

Федеральное агентство по образованию  
Государственное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
Уфимский государственный авиационный технический университет

А. А. Черноусов

ОСНОВЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ  
РАБОЧИХ ПРОЦЕССОВ  
ТЕПЛОВЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ

*Допущено Редакционно-издательским советом УГАТУ  
в качестве учебного пособия для студентов,  
обучающихся по направлению подготовки магистров  
140500 — «Энергомашиностроение»*

Уфа 2008

# Оглавление

<b>Введение</b> .....	<b>6</b>
<b>1. Моделирование и модели</b> .....	<b>9</b>
1.1. Модель, моделирование и его виды .....	10
1.2. Математическое моделирование .....	13
1.2.1. Математическая модель. ....	15
1.2.2. Виды математических моделей. ....	18
1.2.3. Иерархии математических моделей. ....	23
1.2.4. Классы уравнений математических моделей. ....	27
1.2.5. Модели процессов и состояний. ....	29
1.2.6. Аналитическое и численное решение. ....	32
1.2.7. Вычислительный эксперимент. ....	33
1.2.8. Имитационное моделирование. ....	34
1.2.9. Параметрическая оптимизация. ....	36
1.3. Физическое моделирование .....	41
1.3.1. Натурный и вычислительный эксперимент: сравнение. ....	43
1.3.2. Физическое моделирование применительно к РП ТД. ....	44
1.3.3. Методы планирования эксперимента. ....	45
1.4. Аналоговое моделирование .....	47
Вопросы для самоконтроля .....	48
<b>2. Методы анализа размерностей и теории подобия</b> .....	<b>49</b>
2.1. Анализ размерностей при моделировании .....	49
2.1.1. Функциональные связи. ....	50
2.1.2. Системы единиц измерения. Единицы измерения. ....	51
2.1.3. Размерные и безразмерные величины. ....	52
2.1.4. Структура функциональных связей. П -теорема. ....	53
2.1.5. Анализ размерностей в задаче о потерях на трение. ....	54
2.1.6. Анализ размерностей в задаче о наполнении ДВС. ....	56
2.2. Подобие при физическом и математическом моделировании .	60
2.2.1. Пример переноса результатов с модели на оригинал. ....	63
2.3. Числа подобия в гидродинамике и теории теплообмена	65

Вопросы для самоконтроля	68
<b>3. Модели пространственного течения рабочего тела</b>	<b>69</b>
3.1. Законы сохранения для движения реагирующей смеси	70
3.1.1. Исходные гипотезы.	70
3.1.2. Вывод законов сохранения для реагирующей смеси.	72
3.1.3. Уравнения Навье – Стокса.	81
3.1.4. Уравнения Эйлера.	83
3.2. Уравнения состояния	85
3.3. Моделирование турбулентных эффектов в потоке	91
3.3.1. Моделирование по УНС, осредненным по Рейнольдсу.	92
3.3.2. Моделирование крупных вихрей.	99
3.3.3. Модели эффективной скорости реакций.	102
Вопросы для самоконтроля	104
<b>4. Модели пониженной пространственной размерности</b>	<b>106</b>
4.1. Законы сохранения для квазиодномерного движения	106
4.1.1. Характеристическая форма уравнений.	110
4.1.2. Газодинамические функции нестационарного течения.	112
4.1.3. Модель квазистационарного течения.	114
4.1.4. Модель путевых потерь в канале.	116
4.1.5. Модель течения через местное сопротивление.	117
4.1.6. Модель течения через компрессор или турбину.	123
4.1.7. Модели течения через разветвление трубопровода.	125
4.1.8. Модель течения при наличии бокового отверстия.	130
4.2. Законы сохранения для «нульмерной» терм. системы	133
4.3. «Нульмерные» модели РП ТД	136
4.3.1. Базовая однозонная модель РП.	137
4.3.2. Двухзонная модель РП.	137
Вопросы для самоконтроля	141
<b>5. Численная реализация моделей процессов</b>	<b>143</b>
5.1. Модель элемента — задача Коши для системы ОДУ	144
5.2. Методы численного решения задач Коши	145
5.3. Численная реализация «нульмерных» моделей РП ТД	149
5.3.1. Численная реализация базовой однозонной модели.	149
5.3.2. Численная реализация двухзонной модели.	150

5.4. Методы численного решения «модельных» УЧП . . . . .	152
5.4.1. Модельное уравнение параболического типа. . . . .	153
5.4.2. Модельные уравнения гиперболического типа. . . . .	154
5.4.3. Методы для модельных гиперболических уравнений. . . . .	155
5.4.4. Методы для уравнений параб. и «смешанного» типа. . . . .	159
5.5. Методы численного решения уравнений одномерной НГД . . . . .	161
5.5.1. Метод «распада разрыва» С. К. Годунова. . . . .	161
5.5.2. Метод типа С.К. Годунова повышенной точности. . . . .	164
5.5.3. Экономичный одноэтапный метод. . . . .	168
5.6. Метод численного решения пространственных уравнений . . . . .	169
5.7. О методологии и методах расчета в <i>CFD</i> -пакетах . . . . .	174
Вопросы для самоконтроля . . . . .	177
<b>6. Принципы построения прикладных программных пакетов</b> . . . . .	<b>179</b>
6.1. Общие требования к программному пакету . . . . .	179
6.2. Архитектура моделирующей программы . . . . .	180
6.3. Типичная архитектура пакета . . . . .	184
6.4. Высокопроизводительные вычисления . . . . .	186
6.4.1. Аппаратное обеспечение: кластеры. . . . .	187
6.4.2. Программное обеспечение: <i>MPI</i> и параллельный солвер. . . . .	189
Вопросы для самоконтроля . . . . .	191
<b>7. Примеры моделирования процессов</b> . . . . .	<b>192</b>
7.1. Решение тестовых задач методами типа Годунова . . . . .	192
7.2. Моделирование движения ВКА в трубопроводе . . . . .	193
7.2.1. Одноцикловая установка и условия экспериментов. . . . .	197
7.2.2. Стенд, методика и результаты статических продувок. . . . .	199
7.2.3. Сравнение рассчитанных и измеренных $p_i(t)$ . . . . .	204
7.3. Тестовые расчеты турбулентных течений . . . . .	215
7.3.1. Расчет свободной турбулентной струи. . . . .	216
7.3.2. Турбулентное течение в квадратной трубе. . . . .	218
7.4. Моделирование двухтактного двигателя ЭМ-50 . . . . .	224
7.4.1. Расчет продувочных характеристик РК. . . . .	225
7.4.2. Расчет внешних скоростных характеристик. . . . .	229
7.5. Предельный коэффициент наполнения двухтактного ДВС . . . . .	232
7.5.1. Постановка задачи. . . . .	232
7.5.2. Результаты оптимизации. . . . .	234

<b>Список обозначений и сокращений</b> . . . . .	<b>241</b>
<b>Предметный указатель</b> . . . . .	<b>245</b>
<b>Список литературы</b> . . . . .	<b>248</b>
<b>Приложение А. Программа расчета по уравнениям динамики</b> .	<b>253</b>
<b>Приложение Б. Программа метода донорской ячейки</b> . . . . .	<b>256</b>
<b>Приложение В. Программа метода «распада разрыва»</b> . . . . .	<b>258</b>
<b>Приложение Г. Модуль для вычисления целевой функции</b> . . . .	<b>261</b>

# Введение

Цель данного учебного пособия заключается в систематическом изложении методологии математического (в основном, численного) моделирования *рабочих процессов* (РП) *тепловых двигателей* (ТД), в основном применительно к *двигателям внутреннего сгорания* (ДВС). Физические явления, лежащие в основе РП ТД — течения *рабочих тел* (РТ), в общем случае химически неравновесные и многофазные.

Исходя из *законов сохранения* (ЗС) для некоторой *предметной области*, получают некую иерархию *математических моделей* (ММ), отличающихся степенью детализации явлений. Конкретные ММ процессов выводятся из ЗС для определенного уровня иерархии по детализации и описывают процессы в моделируемой физической системе в общем случае как динамические, т. е. развивающиеся во времени (эволюционные, нестационарные).

При применении ММ проводится *численное решение* входящих в них уравнений на основе *дискретизации*, состоящей в пространственно-временной и/или структурной декомпозиции физического объекта на элементы. Соотношения численных методов суть конечно-разностные аналоги *законов сохранения* — уравнений *динамики* элементов систем, которыми описывается эволюция их состояния, обусловленная внутренними и внешними воздействиями и инертностью элементов.

Детальные модели позволяют численно рассчитывать сложные процессы, обеспечивая высокую достоверность получаемых результатов. Такие модели «состоят» из моделей элементарных процессов и элементов систем, в основе которых лежат относительно простые принципы и соотношения. Выявляемая в расчетах по ним сложность «поведения» объектов обусловлена множественностью элементов систем и связей между ними. Моделирование в детальной постановке часто называют *вычислительным экспериментом*<sup>1</sup>. В данном пособии в качестве наиболее детальной модели РП ТД принята модель зависящего от времени пространственного течения реагирующей смеси газов.

Вся последовательность операций — от разумного упрощения физической картины при формулировании ММ и до сопоставления коли-

---

<sup>1</sup>И иногда, не вполне корректно — *имитационным моделированием*.

чественных результатов моделирования с данными натуральных экспериментов — составляет *методологию* моделирования. Она применяется при создании (применении) *модели* как *теории* описываемого класса явлений и подразумевает, в частности, проверку ММ по данным экспериментов, по результатам которой *теория (модель)* принимается (с уточнением) или отвергается — в соответствии с *научным методом*.

Изложение материала пособия построено вокруг идей об *иерархичности модельных представлений* и о математическом моделировании как *методологии*, применяемой в рамках *научного метода*. Материал разделен на главы, соответствующие различным аспектам методологии моделирования процессов.

В первой главе приводится обзорный материал и классификация моделей и видов моделирования, определения терминов, рассуждения о роли ММ в науке и технике, о месте собственно численных методов в моделировании.

В гл. 2 даются основные сведения и элементарные примеры из анализа размерностей и теории подобия — для углубления их понимания при применении в ММ обобщенных зависимостей.

В гл. 3 приводится вывод законов сохранения для реагирующей многокомпонентной смеси — достаточно фундаментальной основы для детального описания РП ТД как пространственных течений РТ в их *газовоздушных трактах* (ГВТ), частные случаи, а также обзор подходов к «замыканию» уравнений полуэмпирическими моделями при численном моделировании турбулентных течений.

Гл. 4 посвящена законам сохранения, описывающим РП ТД как *нестационарные газодинамические и термодинамические явления* в каналах и емкостях в одно- и «нульмерном» приближениях, а также получаемым из этих ЗС конкретным моделям элементов ГВТ.

В гл. 5 освещаются вопросы *численной реализации* моделей динамики процессов, излагается подход собственно к численному расчету эволюции сложных систем, «набранных» из элементов, описываемых моделями, возможно, различных уровней иерархии, а также численные методы определенного класса для уравнений нестационарной гидродинамики.

В гл. 6 рассматриваются требования к *прикладным программным пакетам* для моделирования процессов и обсуждаются решения, принимаемые при их проектировании и реализации.

В последней главе приведены некоторые *примеры расчетов* реальных процессов, выполненные с применением изложенных ранее моделей, методик и методов.

В приложениях даны примеры текстов программ на C++, поясняющих реализацию на ЭВМ моделей динамических процессов и процедур оптимизации.

В конце пособия также имеется [предметный указатель](#).

При изучении дисциплины рекомендуется использовать книги из [списка литературы](#) на с. 248.

В основу данного пособия положен материал курсов «Механика жидкости и газа», «Основы физики горения», «Нестационарные газодинамические эффекты в ДВС», «Агрегаты наддува ДВС», «Методы подобиия физических процессов», «Информатика» и курса для магистрантов «Моделирование процессов в ДВС», прочитанных в разное время автором на кафедре ДВС Уфимского государственного авиационного технического университета (УГАТУ), а также материал собственных исследований автора, выполненных с участием студентов<sup>2</sup>, магистрантов и аспирантов.

Пособие может быть полезно студентам старших курсов двигателестроительных специальностей, магистрантам, аспирантам и научным работникам.

---

<sup>2</sup>В рамках *функционально-целевой технологии подготовки специалистов* [19], применяемой кафедрой ДВС УГАТУ как выпускающей кафедрой.



# Глава 1

## Моделирование и модели

Рабочий процесс (РП) теплового двигателя (ТД) представляет собой сложную совокупность физических явлений. В основе его моделирования лежит рассмотрение течения в газозоудшном тракте (ГВТ) реагирующей смеси газообразных компонентов, в котором существенны пространственный характер потока и нестационарность, турбулентность и многофазность, химические реакции, перенос энергии излучением. Для математического описания таких процессов на практике могут использоваться модели, различающиеся по степени детализации и образующие некоторую *иерархию*.

На вершине этой иерархии — модель пространственного течения реальной сжимаемой жидкости или смеси реагирующих газов — система законов сохранения механики жидкости и газа, дополненная соответствующими уравнениями состояния и «замкнутая» модельными гипотезами («законами») молекулярного переноса, соотношениями химической кинетики и моделью переноса энергии излучением. Наиболее достоверные результаты можно надеяться получить именно с применением подобных *детальных* моделей, содержащих минимум обоснованных допущений.

Решения практических задач по сколько-нибудь детальным моделям не удастся получить *аналитическим* способом (в замкнутом виде). Поэтому моделирование поведения реальных систем проводится средствами *численного* моделирования на цифровых ЭВМ.

В данном пособии описываются двухуровневая иерархия моделей и подход к численному интегрированию уравнений моделей, используемые и рекомендуемые автором для целей вычислительного эксперимента при моделировании РП ТД. Излагаемый подход к математическому моделированию эволюционных процессов применим не только к явлениям в ГВТ ТД, описываемым термо- и газодинамическими моделями, но и к явлениям иной природы, которые определяют нестационарного вида процессы в сложных технических системах и описываются соответствующими динамическими *законами сохранения*.

В данной вводной главе обсуждаются место, роль, возможности и ограничения методологий, методик и методов моделирования процессов в науке и технике вообще.

## 1.1. Модель, моделирование и его виды

В XXI веке уже трудно назвать область науки и техники, где моделирование не имело бы существенного значения.

Термины «модель» и «моделирование» будут встречаться в дальнейшем очень часто. Эти слова входят в технический жаргон, и когда они употребляются в сообществе, проблем не возникает, сложность лишь в том, что исследователями — специалистами в различных областях — в эти понятия вкладывается разный смысл. Поэтому вначале дадим их наиболее общие определения; согласно [6],

**модель** — в широком понимании — образ (в т. ч. условный или мысленный, изобретение, описание, схема, чертеж, график, план, карта и т. п.) или прообраз (образец) какого-либо объекта или системы объектов (*оригинала* данной модели), используемый в определенных условиях в качестве их заместителя или представителя.

Можно сказать, что *модель* — то, что для решения тех или иных задач заменяет *оригинал*. В этом широком смысле велик диапазон возможных видов моделей и моделирования; так, полноправными моделями (для соответствующих задач) будут: моделью планеты Земля — глобус, моделью звездного неба — купол планетария, животного — чучело и т. п.

*Модель* есть описание ограниченной сложности (еще одно определение понятия *модели*). В свете этого моделью можно считать любое существующее предметное, словесное или математическое описание реального объекта; тогда очевидно, что люди на каждом шагу сталкиваются с *моделями*, может быть, и не осознавая этого.

Человеческий разум может оперировать только с той реальностью, которая ему доступна, и нет надежды, что мы когда-либо получим и сможем практически (в целях предсказания поведения) использовать полные в строгом смысле описания сложных объектов. Поэтому мы и довольствуемся упрощенными представлениями, т. е. *моделями*.

Что же такое *моделирование*? Согласно [6],

**моделирование** — исследование объектов познания на их *моделях*, построение и изучение *моделей* реально существующих предметов

и явлений (живых и неживых систем, инженерных конструкций, разнообразных процессов — физических, химических, биологических, социальных) и конструируемых объектов (для определения, уточнения их характеристик, рационализации способов их построения и т. п.).

Подробная и всеобъемлющая классификация *видов моделирования* затруднительна — в силу многозначности понятия *модели* в науке и технике. Можно классифицировать по разному основанию, но любая классификация обречена на неполноту, тем более что терминология в конкретной области опирается не столько на строгие правила, сколько на языковые, научные и практические традиции, а еще чаще определяется в рамках конкретного контекста и вне его не имеет никакого стандартного значения. Тем не менее, отчетливо различаются два основных вида моделирования — *предметное* и *знаковое* (рис. 1.1).

**Предметное моделирование** — исследование, которое проводится на реальной модели, воспроизводящей основные геометрические, физические или динамические характеристики *оригинала*.

Если модель и оригинал имеют одну и ту же физическую природу, имеет место *физическое моделирование* (разд. 1.3).

Возможно изучение оригинала и с помощью модели иной физической природы (лишь бы теоретические построения для описания того и другого были аналогичны) — *аналоговое моделирование* (разд. 1.4).

**Знаковое моделирование** — исследование, в котором моделью служат знаковые образования одного из видов: схемы, графики, чертежи, формулы, слова и предложения естественных и искусственных языков. Важный вид знакового моделирования — *математическое моделирование* (разд. 1.2), выполняемое языком математики и логики. Современная форма реализации знакового, прежде всего, математического моделирования — моделирование на цифровых ЭВМ.

Цель данного пособия — изложение методологии именно *математического моделирования* (разд. 1.2), в частности — численного моделирования РП ТД. Разновидность знакового моделирования, математическое моделирование — мощный инструмент инженерного анализа, описания действительных процессов и поиска оптимальных условий их реализации.

Существует *мысленное моделирование*, когда реальное построение предметной или знаковой модели заменяется мысленно-наглядным представлением типа знаковой или предметной модели; на основании того, что предметная модель при этом не создается, *мысленное* моделирование можно считать разновидностью *знакового*.

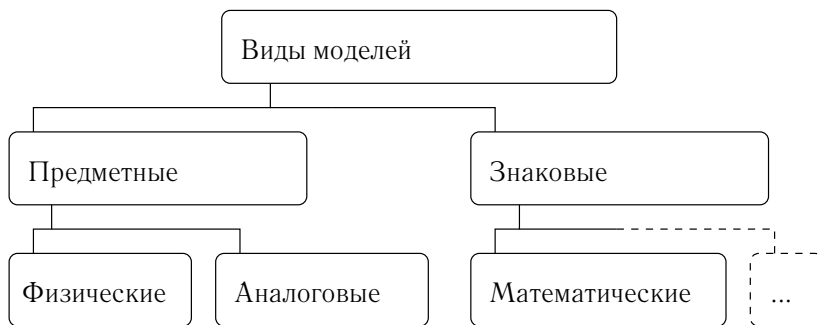


Рис. 1.1. Классификация моделей

По характеру той стороны объекта, которая подвергается моделированию, различают, в первую очередь, *модели структуры* и *модели поведения* (функции). При моделировании в указанных аспектах требуется обеспечивать соответственно *структурное* или *функциональное* соответствие модели и оригинала.

Подчеркнем еще раз: при *моделировании* не ставится цель создания точной копии объекта<sup>1</sup>. Назначение *модели* — воспроизвести некоторые *основные* его свойства. При создании модели всегда принимаются упрощения, поэтому, естественно, модель оказывается несовершенным описанием.

Итак, модель не тождественна самому объекту, она обязательно проще, схематичней. Разные модели объекта проходят разные пути в направлении схематизации, абстракции, внесения упрощающих предположений (допущений). Разные типы моделей углубляются в разные аспекты объектов. Словесная (вербальная) модель, скажем, служит для формирования качественных представлений об объекте. Геометрическая — хранилище информации о форме, размерах и взаимном расположении частей физического объекта. Математическая модель — уже инструмент

<sup>1</sup>Создание точной копии («клона») объекта не только не выступает целью моделирования, но и в принципе невозможно («теорема о неклонируемости»).

для получения количественных характеристик процессов и состояний, более или менее адекватных (с. 17) процессам и состояниям в изучаемом физическом объекте.

## 1.2. Математическое моделирование

*Математическое моделирование* (ММ) — потенциально мощная методология познания внешнего мира, а также прогнозирования и управления. При применении ММ исследование явлений мира сводится к *формулированию и решению математических задач*. ММ занимает в настоящее время ведущее место среди других методов исследования, особенно в связи с прогрессом в области ЭВМ; являясь средством *прогнозирования* количественных характеристик процессов, протекающих с участием известных и смоделированных физических явлений, ММ помогает проектировать изделия, функционирующие оптимальным образом.

Последовательность действий, выполняемых при математическом моделировании, можно представить по-крупному в виде 4 этапов, упрощенно показанных на рис. 1.2:

- 1) Формулирование законов, описывающих явления в объектах моделируемых классов (требуется знание фактов, относящихся к явлениям, проникновение во взаимосвязи); этап завершается записью в математических терминах сформулированных количественных представлений о существенных для объекта связях;
- 2) Постановка и исследование математических задач, к которым приводят математические модели;
- 3) Решение задачи, когда по исходным данным находится (рассчитывается, вычисляется) результат; привлекается аппарат аналитических преобразований для получения *аналитического решения* или численные методы и/или вычислительная техника — для получения *численного решения* задачи;
- 4) Выяснение того, удовлетворяет ли принятая модель критерию практики, т. е. согласуются ли результаты наблюдений (в пределах их точности) со следствиями модели; принятие или непринятие модели; последующий анализ модели в связи с накоплением данных об изучаемых явлениях и модернизация модели; возможен возврат к этапу 1 (ввиду нужды в новой, более совершенной модели).

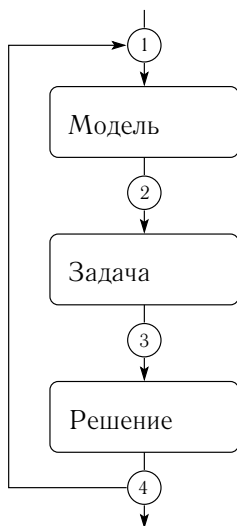


Рис. 1.2. Этапы математического моделирования

Не без оснований можно считать, что *математическое моделирование* (включающее, как правило, *численное моделирование* или «вычислительный эксперимент») — методология, применяемая в рамках *научного метода* познания и исследования объективного мира. Обратимся к определениям.

**Научный метод познания и исследования объективного мира** заключается в следующей последовательности действий:

- 1) формулирование исходных гипотез;
- 2) вывод из них всех следствий;
- 3) сопоставление их (следствий) с данными наблюдений;
- 4) принятие теории или отклонение ее в зависимости от того, согласуются ли ее результаты с наблюдаемыми фактами.

В известном смысле целью исследования, выполняемого научным методом, является *теория*.

**Теория** — система основных идей в той или иной области знаний; форма научного знания, дающая целостное представление о закономерностях и существенных связях действительности. Критерий истинности и основа развития теории — *практика*.

Нетрудно видеть, что приведенная выше и показанная на рис. 1.2 последовательность этапов математического моделирования соответствует данному выше определению *научного метода*. Действительно, на этапе формулирования гипотез оговариваются упрощения, которые делаются на этом (и только на этом) этапе; формируется собственно замкнутая математическая модель объекта, класса объектов или явления. Далее, на этапе постановки конкретной задачи или серии задач внесение в модель изменений (упрощений) уже не допускается. Решения задач — на следующем этапе — получаются (в идеале) также без какого-либо искажения исходных гипотез; так, применение *численного метода* должно обеспечивать **сходимость численного решения** к *точному решению* поставленной выше задачи по исходной модели (т. е. на основании принятых же гипотез). Этап экспериментальной проверки включает проведение измерений на физической модели объекта, адекватного формулировке задачи, и сравнение ее решения с экспериментальными данными; к измерениям предъявляются определенные требования по надежности и точности. Таким образом, заложенные в модель *гипотезы* (и только они) должны проходить экспериментальную проверку; при удовлетворительных результатах проверки модель *принимается*, по существу, в качестве *теории* объекта, класса объектов или явления.

