динамика М.: Наука, 1988. 424 с.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. М., 1986. 733 с.
6. Абрамович Г. Н. Прикладная газовая динамика: в 2 ч. Ч. 1. М.: Наука, 1991. 600 с.
7. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М., 2003. 840 с.
8. Годунов С. К., Роменский Е. И. Элементы механики сплошных сред и законы сохранения. Новосибирск, 1998. 280 с.
9. Гухман А. А. Введение в теорию подобия. М., 1973. 295 с.
10. Гухман А. А. Обобщенный анализ. М., 1998. 304 с.
11. Овсянников Л. В. Лекции по основам газовой динамики. Москва – Ижевск: Ин-т компьют. исследований, 2003. 336 с.
12. Дейч М. Е. Техническая газодинамика. 3-е изд, перераб. М.: Энергия, 1974. 592 с.
13. Основы газовой динамики / под ред. Г. Эммонса. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 702 с.
14. Рудой Б. П. Прикладная нестационарная гидрогазодинамика: учеб. пособие. Уфа: УАИ, 1988. 184 с.
15. Болгарский А. В., Мухачев Г. А., Щукин В. К. Термодинамика и теплопередача. М., 1975. 495 с.
16. Альтшуль А. Д. Гидравлические сопротивления. М., 1982. 223 с.
17. Идельчик И. Е. Справочник по гидравлическим сопротивлениям / Под ред. М. О. Штейнберга. 3-е изд., перераб. и доп. М.: Машиностроение, 1992. 672 с.
18. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 711 с.
19. Численное решение многомерных задач газовой динамики / С. К. Годунов и др. М.: Наука, 1976. 400 с.
20. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978. 687 с.

21. Самарский А. А., Попов Ю. П. Разностные методы решения задач газовой динамики. М.: Наука, 1975. 424 с.
22. Магомедов К. М., Холодов А. С. Сеточно-характеристические численные методы. М.: Наука, 1988. 290 с.
23. Волков, К.Н., Емельянов В.Н. Моделирование крупных вихрей в расчетах турбулентных течений. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. 368 с.
24. Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен: в 2 т. / пер. с англ. М.: Мир, 1990. Т. 1. 384 с.
25. Черноусов А. А. Основы механики жидкости и газа. Исходные гипотезы и уравнения: учеб. пособие. Уфа: РИК УГАТУ, 2013. 164 с.
26. Черноусов А. А. Основы теории и моделирования горения в ДВС: учеб. пособие. Уфа, 2007. 224 с.
27. Черноусов А. А. Основы моделирования процессов в двигателях и энергоустановках: учеб. пособие. Уфа: РИК УГАТУ, 2018. 140 с.
URL: http://dvs.ugatu.ac.ru/images/files/ompde/modeling_basic.pdf
(дата обращения: 17.09.2020).
28. Еникеев Р. Д., Черноусов А. А. Проектирование и реализация пакета прикладных программ для анализа и синтеза сложных технических объектов // Вестник УГАТУ. 2012. Т. 16, № 5. С. 60–68.
URL: <http://journal.ugatu.ac.ru/index.php/Vestnik/article/view/639/480>
(дата обращения: 17.09.2020).
29. Оран Э., Бóрис Дж. Численное моделирование реагирующих потоков / пер. с англ. — М.: Мир, 1990. — 660 с.
30. Poinso T., Veynante D. Theoretical and numerical combustion. — 2nd ed. — Edwards, 2005. — 522 p.
31. Smagorinsky, J. General circulation experiments with the primitive equations // Monthly Weather Review. 1963. № 3. P. 99–165.

ПРИЛОЖЕНИЕ А. ГАЗОДИНАМИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Таблица А.1