Можно сказать, что в широком смысле *теория* является также *моделью*, т. е. неполным (но принятым в настоящее время) описанием действительности. Принимая эту точку зрения, не следует проводить различий между терминами «теория» и «модель».

Доступное и глубокое введение в современную проблематику ММ содержится в [27].

**1.2.1. Математическая модель.** В [6] дается следующее определение:

**Математическая модель** — приближенное описание какого-либо класса явлений внешнего мира, выраженное с помощью математической символики.

Важное требование, предъявляемое к *математической модели* (ММ) — требование замкнутости (полноты) — ММ должна содержать *формально* полное описание в рамках принятых допущений (гипотез). Так, в качестве основных уравнений ММ динамических процессов выступают законы сохранения (ЗС), специфичные для соответству-

ющей предметной области, или их следствия; при этом гипотезы, принятые при выводе ЗС и «замыкании» следующих из них уравнений ММ, в идеале должны осознаваться исследователем как таковые.

Итак, при создании ММ исходные ЗС (играющие роль «фундаментальных» уравнений, «первопринципов») замыкаются выражениями моделей («теорий») более элементарных явлений (фундаментального, феноменологического, или эмпирического видов, см. подраздел 1.2.2). В результате уравнения ММ приобретают частный (конкретный) характер, и только так зачастую удается получить замкнутую ММ, т. е. такую, в которой, грубо говоря, число неизвестных равно числу уравнений.

Например, уравнения Навье — Стокса (УНС) можно получить, замыкая ЗС (общие для деформируемой сплошной среды) выражениями определенного вида для тензора вязких напряжений  $\Pi''_{ij}$  и вектора теплового потока  $\mathbf{q}$  (с. 81). После чего в этой системе из 5 уравнений в частных производных в роли неизвестных выступают 7 искомых величин — функций координат и времени  $\rho = \rho(\mathbf{r}, t)$ ,  $v_i = v_i(\mathbf{r}, t)$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $p = p(\mathbf{r}, t)$ ,  $e = e(\mathbf{r}, t)$  (удельная внутренняя энергия) и  $T = T(\mathbf{r}, t)$ .

С привлечением двух — термического  $p = p(\rho, T)$  и калорического  $e = e(\rho, T)$  — уравнений состояния (УС) для однородной среды система УНС становится замкнутой частной моделью для решения задач (с конкретными условиями однозначности) о течении сжимаемых ньютоновских жидкостей.

Другой пример: нестационарное течение через местное сопротивление в канале описывается моделью распада разрыва на скачке сечения на стыке двух каналов или на стыке канала и емкости (с. 117). Данную модель составляют:

- соотношения на фронтах простых изоэнтропных волн (4.9), (4.10) — следствия модели гладкого нестационарного квазиодномерного течения (4.1) — (4.3), получаемой из интегральных ЗС;
- соотношения на поверхности контакта двух сред — контактной поверхности — следствия тех же ЗС в более частной стационарной постановке;
- соотношения для энергетически изолированного квазиодномерного течения (4.14) через местное сопротивление с учетом данных



о гидравлических потерях (4.15), получаемых, вообще говоря, эмпирическим путем.

Модели такого класса также «замыкаются» с помощью УС.

Резюмируя, отметим, что готовая к применению ММ — вполне формализованное описание моделируемого объекта или класса объектов. Выделение задачи из класса задач имеет место при наложении конкретных *условий однозначности*.

Следует внести ясность относительно понятий *адекватности* математической модели и *достоверности* получаемых по ней результатов. Адекватной (применительно к классу объектов или задач) можно считать такую ММ, при выводе которой не сделано предположений, идущих явно вразрез с характером явлений, основополагающих для класса объектов. Указанное свойство ММ само по себе не гарантирует высокой *достоверности* (количественно малой *погрешности*) результатов моделирования в каждом конкретном случае, но способствует такому положению вещей, чтобы получение неприемлемых погрешностей и, тем более, физически бессмысленных результатов было маловероятно<sup>2</sup>. Примеры:

- модель невязкой жидкости или газа не адекватна для описания процессов течения реальных сред по протяженным каналам, однако применительно к коротким насадкам и соплам в определенных пределах по числу *Re* такая модель для ряда задач будет адекватна;
- из практики моделирования течений в газоздушных трактах — модель «мгновенного перемешивания» для описания течения газов при продувке рабочей камеры двухтактного двигателя оказывается неадекватной, так как представление (или *гипотеза*) о *мгновеном* перемешивании поступающих в объем материальных потоков противоречит физической картине явления;

---

<sup>2</sup>Неадекватность *решения* задачи физической картине может быть и следствием недостатков *численной реализации* ММ. Недопустимы дефекты *численных методов* (ЧМ) — такие, как отсутствие аппроксимации и наличие в решениях нефизических «артефактов» — не позволяющие получить точное решение задачи на сколь угодно мелкой расчетной сетке. Использование неадекватно грубых расчетных сеток также приводит к получению (и попыткам интерпретации) *численных решений*, весьма далеких от *точных решений* задач.

- квазиодномерное описание процессов в трубопроводах с местными сопротивлениями адекватно «в классе объектов» с большим отношением длин (волн и участков труб) к диаметрам ( $l \gg d$ ); для такого случая выполнена верификация модели, описанная в разд. 7.2.

Как видим, адекватность ММ физического процесса (объекта) — категория качественная. Количественной *мерой* достоверности моделирования служит величина *погрешности*. Но ее, строго говоря, можно узнать, проводя измерения (с определенной погрешностью и каждый раз применительно к конкретному объекту, при конкретных значениях определяющих параметров), тем самым устанавливая степень достоверности ММ в определенном классе задач и диапазоне определяющих параметров. Как говорилось выше, данный этап («верификация» ММ) — неотъемлемый этап ее «жизненного цикла».

При практическом применении ММ результатам моделирования доверяют ориентируясь на результаты ее верификации.

Подытоживая, отметим, что величину *погрешности* моделирования в общем определяет степень схематизации явления в ММ, но выявляется она применительно к конкретным условиям и к конкретному объекту. Общее правило: модели процессов, содержащие больше упрощающих предположений, обычно менее адекватны, а результаты моделирования по ним, как правило, менее точны<sup>3</sup>.

**1.2.2. Виды математических моделей.** В ММ физических процессов по-разному устанавливаются связи между аспектами моделируемого объекта (процесса, сложного явления). По этому признаку можно некоторую ММ отнести к *детерминистическим* или *стохастическим*.

**Детерминистические** модели строятся на необходимом и достаточном (в рамках допущений) наборе причинно-следственных связей в моделируемом объекте, что удается не всегда, а лишь в тех случаях, когда число существенных составляющих (и связей между ними) в объекте вполне обозримо, а физические взаимодействия выявляются как причинно-следственные связи.

**Стохастические** модели служат описаниями поведения систем, содержащих большие количества однотипных по характеристикам и законам взаимодействия объектов. При этом, если законы взаимодействия

---

<sup>3</sup>Однако и остановившиеся часы дважды в сутки показывают правильное время.

достаточно хорошо известны, то характеристики систем можно получить (в принципе) путем соответствующей статистической обработки.

Например, к стохастическим относятся модели ряда сложных явлений, таких как модели *молекулярно-кинетической теории*, молекулярного и турбулентного переноса, химической кинетики — в эти модели заложены представления о вероятности тех или иных событий или состояний. Такие модели не отражают, в противоположность *детерминистическим*, весь ход процессов, носящий в таком явлении случайный характер, устанавливая суммарный (средний, осредненный, среднестатистический) ход явлений. Вызвано это практической невозможностью количественно описывать процессы с огромным числом *степеней свободы*, необходимостью огрубления, осреднения. Успех применения стохастических моделей для той и иной задачи определяется применимостью статистических подходов.

Деление математических моделей на детерминистические и стохастические составляет первый уровень их классификации. Попробуем далее ввести более подробную классификацию ММ физических процессов, приняв за основание *степень детализации* при описании математическими моделями явлений, и далее — детерминистический или стохастический характер привлекаемых при создании ММ гипотез (упрощающих предположений).

**Детальные** модели. Таковыми могут считаться модели сложных («составных») явлений, построенные на одних лишь фундаментальных выводах современных им физических теорий элементарных явлений, при этом не содержащие грубых (неоправданных) упрощающих допущений. При описании детальными моделями в принципе достижима высокая достоверность результатов моделирования сложных явлений.

Пример: система уравнений движения реагирующей смеси, основанная на допущениях о сплошности, о локальном термодинамическом равновесии (ЛТР) и содержащая весьма правдоподобные модели процессов молекулярного переноса и соотношения химической кинетики газофазных реакций. В силу действительной несоизмеримости *масштабов* явлений, принятые допущения стохастического вида не «порочат» детального характера данной модели, пригодной для решения широкого класса задач. Поэтому указанная модель и рассматривается нами как детальная и порождающая целую иерархию моделей менее детальных, содержащих больше допущений, и менее адекватных в некоторых подобластях применимости базовой модели.

Нужно отметить, что часто детальные модели мало пригодны для *практических расчетов* именно из-за разномасштабности учитываемых в них явлений и наличия в них (в том или ином виде) огромного числа «степеней свободы». Это проявляется в невыполнимых требованиях к мощности вычислительной техники и (или) к гибкости потребных ЧМ. Резкого снижения требований добиваются (более или менее оправданным) переходом к описанию наиболее мелкомасштабного явления его *феноменологической* моделью (построенной с привлечением детерминистического и/или стохастического подходов). Примеры подобных моделей см. в гл. 3 и 4.

**Феноменологические** модели (от греч. *phenomenon* — «явление») служат для упрощенного описания некоторого процесса или стороны процесса путем наделения некоторого объекта (сущности) упрощенными свойствами, удобными для описания объекта в «детерминистическом» или «стохастическом» ключе. Упрощение состоит, как правило, в намеренном игнорировании большого числа пространственно-временных степеней свободы и реального многообразия физических масштабов и взаимодействий, в разделении на макроскопический и микроскопический масштабы, применении соображений об универсальности и автомодельности.

Использование феноменологических моделей в составе детальных моделей сужает диапазон масштабов явлений, подлежащих явному выделению при численном расчете. Несколько огрубляя, можно сказать, что феноменологические модели (часто — *второстепенных* явлений) обычно именуется упрощенными теориями моделируемого явления. В силу приближенного характера этих «теорий», они должны проходить строгую экспериментальную проверку.

Когда интересующий аспект явления может быть выделен «в чистом виде» (т. е. геометрия объекта действительно предельно проста и/или имеется большой разрыв пространственно-временных масштабов физического взаимодействия), феноменологическая модель, построенная на общих принципах (и на основе частных форм *законов сохранения*), как правило, оказывается вполне адекватной.

Так, в газовой динамике сравнительно простые соотношения количественно верно описывают скачки параметров сплошной среды на газодинамических разрывах. В основе соотношений лежат интегральные ЗС для контрольного объема, охватывающего скачок. При том, что исходные интегральные ЗС вида (4.1) — (4.3) в принципе не могут описать

внутреннюю структуру скачка, успех их применения к скачкам обусловлен упрощением физической картины, оправданным при большом различии микро- и макромасштабов.

В *механике жидкости и газа* (МЖГ) УНС воспринимаются в качестве детальной модели, адекватно описывающей любые (в т. ч. турбулентные) течения такой разновидности однородных сред, как *ньютоновские жидкости*. При этом не всегда отдают себе отчет в том, что в основе УНС лежат гипотеза сплошности и гипотеза о ЛТР, а также феноменологические по сути модели процессов молекулярного переноса, адекватные в пределах применимости «стохастического» подхода к описанию движения молекул. Но и расчет турбулентных течений на основе УНС на практике обычно требует введения огрубленного описания — феноменологических по сути *моделей турбулентного переноса* (МТП).

Так, простейшая МТП на «подсеточном» масштабе получается в допущении изотропии мелкомасштабных пульсаций, равновесности и универсальности их энергетического спектра. Подобные модели (стохастического вида) позволяют значительно сократить потребные мощности ЭВМ для расчета турбулентных течений (технология *LES*, с. 99). Представления «турбулентных» эффектов переноса в моделях на основе осредненных уравнений МЖГ (технология *RANS*, с. 92) суть также не что иное, как подобные же феноменологии.

Детальная модель газожидкостного (многофазного) течения базируется на уравнениях вида УНС со свойствами сред, различными для подобластей *капельной жидкости* и газа, на границах раздела сред дополняется некоторой феноменологией, полученной по данным теоретических и экспериментальных исследований. Однако течения тонко- и полидисперсных *аэрозолей* по этой модели прямому численному расчету не поддаются ввиду многомасштабности явлений. Единственное разумное решение проблемы — огрубление с привлечением феноменологических моделей. Так, для фракции немногочисленных крупных капель пользуются моделью движения дискретной капли (*детерминистическая* феноменология), а для описания движения многочисленных мелких капель дополнительно вводят модель второй фазы с континуальным (т. е. *стохастическим*) представлением и феноменологическую модель межфазного взаимодействия.

Рассуждения о фундаментальном, детальном и основанном на феноменологиях подходах к моделированию (применительно к реагирующим течениям) можно найти в [20].

**Фундаментальные** модели используются для описания конкретного физического взаимодействия и строятся на базе современных физических теорий, т. е. без привлечения явных допущений. Такие модели могут быть весьма адекватными, но круг представляющих интерес процессов в технике, которые могут по ним моделироваться *непосредственно*, невелик.

Пример: квантово-механические расчеты поверхности потенциальной энергии молекул проводятся на базе фундаментальных моделей; они могут дать ценную информацию о путях и скоростях химических реакций.

**Эмпирические модели** в том отношении отличаются от фундаментальных и феноменологических (хотя это деление в значительной мере условно), что могут быть построены с минимальным привлечением теории процессов или даже без ее использования. Итак, эмпирические модели, создаются, грубо говоря, «подгонкой» коэффициентов аппроксимационных формул по опытным данным; в предельном случае определяется единственная эмпирическая константа.

Состав параметров аппроксимационной формулы устанавливается с помощью *анализа размерностей* (разд. 2.2). В ряде случаев в основу формулы закладывается правдоподобная теория явления<sup>4</sup>. В любом случае решение не получается в замкнутом виде и для определения констант формулы привлекаются экспериментальные данные. Примеры:

- константы скоростей химических реакций будут выражаться полуэмпирическими зависимостями до тех пор, пока расчетами по фундаментальным моделям не будут получены более надежные результаты (но и тогда полученные данные можно будет с достаточной точностью представлять аппроксимационными зависимостями, при том что сами данные по константам скорости реакций получат фундаментальное обоснование);
- эмпирические формулы для *коэффициентов сопротивления* и теплоотдачи (их общий вид, однако, также получается с привлечением моделей МЖГ и теории размерностей);

---

<sup>4</sup>В этом случае говорят о *полуэмпирических* моделях (формулах).

- показатели политроп сжатия и расширения, определяемые по таблицам и номограммам в ранних методиках расчета действительного цикла ДВС по Гриневецкому — Мазингу и т. п.

Следует помнить об опасности использования эмпирических моделей вне их «рабочего диапазона».

**Статистические** модели — такие эмпирические модели, которые получены с привлечением статистических методов на широкой выборке сходных объектов. Построенные для описания сложных явлений в целом, они не в состоянии правильно отразить влияние факторов, не представленных в выборке, и в этом случае могут служить лишь для оценок.

Границы приведенной классификации «второго уровня» нечеткие — модель, содержащая минимум феноменологии, будет представляться (на данном уровне развития представлений и традиций) фундаментальной; в составе некоторой феноменологической модели могут использоваться соотношения как чисто стохастической фундаментальной модели, так и феноменологической модели с коэффициентами, определенными эмпирическим путем, и т. п.

**1.2.3. Иерархии математических моделей.** Полезно ввести понятие *иерархии моделей*. Действительно, модель, обходящаяся минимумом ограничений и допущений, может считаться моделью верхнего уровня (по степени детализации). Налагая затем последовательно определенные ограничения, округления, можно *породить* модели последовательно более низких уровней (движение «сверху вниз» по иерархии). Способ получения моделей по принципу «сверху вниз» более универсален, очевиден и надежен, чем по принципу «снизу вверх».

Например, из рассмотрения статистики хаотического молекулярного движения газа (уравнения Больцмана) можно получить ЗС для движения газа как *сплошной среды* (уравнения Навье — Стокса) как модель *более низкого уровня*. При построении и анализе любой модели всегда полезно знать ее место в иерархии моделей изучаемых явлений. Это помогает оценивать пределы ее применимости и четко осознавать связи с моделями других уровней, т. е. способствует более глубокому пониманию.

Для примера: иерархия, которую образуют модели, основанные на понятии сплошной текучей среды. Для изучения тех или иных процессов в потоках газов (и жидкостей) могут быть адекватными (каждая —

для определенной степени учета физических эффектов в явлении) модели из следующей иерархии:

- уравнения, описывающие пространственное течение многокомпонентной реагирующей смеси — (3.5), (3.14) и (3.21);
- *уравнения Навье – Стокса* для нестационарного пространственного течения (с. 81);
- *уравнения Эйлера* для двумерного нестационарного течения;
- *уравнения Эйлера* для одномерного плоского нестационарного течения — (3.31).

Отметим, что ЗС в одномерной постановке при «движении вниз» по представленной иерархии мы получим в очень частном виде, описывающем *плоские* колебания сжимаемой среды. Чтобы получить возможность моделировать течение в канале (трубопроводе) общего вида, нужно использовать одномерную систему законов сохранения в так называемом *каналовом* приближении. Законы сохранения в этом виде выводятся при соответствующих допущениях в интегральной форме для контрольного объема — (4.32) и (4.33) и сами могут являться вершиной небольшой иерархии более частных моделей (законов сохранения); так, не учитывая трение, теплообмен и переменное сечение канала, приходим к той же форме уравнений одномерного («плоского») движения (3.31). А например, приняв допущение о стационарности, получим уравнения модели не зависящего от времени течения в канале (4.11) – (4.13).

Более наглядно иерархия моделей сплошной текучей среды изображена на рис. 1.3. Представление об иерархии моделей такого вида применительно к моделированию РП ТД оказывается полезным. Так, детальные расчеты *турбулентных течений* ведутся по моделям, следующим из ЗС для реагирующих смесей (глава 3), а численные расчеты процессов в газозвоздушном тракте в одномерной постановке — по моделям, которые можно отнести к моделям уровня квазиодномерной нестационарной газовой динамики [25] и, отчасти, к моделям уровней термодинамики и гидравлики (гл. 4).

Механика сплошной деформируемой среды общего вида — как реагирующей смеси — выводится (*I*) из положений *механики сплошной*



среды<sup>5</sup> (МСС, рис. 1.3), при указании свойства текучести, уравнений состояния газовой смеси и химической кинетики для смеси.

Параллельно из МСС может быть получена обширная иерархия моделей механики сплошной (не обязательно *линейно*) упругой деформируемой среды, в рамках которой можно получить нестационарные и стационарные формы уравнений *теории упругости*, а также, после наложения более жестких ограничений — выражения частных моделей, известных из курсов *сопротивления материалов* и *теоретической механики* (для абсолютно твердых тел).

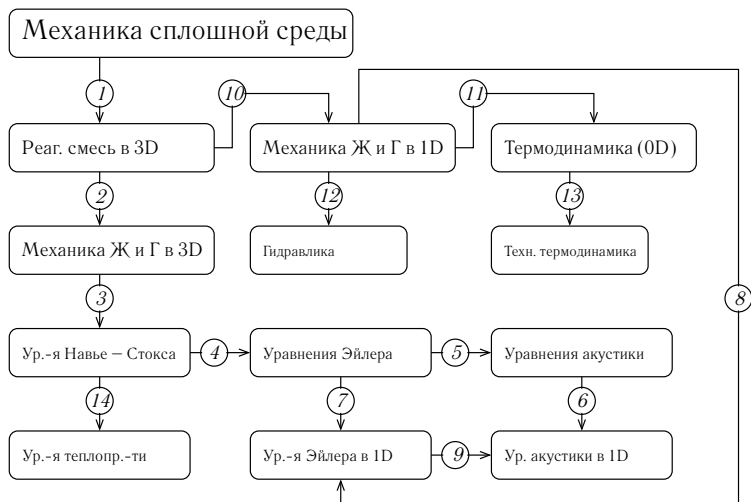


Рис. 1.3. Иерархия моделей термогазодинамических процессов

Вернемся к *термогазодинамическим* моделям. Взяв за основу модель течения реагирующей смеси (разд. 3.1) и отказавшись от описания ее именно как неоднородной и притом реагирующей смеси газообразных компонентов, получим ЗС классической МЖГ (подразд. 3.1.3). А задав (3) «законы» молекулярного переноса обобщенной гипотезой Ньютона для тензора вязких напряжений и законом Фурье для вектора плотности теплового потока, получим из законов сохранения МЖГ *уравнения Навье – Стокса* (модель течения «ньютоновской» жидко-

<sup>5</sup>МСС любого вида вытекает из предположения о несоизмеримости масштабов структурных единиц — атомов, ионов, молекул, кристаллитов и т. п. и существенных пространственно-временных изменений полей физических характеристик в интересующем явлении.

сти или газа). Далее, отбросив (4) учет молекулярного переноса количества движения и энергии, получим систему уравнений Эйлера динамики идеальной (невязкой и нетеплопроводной) жидкости или газа (3.29), см. с. 83; те же уравнения получаются и из интегральных законов сохранения, минуя уровень уравнений Навье — Стокса, причем исходно в интегральной форме.

Линеаризация (5) уравнений Эйлера для случая в целом неподвижной среды дает уравнения акустики, описывающие распространение упругих возмущений малой амплитуды; если в этих уравнениях отбросить (6) члены, соответствующие движению в двух из трех координатных направлений, получаются уравнения для малых же возмущений *плоской* формы. Поступая так же в отношении уравнений Эйлера, получим (7) нелинейные уравнения движения с одной пространственной переменной — «уравнения Эйлера в  $1D$ » (3.31), которые можно получить и иначе, например, налагая упрощения (8) на уравнения квазиодномерного движения смеси. Их линеаризация (9) даст те же уравнения акустики для плоских возмущений.

Наложив (при выводе ЗС для реагирующей смеси) ограничения «каналового» вида (10) на очертания контрольного объема и характер распределения потока в нем, получим модель МЖГ в данном одномерном (каналовом) приближении — уравнения модели нестационарной гидродинамики (см. разд. 4.2 и [25]), которая дает богатый спектр моделей элементов трубопроводных систем, и в свою очередь, после дальнейших упрощений (12) — модели уровня, общепринятого для *гидравлики* как учения о течения жидкостей по трубопроводам в квазистационарном режиме.

Еще более сильные ограничения (11), наложенные при выводе интегральных ЗС, дают базовую модель пространственно однородной *открытой термодинамической системы* («термодинамический» уровень иерархии, см. разд. 4.2), упрощением которой (13) можно получить, в частности, все основные соотношения *технической термодинамики* как учения, содержащего модели наиболее низкого уровня представления о РП ТД.

Вопрос о применимости моделей того или иного уровня иерархии в конкретном случае решается на основе осознания их возможностей и ограничений. Как общее правило, для целей моделирования процессов при проектировании (а это процесс с повышением детализации сведений об объекте или изделии) на его ранних (оценочных) этапах могут

применяться и «низкоуровневые» модели. Однако применение не вполне адекватных «низкоуровневых» моделей, дающих существенно неверные результаты (при невозможности их «идентификации»), недопустимо при решении ответственных задач.

В [30, 31] с единых позиций излагаются теоретические основы термодинамики, механики жидкости и теории упругости.

**1.2.4. Классы уравнений математических моделей.** Классы математических соотношений (уравнений), лежащих в основе математических моделей (ММ), часто служат основанием для классификации ММ. Строго классифицировать уравнения ММ возможно по их *групповым свойствам* [27]. Мы примем более неформальный и описательный подход.

Как общее правило, уравнения моделей физических процессов *невысокого уровня* в иерархии, т. е. построенных с привлечением существенных физических допущений, относятся к простым классам, так как приводят к математическим задачам сравнительно несложного вида.

Так, введение гипотез-абстракций типа *материальной точки, однородного распределения* параметров газа в объеме означает «огрубление» пространственных распределений, сводящее задачу к *локальной*. Основные уравнения полученных таким путем ММ процессов — *обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ)* или же *связанные системы ОДУ*. Для решения задачи об эволюции такого объекта или системы объектов в крайнем случае потребуются численное решение задачи с начальными данными (задачи Коши, см. разд. 5.1) для системы ОДУ первого порядка<sup>6</sup>.

В ряде же частных случаев (в подклассах задач) решения ОДУ или их систем могут быть получены аналитически. Для таких подклассов задач в роли уравнений ММ могут восприниматься *интегралы* ОДУ, например, *явные* зависимости общего вида  $u = f(\mathbf{a})$  или в *неявном* виде —  $f(u, \mathbf{a}) = 0$  (или  $\mathbf{F}(\mathbf{U}, \mathbf{a}) = 0$  — для решений систем ОДУ). Здесь символом  $u$  обозначена *искомая величина*,  $\mathbf{U}$  — набор («вектор») искомого величин,  $f(\dots)$  — функция,  $\mathbf{F}$  — набор функций,  $\mathbf{a}$  — набор параметров задачи или функции.

К таким случаям относятся «законы» свободного движения тел в однородном силовом поле, при совершении гармонических колебаний и т. п. соотношения, изучаемые в школьных курсах естественно-на-

---

<sup>6</sup>Например, с применением явных методов Эйлера или *Рунге – Кутты* (разд. 5.2).

учных дисциплин. Подобные решения известны не только в динамике точки, но также в электродинамике, теории упругости, термодинамике, химической кинетике. Но уже при задании в «правых частях» таких систем ОДУ произвольных зависимостей (например, сложных законов сопротивления движению материальной точки или выражений для скоростей химических превращений) решения задач могут быть получены лишь численными методами.

Далее, при учете пространственно-временных распределений искомым параметров в физической системе основным типом уравнения ММ становится по меньшей мере *уравнение в частных производных* (УЧП). Решения представляющих интерес задач по УЧП (и системам УЧП) практически всегда получают численным интегрированием на *сетке*, введенной в *расчетной области* для ее *дискретизации* по пространству и по времени.

Модели, содержащие в качестве основных УЧП и описывающие эволюцию полей во времени для решения задач по ним, требуют<sup>7</sup> постановки *краевых условий*, которые распадаются на *начальные условия* (НУ) и *граничные условия* (ГУ). НУ — распределения параметров в начальный момент времени, ГУ — условия, задаваемые (возможно, в зависимости от времени) на границе системы.

Действительно, реальные процессы в физических системах происходят во времени и в пространстве. Распространение электромагнитных колебаний, течение жидкости, эволюция напряженно-деформированного состояния, акустических возмущений и т. п. — примеры процессов такого рода. Причиной того, что класс уравнения ММ, учитывающей изменение искомым полей в  $(\mathbf{r}, t)$ , не «выше» УЧП в том, что общие ЗС «замыкаются» весьма правдоподобными, но все же *феноменологическими* моделями.

Так, уравнения Навье — Стокса имеют второй порядок по пространственным производным. Первый порядок производных в них есть следствие оператора *div* в теореме Остроградского — Гаусса, второй — следствие того, что в «градиентные законы»-гипотезы Фурье, Ньютона и Фика входят лишь первые производные по пространственным координатам от характеристик потока. Но уже строгий учет *излучения* в модели течения приведет к необходимости расчета энергии, излучаемой и поглощаемой каждой частицей среды по всем направлениям, во всех диапазонах частот, а также поглощения и рассеяния энер-

---

<sup>7</sup>В числе прочих *условий однозначности*.

гии на пути от частицы к частице, что превратит уравнение энергии МЖГ в интегро-дифференциальное. Поэтому, стремясь остаться «в классе» систем УЧП, при расчетах течений с излучением вводят допущения об относительно малой или, наоборот, большой оптической плотности среды в качестве (не всегда оправданной) гипотезы замыкания.

Намечается классификация, основанная на сложности («классе») основного уравнения ММ. *Явная формула* (начиная с  $u = C$ , далее —  $u = f(\mathbf{a})$ ) проще *алгебраического уравнения*  $f(u, \mathbf{a}) = 0$ , которое еще надо разрешить, алгебраическое уравнение проще *обыкновенного дифференциального уравнения* (ОДУ)  $f(u^{(n)}, \dots, u', u, \mathbf{a}) = 0$ , ОДУ первого порядка  $f(u', u, \mathbf{a}) = 0$  проще ОДУ высоких порядков, *линейные* ОДУ проще *нелинейных*, ОДУ проще *уравнения в частных производных* (УЧП), дифференциальное УЧП проще интегро-дифференциального. Наконец, одиночное уравнение любого «класса» проще *системы* таких уравнений... Существенно, что при значительном огрублении физической картины явления, закладываемой в ММ, резко снижаются как сложность математического аппарата и численного метода, так и затраты на программирование и ресурсы ЭВМ, потребные для решения задач по уравнениям ММ определенного «класса».

Сложность ММ представляющих интерес явлений возрастает по мере расширения набора учитываемых эффектов и снятия ограничений на детализацию в  $(\mathbf{r}, t)$ . Так, *механика абсолютно твердого тела* сложнее механики материальной точки, еще более сложны *теория упругости* и *механика жидкости и газа*. Усложнение состоит, по существу, в увеличении числа «степеней свободы» во всех перечисленных предметных областях — при механической, по сути, форме движения материи.

Отметим, что упоминаемые на страницах данного пособия модели РП ТД по «классу» основных уравнений соответствуют, как максимум, системам УЧП, и содержат дополнительные соотношения «алгебраического» класса. Все это модели различного иерархического уровня из предметной области, составляющей описание РП ТД.

**1.2.5. Модели процессов и состояний.** Мир по природе своей нестационарен — характеристики объектов в общем случае изменяются во времени, что воспринимается как протекание *процессов* — прохождение объектами бесконечной последовательности *состояний*. Основное свойство физических процессов — их *динамический* характер,

т. е. изменение состояния вызывается (обобщенными) *движущими силами*, эффект действия которых ограничен в силу некоторой (обобщенной) *инертности* объекта.

Пример из *классической механики*: в динамической системе наблюдается *процесс* эволюционного изменения ее *состояния*, когда имеется (обобщенная) *вынуждающая сила*, которой сопротивляется (обобщенная) *инертная масса*, в результате изменяются обобщенные скорость и координата. Так, ускорение в направлении прямолинейного поступательного движения определяется проекцией суммы приложенных сил на направление движения, деленной на массу, при вращательном же движении в роли обобщенной силы выступает сумма приложенных моментов сил, в роли обобщенной массы — момент инерции тела вокруг оси вращения, обобщенной координаты — угол поворота. Вид дифференциальных уравнений движения оказывается аналогичным:

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\sum (F_x)_i}{m} \quad \text{или} \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{\sum (M)_i}{J}.$$

В основе модели лежит представление о сохранении количества движения и энергии при совершении вынуждающей силой действия (работы), приводящего к изменению значения сохраняющейся величины<sup>8</sup> для выделенного объекта.

Пример из *химической кинетики* — текущая интенсивность химических реакций приводит к накоплению или расходованию наличной массы  $m_k$  компонента (при сохранении массы и числа атомов химических элементов). Интенсивность химического превращения можно также выразить символически как

$$\text{эффект} = \frac{\text{движущая сила}}{\text{инертность системы}},$$

или, для частного случая модели кинетического процесса в однородной смеси при  $V = \text{const}$ :

$$\frac{dm_k}{dt} = V \left[ \frac{d}{dt} (\rho Y_k) = W_k \omega_k \Sigma \right].$$

---

<sup>8</sup>Количества движения и/или механической энергии: в общем случае, для механической недиссипативной системы, определяемой суммой кинетической и потенциальной энергии.

Заметим, что стационарное (равновесное) состояние часто в действительности может являться лишь состоянием равновесия *динамического* (при уравниваемости действующих на систему «движущих сил») и является частным случаем протекающего *динамического процесса*. Динамические процессы и *стационарные состояния*, как их предельные случаи, составляют основу того, что происходит в РП ТД и других технических и природных системах.

Стационарный характер протекания изучаемого процесса (определяемый как независимость от времени  $t$  значений представляющих интерес искомым переменных задачи, подобных  $v_x$ ,  $\omega$  и  $m_k$  — *зависимых переменных* ОДУ или УЧП) может стать поводом для замены модели процесса на модель стационарного (равновесного) состояния системы. Применительно к частным задачам использование (также более частной) модели стационарного состояния может оправдываться соображениями простоты и экономии. Так, допущение о полном или частичном химическом равновесии позволяет часто до действительно необходимого упростить расчет процесса, связанного с кинетикой горения в ТД и «удешевить» численный расчет при применении в нем надежных стандартных методов. Точно так же расчеты пространственных полей посредством численного решения ОДУ или УЧП *эллиптического* типа не вызывают затруднений и выполняются рутинными процедурами, входящими в стандартные пакеты прикладного математического ПО.

Все же в общем случае *стационарное состояние* системы следует рассматривать как результат установления равновесия в *переходном* (нестационарном) процессе, чем по возможности и следует пользоваться, моделируя *процесс* в общем случае как нестационарный и применяя соответствующие методы, даже при том, что последние требуют больших вычислительных затрат. Компенсацией за эти затраты можно считать возможность «сквозного» численного моделирования сложных процессов «на уровне» *вычислительного эксперимента* (подразд. 1.2.7).

Итак, в основу общей методологии моделирования эволюционных (т. е. происходящих во времени) процессов должны быть положены модели *динамических процессов*, получаемые из ЗС для соответствующих предметных областей, записанных в нестационарной форме. В результате процессы моделируются численными расчетами по ММ, содержащим дифференциальные уравнения, описывающие эволюцию элементов *декомпозированной* системы. Это могут быть реальные эле-

менты системы или элементы, полученные *дискретизацией* непрерывных распределений параметров (конечные объемы, ячейки пространственной сетки).

**1.2.6. Аналитическое и численное решение.** *Аналитическое решение* — решение в замкнутом виде, полученное с применением аналитических преобразований, более узко — решение задачи в виде *явных* формул (с. 29). Примечательно, что такое решение может описывать классы явлений (грубо говоря, через параметры в этих формулах). Однако (особенно с повышением степени «детализации» модели):

- 1) часто аналитического решения не существует (или его нельзя получить никакими известными аналитическими преобразованиями;
- 2) даже если аналитическое решение существует, для получения бывают нужны неоправданно большие усилия и квалификация.

Стремление получить аналитическое решение задачи «любой ценой» часто ведет к тому, что на этом этапе в ММ неявно могут внесены *дополнительные* упрощения, нарушающие логичную последовательность действий, описанную в начале разд. 1.2 (рис. 1.2).

Единственная альтернатива аналитическому — *численное решение* задачи, т. е. решение, получаемое с применением численных методов (ЧМ) для решения алгебраических и дифференциальных уравнений и систем таких уравнений, входящих в ММ и, как правило, на цифровой ЭВМ с помощью специальной программы. Здесь и далее под ЧМ будут пониматься именно *методы численного решения* ОДУ или УЧП.

Устоявшийся термин, обозначающий процесс численного решения таких уравнений — *численное интегрирование*. При численном интегрировании решения задач по ММ с ОДУ или УЧП получаются не на основе аналитических функций и их допустимых преобразований, а при посредстве *дискретизации*, т. е. приближенного представления непрерывных пространственно-временных распределений на конечном множестве (узловых) значений в точках (узлах) или элементах (конечных объемах) *вычислительной сетки*.

Заметим, что применение ЧМ порождает промежуточную сущность — *численную реализацию* ММ, как правило, в виде программы для ЭВМ, реализующей конкретный ЧМ и способ дискретизации. Получаемое в результате *численное решение* отличается от *точного решения* задачи. Определенный качественный характер численного решения



и его *погрешность* как количественная мера его отклонения от точного решения зависят от примененного ЧМ и способа дискретизации — вида сетки и параметров, задающих мелкость ее разбиения.

Важное свойство ЧМ — *аппроксимация* в нем производных, входящих в дифференциальные уравнения ММ. Выполнение данного условия (наряду с некоторыми другими требованиями к численной реализации ММ), вообще говоря, гарантирует, что при неограниченном измельчении расчетной сетки получаемое численное решение неограниченно приближается — *сходится* — к *единственному* точному решению *корректно поставленной* задачи. Отметим, что если численная реализация на практике обеспечивает *сходимость*, то роль ее самой в «технологической цепочке» математического моделирования отходит на второй план, и все процессы при ММ соответствуют рис. 1.2.

В настоящее время множество ЧМ запрограммированы и готовы к применению, представляя собой рутинные процедуры математических библиотек и программных пакетов общего и специального назначения, как коммерческих, так и свободно распространяемых. Номенклатура реализованных ЧМ постепенно расширяется, а качество и доступность прикладного ПО в целом улучшается.

**1.2.7. Вычислительный эксперимент.** Когда ММ, описывающая процесс в сложной системе:

- основана на *нестационарной* форме ЗС для предметной области,
- свободна от жестких ограничений на пространственно-временные распределения,
- содержит достаточно адекватное и полное представление взаимосвязанных эффектов,

а дискретизация (и/или декомпозиция сложной системы) проведена с сохранением физического смысла динамики элементов системы и связей между ними, то нет причин сомневаться, что численное моделирование даст решение, близкое к наблюдаемому в действительности.

Такое детальное численное моделирование заслуживает наименования «вычислительный эксперимент» [4].

В таком *вычислительном эксперименте* делается попытка *имитировать* динамическое поведение системы и предсказывать последующие события, основываясь на численном интегрировании ЗС до-

статочной детальной модели или модели сложной многоэлементной системы, где сам вопрос о возможности получения аналитического решения не возникает.

По мере отработки моделей и численных методов возможности вычислительного эксперимента в разных областях значительно расширяются. Объем памяти и производительность компьютеров продолжают увеличиваться и, соответственно, расширяется круг постановок задач, доступных для практических расчетов. В частности, в исследовательских и проектных организациях, проводящих НИР и ОКР, связанные с РП ТД, отношение к численному моделированию как надежному и оправданному средству предсказания их характеристик становится постепенно более благоприятным.

**1.2.8. Имитационное моделирование.** Термин «имитационное моделирование» (ИМ), применяемый к обсуждаемой проблематике численного моделирования процессов по ММ на основе ЗС, является, скорее, примером не совсем удачного перевода с английского (*simulation modeling*); само понятие ИМ оправдано лишь в широком смысле, так как «любая модель, в принципе, имитационная, ибо она имитирует реальность» [17].

В свете этого подчеркнем, что ИМ «в узком смысле» обозначают специфическую *методологию* моделирования поведения *сложных систем* в самых разных прикладных областях — т. е. по моделям не только (и даже не столько) физических, но также экономических, биологических, информационных и др. процессов. Специфика ИМ как методологии характеризуется применимостью ее к исследованию поведения систем, управляемых не динамическими законами, а, например, *дискретными событиями*. В этой методологии под *имитационной моделью* понимается не модель объекта как замкнутая система математических соотношений, а скорее *численная реализация* на ЭВМ из-за того, что *имитация* на ЭВМ — единственная технология теоретического исследования в условиях, когда замкнутая модель (если она и формулируется!) не поддается аналитическому исследованию.

Обычно подчеркивается, что ИМ как методологию отличает выделение в структуре моделируемого объекта *компонентов, связей* между ними, гибкость правил и способов передачи информации, задание свойств (характеристик) объектов (часто — эмпирическими и статистическими) моделями, различными по степени достоверности и детализации. Именно указанное структурирование исследуемого объекта,

а не вид учитываемых соотношений определяют сложность поведения его имитационной модели.

С ИМ также обычно связывают возможность визуализации «поведения» модели принятыми в данной прикладной области способами графического представления, допустимость для исследователя активно вмешиваться в ход вычислительного эксперимента.

Целям автоматизации процесса создания и применения ИМ служат *системы имитационного моделирования (СИМ) — пакеты прикладных программ (ППП) или программные комплексы (ПК)*, в которых реализуются указанные выше (и другие) требования к программным системам такого рода. СИМ позволяют пользователю описывать моделируемую систему в естественной для прикладной области (и преимущественно графической) форме. Реализуется возможность визуального построения функциональных схем (путем размещения компонентов и проведения связей), представления результатов моделирования в наглядной форме (в виде диаграмм, анимированных изображений и т. п.).

Отметим, что программная система моделирования газообмена и термодинамического процесса ДВС «Альбея» [32], созданная на кафедре ДВС УГАТУ в начале 1990-х годов, проектировалась именно как ПК обсуждавшегося вида.

Достоинство подобных ПК в том, что они избавляют пользователя от рутинных действий по программной реализации модели, предоставляя удобную среду для создания «виртуальных» систем и проведения с ними вычислительных экспериментов. Однако графическая среда скрывает от неискушенного пользователя сложности получения численного решения, при этом никак не гарантируя его от разнообразных ошибок, из-за которых в итоге могут получаться красиво представленные, но ошибочные результаты.

Численные расчеты полей физических величин по детальным моделям, как правило, не принято относить к области ИМ «в узком смысле». В ходу выражение *Computer-Aided Engineering (CAE)*, что можно перевести как «системы автоматизированного моделирования» (применительно к расчетному анализу инженерных конструкций). При этом современные задачи автоматизации вычислительного эксперимента в области *CAE* приводят к созданию пакетов, обладающих графическими средами с возможностями интерактивности и представления результатов, сходных с теми, что реализуются в СИМ.

С другой стороны, развивая некоторую «легковесную» СИМ, при сохранении ее «сервисных» возможностей, естественно добавлять в набор расчетных моделей «тяжеловесные» детальные модели, характерные ранее для сферы САЕ, чему способствует развитие суперкомпьютерных технологий (с. 186).

**1.2.9. Параметрическая оптимизация** Если известно, что некоторая ММ технической системы (объекта) в широком диапазоне изменения исходных данных (*входных параметров*) дает достоверные результаты, можно использовать такую модель для *оптимизации* объекта. Сделав набор входных (конструктивных и «режимных») параметров системы варьируемыми, можно попытаться синтезировать оптимальную конструкцию системы, т.е. поставить и решить *задачу оптимизации* объекта (системы) по некоторому *критерию оптимальности*.

Такой критерий, как правило, стремятся выразить вещественным (действительным) числом, получаемым на основании рассчитанных моделью характеристик объекта для заданного набора значений входных параметров. Решение задачи оптимизации сводится к отысканию *экстремума* — максимума или (чаще) минимума *целевой функции* (ЦФ, англ. *objective function*) как точки в *пространстве варьируемых параметров* по данным многочисленных вычислительных экспериментов, проводимых для оценки значений ЦФ.

Например, отыскивая условия достижения максимальной мощности  $N_e$  безнаддувного ДВС заданного литража  $iV_h$  и тактности  $\tau$ , следует *максимизировать* произведение числа оборотов в минуту  $n$ , коэффициента наполнения  $\eta_V$  (достигаемого за счет волновой настройки), индикаторного КПД  $\eta_i$  («отвечающего» за эффективность внутрицилиндрового процесса) и механического КПД  $\eta_M$ ; могут быть подобраны топливо, окислитель и состав смеси наивысшей теплотворности — если предоставлена такая свобода выбора. Тогда можно, используя эффективную мощность

$$N_e = \frac{n}{30\tau} \frac{H_u}{\alpha l_0} \rho_0 i V_h \eta_V \eta_i \eta_M$$

в качестве критерия оптимальности, *минимизировать* значение  $(-N_e)$ .

Выразить критерий оптимальности в виде однозначной ЦФ для реальных технических систем обычно затруднительно из-за противоречивых требований к объекту. Например, обычные для ДВС требования вы-

сокого форсирования, ресурса, экономичности и др. противоречат друг другу — «оптимальные» (экстремальные) по удельной мощности, ресурсу и удельному расходу топлива двигателя «лежат» в разных точках пространства параметров. На практике каждый успешный двигатель представляет собой пример компромиссных решений, удаляющих его от «оптимальности» по каждому из частных критериев. Можно ли надеяться объективно учесть «фактор компромисса» при формировании ЦФ? За ответом на этот вопрос можно обратиться к специальной литературе.

Речь до сих пор шла о *безусловной* оптимизации. Но, как правило, для технических систем актуальны ограничительные условия на значения варьируемых параметров объекта. При некоторых сочетаниях параметров конструкция может быть заведомо неработоспособна при том, что вычисленная ЦФ может достигать превосходных значений; так, высокий  $\eta_i$  ДВС может выдаваться моделью РП при недопустимых на практике значениях  $\varepsilon$ .

Такая ситуация приводит к задачам *условной* оптимизации. В принципе можно свести такую задачу к безусловной оптимизации, если ограничения на форму области входных параметров наложить по методу *штрафных функций* и варьировать выбранные входные параметры как независимые друг от друга.

Итак, пусть все проблемы, связанные с формулированием ЦФ и ее вычислением по входным параметрам, преодолены, т. е. получен метод «объективной» суммарной оценки *качества* того или иного варианта исполнения объекта (изделия). Тогда при наличии хорошей модели *минимизация* ЦФ должна давать плодотворный результат. В таких условиях стремятся предельно расширить список варьируемых параметров, т. е. увеличить размерность пространства параметров; получается *многопараметрическая* оптимизация.

Число параметров — конструктивных размеров только ГВТ, для максимизации, например, величины  $\eta_V$  в ДВС может насчитывать десятки. Примеры такой параметризации конструкции ГВТ — на с. 56, а также на с. 232. Пример кода программного модуля для вычисления ЦФ с вызовом внешней программы моделирования процессов в ГВТ дан на с. 261.

В этих условиях следует применять *метод минимизации* ЦФ, который обеспечит (или, как минимум, сделает вероятным) отыскание именно глобального, а не одного из многих возможных минимумов ЦФ в указанном пространстве, т. е. *глобальную* оптимизацию.

Выбирая метод минимизации ЦФ, нужно учитывать следующее. Варьируемые параметры могут принимать как непрерывные, так и *дискретные* значения. Могут применяться те или иные ограничения. ЦФ может быть негладкой или даже подверженной «шуму» — когда при вычислении ЦФ «замешаны» случайные факторы. Так, если моделирование РП совместно с процессами газообмена в ГВТ ДВС проводится по квазиодномерным моделям, в каждом расчете должно быть обеспечено установление расчетных показателей двигателя с высокой точностью<sup>9</sup>.

Многopараметрическая *глобальная оптимизация* часто естественно ведет к *многодисциплинарной оптимизации*. Это относится к моделям, в которых для более адекватного отражения связей между многими входными параметрами учитывается *сопряженность* (взаимосвязанность) процессов различной природы в моделируемом объекте.

Так, для более точного расчета условий теплообмена по поверхности всего ГВТ разумнее решить задачу о течении в нем «сопряженно» с задачей нестационарной теплопроводности в деталях ДВС. При применении трибологических моделей (расчет на трение и износ), например, температуру масла в зазорах деталей цилиндра-поршневой группы лучше не задавать априорно постоянной величиной, а также определять из сопряженного расчета поля  $T(\mathbf{r}, t)$  и т. д.