Функции стационарного торможения и расхода от M и λ для $\gamma = 1,40$

M	α	τ	π	q	y	λ
0,00	1,00000	1,00000	1,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,01	0,99999	0,99998	0,99993	0,01728	0,01728	0,01095
0,02	0,99996	0,99992	0,99972	0,03455	0,03456	0,02191
0,03	0,99991	0,99982	0,99937	0,05181	0,05184	0,03286
0,04	0,99984	0,99968	0,99888	0,06905	0,06913	0,04381
0,05	0,99975	0,99950	0,99825	0,08627	0,08642	0,05476
0,06	0,99964	0,99928	0,99748	0,10346	0,10372	0,06570
0,07	0,99951	0,99902	0,99658	0,12061	0,12102	0,07664
0,08	0,99936	0,99872	0,99553	0,13771	0,13833	0,08758
0,09	0,99919	0,99838	0,99435	0,15477	0,15565	0,09851
0,10	0,99900	0,99800	0,99303	0,17177	0,17297	0,10944
0,11	0,99879	0,99759	0,99158	0,18871	0,19031	0,12035
0,12	0,99856	0,99713	0,98998	0,20558	0,20766	0,13126
0,13	0,99831	0,99663	0,98826	0,22238	0,22502	0,14217
0,14	0,99805	0,99610	0,98640	0,23910	0,24239	0,15306
0,15	0,99776	0,99552	0,98441	0,25573	0,25978	0,16395
0,16	0,99745	0,99491	0,98228	0,27228	0,27719	0,17482
0,17	0,99712	0,99425	0,98003	0,28872	0,29461	0,18569
0,18	0,99678	0,99356	0,97765	0,30507	0,31205	0,19654
0,19	0,99641	0,99283	0,97514	0,32131	0,32950	0,20739
0,20	0,99602	0,99206	0,97250	0,33744	0,34698	0,21822
0,21	0,99562	0,99126	0,96973	0,35345	0,36448	0,22904
0,22	0,99519	0,99041	0,96685	0,36933	0,38200	0,23984
0,23	0,99475	0,98953	0,96383	0,38509	0,39954	0,25063
0,24	0,99429	0,98861	0,96070	0,40071	0,41710	0,26141
0,25	0,99381	0,98765	0,95745	0,41620	0,43469	0,27217
0,26	0,99331	0,98666	0,95408	0,43154	0,45231	0,28291
0,27	0,99279	0,98563	0,95060	0,44673	0,46995	0,29364
0,28	0,99225	0,98456	0,94700	0,46178	0,48762	0,30435
0,29	0,99169	0,98346	0,94329	0,47666	0,50532	0,31504
0,30	0,99112	0,98232	0,93947	0,49138	0,52304	0,32572
0,31	0,99053	0,98114	0,93554	0,50594	0,54080	0,33637
0,32	0,98991	0,97993	0,93150	0,52033	0,55859	0,34701
0,33	0,98928	0,97868	0,92736	0,53455	0,57642	0,35762
0,34	0,98864	0,97740	0,92312	0,54858	0,59427	0,36822
0,35	0,98797	0,97609	0,91877	0,56244	0,61216	0,37879