К решению подобного рода сопряженных задач прямо-таки «подталкивают» *детальные* модели — им требуются реалистичные *краевые условия* (и шире — *условия однозначности*). Но сопряжение моделей из нескольких предметных областей означает большее, чем просто суммирование их сложности. Требование решения задач именно как сопряженных часто приводит к *на порядки большему объему вычислений* или/и числу итераций в вычислительном эксперименте. Характерно, что различия *масштабов явлений* в разных подобластях объекта могут приводить лишь к росту (часто также *на порядки*) потребления вычислительных ресурсов (памяти и времени ЦПУ), особенно когда модели реализуются численными методами общего назначения, т. е. без тех или иных «ухищрений». Достижимое при этом повышение точности ре-

---

<sup>9</sup>Невыполнимость этого требования путем разумного увеличения числа моделируемых циклов ДВС — дефект расчетной программы, реализующей модели указанного класса. Причина может заключаться в применении моделей или реализации их методами, которые исключают получение «регулярного» решения.

зультатов часто бывает не столь существенным, а требования к ресурсам ЭВМ на вычисление ЦФ становятся невыполнимыми.

Многодисциплинарность может «появиться» при решении проблемы однозначного критерия оптимальности для изделия при его расчетной глобальной оптимизации. Изделие в конечном счете выпускается фирмой-производителем для потребителя в конкретных социально-экономических условиях. Поэтому, *моделируя* поведение рынка и потребителей, их объективные потребности и субъективную мотивацию и удовлетворенность (с привлечением *экономико-математических моделей* (ЭММ)), компания-производитель *в принципе* могла бы увязать технические характеристики изделия со своими долго- и краткосрочными целями, возможностями, издержками и рыночными факторами.

Решение задачи в настолько *многодисциплинарной* постановке (конечно, при наличии «хороших» ЭММ) помогло бы компании оптимизировать весь жизненный цикл изделия для лучшего соответствия *ее* целям в условиях конкурентного рынка<sup>10</sup>.

Предельно простой (и неэффективный) метод минимизации ЦФ — **метод простого перебора**. Уже простейшая оценка количества вычислений целевой функции — порядка  $N^p$  (где  $N$  — число ее параметров,  $p$  — число *уровней варьирования* параметров) показывает, что для поиска глобального минимума при многопараметрической оптимизации по сколько-нибудь серьезной модели такой «поиск вслепую» не пригоден. Сам подход — простой перебор подставляемых значений для поиска наилучшего сочетания, применяемый в разных задачах, за неэффективность («комбинаторно» нарастающий с  $N$  и  $p$  объем вычислений) образно именуют *методом грубой силы* (англ. *brute force*).

Группу **градиентных методов** минимизации отличает уже некоторая «навигация» по *гиперповерхности* ЦФ в пространстве параметров. Упомянем такие методы данной группы, как *метод градиентного спуска*, *метод наискорейшего спуска*, *метод Ньютона*. Отметим, что эти методы работают хорошо и обеспечивают нахождение *локального* минимума, к которому из исходной точки ведет линия, ортогональная к линиям (поверхностям) уровня достаточно гладкой ЦФ (отсутствуют разрывы, а также «шум», делающий ЦФ не вполне детер-

---

<sup>10</sup>Еще более *глобальная* «оптимизация» — с учетом целей и издержек для *общества в целом* на основе ЭММ — могла бы служить выработке рекомендаций для управления развитием целых отраслей.

минированной). Вероятность отыскания *глобального* минимума повышают, многократно проводя поиск со случайным выбором исходных точек в пространстве параметров.

Подробнее охарактеризуем *симплекс-метод* Нельдера — Мида [35, 44] (он же — *метод деформируемого многогранника*), условно относя его к данной группе методов. В нем «навигация» по гиперповерхности достигается оценкой градиента по значениям ЦФ в  $N + 1$  точка *симплекса* — многогранника с минимальным числом вершин в  $N$ -мерном пространстве параметров (так, при  $N = 2$  симплекс — треугольник). Перемещение в пространстве, наглядное при  $N = 2$ , производится поворотом симплекса вокруг самой «нижней» грани, а для уточнения минимума до заданной погрешности проводится *редукция* симплекса. Вероятность достижения глобального минимума повышается путем многократных случайных «вбрасываний» начальной точки в пространство параметров. Применение метода совместно с *штрафными функциями* мало сказывается на скорости его работы, от базовой гиперповерхности требуется лишь отсутствие значительного «шума». Метод может применяться для поиска оптимального сочетания параметров ГВТ ДВС.

Особую группу образуют **эволюционные методы**, которые называют еще *генетическими алгоритмами* (ГА). В отличие от градиентных методов, ГА не полагаются на наклон гиперповерхности, напротив, представляют собой средство ускоренного перебора при тяготении к подобластям ее наибольшего «понижения» в пространстве параметров.

Поиск оптимального сочетания параметров при помощи ГА идет, по существу, при дискретном представлении уровней варьирования. Он основан на *эволюционном* улучшении *популяции* — имеющегося набора вариантов реализации оптимизируемого объекта («экземпляров»). Свойства каждого экземпляра — представителя популяции — задаются простой линейной структурой данных (в пределе — из нулей и единиц), образующей как бы его «геном» или «хромосому». Оценка экземпляра проводится как обычно — величиной ЦФ по данным, закодированным в этой структуре. Над структурой «генома» выполняются операции, имитирующие реальную эволюцию (точнее, искусственно ускоряемую селекцию) — отбор/выбраковка, скрещивание (простое или близкородственное), мутации, сохранение элитных «производителей» и др., что приводит к улучшению «генофонда» популяции в поколениях.

ГА практически гарантируют глобальную минимизацию сколь угодно сложных и многопараметрических функций, они удобны, например,



для поиска оптимального сочетания параметров ГВТ ДВС. В программу, реализующую ГА (или другой метод минимизации), встраивается вызов расчета целевой функции. Конкретный расчет может выполняться путем запуска внешней расчетной программы СИМ (см. разд. 6.1) для расчета по переданным данным (исходный код — на с. 261). На современных ПЭВМ расчет одного варианта настроенного ГВТ 2-тактного ДВС с шагом  $0,5^\circ$  на установление (20 циклов) занимает порядка 10 секунд при приемлемой погрешности сходимости к точному решению от дискретизации по  $(x, t)$ . В практических расчетах автора по ГА варьировались одновременно до 23 конструктивных размеров ГВТ (см. разд. 7.5).

Имеется множество программ и пакетов, реализующих ГА. Один из первых — пакет **genesis**, написанный на C, его исходный текст находился в свободном доступе при условии некоммерческого применения, см. [43]. Адаптация таких программ к пользовательской задаче, как правило, сводится к написанию собственной процедуры вычисления значения ЦФ, программируемой непосредственно или посредством вызова внешней вычислительной программы.

Очень желательно и не вызывает принципиальных трудностей применение ГА при многопараметрической оптимизации на многопроцессорных ЭВМ, где вычисление значений ЦФ может выполняться независимо на нескольких процессорах и/или процессорных ядрах вычислительной системы.

### 1.3. Физическое моделирование

По Л. И. Седову [29], *моделирование* — «замена интересующего нас явления в натуре изучением аналогичного явления на модели увеличенного или уменьшенного масштаба, обычно в специальных лабораторных условиях» (см. с. 60). Как мы помним, это — *физическое моделирование*, т. е. согласно БСЭ [6], такой вид моделирования, который «состоит в замене изучения некоторого объекта или явления экспериментальным исследованием его модели, имеющей *ту же физическую природу*». Таким образом, изучение объекта при физическом моделировании сводится к проведению экспериментов на его *физической модели*.

В науке *эксперимент* служит для:

- выявления тех или иных закономерностей;

- проверки правомерности и границ применимости найденных теоретическим путем результатов.

К физическому моделированию (в узком смысле — как моделированию «в уменьшенном масштабе») прибегают по экономическим соображениям, а также потому, что натурные исследования и испытания (прямой эксперимент) объекта вообще невозможны ввиду недоступности самого объекта, недопустимых его размеров и/или из-за неприемлемых значений его физических характеристик (температур, давлений, скоростей).

В обосновании такой разновидности моделирования лежат соображения *теории подобия* и *анализа размерностей* (см. гл. 2). Факт *подобия* модели и оригинала необходим для возможности простого количественного пересчета значений величин, получаемых на модели, в значения величин для оригинала исходя из постоянства *чисел подобия*.

Необходимые *условия подобия* — подобие формы (геометрическое) и физическое (динамическое) подобие *модели* и *оригинала* («натуры»). Именно при выполнении *условий подобия* в сходственных точках в сходственные моменты времени значения чисел подобия будут идентичными у модели и оригинала. Для выполнения условий физического подобия требуется равенство величин *критериев подобия* (т. е. величин чисел подобия, входящих в *условия однозначности*). Существуют общепринятые обозначения и выражения для чисел подобия, специфичных для данной предметной области и набора учитываемых явлений в процессе (для гидрогазодинамики и теории тепломассообмена — на с. 65).

Создаваемые установки и сами модели должны бы обеспечивать равенство одновременно всех критериев подобия. При этом часто возникают принципиальные затруднения, что приводит либо к *натурным испытаниям*, либо к моделированию в условиях *приближенного подобия*. Пример: для подобия стационарных течений сжимаемого газа, помимо подобной геометрии и условия  $\gamma = c_p/c_v = idem$  нужно обеспечить условия  $M = idem$ ,  $Re = idem$ , что затруднительно; тогда исследуют влияние только  $M$ , а влияние  $Re$  оценивают отдельно, косвенно.

Важная область применения физического моделирования — экспериментальная калибровка феноменологических моделей или получение эмпирических или полуэмпирических зависимостей (моделей). В этой области эксперимент на физической модели относится к первому виду научного эксперимента — он проводится для *выявления закономерностей*. Примеры: продувки местных сопротивлений, определение ко-

эффицентов сопротивления, трения, тепло- и массоотдачи и др. Теория размерностей здесь служит базой, опираясь на которую, планируют условия и количество экспериментов, рационально обрабатывают их результаты (т. е. представляют их *в обобщенных переменных*).

Физическое моделирование с целью проверки полученных математическим моделированием результатов (по существу, полученных *теоретическим путем*) относится ко второму виду научного эксперимента — *проверке правомерности следствий теоретических построений*. Подчеркнем, как раз в этом случае *физический эксперимент* используется как «последняя инстанция» при сравнении математических моделей (теорий) с практикой.

**1.3.1. Натурный и вычислительный эксперимент: сравнение.** Натурный эксперимент имеет одно принципиальное преимущество перед вычислительным: он все же представляет собой «истину в последней инстанции», чем и определяется его роль в исследованиях. Эксперимент может (и часто должен) ставиться, в принципе, с исчерпывающей полнотой и достоверностью.

В остальном же именно вычислительный эксперимент (ВЭ) обладает — принципиально — следующими преимуществами.

- 1) Проведение крупного натурального эксперимента сложно поддается автоматизации. Эффективность вычислительных систем (и всей «технологической цепочки» ВЭ) непрерывно растет. Действительно, эксперимент требует изготовления, доводки, наладки, «работы руками». ВЭ проводится на «виртуальном» объекте и почти все, что с ним связано, может быть автоматизировано. Производительность вычислительной техники будет и далее повышаться, а сервисные средства проведения вычислений — совершенствоваться.
- 2) Измерения в эксперименте могут влиять на процесс, причем они дают часто «отрывочные» данные, осложненные специфическими погрешностями. Электронные *системы экспериментального анализа* могут, конечно, повысить качество и информативность измерений и значительно автоматизировать их, но, будучи физическими устройствами, они требуют аккуратного подхода. Результаты же ВЭ могут быть представлены с исчерпывающей полнотой, весьма наглядно и информативно, «измерения» в нем никак не влияют на результаты, сам ВЭ может быть проведен, в принципе, с предельной «точностью».

Вычислительный эксперимент может иногда заменять эксперимент натурный, но все же обычно численное моделирование и эксперимент дополняют друг друга. Эксперименты зачастую нужно интерпретировать путем численного моделирования, а моделирование следует проверять экспериментом. В этом смысле справедливо утверждение, что *численное моделирование сближает теорию и эксперимент*.

**1.3.2. Физическое моделирование применительно к РП ТД.** В каких случаях при исследованиях РП и испытаниях ТД целесообразно заменять реальный объект его физической моделью, какие ограничения следует учитывать? Проблематика собственно *испытаний ТД* (экспериментальных исследований их РП) выходит за рамки данного пособия, посвященного *математическому моделированию* РП ТД, подкрепленному сравнением с результатами подобных испытаний (когда речь идет о процессах в полноразмерном двигателе); некоторые принципиальные моменты все же отметим.

Во-первых, именно в эксперименте, при испытании самого объекта измерениями получают наиболее достоверные (в «последней инстанции»), количественные данные о нем. В принципе для этого и нет необходимости выполнять экспериментальный объект (двигатель) полностью идентичным по конструкции оригиналу (и в натуральную величину, в конечном счете), т. е. проводить *полноразмерные испытания*.

Во-вторых, следует помнить, что и сама физическая модель, и эксперимент на ней — лишь *модель* некой более общей реальности. Это касается и *испытаний ТД*, так как «двигатель на стенде» есть лишь *модель* «двигателя в эксплуатации», правда, весьма точная и «в натуральную величину».

Двигатель в целом — сложная система, ее целесообразно делить на составляющие подсистемы; в исследованиях ТД широко применяются *модельные установки*. Примером здесь являются исследования изолированных систем: топливной, охлаждения, наддува. Так, на практике используется возможность исследования и доводки РП крупного многоцилиндрового ДВС в виде одноцилиндровой секции. Такой подход позволяет «распараллелить» доводку систем двигателя, когда предполагается, что объем доводочных работ будет большим.

Физическое моделирование такого объекта, как ТД в целом или отдельной его системы — дорогостоящее мероприятие, и принципиально трудно удешевить, упростить и сократить по срокам этот процесс. Нужно сказать, что надлежащее применение методов *численного мо-*

*делирования* открывает резервы снижения затрат времени и средств в общем цикле разработки и модернизации изделий. В настоящее время достоверность ВЭ в области РП ТД многократно снижает неопределенности на этапе проектирования. А в области внешней аэродинамики автомобилей и летательных аппаратов уже сложилась ситуация, когда результаты расчетов обтекания удовлетворяют требованиям «технической» точности. Как следствие, значительно снизилось значение продувок моделей в аэродинамических трубах<sup>11</sup>. Другой пример — *виртуальные* «краш-тесты» в автомобилестроении, где численные расчеты по моделям нестационарной динамики твердых деформируемых тел позволяют с удовлетворительной точностью прогнозировать поведение конструкций во всевозможных условиях столкновения автомобиля с препятствием.

При физическом моделировании сложных («многодисциплинарных») процессов проблему представляет обеспечение подобия при «масштабировании». В более «бедных» физическими взаимодействиями областях эта проблема не так существенна — например, удастся изучать течения рабочих тел в каналах, на местных сопротивлениях и в лопаточных машинах на физических моделях, выполненных не в натуральную величину, при надлежащей постановке и обработке результатов эксперимента в обобщенных переменных, в соответствии с соображениями теории размерностей и подобия, см. с. 60.

Но уже для набора явлений, составляющих РП ТД, невозможно выполнить условия полного подобия при его моделировании «в уменьшенном масштабе»; немисливо удовлетворить противоречивым требованиям при разумных масштабах, имеющихся материалах и веществах одновременно для явлений нестационарной газовой динамики, многофазного течения, смесеобразования, горения, условий сопряженного теплообмена, условий смазывания и изнашивания, механической прочности и выносливости. На практике пришлось бы ограничиться *приближенным* подобием процессов (и то — для *подсистемы*) такой «модели» (прототипа) двигателя, что приведет к систематической погрешности. Экономия же, возможно, проявилась бы в части затрат на *материалы*, но не на организационные и другие мероприятия.

**1.3.3. Методы планирования эксперимента.** Ответственный натурный эксперимент — чаще всего дорогостоящее, трудо-

---

<sup>11</sup>Отметим, что *внешняя аэродинамика* во многом все же «беднее» явлениями, чем РП ТД.

и материалоемкое мероприятие, требующее, как правило, тщательной и продолжительной подготовки, планирования. Такой эксперимент, с целью получения надежного материала, подтверждающего достоверность применяемой теории (или модели), выполняется обычно в рамках «производственного» процесса создания и «калибровки» модели, и шире — отработки методологии моделирования процессов определенного класса в некоторой области.

Достоверная модель, положенная в основу отработанной методологии, дает возможность использовать ВЭ взамен физического, для оценки значений искомым характеристик объекта по набору значений параметров в исходных данных задачи. Тем самым подчеркнем, что задача поиска оптимального сочетания определяющих параметров объекта может быть проведена как средствами физического эксперимента на модели объекта, так и в ВЭ на ММ. Задача оптимизации (разд. 1.2.9) решается так или иначе постановкой *экстремального многофакторного эксперимента*, цель которого — отыскание оптимального сочетания управляемых (варьируемых) параметров.

Стратегия простого перебора обычно не подходит — число экспериментов комбинаторно нарастает от числа факторов. Если затраты времени и средств на получение значения ЦФ в эксперименте (вычислительном или натурном) велики, снижается ценность компьютеризированного (с. 36) перебора вариантов. *Методы планирования эксперимента*<sup>12</sup> (англ. *design of experiments, DOE*) позволяют проводить поиск на рациональной основе. Планированию эксперимента для поиска оптимального сочетания определяющих параметров посвящена книга [2].

Пример: на фирме *NSU* в середине XX века для поиска оптимального сочетания размеров ГВТ гоночного ДВС была выполнена серия из примерно 60000 физических экспериментов.

Опыт подсказывает, что крупный эксперимент (с целью регистрации явления или же для проверки его ММ) следует ставить как можно реже, в идеале — на завершающих стадиях работы над моделью. Точно так же не следует часто проводить ВЭ на пределе возможностей ЭВМ, так как многосуточные расчеты обычно — недопустимая роскошь, тем более, что часто анализ результатов расчета выявляет неточности или ошибки в исходных данных.

---

<sup>12</sup>Понимаемые здесь в узком смысле — как математические методы, позволяющие резко минимизировать количество (вычислительных, физических) экспериментов для достижения оптимума.

И нужно помнить, что для регистрации *качественной* стороны некоторого явления иногда вполне достаточно предельно простого оборудования. Э. Резерфорд — экспериментатор — заметил, что «наука делается на консервных банках»... Как не вспомнить в связи с этим, что многое о детонации в ДВС узнали в 1920-х годах из эксперимента в гараже, когда на вращающийся барабан с фотобумагой (изготовленный именно из консервной банки) падал световой луч индикатора давления.

Как общее правило: не следует увлекаться «моделированием ради моделирования» и «экспериментом ради эксперимента». Это, в сущности, *производственные* процессы, и необходимо их планирование при трезвом учете возможностей и ограничений.

#### 1.4. Аналоговое моделирование

**Аналоговое моделирование** — вид *предметного моделирования*, основанный на аналогии (изоморфизме) явлений, имеющих различную физическую природу, но описываемых *одинаковыми* (с точностью до обозначений величин) *уравнениями*. Использование изоморфизма в предметном моделировании состоит в изучении характеристик объекта на модели *иной физической природы*, более простой в построения и/или исследовании.

Если некоторый процесс (состояние) описывается той же по форме системой уравнений, что и моделируемый процесс, но второй нелегко воспроизвести физически, то воспроизводят первый — в *модельной установке*, обеспечивающей и структурное и функциональное сходство; подбором количественных параметров процесса в ней обеспечивают соблюдение условий «аналогового» подобия. Тогда математическими моделями процессов в физических системах будут соответствующие уравнения, а каждая из них — *аналоговой предметной моделью* другого. Это дает возможность, обрабатывая результаты *модельного эксперимента*, получать данные о характеристиках моделируемого процесса с применением теории подобия (разд. 2.2).

Так, плоские акустические волны и колебания струны описываются одним и тем же уравнением в частных производных. А *уравнение Лапласа*  $\nabla^2\varphi = 0$  применимо как к стационарному полю температуры ( $T \rightleftharpoons \varphi$ ), так и к распределению *потенциала скорости* в стационарном же безвихревом течении идеальной несжимаемой жидкости.

Известны аналогии для многих пар предметных областей — они так и называются: *электро-тепловая*, *гидро-тепловая*, *мембранная* аналогия (в теории упругости); последняя позволяет найти напряженно-деформированное состояние в задачах кручения бруса со сложной формой поперечного сечения.

Исследование температурных полей возможно с привлечением *электро-тепловой* или *гидро-тепловой* аналогий. В первом случае аналог  $T$  — потенциал электрического поля  $\varphi$ , теплоемкости  $c$  — емкость конденсаторов  $C$ , теплопроводности  $\kappa$  — сопротивление  $R$ ; при гидро-тепловой аналогии поле  $T$  задается уровнем жидкости в мерных трубках,  $c$  — сечением проводящих трубок модельной гидравлической сети. Эти аналогии использовались в двигателестроении для прогнозирования теплового состояния деталей цилиндрично-поршневой группы ДВС.

Аналоговое моделирование широко применялось до середины 60-х годов XX века. До появления быстродействующих цифровых ЭВМ это был единственный практичный способ решения задач, связанных с расчетом физических полей в технике. В настоящее время этот вид моделирования потерял свое значение.

### **Вопросы для самоконтроля**

- 1) Дайте определение понятий *моделирование*, *модель*, *математическая модель*.
- 2) К какому виду моделирования относится *математическое моделирование*?
- 3) Опишите общую последовательность действий при математическом моделировании.
- 4) Приведите пример *иерархии моделей* в какой-либо предметной области.
- 5) Для решения каких задач при моделировании применяются методы минимизации функций нескольких переменных?
- 6) Перечислите преимущества ВЭ по сравнению с физическим.
- 7) Чем отличается *физическое моделирование* от *аналогового*?



## Глава 2

# Методы анализа размерностей и теории подобия

### 2.1. Анализ размерностей при моделировании

При физическом и математическом моделировании процессов и равновесных состояний решаются задачи отыскания *функциональных связей*. При их решении полезно исходно знать необходимый и достаточный вид искомой связи (функциональной зависимости). Связи имеют вид функций нескольких переменных, которые связывают значение *определяемой* величины с набором значений *определяющих* величин. Обычно некоторые (если не все) величины, включаемые на раннем этапе рассмотрения в искомую функциональную связь как переменные, оказываются *размерными*.

Описание характеристик объектов исследования зависимостями с участием *размерных величин* страдает избыточностью, которая устраняется при переходе к описанию в «обобщенных» переменных. В теории размерностей [9, 29, 37] доказывается, что значения таких переменных должны быть инвариантными по отношению к выбранной конкретной системе *основных единиц измерения*, что возможно лишь для *безразмерных величин*. При переходе к описанию в безразмерных переменных получается если и не решение задачи, то хотя бы сокращается до действительно необходимого список величин, связанных искомой функциональной связью. Причем данный результат достигается только методами *анализа размерностей*, без непосредственного решения (теоретическим либо экспериментальным путем) конкретной задачи, относящейся к выбранному *классу явлений*.

Немаловажно, что понятие *класса явлений* естественно возникает в обобщенном описании — при переходе к безразмерным обобщенным переменным удастся одним и тем же выражением задать зависимость определяемой величины от определяющих для бесконечного множества конкретных физических систем, образующих данный класс.

*Подобие* явлений, происходящих в геометрически подобных системах при выполнении (обсуждаемых ниже) *динамических* условий подобия, вытекает из свойства «обобщенных» функциональных связей описывать классы явлений. Представив в обобщенных переменных данные, полученные расчетом или измерением, можно распространить их на весь *класс подобных* (удовлетворяющих условиям подобия) *систем*, т. е. получать характеристики одного объекта по известным характеристикам другого объекта, подобного данному.

Использование анализа размерностей и исследование физических явлений в обобщенных переменных — рациональный подход, применяемый как при физическом, так и при математическом моделировании в фундаментальных и прикладных исследованиях. Понимание основ методов анализа размерностей и теории подобия совершенно необходимо современному исследователю.

**2.1.1. Функциональные связи.** Входящие в модели уравнения и соотношения представляют собой выражения известных законов, а также соотношения, выражающие сделанные допущения. И те, и другие соотношения задают уровень «огрубления» при представлении явлений в описании (модели) при решении физической (технической) задачи. Решение задачи может быть получено, если известна модель, заданы все исходные данные — пространственно-временные очертания изучаемого объекта и т. д. Количественно решение будет определяться набором параметров задачи (*условий однозначности*, конкретизирующих задачу).

Нетрудно видеть, что решения задач (как теоретические — *аналитические* и *численные*, так и эмпирические) во всех случаях могут быть представлены *функциональными связями* (зависимостями) — выражениями некоторой искомой (определяемой) величины (их может быть и несколько на задачу) через другие (определяющие) величины *явными* или *неявными* функциями нескольких переменных.

Действительно, результат любого вычисления или измерения физической величины зависит, в конечном счете, от значений набора (варьируемых) *определяющих* величин, или *факторов*. Определяемая величина может быть как локальной — например, скорость выбранной частицы или скорость в данной точке среды или тела  $u(x, y, z, t, \dots)$ , или же иметь смысл среднеинтегральной (осредненной по пространству и или по времени) величины; примеры — средняя скорость, сила сопротивления  $F_x(\rho_\infty, u_\infty, L, \dots)$ , расход  $G(\rho_\infty, u_\infty, \dots)$ . Определяю-

шая величина должна быть управляемым и значимым в эксперименте и расчете фактором (переменной); это и отражает запись функциональной связи в виде *функции нескольких переменных*.

Предполагается, что набор определяющих величин характеризует все наблюдаемые или учитываемые взаимодействия, причем все определяющие величины *независимы*, т. е. неизвестны *другие функциональные связи*, с помощью которых данный список можно было бы *сократить*, выразив хотя бы одну из определяющих величин через одну или несколько других.

Наиболее привычный вид функциональной связи — явная функция одной переменной  $a = f(a_1)$ , в которой две величины —  $a$  и  $a_1$  — рассматриваются как связанные зависимостью. Всякую *явную* функцию можно представить и в *неявном* виде:  $F(a, a_1) = 0$  (хотя бы как  $F(a, a_1) = f(a_1) - a = 0$ ). Увеличивая число связанных зависимостью величин, получаем  $a = f(a_1, a_2)$  или  $F(a, a_1, a_2) = 0$ , далее —  $a = f(a_1, a_2, a_3)$  или  $F(a, a_1, a_2, a_3) = 0$  и т. д. Напротив, неявная функция вида  $F(a) = 0$  означает, что  $a$ , будучи корнем указанного алгебраического уравнения, принимает постоянное значение или набор значений:  $a = \text{const}_1, \dots$

Для безразмерных величин, входящих в зависимость, применяют обозначение  $\Pi$  вместо  $a$ . Тогда запись  $F(\Pi) = 0$  указывает на то, что искомая (определяемая) величина — константа,  $\Pi = f(\Pi_1)$  обозначает явную зависимость  $\Pi$  от  $\Pi_1$ , а  $F(\Pi, \Pi_1) = 0$  — неявную зависимость между безразмерными величинами и т. д.

### **2.1.2. Системы единиц измерения. Единицы измерения.**

Если некоторое определенное число физических величин принять за основные и установить для них какие-то единицы измерения (ввести систему основных единиц), то другие величины (и их размерности) будут выражаться только через них. *Единицы измерения*, принятые для основных величин, называются *основными*, для остальных — *производными*. Можно дать такое определение:

**размерность** — выражение производной единицы измерения через основные единицы.

Например, приняв в качестве основных величин *массу*, *длину* и *время* получим, что размерность производной единицы измерения величины *ускорения* выражается соответствующим степенным одночленом. Действительно, в принятой таким образом *системе единиц* символическая

*формула размерности* для ускорения принимает вид  $LT^{-2}$ , где единица длины обозначается символом  $L$ , а единица времени — символом  $T$ . Точно так же размерность, скажем, *давления* выражается символической формулой  $ML^{-1}T^{-2}$  — *формулой размерности* давления в принятой нами системе основных единиц.

Принятые выше за основные три единицы измерения образуют систему единиц, достаточных для описания *механических* процессов и величин, их характеризующих. Для более сложных процессов потребуются другие величины, размерности которых выражаются через большее количество основных единиц. Выбор последних в принципе произволен, однако основные единицы должны образовывать независимую систему. Кроме того, рекомендуется применять стандартизованный набор основных единиц.

В системе СИ (*Systemé Internationalé, SI*), введенной в нашей стране еще в 1963 г. (ГОСТ 9867–61), за основные приняты следующие единицы: длины — метр,  $m$ ; массы — килограмм,  $kg$ ; времени — секунда,  $s$  (механические величины), а также: силы тока — ампер,  $A$ ; температуры — кельвин,  $K$ ; силы света — кандела,  $cd$ ; количества вещества — моль,  $mol$ .

Так, в системе СИ размерность *давления* оказывается производной и выражается через основные единицы как  $kg/(m \cdot s^2)$ ; формула размерности давления —  $ML^{-1}T^{-2}$ , символическое обозначение —  $Pa$  (паскаль). Смысл единицы давления («единица силы на единицу площади») раскрывается в записи  $Pa = H/m^2$ , где  $H = kg \cdot m/s^2$  (ньютон) — в свою очередь производная (для СИ) единица с формулой размерности  $MLT^{-2}$ .

**2.1.3. Размерные и безразмерные величины.** *Размерными* являются величины, численные значения которых зависят от принятых *масштабов*, т. е. от системы единиц измерения. Наоборот, значения *безразмерных величин* от принятой системы единиц не зависят.

Другими словами, выбор системы основных единиц и принятых масштабов не окажет влияния на численное значение величины только в том случае, если все показатели степени в формуле ее размерности равны нулю. Содержащий размерные величины степенной одночлен, обладающий этим свойством, будет их *безразмерной комбинацией*, например  $p/(\rho u^2)$ , как, в частности, и отношение двух величин одной физической природы — *симплекс*:  $p/p_0$  и т. п.

Но, например, давление — величина размерная, зависит от принятых масштабов основных единиц, безотносительно к тому, входит ли оно в набор основных величин.

#### 2.1.4. Структура функциональных связей. $\Pi$ -теорема.

При рассмотрении конкретной задачи нам может быть неизвестна точная формулировка математической модели и, тем более, ее замкнутое (количественное) решение. Тем не менее, общий (качественный) вид искомой функциональной связи между характеризующими явление величинами мы можем установить исходя из а) априорной информации о взаимосвязи явлений в системе и б) анализа размерностей.

Пусть имеется размерная величина  $a$ , про которую априорно известно, что она является функцией  $n$  независимых друг от друга величин  $a_1, a_2, \dots, a_n$ :

$$a = f(a_1, a_2, \dots, a_n). \quad (2.1)$$

Выясним структуру  $f(\dots)$ , предполагая, что она выражает собой некий физический закон (или решение уравнений математической модели явления), независимый от выбора системы единиц измерения. Пусть среди указанных  $n + 1$  размерных величин  $k$  величин имеют независимые размерности (и могут служить для введения системы основных единиц в пределах данной задачи!). Независимость размерности некоторой величины означает, что размерность данной величины не может быть представлена *степенным одночленом* из формул размерности остальных размерных величин данного набора:  $[a_i] = \prod_{j=1, j \neq i}^n [a_j]^{\alpha_j}$  (например, размерности длины  $L$ , скорости  $L/T$  и энергии  $ML^2/T^2$  взаимно независимы, а размерности длины  $L$ , скорости  $L/T$  и ускорения скорости  $L/T^2$  — взаимно зависимы). Тогда можно показать, что соотношение (2.1) представляется как

$$\Pi = f(1, 1, \dots, \Pi_1, \dots, \Pi_{n-k}),$$

т. е. в виде функции  $n + 1 - k$  переменных, что на  $k$  меньше, чем в (2.1):

$$\Pi = f(\Pi_1 \dots \Pi_{n-k}),$$

или в виде эквивалентной неявной функции

$$F(\Pi, \Pi_1, \dots, \Pi_{n-k}) = 0,$$

где  $\Pi = \frac{a}{a_1^{m_1} a_2^{m_2} \dots}$ ,  $\dots$ ,  $\Pi_{n-k} = \frac{a_n}{a_1^{q_1} a_2^{q_2} \dots}$  — безразмерные величины (безразмерные комбинации). Справедливо следующее: связь между  $n + 1$  размерными независимыми величинами  $a, a_1, a_2, \dots, a_n$ , независимая от выбора единиц измерения, принимает вид соотношения между  $n + 1 - k$  величинами  $\Pi, \Pi_1, \dots, \Pi_{n-k}$ , представляющими собой их независимые *безразмерные комбинации*. Этот общий вывод теории размерностей носит название  $\Pi$ -теоремы Бэкингема.

Укажем здесь на преимущества, которые дает приведение функциональных связей к безразмерному виду. Во-первых, *число определяющих величин сокращается* — зависимости приобретают более компактный вид, поэтому результаты исследований, выраженные в (общепринятых) обобщенных переменных, легче воспринимаются (более «переносимы») и т. д. Во-вторых, ряд определяющих величин имеют смысл четко очерченных *обобщенных факторов*, характеризующих отдельные парные физические взаимодействия: так, например, в гидродинамике число  $M$  характеризует проявления сжимаемости на данном режиме течения, число  $Re$  — проявления вязких сил, число  $Pr$  представляет собой безразмерную комбинацию величин, характеризующих теплофизические свойства (отношение коэффициентов температуропроводности и кинематической вязкости).

Однако упомянем и об *опасности*, которую таит в себе *априорный* характер учета тех или иных определяющих величин. Ошибки при применении методов теории размерностей и подобия проистекают в основном именно из-за ошибок при составлении *списков определяющих величин* в описании явления — этот этап слабо формализован и опирается на интуицию исследователя. Ошибкой может быть как неучет (пропуск) какого-либо значимого фактора, так и включение фактора, не являющегося независимым, т. е. такого, величину которого можно установить (выразить через другие величины из полученного списка) по известной зависимости (например, по уравнению состояния). Последняя ошибка приводит к «смешиванию» некоторой известной зависимости с искомой, что неоправданно усложняет описание.

### **2.1.5. Анализ размерностей в задаче о потерях на трение.**

Проведем размерный анализ функциональной связи, выражающей величину падения давления при течении несжимаемой ( $\rho = \text{const}_1$ ) жидкости с  $\mu = \text{const}_2$  на участке трубы с достаточно гладкими стенками и неизменной по длине формой поперечного сечения, в неизменных по времени условиях.

Нетрудно, казалось бы, сразу выписать следующие размерные величины, связанные между собой искомой функциональной зависимостью: величины давлений в начале и в конце участка  $p_1$  и  $p_2$ , Па; длина этого участка (расстояние между сечениями)  $l$  м; характерный размер поперечного сечения, например, его гидравлический (эквивалентный) диаметр  $d_e$ , м; среднерасходная скорость течения  $u$ , м/с; плотность жидкости  $\rho$ , кг/м<sup>3</sup> и динамический коэффициент вязкости  $\mu$ , Па·с (или кг·м<sup>-1</sup>·с<sup>-1</sup>).

Однако, располагая априорной информацией об особенностях течений жидкости с постоянными свойствами ( $\rho = \text{const}_1$ ,  $\mu = \text{const}_2$ ), не следует включать в число параметров задачи абсолютные давления  $p_1$  и  $p_2$ . Кроме того, учитывая линейность профиля давления по длине трубы, оставляем в списке один размерный фактор —  $\Delta p/l$  (или  $\frac{dp}{dx}$ ). Таким образом, имеющиеся данные использованы для сокращения списка размерных параметров задачи до действительно необходимого.

Имеем следующий список  $n + 1 = 5$  параметров задачи:  $\frac{dp}{dx}$ ,  $\rho$ ,  $u$ ,  $\mu$ ,  $d_e$ . Из них первый параметр — *определяемый*, прочие же — *определяющие*. Нетрудно показать, что параметров с независимой размерностью  $k = 3$ . Рассуждать можно, например, так: размерности пары параметров —  $d_e$  и  $u$  — не выражаются друг через друга ( $м$  и  $м/с$ ). Добавляя параметр  $\rho$ , кг/м<sup>3</sup>, убеждаемся, что и с ним размерности тройки выбранных параметров все еще независимы. Но теперь в размерностях встречаются кг,  $м$  и  $с$ , т. е. все механические основные единицы системы единиц СИ. Размерности остальных двух параметров —  $\frac{dp}{dx}$  и  $\mu$  — также выражаются через основные механические единицы СИ, а значит, могут быть «обезразмерены» с привлечением взятых ранее трех параметров. Итак, при  $k = 3$  параметрах с независимой размерностью данная задача описывается  $n + 1 - k = 2$  безразмерными параметрами. Искомую зависимость безразмерного падения давления от параметра режима течения можно представить, например, в виде

$$F\left(\frac{dp}{dx} \frac{2d_e}{\rho u^2}, \frac{\rho u d_e}{\mu}\right) = 0,$$

а обозначая  $\lambda = \frac{dp}{dx} \frac{2d_e}{\rho u^2}$  и  $Re = \frac{\rho u d_e}{\mu}$ , получим  $F(\lambda, Re) = 0$  или, выражая  $\lambda$  как явную функцию числа  $Re$ ,

$$\lambda = \lambda(Re). \quad (2.2)$$

Отметим, что предельно простой вид зависимости потерь давления от режима течения по трубе (2.2) получен именно при предельно про-

стных уравнениях состояния жидкости:  $\rho = \text{const}_1$  и  $\mu = \text{const}_2$  (модель несжимаемой жидкости с постоянной вязкостью). Динамика такой жидкости описывается без учета тепловых эффектов, потому в задаче нет величин, размерности которых содержат  $K$  (кельвин).

Определяющее соотношение для коэффициента потерь на трение в трубе  $\lambda$  соответствует формуле Дарси – Вейсбаха:  $\frac{dp}{dx} = -\lambda \frac{\rho u^2}{2d_e}$ . Ею пользуются для расчета падения давления на цилиндрическом участке трубы конечной длины и при  $\rho \neq \text{const}_1$  и  $\mu \neq \text{const}_2$  считая, что  $\Delta p \approx \frac{dp}{dx} l$ .

Примечательно, что в выкладках не упоминается режим течения (турбулентный или ламинарный); зависимость вида (2.2) справедлива для любого из режимов.

### 2.1.6. Анализ размерностей в задаче о наполнении ДВС.

В данном примере применим *анализ размерностей* для получения вида функциональной связи, отражающей влияние обобщенных конструктивных параметров «настроенного» ГВТ на массовое наполнение его РК *свежим зарядом* (СЗ), например, воздухом. *Определяемый* размерный параметр задачи  $m_{ц}$  (масса СЗ в РК при  $\varphi = \varphi_a$ ) выражается интегралом по объему РК

$$m_{ц} = \left( \int_{V_{РК}} \rho Y_{СЗ} dV \right)_{\varphi=\varphi_a}, \quad (2.3)$$

где  $\rho = \rho(\mathbf{r}, t_a)$  — плотность рабочей смеси,  $Y_{СЗ} = Y_{СЗ}(\mathbf{r}, t_a)$  — массовая доля СЗ в точке внутри объема РК.

Для сравнения ДВС различной размерности (рабочего объема  $V_h$ ) по величине наполнения применяется *коэффициент наполнения*  $\eta_V$  — цикловая масса СЗ  $m_{ц}$ , отнесенная к характерной массе воздуха при параметрах окружающей среды в объеме, равном *рабочему объему*:

$$\eta_V = \frac{m_{ц}}{\rho_0 V_h}. \quad (2.4)$$

Выясняя, какие определяющие параметры (или *факторы*) оказывают влияние на коэффициент  $\eta_V$ , будем делать определенные допущения. Так, осознавая, что действительное значение  $\eta_V$  по (2.4) и (2.3) получается в результате сложных пространственных нестационарных термогазодинамических и химико-кинетических процессов, будем полагать, что интегральные характеристики процесса горения жестко «увя-



заны» с показателям газообмена, а переменные свойства рабочего тела — со свойствами СЗ (например, чистого воздуха). При таких допущениях функциональная связь, описывающая влияние диаметра цилиндра  $d_{ц}$  и *скоростного режима* (частоты циклов  $f$ ) ДВС на наполнение, примет вид

$$m_{ц} = m_{ц}(d_{ц}, f, p_0, T_0, T_w, c_p, c_v, \mu, \varkappa, D). \quad (2.5)$$

Зависимость (2.5) связывает  $n + 1 = 11$  параметров, размерности которых выражаются через  $k = 4$  основные единицы системы СИ:  $\kappa\text{г}$ ,  $\text{м}$ ,  $\text{с}$  и  $\text{К}$ . Согласно II-теореме (с. 53), *безразмерных* параметров *обобщенной* функциональной связи в данном случае должно быть  $n + 1 - k = 7$ . Искомый вид связи — *критериального уравнения*, связывающего безразмерную цикловую массу СЗ с определяющими ее безразмерными параметрами задачи о пространственном нестационарном течении, для *класса* ДВС с геометрически подобными ГВТ и *сходственными* параметрами процесса сгорания, можно получить в виде

$$\frac{c_p T_0 m_{ц}}{p_0 d_{ц}^3} = \frac{c_p T_0 m_{ц}}{p_0 d_{ц}^3} \left( \frac{f d_{ц}}{\sqrt{c_p T_0}}, \frac{p_0 f d_{ц}^2}{c_p T_0 \mu}, \frac{T_w}{T_0}, \frac{c_p}{c_v}, \frac{\mu c_p}{\varkappa}, \frac{\mu c_p T_0}{p_0 D} \right), \quad (2.6)$$

где  $f d_{ц}/(\sqrt{c_p T_0})$  и  $p_0 f d_{ц}^2/(c_p T_0 \mu)$  — «режимные» параметры, аналогии чисел  $M$  и  $Re$ ,  $\gamma = c_p/c_v$  — *отношение теплоемкостей*,  $Pr = \mu c_p/\varkappa$  — *число Прандтля*,  $\mu c_p T_0/(p_0 D)$  — аналог *числа Шмидта* ( $Sc$ ) — параметры физических свойств РТ, а  $\theta = T_w/T_0$  — *температурный фактор*, учитывающий влияние относительной температуры стенок ГВТ.

Предполагая воздух с  $R = c_p - c_v = 287,1 \text{ Дж}/(\kappa\text{г}\cdot\text{К})$ ,  $\gamma = 1,40$  и  $Pr \approx Sc \approx 0,72$  в качестве СЗ, исключаем  $\gamma$ ,  $Pr$  и аналог  $Sc$  из набора определяющих параметров задачи. Тогда оставшиеся безразмерные комбинации преобразуются при помощи уравнения состояния  $p_0 = \rho_0 R T_0$  и выражения для скорости звука  $c_0 = \sqrt{\gamma R T_0}$ , в которых  $R$ ,  $c_p$ ,  $c_v$  и  $\gamma$  — константы. С учетом сказанного уравнение (2.6) приводится к виду

$$\eta_V = \eta_V(M_{п}, Re_{п}, \theta). \quad (2.7)$$

Число  $M_{п} = u_{ц}/c_0$  в (2.7) «отвечает» за проявления сжимаемости в потоке и гомотхронность волновых явлений с перемещениями поршня<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>Здесь  $u_{ц} = d_{ц}f$  — характерная скорость поршня; можно также использовать его *среднюю скорость*  $v_{п} = 2fS$ , где  $S$  — ход поршня ( $S = 2r = K_2 d_{ц}$ ,  $K_2 = idem$ ), равный удвоенному радиусу кривошипа.

Число  $Re_{\text{п}} = \rho_0 d_{\text{ц}}^2 f / \mu$  здесь характеризует все эффекты молекулярного переноса в потоке.

Критериальное уравнение (2.7) выражает условие *приближенного* (с учетом сделанных допущений) *подобия* процессов в ДВС, обладающих подобными очертаниями ГВТ в  $(\mathbf{r}, t)$ . При работе таких ДВС на *сходственных* по  $M_{\text{п}}$ ,  $Re_{\text{п}}$  и  $\theta$  режимах, согласно (2.7), будет достигаться *примерно* одинаковая величина  $\eta_V$ .

Далее, если приближенно считать течения в ГВТ ДВС, происходящие при больших значениях числа  $Re_{\text{п}}$ , *автомодельными* по этому критерию подобия, а также пренебречь влиянием температурного фактора  $\theta$ , получается еще более «вырожденное» критериальное уравнение

$$\eta_V = \eta_V(M_{\text{п}}), \quad (2.8)$$

упрощение которого далее недопустимо, так как лишает возможности учитывать относительную частоту колебаний нестационарного потока РТ в ГВТ (гомохронность его с движением поршня и фазами газообмена), а также сжимаемость РТ, составляющие основу процессов в ГВТ ДВС.

Практическим приложением *теории газообмена ДВС* [26] является отыскание конструктивного исполнения ГВТ для оптимальной организации газообмена (в первую очередь по критерию  $\eta_V$ ). Уже из (2.8) следует, что при фиксированном в  $(\mathbf{r}, t)$  ГВТ экстремум  $\eta_V$  лежит на определенной *обобщенной частоте циклов*  $M_{\text{п}}$ . Параметризация геометрии ГВТ позволяет поставить, например, задачу отыскания предельного значения  $\eta_V$ , достигаемого при оптимальном сочетании *частоты циклов* и конструктивных параметров ГВТ в рамках выбранной *конструктивной схемы*<sup>2</sup>.

В качестве примера такой параметризации рассмотрим оптимальную с точки зрения использования эффектов волновой «настройки» схему [26] ГВТ 4-тактного ДВС с *индивидуальными* впускным и выпускным каналами (см. рис. 2.1).

Произвольно выделим в данной схеме ГВТ следующие конструктивные параметры, предположительно существенно влияющие на массовое наполнение:

- диаметр цилиндра  $d_{\text{ц}}$ , задающий характерный размер ГВТ ДВС;

---

<sup>2</sup>При этом будет выявлена оптимальная (по наполнению) *обобщенная частота циклов*  $M_{\text{п}}$  или же оптимальная (при  $c_0 = idem$ ) *средняя скорость поршня*  $v_{\text{п}}$  для данной схемы ГВТ.

- радиус кривошипа  $r$  (определяющий также ход поршня  $S = 2r$ );
- длина шатуна  $l$  (определяющая, совместно с  $r$ , кинематику поршня на данных оборотах:  $\lambda = r/l$ );
- геометрическая степень сжатия  $\varepsilon$  (связанная с  $V_h$  и  $V_c$  выражением  $\varepsilon = \frac{V_h+V_c}{V_c}$ );
- длина впускного канала  $L_i$ ;
- закон изменения сечения впускного канала  $\overline{F}_i(x)$ ; характерное значение сечения —  $F_i$ ;
- закон изменения сечения впускного клапана  $\overline{F}_{in}(\varphi)$ ; его характерное значение —  $F_{in}$ ;
- угол открытия впускных органов  $\varphi_{in0}$ ;
- угловая продолжительность открытия впускных органов  $\Delta\varphi_{in}$ ;
- длина выпускного канала  $L_t$ ;
- закон изменения сечения выпускного канала  $\overline{F}_t(x)$ ; характерное значение сечения —  $F_t$ ;
- закон изменения сечения выпускного клапана  $\overline{F}_{ex}(\varphi)$ ; его характерное значение —  $F_{ex}$ ;
- угол открытия выпускных органов  $\varphi_{ex0}$ ;
- угловая продолжительность открытия выпускных органов  $\Delta\varphi_{ex}$ .