продолжение на следующей странице

продолжение табл. А.1

<i>M</i>	α	τ	π	q	y	λ
0,36	0,98729	0,97473	0,91433	0,57611	0,63009	0,38935
0,37	0,98658	0,97335	0,90979	0,58959	0,64805	0,39988
0,38	0,98587	0,97193	0,90516	0,60288	0,66605	0,41039
0,39	0,98513	0,97048	0,90043	0,61598	0,68409	0,42087
0,40	0,98437	0,96899	0,89561	0,62888	0,70217	0,43133
0,41	0,98360	0,96747	0,89071	0,64157	0,72029	0,44177
0,42	0,98281	0,96592	0,88572	0,65406	0,73845	0,45218
0,43	0,98201	0,96434	0,88065	0,66635	0,75665	0,46257
0,44	0,98118	0,96272	0,87550	0,67842	0,77490	0,47293
0,45	0,98035	0,96108	0,87027	0,69029	0,79319	0,48326
0,46	0,97949	0,95940	0,86496	0,70194	0,81153	0,49357
0,47	0,97862	0,95769	0,85958	0,71337	0,82991	0,50385
0,48	0,97773	0,95595	0,85413	0,72459	0,84834	0,51410
0,49	0,97682	0,95418	0,84861	0,73558	0,86681	0,52433
0,50	0,97590	0,95238	0,84302	0,74636	0,88534	0,53452
0,51	0,97496	0,95055	0,83737	0,75691	0,90391	0,54469
0,52	0,97401	0,94869	0,83165	0,76723	0,92254	0,55483
0,53	0,97304	0,94681	0,82588	0,77733	0,94121	0,56493
0,54	0,97206	0,94489	0,82005	0,78720	0,95994	0,57501
0,55	0,97106	0,94295	0,81417	0,79685	0,97873	0,58506
0,56	0,97004	0,94098	0,80823	0,80626	0,99756	0,59507
0,57	0,96901	0,93898	0,80224	0,81544	1,01646	0,60505
0,58	0,96797	0,93696	0,79621	0,82440	1,03541	0,61501
0,59	0,96691	0,93491	0,79013	0,83312	1,05441	0,62492
0,60	0,96583	0,93284	0,78400	0,84161	1,07348	0,63481
0,61	0,96475	0,93073	0,77784	0,84987	1,09260	0,64466
0,62	0,96364	0,92861	0,77164	0,85789	1,11178	0,65448
0,63	0,96253	0,92646	0,76540	0,86569	1,13102	0,66427
0,64	0,96140	0,92428	0,75913	0,87325	1,15033	0,67402
0,65	0,96025	0,92208	0,75283	0,88058	1,16969	0,68374
0,66	0,95909	0,91986	0,74650	0,88768	1,18912	0,69342
0,67	0,95792	0,91762	0,74014	0,89454	1,20861	0,70307
0,68	0,95674	0,91535	0,73376	0,90118	1,22817	0,71268
0,69	0,95554	0,91306	0,72735	0,90759	1,24780	0,72225
0,70	0,95433	0,91075	0,72093	0,91377	1,26749	0,73179
0,71	0,95311	0,90841	0,71448	0,91971	1,28724	0,74129
0,72	0,95187	0,90606	0,70803	0,92544	1,30707	0,75076
0,73	0,95062	0,90369	0,70155	0,93093	1,32696	0,76019
0,74	0,94936	0,90129	0,69507	0,93620	1,34692	0,76958

продолжение на следующей странице

продолжение табл. А.1

M	α	τ	π	q	y	λ
0,75	0,94809	0,89888	0,68857	0,94125	1,36696	0,77894
0,76	0,94681	0,89644	0,68207	0,94607	1,38706	0,78825
0,77	0,94551	0,89399	0,67556	0,95068	1,40724	0,79753
0,78	0,94420	0,89152	0,66905	0,95506	1,42749	0,80677
0,79	0,94288	0,88903	0,66254	0,95923	1,44781	0,81597
0,80	0,94155	0,88652	0,65602	0,96318	1,46821	0,82514
0,81	0,94021	0,88400	0,64951	0,96691	1,48868	0,83426
0,82	0,93886	0,88146	0,64300	0,97044	1,50923	0,84335
0,83	0,93750	0,87890	0,63650	0,97375	1,52986	0,85239
0,84	0,93613	0,87633	0,63000	0,97685	1,55056	0,86140
0,85	0,93474	0,87374	0,62351	0,97975	1,57134	0,87037
0,86	0,93335	0,87114	0,61703	0,98244	1,59220	0,87929
0,87	0,93195	0,86852	0,61057	0,98493	1,61314	0,88818
0,88	0,93053	0,86589	0,60412	0,98722	1,63416	0,89703
0,89	0,92911	0,86324	0,59768	0,98932	1,65526	0,90583
0,90	0,92768	0,86059	0,59126	0,99121	1,67645	0,91460
0,91	0,92624	0,85791	0,58486	0,99292	1,69771	0,92332
0,92	0,92478	0,85523	0,57848	0,99443	1,71906	0,93201
0,93	0,92333	0,85253	0,57211	0,99576	1,74049	0,94065
0,94	0,92186	0,84982	0,56578	0,99690	1,76201	0,94925
0,95	0,92038	0,84710	0,55946	0,99786	1,78361	0,95781
0,96	0,91889	0,84437	0,55317	0,99864	1,80530	0,96633
0,97	0,91740	0,84162	0,54691	0,99924	1,82708	0,97481
0,98	0,91590	0,83887	0,54067	0,99966	1,84894	0,98325
0,99	0,91439	0,83611	0,53446	0,99992	1,87089	0,99165
1,00	0,91287	0,83333	0,52828	1,00000	1,89293	1,00000
1,01	0,91135	0,83055	0,52213	0,99992	1,91506	1,00831
1,02	0,90981	0,82776	0,51602	0,99967	1,93728	1,01658
1,03	0,90827	0,82496	0,50994	0,99926	1,95959	1,02481
1,04	0,90673	0,82215	0,50389	0,99870	1,98199	1,03300
1,05	0,90517	0,81934	0,49787	0,99798	2,00448	1,04114
1,06	0,90361	0,81651	0,49189	0,99710	2,02707	1,04925
1,07	0,90204	0,81368	0,48595	0,99608	2,04975	1,05731
1,08	0,90047	0,81085	0,48005	0,99491	2,07252	1,06533
1,09	0,89889	0,80800	0,47418	0,99359	2,09539	1,07331
1,10	0,89730	0,80515	0,46835	0,99214	2,11835	1,08124
1,11	0,89571	0,80230	0,46257	0,99054	2,14141	1,08913
1,12	0,89411	0,79944	0,45682	0,98881	2,16456	1,09699
1,13	0,89251	0,79657	0,45111	0,98695	2,18781	1,10479