Проводимая параметризация (возможная и при пространственном описании геометрии ГВТ) сведется, очевидно, к добавлению новых переменных (в основном вида *симплексов*) в (2.8). Для показанной на рис. 2.1 схемы ГВТ после «обезразмеривания» ряда параметров из приведенного списка получим:

$$\eta_V = \eta_V \left( M_{\text{п}}, \frac{S}{d_{\text{ц}}}, \lambda, \varepsilon, \frac{L_i}{d_{\text{ц}}}, \frac{F_i}{d_{\text{ц}}^2}, \frac{F_{in}}{d_{\text{ц}}^2}, \frac{L_t}{d_{\text{ц}}}, \frac{F_t}{d_{\text{ц}}^2}, \frac{F_{ex}}{d_{\text{ц}}^2}, \varphi_{in0}, \Delta\varphi_{in}, \varphi_{ex0}, \Delta\varphi_{ex} \right). \quad (2.9)$$

И в безразмерных переменных задача описания влияния существенных параметров ГВТ на наполнение (2.9) остается трудно обозримой,

даже учитывая, что в (2.9) не включены параметры профилей впускных и выпускных каналов —  $\bar{F}_i(x)$  и  $\bar{F}_t(x)$ . Невозможно априорно сократить список определяющих параметров этой зависимости, при том, что в нее и так заложено допущение об автомодельности по  $Re_{\text{п}}$  и  $\theta$ .

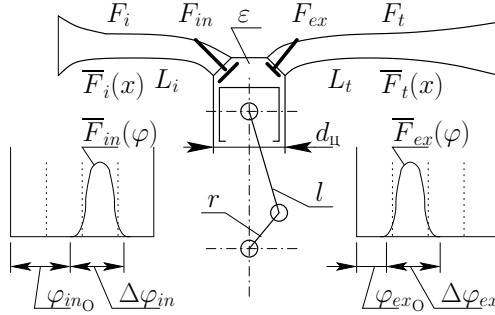


Рис. 2.1. Параметризованный ГВТ 4-тактного ДВС с индивидуальными каналами

При отыскании глобального экстремума данной многопараметрической зависимости (о методах оптимизации — на с. 36) вычисление целевой функции (2.9) может проводиться численным моделированием газообмена по квазиодномерным моделям нестационарной газовой динамики (см. гл. 4). Пример решения подобной задачи приведен в разд. 7.5.

## 2.2. Подобие при физическом и математическом моделировании

Будем здесь определять *моделирование* в «узком смысле» (с. 41), а именно:

**моделирование** — замена изучения интересующего нас явления изучением его модели (обычно — физической) уменьшенного или увеличенного масштаба в лабораторных условиях [29].

В большинстве случаев моделирование основано на воспроизведении *подобных* явлений. Причина этого в том, что наиболее удобный способ получения величин, характеризующих интересующий процесс — получение их простым пересчетом из величин в *сходственных точках* модели процесса или системы в *сходственные моменты* времени.

**Подобными** называются два явления, если по заданным характеристикам одного можно получить характеристики второго простым пе-

решением, аналогичным переходу от одной системы единиц к другой [29].

Подобие явлений устанавливается на основе теории размерностей и П-теоремы. В данном случае важно, что зависимость в обобщенных переменных справедлива для *класса подобных объектов*. Используя факт подобия процессов в двух объектах класса, можно предсказать характеристики моделируемого *натурного объекта (оригинала)* по характеристикам (физической или математической) *модели*. То есть, обеспечив подобие процессов в двух объектах, мы получаем возможность простого пересчета характеристик модели в характеристики оригинала через коэффициенты — *«переводные масштабы»*, имеющие определенные известные значения для каждой физической величины. Пример такой операции приводится в подразд. 2.2.1.

Итак, явления происходят во времени и в пространстве, вызываются внешними и внутренними условиями. Поэтому для построения модели, подобной оригиналу, очевидно, в первую очередь нужно обеспечить геометрическое подобие формы области пространства, в которой задана исследуемая физическая система, для нестационарных процессов — подобие области четырехмерного пространства-времени. Далее, следует обеспечить одинаковую природу физических явлений модели и исследуемой системы (качественное подобие). Кроме того, необходимо обеспечить количественное подобие определяющих числовых значений определяющих параметров, конкретизирующих *условия однозначности* — начальных и граничных условий, задающих те или иные особенности протекания процессов, параметров, задающих физические свойства тел, словом, всех числовых параметров, необходимых для полной определенности постановки конкретной задачи. Можно сформулировать необходимые *условия подобия* как условия, которые должны одновременно выполняться для того, чтобы процессы в двух системах были *подобными* в указанном выше смысле:

- геометрическое подобие;
- идентичность *физических законов* и подобие *свойств тел*, входящих в систему;
- подобие величин (полей величин), определяющих *условия на границах* системы в пространстве и во времени.

Можно свести эти три условия к одному, заметив, что все три являются условиями, позволяющими однозначно задать *класс* подобных явлений (подобие геометрии, идентичность физических процессов и свойств, подобие граничных и начальных условий), т. е. являются условиями подобия для *условий однозначности*! Таким образом, можно сформулировать условия подобия короче — **подобны те явления, условия однозначности которых подобны**. Конечно, данная краткая формулировка не снимает требование физической идентичности протекающих в системе процессов и пространственно-временное подобие границ системы.

На основании каких же *критериев* устанавливается подобие условий однозначности? Здесь приходит на помощь *анализ размерностей*. Если выписать все необходимые числовые значения величин, характеризующих условия однозначности и составить из них независимый набор безразмерных комбинаций, полученные величины станут числовыми выражениями *критериев подобия* явлений для данного *класса* систем. Поэтому можно дать еще одно определение — подобны те явления, которые происходят в геометрически подобных системах при одинаковых значениях всех *критериев подобия*.

Из вышеприведенного рассуждения получаются следующие определения.

**Критерии подобия** — числа подобия, составленные из величин, входящих в условия однозначности.

**Числа подобия** — безразмерные комбинации размерных величин, которые в сходственных точках  $(x, y, z, t)$  подобных систем имеют одинаковые значения.

Итак, подобие имеет место, когда выполняются условия подобия, в частности, значения критериев подобия для модели и для оригинала совпадают. А в этом случае, в силу существования функциональной зависимости *определяемого* числа подобия от *определяющих*, значения определяемых чисел подобия (безразмерных комбинаций) совпадут. Тогда, выразив из безразмерной комбинации (вообще говоря, размерную) величину, можно найти значение коэффициента для пересчета значения этой величины, измеренного в *модели*, в значение для сходственной точки моделируемого объекта — *оригинала* (см. с. 63).

Многие числа подобия названы в честь ученых: *M, Re, Nu, Sh, Pr, Sc, Fr, Gr, Ar, Ne* и др. (см. разд. 2.3). Совпадение значений критерия

подобия для модели и для моделируемого объекта выражают записью вида  $Re = idem$ ,  $M = idem$  и т. п.

Числа подобия, являющиеся отношениями величин одной физической природы, называются *симплексами*, например  $l/d$ ,  $x/l$ . По симплексам вида  $x/l$ ,  $y/l$ ,  $z/l$  и  $t/\tau$  — безразмерным координатам и времени — устанавливаются сходственные точки подобных систем.

**2.2.1. Пример переноса результатов с модели на оригинал.** Рассмотрим несложный пример практического применения теории подобия — пересчет значения измеренной на модели величины в значение ее для *натурного* объекта. Напомним, что такой пересчет имеет смысл лишь для *подобных систем*.

Пусть требуется определить падение давления  $\Delta p_1$  на участке длиной  $l_1 = 20$  м трубы квадратного сечения со стороной  $d_1 = 1$  м, по которой протекает воздух с объемным расходом  $Q_1 = 3$  м<sup>3</sup>/с (подстрочным индексом «1» обозначаем характеристики *натурного* объекта, «оригинала»).

Для моделирования течения предполагается использовать трубу квадратного же сечения со стороной  $d_2 = 100$  мм, располагая два датчика давления на расстоянии  $l_2 = 2$  м, причем в качестве «рабочего тела» в данной *модели* используется *вода*. Предполагая, что стенки обеих труб гладкие, нужно определить потребный для обеспечения динамического подобия объемный расход воды  $Q_2$  в *модели*. Свойства жидкостей приняты следующими:

воздух:  $\rho_1 = 1,2$  кг/м<sup>3</sup>,  $\mu_1 = 1,8 \cdot 10^{-5}$  кг/(м·с);

вода:  $\rho_2 = 1000$  кг/м<sup>3</sup>,  $\mu_2 = 1 \cdot 10^{-3}$  кг/(м·с).

Также нужно, получив безразмерные комбинации параметров задачи, указать способ пересчета величины падения давления в модели  $\Delta p_2$  в величину падения давления в *натурном* объекте  $\Delta p_1$ . Отметим, что исследуемая труба может содержать внутри препятствие, усложняющее картину течения. Но при геометрически подобном расположении датчиков в *модели* и в *оригинале* рассуждения останутся в силе, коль скоро геометрические очертания этих препятствий будут также подобны.

Данная задача по физике процессов соответствует примеру в подразд. 2.1.5, с тем отличием, что здесь вместо средней скорости  $u$  задан объемный расход  $Q$ . Условия однозначности содержат следующие  $n - 1 = 5$  размерных параметров:  $\frac{\Delta p}{\rho}$ , кг/(м<sup>2</sup>·с<sup>2</sup>);  $\mu$ , кг/(м·с);  $d$ , м;  $Q$ , м<sup>3</sup>/с;  $\rho$ , кг/м<sup>3</sup>, размерности которых выражаются через 3 основные едини-

цы СИ: кг, м, с. Нетрудно видеть, что число параметров с независимыми размерностями в данной задаче — три ( $k = 3$ ); для определенности пусть это будут следующие параметры:  $d, m; Q, m^3/c; \rho, кг/м^3$ , тогда (согласно той же П-теореме) можно составить  $n + 1 - k = 2$  безразмерные комбинации с участием двух оставшихся параметров —  $\frac{\Delta p}{\rho}$ ,  $кг/(м \cdot с)$  и  $\mu, кг/(м \cdot с)$ .

Первую безразмерную комбинацию получим, «обезразмеривая»  $\frac{\Delta p}{\rho}$ :

$$\left\{ \frac{\text{кг}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}^2} \right\} = \{M\}^a \cdot \left\{ \frac{\text{М}^3}{\text{с}} \right\}^b \cdot \left\{ \frac{\text{кг}}{\text{М}^3} \right\}^c,$$

что дает следующие значения показателей степени:  $a = -5, b = 2, c = 1$ , и искомая безразмерная комбинация принимает вид  $\frac{(\Delta p/l)d^5}{Q^2 \rho}$ .

Для «обезразмеривания»  $\mu$  представим:

$$\left\{ \frac{\text{кг}}{\text{М} \cdot \text{с}} \right\} = \{M\}^\alpha \cdot \left\{ \frac{\text{М}^3}{\text{с}} \right\}^\beta \cdot \left\{ \frac{\text{кг}}{\text{М}^3} \right\}^\gamma,$$

что дает  $\alpha = -1, \beta = 1, \gamma = 1$ ; вторая комбинация примет вид  $\frac{\mu d}{Q \rho}$  (аналог числа  $Re$ ).

Комбинация  $\mu d/(Q \rho)$  является *критерием подобия* для данной задачи, а комбинация  $(\Delta p/l)d^5/(Q^2 \rho)$  позволит определить, во сколько раз любая разность давлений, измеренная на *модели*, отличается от таковой в объекте-оригинале.

Итак, для обеспечения подобия при течении должно выполняться равенство  $\frac{\mu_1 d_1}{Q_1 \rho_1} = \frac{\mu_2 d_2}{Q_2 \rho_2}$  (или  $\frac{\mu d}{Q \rho} = idem$ ), что позволяет определить требуемое значение объемного расхода в модели:

$$Q_2 = Q_1 \cdot \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{\mu_2}{\mu_1} \cdot \frac{d_2}{d_1} = 3,0 \cdot \frac{1,2}{1000} \cdot \frac{1 \cdot 10^{-3}}{1,8 \cdot 10^{-5}} \cdot \frac{0,1}{1,0} = 0,02 \frac{\text{М}^3}{\text{с}}.$$

Теперь используем равенство  $\frac{(\Delta p_1/l_1)d_1^5}{Q_1^2 \rho_1} = \frac{(\Delta p_2/l_2)d_2^5}{Q_2^2 \rho_2}$ , чтобы, измерив падение давления в модели  $\Delta p_2$ , предсказать падение давления в моделируемой трубе  $\Delta p_1$ :

$$\Delta p_1 = \frac{l_1}{l_2} \cdot \frac{Q_1^2}{Q_2^2} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{d_2^5}{d_1^5} \cdot \Delta p_2 = \frac{20 \cdot 3^2 \cdot 1,2 \cdot 0,1^5}{2,0 \cdot 0,02^2 \cdot 1000 \cdot 1,0^5} \Delta p_2 = 0,0027 \Delta p_2.$$

Постоянная 0,0027 — не что иное, как *переводной масштаб* для давления ( $K_p = \Delta p_1/\Delta p_2$ ) для модели с нашими параметрами.



Использование воды в качестве модели воздуха справедливо, поскольку *медленное* (например, при  $M_{\max} < 0,25$ , см. сноску на с. 90) течение воздуха вполне может моделироваться течением жидкости с постоянными свойствами. Для этого также требуется отсутствие заметного теплообмена со стенками, из-за которого плотность  $\rho$  и вязкость  $\mu$  в потоке могут также заметно изменяться. Но в данном примере и число  $M$ , и температурный фактор  $\theta$  считаются *вырожденными* критериями подобия и не принимаются в расчет.

### 2.3. Числа подобия в гидродинамике и теории тепломассообмена

Приведем сводку общепринятых выражений безразмерных комбинаций параметров, используемых при описании задач гидрогазодинамики и теории тепломассообмена. Эти комбинации получили наименования по первым буквам фамилий выдающихся исследователей. Начнем с безразмерных комбинаций, служащих обычно критериями подобия *по режимам течения* в задачах внешнего или внутреннего обтекания твердых тел химически инертной средой:

$Eu = \frac{p}{\rho u^2}$  — критерий (или число) Эйлера (*Euler*), характеризует отношение статического давления в потоке к динамическому давлению; важен для сжимаемых сред; для совершенных газов представляется степенным одночленом из числа  $M$  и отношения теплоемкостей:

$$Eu = \frac{1}{\gamma M^2};$$

$M = \frac{u}{c}$  — критерий (или число) Маха (*Mach*), характеризует степень проявления *сжимаемости* в потоке газа; число  $M$  определяет локальный режим течения: по нему судят о реализации в газовом потоке *а)* «несжимаемого» ( $M \rightarrow 0$ ), *б)* дозвукового ( $M < 1$ ) и *в)* сверхзвукового ( $M > 1$ ) течения; при использовании  $M$  в качестве *критерия* берутся *характерные* скорости (из условий однозначности):  $u$  — скорости потока и  $c$  — скорости звука;

$Re = \frac{\rho u l}{\mu}$  — критерий (или число) Рейнольдса (*Reynolds*), характеризует проявление вязкости в потоке газа или жидкости; определяет относительную толщину динамического пограничного слоя на поверхностях обтекаемых тел; по *критерию*  $Re$  судят о реализации *а)* ламинарного или *б)* *турбулентного* режимов течения;

$\theta = \frac{T_w}{T_\infty}$  — «температурный фактор», при использовании в качестве критерия подобия (или *определяющего* параметра критериального уравнения) выражает относительную степень подогрева поверхности тела по отношению к температуре в набегающем потоке; является симплексом; может выступать в роли *определяемой* величины — безразмерной температуры в точке потока ( $\theta = T/T_\infty$ );

$Sh = \frac{l}{u\tau}$  — критерий (число) Струхала (*Strouhal*), характеризует соотношение характерных времен, одно из которых задает присущий системе масштаб времени, а другое — время (период) внешнего воздействия на систему; важен для нестационарных процессов (в задачах с дополнительным временным масштабом возмущающего воздействия);

$Fr = \frac{gl}{u^2}$  — критерий (число) Фруда (*Froude*), характеризует влияние массовых сил в задачах со свободной поверхностью капельной жидкости; определяет подобие при движении тел по (или вблизи) свободной поверхности жидкости;

$Gr = \frac{g\beta\Delta T_0 l^3}{\nu^2}$  — критерий (число) Грасгофа (*Grashof*), определяет отношение характерных сил плавучести в поле массовых сил при наличии неоднородностей плотности, вызванной тепловым расширением при нагреве, к силам вязкости; используется при задании зависимости (3.44) плотности  $\rho(T)$  малосжимаемой среды через коэффициент объемного расширения.

Следующие числа служат *определяемыми* величинами зависимостей, описывающих интегральную или локальную интенсивность динамического и теплового взаимодействия потока с поверхностями тел:

$Nu = \frac{\alpha l}{\chi}$  — число Нуссельта (*Nusselt*), используется как *определяемый* параметр в задачах теплоотдачи; можно рассматривать как *безразмерный коэффициент теплоотдачи*;

$C_x = \frac{2F_x}{\rho u^2 l^2}$  — коэффициент сопротивления, показывающий, какую долю динамического давления (по формуле, верной при  $\rho = \text{const}$ ) в набегающем потоке составляет среднее «дополнительное» давление, соразмерное силе лобового сопротивления; используется как *определяемый* параметр задачи о сопротивлении тел при их обтекании;

$\zeta = \frac{2\Delta p_{12}^*}{\rho u^2}$  — коэффициент потерь полного давления, используемый для выражения эффекта *местного сопротивления* в потоке; аналог  $C_x$  для *внутренних* течений.

Следующие числа характеризуют режимы и условия подобия в задачах обтекания твердых тел с нестационарными температурными полями в них, а первое — и собственно в задачах нестационарного распространения тепла в твердых телах:

$Fo = \frac{a\tau}{l^2}$  — критерий (число) Фурье (*Fourier*), являющееся критерием *тепловой гомохронности*;  $a = \kappa/(\rho c)$ ;

$Bi = \frac{\alpha l}{\kappa_s}$  — критерий (число) Би́о (*Biot*), обобщенно характеризует граничное условие третьего рода в задачах теплоотдачи.

Следующие числа — безразмерные комбинации параметров теплофизических свойств жидкой или газообразной текучей среды:

$\gamma = \frac{c_p}{c_v}$  — отношение теплоемкостей, количественно характеризует проявление сжимаемости (если она существенна) в потоке газа;

$Pr = \frac{\mu c_p}{\kappa}$  — критерий (число) Прандтля (*Prandtl*), характеризует соотношение интенсивностей молекулярных потоков *вязкости* и теплопроводности; позволяет судить об отношении толщин *динамического* и *температурного* пограничных слоев;

$Sc = \frac{\mu}{\rho D}$  — критерий (число) Шмидта (*Schmidt*), характеризует соотношение интенсивностей молекулярных потоков *вязкости* и *диффузии*; позволяет судить об отношении толщин *динамического* и *концентрационного* пограничных слоев.

Наконец, следующее число служит критерием применимости понятия сплошной среды:

$Kn = \frac{\delta}{l}$  — критерий (число) Кнудсена (*Knudsen*), представляет собой отношение средней длины свободного пробега молекул к характерному размеру задачи; определяет степень выраженности эффекта разреженности газа как меру отличия свойств такой среды от свойств сплошной среды.

## Вопросы для самоконтроля

- 1) Дайте определения *размерности* и *размерной величины*.
- 2) Сформулируйте П-теорему Бэкингема.
- 3) Сформулируйте условия подобия явлений, происходящих в двух физических системах.
- 4) Назовите критерий подобия явлений, «отвечающий» за относительную роль *эффектов вязкости* в потоке газа или жидкости.
- 5) Укажите, какими безразмерными факторами обычно выражают теплофизические свойства при использовании *модели совершенного газа*.
- 6) Дайте обоснование наличию оптимальной по наполнению обобщенной частоты циклов ДВС с заданной геометрией ГВТ и фазами газообмена.

## Глава 3

# Модели пространственного течения рабочего тела

Рабочий процесс (РП) теплового двигателя (ТД) (и, в частности, ДВС) возможно, в принципе, смоделировать численно с исчерпывающей физической полнотой и пространственно-временной детализацией. Для этого нужно численно решить («проинтегрировать») в пространственно-временной расчетной области связанные уравнения сохранения массы компонентов, количества движения и энергии с реалистичным представлением в них явлений химической кинетики, молекулярного переноса и излучения. Но для надежного расчета в такой детальной постановке, например, процесса во всем газозоудном тракте ДВС, в настоящее время нужны дорогостоящие ресурсы многопроцессорных ЭВМ и высококлассное программное обеспечение.

Поэтому при решении практических задач энергомашиностроения еще долго, если не всегда, будут в ходу модели с невысокой детализацией процессов, в том числе модели пониженной пространственной размерности, требующие на порядки меньших вычислительных ресурсов. Применение в «огрубленных» моделях зависимостей, получаемых вычислительным экспериментом по детальным моделям или физическим экспериментом, снижает до приемлемого уровня как погрешности моделирования, так и сложность и стоимость самой «технологической цепочки» моделирования (см. гл. 4).

Осознание применимости моделей различных уровней иерархии в конкретных областях имеет непреходящее практическое значение.

В данной главе изложен справочный материал по наиболее детальным моделям, используемым при численных расчетах РП ТД при рассмотрении течений *рабочих тел* как сжимаемых сплошных сред. Модели эти выводятся из общей системы *законов сохранения* (ЗС), базирующейся на гипотезе сплошности и гипотезе о локальном термодинамическом равновесии.

### 3.1. Законы сохранения для движения реагирующей смеси

**3.1.1. Исходные гипотезы.** При выводе ЗС для пространственного движения реагирующей смеси используются гипотезы, принятие которых позволяет описывать смесь реагирующих газов как *сплошную среду*, причем находящуюся во всех точках в состоянии *локального термодинамического равновесия*. Справедливость обеих гипотез в условиях, наблюдаемых в РП ТД, определяет адекватность получаемой на их основе детальной модели течения реагирующей смеси.

**Гипотеза сплошности** принимается, чтобы не рассматривать движение отдельных структурных элементов смеси — молекул, электронов, ионов. Смесь рассматривается как *сплошная среда*, характеристики которой в точке  $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$  (рис. 3.1) определяются осреднением по множеству структурных элементов, взятых в ее малой окрестности объемом  $\Delta V$ .

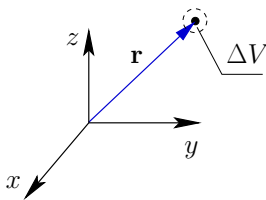


Рис. 3.1. К осреднению параметров по физически малому объему

Так, *парциальная плотность*  $\rho_k$  (объемная плотность массы, «массовая концентрация») частиц (молекул)  $k$ -го сорта в некоторой точке определяется осреднением по малому объему

$$\rho_k(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\Delta V} \sum_{n=1}^{N_k(t)} (m_k)_n = \frac{1}{\Delta V} N_k(t) m_k, \quad (3.1)$$

где  $N_k$  — число структурных элементов (молекул) в малом объеме  $\Delta V$ , а  $m_k$  — масса каждой частицы или молекулы  $k$ -го сорта. Точно так же скорость  $\mathbf{v}_k$  в окрестности  $\mathbf{r}$  определяется осреднением векторных величин импульсов частиц (молекул) в объеме  $\Delta V$  (или делением *объемной плотности импульса*  $\rho_k \mathbf{v}_k$  компонента на *объемную*

плотность массы  $\rho_k$  компонента)

$$\mathbf{v}_k(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\rho_k \Delta V} \sum_{n=1}^{N_k(t)} (m_k \mathbf{v}_k)_n,$$

что означает осреднение по мгновенным скоростям молекул.

Гипотеза сплошности утверждает саму возможность введения *физически малого объема*  $\Delta V$ , который достаточно мал по сравнению с наименьшим характерным пространственным масштабом интересующего явления, но еще достаточно велик, чтобы содержать множество структурных элементов для статистически значимого осреднения по ним — такого, при котором осредненные характеристики среды не обнаруживают заметных *флуктуаций*, и соответствующие распределения можно считать *достаточно гладкими* по пространству.

Принятие гипотезы сплошности позволяет отвлечься от величины  $\Delta V$  и, приписав любой точке пространства-времени  $(\mathbf{r}, t)$  вполне определенные значения характеристик среды, перейти к описанию течения непрерывными (или кусочно-непрерывными) *полями* плотности компонентов  $\rho_k = \rho_k(\mathbf{r}, t) = \rho_k(x, y, z, t)$ ,  $k = 1, \dots, K$ , векторным полем скорости

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = v_x(\mathbf{r}, t)\mathbf{e}_x + v_y(\mathbf{r}, t)\mathbf{e}_y + v_z(\mathbf{r}, t)\mathbf{e}_z$$

и полями других характеристик потока, считая «законными» операции их дифференцирования по  $\mathbf{r}$  и по  $t$ .

Заметим, что данная гипотеза «упраздняет» частицу молекулярного масштаба в качестве структурной единицы материи и позволяет применять понятие «частица» («жидкая частица») к *индивидуальному микрообъему среды*.

**Гипотеза о локальном термодинамическом равновесии (ЛТР)** означает допущение о бесконечно быстрой релаксации молекулярной статистики индивидуального микрообъема («частицы» жидкости или газа) к состоянию *термодинамического равновесия* при любых процессах в потоке. Принятая *гипотеза о ЛТР* позволяет использовать закономерности, справедливые для условий термодинамического равновесия, для описания любых течений газовых смесей, в т. ч. реагирующих (т. е. *химически неравновесных*) — равновесные (максвелловские) и изотропные по направлениям распределения «хаотической» составляющей скорости молекул  $(\mathbf{v}_k)_n - \mathbf{v}_k$  и равновесные по поступа-

тельным, вращательным и колебательным степеням свободы распределения энергий молекул всех компонентов.

Именно гипотеза о ЛТР придает термодинамической температуре  $T$ , удельной внутренней энергии  $e$  и давлению  $p$  определенность и смысл *параметров состояния*, позволяя им, наряду с массовыми долями компонентов  $Y_k = \rho_k/\rho$ ,  $k = 1, \dots, K$  (где  $\rho = \rho_1 + \dots + \rho_K$  — плотность смеси), фигурировать в *уравнениях состояния* (УС), которыми *зависимый параметр состояния* смеси *заданного состава* выражается через значения двух независимых параметров состояния. Важнейшие УС — *калорическое УС* вида  $e = e(\rho, T, Y_1, \dots)$  и *термическое УС* — вида  $p = p(\rho, T, Y_1, \dots)$ . Эта же гипотеза позволяет определять выражениями вида УС для конкретной среды величины *коэффициентов молекулярного переноса* (подробнее об УС см. разд. 3.2).

Отметим, что в рамках гипотез сплошности и ЛТР смесь газов считается *локально перемешанной на молекулярном уровне*, т. е., собственно, гомогенной в каждой конкретной точке (макроскопический состав смеси все же пространственно неоднороден). Это позволяет привлекать для расчета скоростей химических реакций концепции и данные, справедливые для статистики столкновений структурных элементов (молекул) внутри однородного по составу микрообъема.

**3.1.2. Вывод законов сохранения для реагирующей смеси.** В общем случае пространственного и зависящего от времени течения смеси каждая искомая величина (зависимая переменная) в *законах сохранения* в общем случае есть функция  $x, y, z$  и  $t$ .

Исходной для любого из ЗС является его *интегральная* форма, которая выводится из рассмотрения условия сохранения соответствующей величины применительно к произвольному контрольному объему (рис. 3.2).

**Закон сохранения массы компонента смеси.** Плотность потока массы  $k$ -го компонента газовой смеси,  $kg/(m^2 \times c)$  — произведение его парциальной плотности на скорость  $\rho_k \mathbf{v}_k$ . *Среднемассовая* скорость смеси в данной точке определяется как

$$\mathbf{v} = \frac{1}{\rho} \sum_{k=1}^K \rho_k \mathbf{v}_k,$$

тогда  $\mathbf{v}_{kд} = \mathbf{v}_k - \mathbf{v}$  — *диффузионная* скорость  $k$ -го компонента.



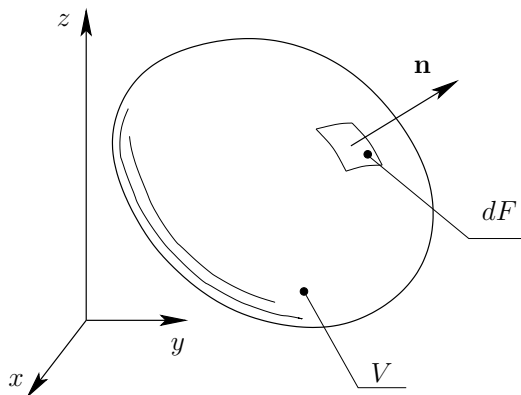


Рис. 3.2. К выводу интегральных законов сохранения общего вида

В потоке массы  $\rho_k \mathbf{v}_k$  выделяют конвективную (вместе со смесью) и диффузионную (относительно смеси) составляющие:

$$\rho_k \mathbf{v}_k = \rho_k \mathbf{v} + \rho_k \mathbf{v}_{kд}. \quad (3.2)$$

Условием сохранения массы компонента  $k$  в произвольном объеме  $V$  (рис. 3.2) с учетом объемной мощности его суммарного образования (исчезновения) во всех рассматриваемых химических реакциях  $\omega_{k\Sigma}$ , моль/( $m^3 \times c$ ) является уравнение (здесь и ниже — для  $k = 1, \dots, K$ ):

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho_k dV = - \int_F [\rho_k \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{n}] dF + \int_V W_k \omega_{k\Sigma} dV. \quad (3.3)$$

Уравнение (3.3) — закон сохранения массы  $k$ -го компонента смеси в интегральной форме. Преобразование в нем интеграла по поверхности в интеграл по объему по формуле Остроградского — Гаусса

$$\int_F [\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}] dF = \int_V \text{div } \mathbf{a} dV$$

и изменение порядка интегрирования и дифференцирования в левой части (3.3) дает

$$\int_V \left( \frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \text{div}(\rho_k \mathbf{v}_k) - W_k \omega_{k\Sigma} \right) dV = 0. \quad (3.4)$$

Заметим, что в (3.4) для применения оператора дивергенции требуется гладкость (дифференцируемость) ее векторного аргумента. Предполагая, что при учете молекулярных эффектов диффузии, вязкости и теплопроводности образование разрывов искомым функций исключается, уравнения (3.3) и (3.4) можно считать эквивалентными.

В силу произвольности объема  $V$  (рис. 3.2) равенство (3.4) будет выполняться при тождественно равном нулю подинтегральном выражении, т. е.

$$\frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_k \mathbf{v}_k) = W_k \omega_{k\Sigma}. \quad (3.5)$$

Уравнение (3.5) — закон сохранения массы компонента в дифференциальной («дивергентной») форме. Как и уравнения (3.3) и (3.4), оно связывает приращение во времени массовой концентрации (парциальной плотности  $\rho_k$ ) компонента в окрестности точки с переносом компонента в конвективном движении смеси (со среднемассовой скоростью), диффузией молекул компонента, а также с образованием/исчезновением молекул в химических реакциях.

Обозначая вектор плотности диффузионного потока массы компонента  $\mathbf{j}_k = \rho_k \mathbf{v}_{kд}$  и учитывая (3.2), нетрудно привести (3.5) к виду

$$\frac{\partial \rho Y_k}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v} Y_k) = \operatorname{div}(-\mathbf{j}_k) + W_k \omega_{k\Sigma}, \quad (3.6)$$

где  $Y_k = \rho_k / \rho$  — массовая доля  $k$ -го компонента.

Применяя тензорную нотацию, в которой дивергенция вектора

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{\partial(\mathbf{a})_x}{\partial x} + \frac{\partial(\mathbf{a})_y}{\partial y} + \frac{\partial(\mathbf{a})_z}{\partial z} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial(\mathbf{a})_j}{\partial x_j}$$

кратко обозначается как  $\frac{\partial a_j}{\partial x_j}$ , получим «тензорную» форму записи закона сохранения массы компонента (по  $k$  не суммировать!):

$$\frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \frac{\partial \rho_k v_{kj}}{\partial x_j} = W_k \omega_{k\Sigma}. \quad (3.7)$$

Наконец, расписав операторы дивергенции в (3.6) по координатным направлениям, получим «развернутую» форму записи ЗС массы компонента

$$\frac{\partial \rho Y_k}{\partial t} + \frac{\partial \rho u Y_k}{\partial x} + \frac{\partial \rho v Y_k}{\partial y} + \frac{\partial \rho w Y_k}{\partial z} = -\frac{\partial j_{kx}}{\partial x} - \frac{\partial j_{ky}}{\partial y} - \frac{\partial j_{kz}}{\partial z} + W_k \omega_{k\Sigma}. \quad (3.8)$$

В ЗС массы плотность диффузионного потока  $\mathbf{j}_k = \rho_k \mathbf{v}_{kд}$  компонента выступает дополнительной неизвестной. Выражение  $\mathbf{j}_k$  через другие зависимые переменные позволяет «замкнуть» это уравнение. Чаще всего для этой цели используют феноменологический закон молекулярной диффузии Фика (англ. *Fick's law*), устанавливающий прямую пропорциональность

$$\rho_k \mathbf{v}_{kд} = -\rho D_k \text{grad } Y_k, \quad (3.9)$$

или, в тензорных обозначениях, в которых градиент величины  $\varphi$

$$\text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \mathbf{e}_z = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \mathbf{e}_j$$

обозначается как  $\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \mathbf{e}_j$ , можно написать (по  $k$  не суммировать!):

$$\rho_k v_{kдj} = -\rho D_k \frac{\partial Y_k}{\partial x_j}. \quad (3.10)$$

В законе Фика  $D_k = D_k(\rho, T, Y_1, \dots, Y_{K-1})$  — локальное значение *коэффициента молекулярной диффузии* компонента. Использование закона (3.9) не добавляет ничего существенного к определению  $\rho_k \mathbf{v}_{kд}$ , пока не указан способ вычисления  $D_k$ . При моделировании течений газовых смесей применяются различные подходы к учету многокомпонентной диффузии [39]. Так, часто используют (3.9), где  $D_k$  вычисляют по локальным значениям *коэффициента молекулярной вязкости*  $\mu$  и *числа Шмидта* компонента  $Sc_k = \mu/(\rho D_k)$ , которое в простейшем случае принимается постоянным (порядка 0,6...1).

С учетом (3.9) закон сохранения массы компонента в «дивергентной» форме принимает вид

$$\frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \text{div } \rho_k \mathbf{v} = \text{div } (\rho D_k \text{grad } Y_k) + W_k \omega_{k\Sigma}. \quad (3.11)$$

**Закон сохранения количества движения.** При выводе этого ЗС обычно принимают, что *объемная плотность количества движения смеси* выражается произведением плотности на *среднемассовую* скорость  $\rho \mathbf{v}$ , а конвективная составляющая ее потока — произведением  $\rho \mathbf{v}$  на компоненты *среднемассовой* же скорости  $\mathbf{v}$ , т. е. пренебрегают переносом количества движения с диффузионными скоростями компонентов.

Данное приближение, в котором перенос с *диффузионными* скоростями учитывается только для потока массы, именуется «диффузионным» или «односкоростным». Мы также будем его придерживаться в качестве основы общей модели течения газофазных смесей. С учетом сказанного суммарный тензор плотности потока импульса примет вид

$$\Pi_{ij} = \rho v_i v_j - \Pi'_{ij}.$$

Будем различать в тензоре напряжений  $\Pi'_{ij}$  две составляющие — термодинамическое давление смеси  $p$  и  $\Pi''_{ij}$  — тензор «вязких» напряжений:

$$\Pi'_{ij} = -p\delta_{ij} + \Pi''_{ij}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}.$$

При вычислении компонент тензора «вязких» напряжений  $\Pi''_{ij}$  по величинам частных производных от компонент среднemasсовой скорости придерживаемся обычного для газов и их смесей вида «закона» (обобщенной гипотезы) Ньютона со скалярным коэффициентом вязкости  $\mu = \mu(\rho, T, Y_1, \dots, Y_{K-1})$

$$\Pi''_{ij} = \mu \left[ \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial v_m}{\partial x_m} \right]. \quad (3.12)$$

С учетом массовых сил ЗС количества движения для смеси можно записать в виде

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{v} dV + \int_V Div \Pi_{ij} dV = \int_V \sum_{k=1}^K (\rho_k \mathbf{a}_k) dV, \quad (3.13)$$

где  $Div \Pi_{ij}$  — операция *дивергенции тензора*,  $\mathbf{a}_k = \mathbf{a}_k(\mathbf{r}, t)$  — ускорение массовой силы для  $k$ -го компонента. Если в качестве массовой выступает гравитационная сила, то интеграл в правой части упрощается. В этом случае, также с учетом произвольности контрольного объема, получается уравнение сохранения количества движения в дифференциальной форме

$$\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + Div \Pi_{ij} = \rho \mathbf{g}. \quad (3.14)$$

Очевидно, что при сделанных допущениях ЗС импульса (количества движения) получается таким же, как и для однородной по составу среды.

Используя определение

$$\text{Div } \Pi_{ij} = \left\{ \frac{\partial \Pi_{j1}}{\partial x_j}, \frac{\partial \Pi_{j2}}{\partial x_j}, \frac{\partial \Pi_{j3}}{\partial x_j} \right\}^T$$

и выписывая отдельно «вязкие» напряжения, получим уравнение сохранения количества движения в тензорной форме:

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_j v_i + p \delta_{ij}) = \frac{\partial \Pi''_{ji}}{\partial x_j} + \rho g_i, \quad (3.15)$$

или, в проекциях на оси прямоугольной системы координат —

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2 + p) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v u) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w u) = \\ = \frac{\partial \Pi''_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \Pi''_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \Pi''_{zx}}{\partial z} + \rho g_x, \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u v) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v^2 + p) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w v) = \\ = \frac{\partial \Pi''_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \Pi''_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \Pi''_{zy}}{\partial z} + \rho g_y, \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u w) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v w) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w^2 + p) = \\ = \frac{\partial \Pi''_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \Pi''_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \Pi''_{zz}}{\partial z} + \rho g_z. \end{aligned} \quad (3.18)$$

**Закон сохранения энергии.** Получим этот ЗС предполагая, что объемная плотность энергии движущейся реагирующей смеси — сумма объемных плотностей внутренней и кинетической энергии смеси при движении со среднemasсовой скоростью («односкоростное» приближение):

$$\rho E = \rho e + \rho \frac{|\mathbf{v}|^2}{2}.$$

Удельную внутреннюю энергию  $e = e(\rho, T)$  смеси в точке определяем по принятой абсолютной *энтальпии* компонентов, составляющих смесь [39, 20]. Например, в частном случае смеси идеальных газов:

$$e = h - \frac{p}{\rho} = \frac{1}{\rho} \sum_{k=1}^K \rho_k h_k - \frac{p}{\rho} = \sum_{k=1}^K Y_k h_k - \frac{p}{\rho}, \quad h_k = h_{k0} + \int_{T_0}^T c_{p,k}(T) dT.$$

В выражении для вектора плотности потока энергии также не учитываем кинетическую энергию движения с диффузионной скоростью; тогда плотность потока энергии выразится суммой

$$\rho \mathbf{v} \left( h + \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} \right) + \sum_{k=1}^K \rho_k \mathbf{v}_{kд} h_k + \mathbf{q} - \mathbf{v} \cdot \Pi_{ij}'' ,$$

в которой представлены соответственно конвективный перенос полной энтальпии смеси, диффузионный перенос энтальпии компонентов, кондуктивный поток тепла и работа сил вязкости. Вектор  $\mathbf{q}$  может задаваться феноменологическим законом теплопроводности Фурье (англ. *Fourier's law*)

$$\mathbf{q} = -\kappa \text{grad} T \quad \text{или} \quad q_j = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x_j}, \quad (3.19)$$

где  $\kappa = \kappa(\rho, T, Y_1, \dots, Y_{K-1})$  — коэффициент теплопроводности смеси, вычисляемый с учетом ее молекулярно-кинетических свойств и параметров состояния, что представляет собой сложную самостоятельную задачу. В приближенных подходах  $\kappa$  получается по известному значению коэффициента вязкости  $\mu$  и числу Прандтля для смеси в данной точке:  $Pr = \mu c_p / \kappa$ . В простейшем случае  $Pr$  принимается зависящим только от  $T$  или даже постоянным — порядка 0,6...1 или 0,72 — как для двухатомных газов вблизи нормальных условий.

Если существенны массовые силы, нужно учесть совершаемую ими работу при движении смеси; объемная мощность массовых сил есть

$$\sum_{k=1}^K [\rho_k (\mathbf{v}_k \cdot \mathbf{a}_k)] .$$

Для условий, имеющих место в РП ТД, перенос импульса *излучением* (световое давление) может не учитываться в ЗС количества движения. Однако перенос энергии излучением является в общем случае существенным. Пусть  $Q_r$  — мощность на единицу объема, получаемая или расходуемая вследствие электромагнитного излучения. В общем случае определение локальной величины  $Q_r$  возможно путем расчета потоков энергии, излучаемых и поглощаемых каждой частицей по всем направлениям, во всех диапазонах частот, при том, что на пути от частицы к частице часть энергии поглощается и рассеивается в других частицах, что превращает ЗС энергии в интегро-дифференциальное уравнение. При решении многих практических задач член  $Q_r$  или не учитывают,

или используют допущения об относительно малой или, наоборот, большой оптической плотности смеси для данной задачи. В последнем случае возможно описание  $Q_r$  в «диффузионном» приближении — т. е. по механизму эквивалентной «теплопроводности» для потока энергии, передаваемой излучением.

С учетом сказанного уравнение сохранения энергии движущейся смеси в интегральной форме принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \rho E dV = - \int_F \left[ \rho \mathbf{v} \left( h + \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} \right) + \sum_{k=1}^K \rho_k \mathbf{v}_{k\perp} h_k + \mathbf{q} - \mathbf{v} \cdot \Pi''_{ij} \right] \times \\ \times \mathbf{n} dF + \int_V \sum_{k=1}^K [\rho_k (\mathbf{v}_k \cdot \mathbf{a}_k) + Q_r] dV. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Если массовые силы таковы, что  $\mathbf{a}_k = \mathbf{g}$ , и если при вычислении работы этих сил пренебречь диффузионной составляющей скорости, то их объемная мощность выразится как  $\rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{g})$ . Тогда уравнение энергии примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \text{div} \left[ \rho \mathbf{v} \left( h + \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} \right) + \sum_{k=1}^K \rho_k \mathbf{v}_{k\perp} h_k + \mathbf{q} - \mathbf{v} \cdot \Pi''_{ij} \right] = \\ = \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{g}) + Q_r. \end{aligned} \quad (3.21)$$

В тензорных обозначениях (при  $h^* = h + 0,5 |\mathbf{v}|^2$ ):

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \rho v_j h^* + \sum_{k=1}^K \rho_k v_{k\perp j} h_k + q_j - v_i \Pi''_{ij} \right) = \rho v_j g_j + Q_r, \quad (3.22)$$

в развернутом виде —

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho u h^* + \sum_{k=1}^K \rho_k u_{k\perp} h_k + q_x - u \Pi''_{xx} - v \Pi''_{yx} - w \Pi''_{zx} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left( \rho v h^* + \sum_{k=1}^K \rho_k v_{k\perp} h_k + q_y - u \Pi''_{xy} - v \Pi''_{yy} - w \Pi''_{zy} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left( \rho w h^* + \sum_{k=1}^K \rho_k w_{k\perp} h_k + q_z - u \Pi''_{xz} - v \Pi''_{yz} - w \Pi''_{zz} \right) = \\ = \rho (u g_x + v g_y + w g_z) + Q_r. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Выведенные выше законы сохранения массы, количества движения и энергии в дифференциальной форме имеют вид системы уравнений в частных производных и для описания движений рабочих тел должны решаться совместно. Для «замыкания» такой системы уравнений нужно, как говорилось, дополнить ее «законами» для вычисления потоков молекулярного переноса — диффузии, вязкости и теплопроводности, простейшие формы которых также были приведены выше.

Данную систему следует дополнить еще уравнениями состояния. Требуется обычно два *уравнения состояния* (УС) — *калорическое* и *термическое*. Так, в расчетах, после определения из ЗС масс парциальных плотностей  $\rho_k$ ,  $k = 1, \dots, K$  и их суммы  $\rho$ , из уравнения количества движения — скорости  $\mathbf{v}$ , а из уравнения энергии — удельной внутренней энергии смеси  $e$  в точке, потребуется *калорическое* УС, выражающее связь внутренней энергии и состава с температурой смеси. В случае смеси идеальных газов соответствующее выражение имеет вид  $e(T, Y_1, \dots, Y_{K-1})$ . Термическое УС для идеальных газов — уравнение вида  $p = \rho RT$ , где, в случае газовых смесей  $R$  — «кажущаяся» удельная газовая постоянная, которая вычисляется как  $R = \sum_{k=1}^K R_k Y_k$ ,  $R_k = R^0/W_k$ , где  $R^0$  — универсальная (молярная) газовая постоянная, равная  $8,314472 \text{ Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$ , а  $W_k$  — молярная масса компонента. Термическое УС необходимо для вычисления давления, когда известны плотность и температура (подробнее см. разд. 3.2).

При решении задач, описываемых уравнениями и системами уравнений в частных производных (УЧП), для однозначной постановки задачи требуется задание *начальных условий* (НУ), представляющих собой известные начальные распределения искомых функций —  $\rho_k(x, y, z, t_0)$ ,  $\mathbf{v}(x, y, z, t_0)$ ,  $T(x, y, z, t_0)$ ,  $p(x, y, z, t_0)$  и т. д., а также *граничных условий* (ГУ) — распределений, задаваемых на пространственных границах системы (области). Более подробно НУ и ГУ будут обсуждаться при изложении частных моделей и результатов их применения к практическим задачам.

Для учета *химической неравновесности* в потоке должен быть задан модельный химико-кинетический механизм реакций между компонентами смеси; на основе формально-кинетических представлений (см. [39]) могут задаваться как сколь угодно подробные, так и упрощенные модельные кинетические механизмы, использующие полуэмпирические зависимости для расчета скоростей образования (расхода) веществ.



Режимы течения рабочих тел в ТД в основном турбулентные; подходы и модели, применяемые при численных расчетах турбулентных течений (как химически равновесных, так и течений реагирующих смесей), обсуждаются в разд. 3.3. Это *феноменологические модели*, привлекаемые ввиду «огрубленного» описания полей течения на реально применяемых расчетных сетках.

Моделирование *многофазных течений*, важных для РП многих ТД, также на практике сопряжено с огрублением физической картины и требует дополнительных гипотез и феноменологических моделей для получения и «замыкания» специфических ЗС, приближенно описывающих многофазное течение. Специфика моделирования многофазных течений в данном пособии не рассматривается.

**3.1.3. Уравнения Навье – Стокса.** Сохраняя возможность описания течения *рабочего тела* как пространственно трехмерного и зависящего от времени, получим из общей модели частный случай, справедливый для единственного компонента, или, что то же самое, для однородной вязкой сжимаемой среды (газа или реальной капельной жидкости).