продолжение на следующей странице

продолжение табл. А.1

<i>M</i>	α	τ	π	q	y	λ
1,14	0,89090	0,79370	0,44545	0,98496	2,21116	1,11256
1,15	0,88928	0,79083	0,43983	0,98285	2,23461	1,12029
1,16	0,88766	0,78795	0,43425	0,98060	2,25815	1,12797
1,17	0,88604	0,78506	0,42872	0,97824	2,28180	1,13561
1,18	0,88441	0,78218	0,42322	0,97576	2,30554	1,14321
1,19	0,88277	0,77929	0,41778	0,97317	2,32938	1,15077
1,20	0,88113	0,77640	0,41238	0,97046	2,35333	1,15828
1,21	0,87949	0,77350	0,40702	0,96764	2,37738	1,16575
1,22	0,87784	0,77061	0,40171	0,96472	2,40153	1,17319
1,23	0,87619	0,76771	0,39645	0,96169	2,42578	1,18057
1,24	0,87453	0,76481	0,39123	0,95856	2,45013	1,18792
1,25	0,87287	0,76190	0,38606	0,95534	2,47459	1,19523
1,26	0,87121	0,75900	0,38093	0,95201	2,49915	1,20249
1,27	0,86954	0,75610	0,37586	0,94860	2,52382	1,20972
1,28	0,86787	0,75319	0,37083	0,94509	2,54859	1,21690
1,29	0,86619	0,75029	0,36585	0,94150	2,57347	1,22404
1,30	0,86451	0,74738	0,36091	0,93782	2,59845	1,23114
1,31	0,86283	0,74448	0,35603	0,93406	2,62355	1,23819
1,32	0,86115	0,74158	0,35119	0,93022	2,64874	1,24521
1,33	0,85946	0,73867	0,34640	0,92630	2,67405	1,25218
1,34	0,85777	0,73577	0,34166	0,92231	2,69946	1,25912
1,35	0,85608	0,73287	0,33697	0,91824	2,72499	1,26601
1,36	0,85438	0,72997	0,33233	0,91411	2,75062	1,27286
1,37	0,85269	0,72707	0,32773	0,90991	2,77636	1,27968
1,38	0,85099	0,72418	0,32319	0,90564	2,80221	1,28645
1,39	0,84928	0,72128	0,31869	0,90131	2,82817	1,29318
1,40	0,84758	0,71839	0,31424	0,89692	2,85425	1,29987
1,41	0,84587	0,71550	0,30984	0,89247	2,88043	1,30652
1,42	0,84417	0,71262	0,30549	0,88797	2,90673	1,31313
1,43	0,84246	0,70973	0,30118	0,88342	2,93314	1,31970
1,44	0,84075	0,70685	0,29693	0,87881	2,95966	1,32623
1,45	0,83903	0,70398	0,29272	0,87415	2,98629	1,33272
1,46	0,83732	0,70110	0,28856	0,86945	3,01304	1,33917
1,47	0,83561	0,69824	0,28445	0,86471	3,03990	1,34558
1,48	0,83389	0,69537	0,28039	0,85992	3,06688	1,35195
1,49	0,83217	0,69251	0,27637	0,85509	3,09397	1,35828
1,50	0,83045	0,68966	0,27240	0,85022	3,12118	1,36458