Примем в качестве исходных ЗС массы, импульса и энергии в формах (3.8), (3.16)–(3.18) и (3.23). Положив в этих уравнениях  $K = 1$ , получим  $Y_1 \equiv 1$  и  $\omega_{1\Sigma} \equiv 0$ ; кроме того, не будем учитывать перенос энергии излучением ( $Q_r \equiv 0$ ). Получится система ЗС, в которой уравнение сохранения массы среды имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho v_z}{\partial z} = 0, \quad (3.24)$$

уравнения сохранения компонент количества движения совпадают с уравнениями (3.16)–(3.18), а уравнение энергии запишется как

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u h^* + q_x - v_x \Pi''_{xx} - v_y \Pi''_{yx} - v_z \Pi''_{zx}) + \\ + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v h^* + q_y - v_x \Pi''_{xy} - v_y \Pi''_{yy} - v_z \Pi''_{zy}) + \\ + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w h^* + q_z - v_x \Pi''_{xz} - v_y \Pi''_{yz} - v_z \Pi''_{zz}) = \\ = \rho (u g_x + v g_y + w g_z). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Если уравнения (3.24), (3.16)–(3.18) и (3.25) замыкаются теми же соотношениями «закона» Ньютона (3.12) для компонент тензора

«вязких» напряжений  $\Pi''_{ij}$  и «закона» Фурье (3.19) для компонент вектора кондуктивного потока тепла  $\mathbf{q}$ , то указанная система УЧП (в техническом сообществе) называется *уравнениями Навье – Стокса* (УНС).

Считается, что УНС являются достаточно «фундаментальной» моделью для описания течений плотных «ньютоновских» сред — как в ламинарном, так и в турбулентном режиме. Однако аналитически проинтегрировать УНС при решении практически важных задач (в технических приложениях) не представляется возможным, поэтому практические задачи расчета течений по УНС (и подобным им системам УЧП) получаются посредством *численного решения* уравнений на ЭВМ.

При изложении численных методов оказывается полезной следующая компактная «векторная» форма записи связанных систем УЧП. Так, систему уравнений (3.24), (3.16)–(3.18), (3.25) можно символически записать в виде «векторного» уравнения (в дифференциальной форме)

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{F}_z}{\partial z} = \mathbf{S}, \quad (3.26)$$

где

$$\mathbf{U} = [\rho, \rho v_x, \rho v_y, \rho v_z, \rho E]^T$$

— «вектор» неизвестных — объемных плотностей *сохраняющихся величин* в ЗС,

$$\mathbf{S} = [0, \rho g_x, \rho g_y, \rho g_z, \rho (v_x g_x + v_y g_y + v_z g_z)]^T$$

— «вектор» объемной мощности *источников* в ЗС.

«Векторы» плотностей потоков сохраняющихся величин в координатных направлениях  $x$ ,  $y$  и  $z$  соответственно могут быть представлены суммой «невязкой» составляющей и составляющей, выражающей действие молекулярных эффектов вязкости и теплопроводности:  $\mathbf{F}_x = (\mathbf{F}_x)_{nv} + (\mathbf{F}_x)_v$  и т. д. Так, «невязкие» составляющие плотностей потоков (в декартовой системе координат) суть

$$\begin{aligned} (\mathbf{F}_x)_{nv} &= [\rho v_x, \rho v_x^2 + p, \rho v_x v_y, \rho v_x v_z, \rho v_x h^*]^T, \\ (\mathbf{F}_y)_{nv} &= [\rho v_y, \rho v_y v_x, \rho v_y^2 + p, \rho v_y v_z, \rho v_y h^*]^T, \\ (\mathbf{F}_z)_{nv} &= [\rho v_z, \rho v_z v_x, \rho v_z v_y, \rho v_z^2 + p, \rho v_z h^*]^T. \end{aligned} \quad (3.27)$$

а молекулярные потоки —

$$\begin{aligned} (\mathbf{F}_x)_v &= [0, -\Pi''_{xx}, -\Pi''_{yx}, -\Pi''_{zx}, q_x - v_x \Pi''_{xx} - v_y \Pi''_{yx} - v_z \Pi''_{zx}]^T, \\ (\mathbf{F}_y)_v &= [0, -\Pi''_{xy}, -\Pi''_{yy}, -\Pi''_{zy}, q_y - v_x \Pi''_{xy} - v_y \Pi''_{yy} - v_z \Pi''_{zy}]^T, \\ (\mathbf{F}_z)_v &= [0, -\Pi''_{xz}, -\Pi''_{yz}, -\Pi''_{zz}, q_z - v_x \Pi''_{xz} - v_y \Pi''_{yz} - v_z \Pi''_{zz}]^T. \end{aligned}$$

Символически обозначая плотность потока сохраняющейся величины  $\mathbf{U}$  в пространстве как  $\overline{\mathbf{F}} = \mathbf{F}_x \mathbf{i}_x + \mathbf{F}_y \mathbf{i}_y + \mathbf{F}_z \mathbf{i}_z$ , можно записать интегральный аналог уравнения (3.26)

$$\frac{d}{dt} \int_V \mathbf{U} dV = - \int_F (\overline{\mathbf{F}})_n dF + \int_V \mathbf{S} dV. \quad (3.28)$$

Заметим, что форма (3.28) или (3.26) является наиболее общей формой записи ЗС всех иерархических уровней, приводимых в данной главе, начиная с системы ЗС для реагирующей смеси (3.8), (3.16)–(3.18) и (3.23). Эта форма представления ЗС естественно употребляется при выводе и изложении методологии численного интегрирования систем УЧП, именуемой *методом конечных объемов* (МКО), которая применяется и в данном пособии, и в программных пакетах для расчета течений *рабочих тел* (в т. ч. реагирующих течений) на элементах ГВТ ТД.

**3.1.4. Уравнения Эйлера.** Описывающие движение общего вида гипотетической невязкой и нетеплопроводной сжимаемой среды *уравнения Эйлера* получим, отбрасывая в УНС (подразд. 3.1.3) члены с вязкостью ( $\Pi''_{ij} \equiv 0$ ) и теплопроводностью ( $\mathbf{q} \equiv 0$ ), или же полагая в них  $\mu \equiv 0$  и  $\varkappa \equiv 0$ . Полученные уравнения в консервативной (и символической «векторной» форме) сохранят вид (3.26), в котором плотности потоков сохраняющихся величин  $\mathbf{F}_x$ ,  $\mathbf{F}_y$  и  $\mathbf{F}_z$  полностью будут определяться выражениями (3.27). Для наглядности приведем дивергентную форму уравнений Эйлера:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) &= 0, \\ \frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \operatorname{Div}(\rho u_i u_j + \delta_{ij} p) &= \rho \mathbf{g}, \\ \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v} E + p \mathbf{v}) &= \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{g}). \end{aligned} \quad (3.29)$$

В согласии с данной моделью течения невязкой и нетеплопроводной среды индивидуальная частица жидкости в потоке без скачков уплотнения претерпевает *адиабатный изоэнтропный* (обратимый) процесс. При задании однородных граничных условий втекания расчет по уравнениям Эйлера в принципе должен давать картину *потенциального течения*.

Система уравнений (3.29) — нелинейная система связанных УЧП гиперболического типа первого порядка по времени и по пространственным координатам.

Следует соблюдать осторожность, получая численными расчетами по уравнениям Эйлера решения газодинамических задач, содержащих разрывы параметров решения — скачки уплотнения, контактные разрывы, слабые разрывы (разрывы производных искомых функций). Формально система (3.29) теряет смысл на разрывах зависимых переменных. Фактически же любой консервативный численный метод в рамках подхода МКО аппроксимирует на конечно-объемной сетке уравнения в исходной — интегральной — форме, т. е. в общем виде как (3.28). Последнее обстоятельство объясняет успех создания и применения консервативных методов класса МКО для решения численным методом задач с разрывами — «методов сквозного счета» (англ. *shock-capturing methods*).

Интегральную форму уравнений (3.29) нетрудно получить из ЗС (3.3), (3.13) и (3.20) для частного случая идеальной однородной сжимаемой жидкости:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \rho dV + \int_F \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dF &= 0, \\ \frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{v} dV + \int_F [\rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{v} + p \mathbf{n}] dF &= \int_V \rho \mathbf{g} dV, \\ \frac{d}{dt} \int_V \rho E dV + \int_F \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) h^* dF &= \int_V \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{g}) dV. \end{aligned} \quad (3.30)$$

По уравнениям (3.29) или (3.30) течения *вязких* газов и жидкостей могут рассчитываться в подобластях, где «градиентный» перенос (молекулярный и турбулентный) несуществен, что наблюдается в течениях с большими числами  $Re$  (в подобластях, удаленных от стенок и связанных с ними подобластей пристенного вязкого течения). Так, *уравнениями Эйлера* удовлетворительно описывается «потенциальное ядро» течения в задачах обтекания летательных аппаратов (ЛА), крыловых профилей, лопаток, решеток профилей и лопаток, сопел и входных устройств двигателей ЛА.

Уравнения Эйлера в развернутом виде получим из (3.29) для пространственно одномерных искомых функций  $\rho = \rho(x, t)$ ,  $\mathbf{v}(x, t) = u(x, t) \mathbf{i}_x$ ,  $p = p(\mathbf{r}, t)$ ,  $T = T(\mathbf{r}, t)$  и др., и также *одномерному* в пространстве полю ускорения массовой силы

$\mathbf{g}(x, t) = g(x, t) \mathbf{i}_x$  — как систему

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2 + p)}{\partial x} = \rho g, \quad (3.31)$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u E + pu)}{\partial x} = \rho u g.$$

Если не учитывать массовые силы, получается система уравнений, описывающая плоское нестационарное движение однородной сжимаемой жидкости или газа (формально справедливая, как мы помним, в подобластях гладкости искомых функций); она записывается в символической «векторной» форме как

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_x}{\partial x} = 0, \quad (3.32)$$

где  $\mathbf{U} = [\rho, \rho u, \rho E]^T$  и  $\mathbf{F}_x = [\rho u, \rho u^2 + p, \rho u E + pu]^T$ .

### 3.2. Уравнения состояния

Для описания потоков как многокомпонентных смесей, так и однородных газов или жидкостей одной системы ЗС оказывается недостаточно. Так, уже для *уравнений Эйлера* (подразд. 3.1.4) число уравнений на единицу меньше числа искомых функций:  $\rho(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ ,  $p(\mathbf{r}, t)$ ,  $e(\mathbf{r}, t) = E - 0,5|\mathbf{v}|^2$ .

**Термическое и калорическое УС.** Для исключения давления  $p$  из числа искомых функций привлекается *термическое* уравнение состояния (УС) вида  $p = p(\rho, T)$ ; фигурирующая в нем *температура*  $T$ , в свою очередь, связывается с плотностью  $\rho$  и удельной внутренней энергией  $e$  через другое, *калорическое* УС общего вида  $e = e(\rho, T)$ .

В более общем случае, когда среда (рабочее тело) — переменного состава смесь  $K$  компонентов, должны браться *термическое* и *калорическое* УС в виде, позволяющем учесть *состав* в точке:

$$p = p(\rho, T, Y_1, \dots, Y_{K-1}), \quad (3.33)$$

$$e = e(\rho, T, Y_1, \dots, Y_{K-1}). \quad (3.34)$$

При численном расчете течения смеси *парциальные плотности*  $\rho_k$  в расчетной ячейке (зоне) задаются решением уравнения переноса массы компонентов и определяют *плотность смеси*  $\rho$  и *массовые доли*  $Y_k$ . Удельная *внутренняя энергия*  $e$  смеси в ячейке получается из уравнений количества движения и энергии, после чего решением уравнения (3.34) определяется температура  $T$ , а уравнения (3.33) — давление  $p$ .

**Коэффициенты переноса.** Уже для *уравнений Навье – Стокса* (подразд. 3.1.3) при вычислении *коэффициентов вязкости и теплопроводности* для подстановки в «законы» Ньютона (3.12) и Фурье (3.19) на основании гипотезы о ЛТР применимы соотношения вида УС, т. е. для задания *коэффициентов переноса* в общем случае достаточно зависимостей вида  $\mu = \mu(\rho, T)$  и  $\kappa = \kappa(\rho, T)$ .

В более общем случае среды как смеси  $K$  компонентов переменного состава должно учитываться влияние каждого из компонентов на *коэффициенты диффузии* компонентов, *коэффициенты вязкости* и *коэффициент теплопроводности* смеси:

$$D_k = D_k(\rho, T, Y_1, \dots, Y_{K-1}), \quad (3.35)$$

$$\mu = \mu(\rho, T, Y_1, \dots, Y_{K-1}), \quad (3.36)$$

$$\kappa = \kappa(\rho, T, Y_1, \dots, Y_{K-1}). \quad (3.37)$$

Таким образом, с привлечением соотношений вида УС система ЗС (или УЧП), описывающая течение (как неоднородной, так и однородной по составу) текучей среды, становится *замкнутой*. Соотношения, задаваемые в качестве УС, конкретизируют *модель рабочего тела* как в части термодинамических свойств, так и в отношении характеристик молекулярного переноса.

**Скорость звука.** Реальные газы и жидкости обладают нормальной сжимаемостью — их плотность увеличивается при увеличении давления. Для таких сред скорость распространения возмущений малой амплитуды относительно среды (*скорость звука*) определяется общим выражением

$$c = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s}, \quad (3.38)$$

где  $p = p(\rho, s)$ , а  $s = s(\rho, T)$  — *удельная энтропия*, Дж/(кг · К).

**Идеальный газ.** В пределе достаточно больших температур и малых плотностей вещество в газовой фазе ведет себя практически как *идеальный газ* (англ. *ideal gas*); объясняется это тем, что собственный объем молекул газа и силы их взаимного притяжения становятся пренебрежимо малы и взаимодействие молекул проявляется в основном при их столкновениях. Зависимость давления идеального газа от плотности и температуры описывается термическим УС, которое есть частный случай (3.33):

$$p = \rho RT, \quad (3.39)$$

где  $R$  — *удельная газовая постоянная*, определяемая соотношением  $R = R^0/W$ , в котором  $R^0 \approx 8,314472$  Дж/(моль·К) — универсальная газовая постоянная,  $W$  — масса 1 моля газа. Для воздуха с  $W \approx 0,02896$  кг/моль  $R \approx 287,1$  Дж/(кг·К).

Указанная особенность среды, близкой к идеально-газовому состоянию, обуславливает зависимость *удельной внутренней энергии* только от температуры  $T$  — меры средней кинетической энергии молекул в хаотическом движении. Температурную зависимость  $e(T)$  для идеального газа можно выразить интегралом известного из термодинамики [5] тождества  $(\partial e / \partial T)_\rho = c_v$ :

$$e(\rho, T) \rightarrow e(T) = e(T_0) + \int_{T_0}^T c_v(T) dT, \quad (3.40)$$

где  $c_v(T)$  — зависимость удельной теплоемкости при  $v = \text{const}$  от  $T$ , возрастающая в интервале от «комнатных» температур до  $T$ , превышающих адиабатные температуры горения топлив. Возрастание  $c_v(T)$  объясняется постепенным возбуждением колебательных степеней свободы молекул газов, «запасующих» внутреннюю энергию наряду с поступательными и вращательными степенями свободы. Зависимость  $c_v(T)$  в выражении  $e(T)$  аппроксимируется многочленом

$$c_v(T) = c_{v,0} + a_{v,1}T + a_{v,2}T^2 + \dots$$

Температурная зависимость для удельной *энтальпии*  $h = e + RT$  (или  $h = e + pv$ ) имеет аналогичный (3.40) вид:

$$h(T) = h(T_0) + \int_{T_0}^T c_p(T) dT, \quad (3.41)$$

с учетом того, что для идеальных газов справедлив закон Майера:  $R = c_p - c_v$ .

Для идеального газа (или однородной по составу смеси таких газов) уровень величины  $e(T_0)$  может быть задан произвольно, так же как и «базовое» значение температуры  $T_0$ , например, при  $e(0) = 0$

$$e(T) = \int_0^T c_v(T) dT. \quad (3.42)$$

Для идеального газа *коэффициенты молекулярного переноса* зависят только от температуры:  $\mu = \mu(\rho, T) \rightarrow \mu(T)$ ,  $\kappa = \kappa(\rho, T) \rightarrow \kappa(T)$ . Для расчета коэффициента вязкости  $\mu$  в широком интервале температур используется *формула Сазерленда*:

$$\mu = \mu(T) = \mu_0 \left( \frac{T}{273} \right)^{1,5} \frac{273 + C}{T + C}, \quad (3.43)$$

где, например, для воздуха  $\mu_0 = 1,72 \cdot 10^{-5} \text{ Па} \cdot \text{с}$ ,  $C = 122 \text{ К}$  [1].

**Совершенный газ.** Во многих задачах интервал температур для конкретной задачи не так велик, чтобы заметно проявлялось отличие  $c_v(T)$  от постоянного значения, и, соответственно, отличие зависимости  $e(T)$  для *идеального газа* от линейной. В этом случае рационально применять *линеаризованный вариант* зависимости (3.42) — с некоторым постоянным значением теплоемкости  $c_v = \text{const}$ , характерным для применяемого интервала температур, например, *средней теплоемкости* —  $c_v|_{T_{\min}}^{T_{\max}}$ . Гипотетический *идеальный газ* с постоянной теплоемкостью называется *совершенным газом* (англ. *perfect gas*).

Полагаясь на произвольность отсчета абсолютного значения удельной внутренней энергии, можно калорическое УС для совершенного газа брать в виде

$$e(T) = c_v T, \quad \text{где } c_v = \text{const}.$$

Так как закон Майера  $R = c_p - c_v$  справедлив также и для совершенного газа, из чего при  $c_v = \text{const}_1$  следует, что  $c_p = R + c_v = \text{const}_2$  и то, что *отношение теплоемкостей*

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v}$$

— также постоянная величина. При умеренных температурах (по крайней мере, до  $1200 \text{ К}$ ) в технических расчетах принимают, что для *одно-*



атомных газов и их смесей  $\gamma = 1,667$ , для двухатомных газов и смесей  $\gamma = 1,40$ , для трех- и многоатомных —  $\gamma = 1,25$ . Для продуктов сгорания углеводородных топлив в выпускных трактах тепловых двигателей принимают  $\gamma = 1,33 \dots 1,36$ .

С учетом этих значений и тождеств можно подсчитать и примерные значения удельных теплоемкостей. Так,  $c_v = \frac{R}{\gamma-1}$ ,  $c_p = c_v + R = \frac{\gamma R}{\gamma-1}$ . Для воздуха, принимая  $\gamma = 1,40$  и  $R = 287,1 \text{ Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$ , получим  $c_v = 2,5R \approx 718 \text{ Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$ ,  $c_p = c_v + R = 3,5R \approx 1005 \text{ Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$ .

Уравнение изоэнтропного ( $s = \text{const}$ ) процесса для *совершенного газа* имеет вид  $p = p_1 (\rho/\rho_1)^\gamma$ . Тогда из (3.38) для такого газа нетрудно получить зависимость скорости звука от параметров состояния:

$$c = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}} = \sqrt{\gamma RT}.$$

**Смесь идеальных газов.** Рабочие тела тепловых двигателей часто описываются моделью смеси идеально-газовых компонентов, также обладающей свойствами идеального газа. Калорическое УС такой смеси имеет следующий частный, в сравнении с (3.34), вид:

$$e = e(T, Y_1, \dots, Y_{K-1}) = \sum_{k=1}^K Y_k \cdot e_k(T),$$

где  $e_k(T)$  — температурная зависимость удельной внутренней энергии индивидуального компонента вида (3.40) или (3.42). Термическое УС смеси газов такого рода совпадает с (3.39), в котором  $R = R(Y_1, \dots, Y_{K-1})$  — газовая постоянная смеси, вычисляемая по выражению

$$R = \sum_{k=1}^K Y_k \cdot R_k,$$

где  $R_k = R^0/W_k$  — *удельная газовая постоянная* индивидуального компонента.

Для практических расчетов применяются упрощенные методики вычисления зависимостей (3.35)–(3.37) для *коэффициентов молекулярного переноса*, дающие погрешности расчета величин в 5 ... 10 % и более (см. [39] и цитированную там литературу).

**Несжимаемая жидкость.** Все реальные жидкости обладают *сжимаемостью*, причем величина плотности  $\rho$ , вообще говоря, зависит

как от давления, так и от температуры. Эта зависимость «заложена» в уравнения состояния, которые в случае идеального совершенного газа имеют очень простой вид, но уже для «капельных» жидкостей и реальных газов УС выражаются сложными полуэмпирическими зависимостями.

Малыми вариациями плотности при решении технических задач часто пренебрегают и используют *модель несжимаемой жидкости*. Данная модель задается условием  $\rho = \text{const}$  — простейшим из возможных УС, выражающим свойство такой гипотетической жидкости не изменять  $\rho$  ни при каких изменениях  $p$  и  $T$ . Основная особенность несжимаемой жидкости — бесконечная скорость распространения упругих возмущений<sup>1</sup>, что формально следует из условия  $\rho = \text{const}$ .

Действительно, если в потоке жидкости или газа вариации плотности не превышают единиц процентов<sup>2</sup> (например,  $< 3\%$ ), то они не могут заметно влиять на динамику жидкости<sup>3</sup> (поля скорости и давления, траектории).

Следует помнить, что при значительной «жесткости на сжатие», реальные капельные жидкости не могут «держат» пониженных давлений, при которых равновесным для реальной жидкости является двухфазное состояние, при том или ином относительном объеме паров жидкости (и некоторого количества выделяющихся из жидкости растворенных газов). Частицы жидкости в потоке, попадая в области пониженных давлений, более или менее равновесно «вскипают»; это явление называется *кавитацией* — от латинского слова, обозначающего «полость, каверна». Формально, при задании УС  $\rho = \text{const}$  кавитация оказывается «запрещенной».

Часто в качестве УС капельной жидкости (или даже газа) задается слабая зависимость плотности от температуры  $T$  (но не от давления  $p$ ). Так, часто ограничиваются соотношением вида

$$\rho(T) = \rho_0 [1 + \beta (T - T_0)], \quad (3.44)$$

---

<sup>1</sup>Что не исключает возможности постановки задачи о нестационарном течении жидкости с  $\rho = \text{const}$ .

<sup>2</sup>Так, для потока газа с  $\gamma = 1,4$  порог вариаций плотности в  $3\%$  превышаетя при  $M > M_{\text{max}} = (|\mathbf{v}|/c)_{\text{max}} \approx 0,25$ .

<sup>3</sup>Строго говоря, для этого также следует пренебречь изменением коэффициента вязкости  $\mu$ , принимая  $\mu = \text{const}_2$ , получить еще более простую *модель жидкости с постоянными параметрами*.

где  $\beta$ ,  $K^{-1}$  — «объемный» коэффициент температурного расширения; такого вида УС позволяет в хорошем приближении оценивать влияние температуры на плотность при описании медленного свободно-конвективного течения, вызванного эффектом плавучести при неравномерном подогреве/охлаждении слоев жидкости или газа в поле массовых сил.

### 3.3. Моделирование турбулентных эффектов в потоке

Течения рабочих тел в тепловых двигателях происходят, как правило, в турбулентном режиме. Оставляя пока без внимания возможное присутствие в таком течении второй фазы, рассмотрим возможность детального описания процессов на основе приведенных ранее ЗС для реагирующей смеси.

«Сквозной» расчет течения в ГВТ ТД на ЭВМ непосредственно по ЗС (3.8), (3.15) и (3.22), дополненным общепринятыми моделями кинетики и молекулярного переноса, в принципе возможен. Данный подход к численному расчету турбулентного течения именуется *прямым численным моделированием* (англ. *Direct Numerical Simulation, DNS*). Но он пока неприменим в условиях практических задач расчета РП ТД, так как предъявляет непомерные требования к ресурсам ЭВМ.

Для расчета «в режиме» *DNS* ячейки расчетной сетки должны быть достаточно мелкими, чтобы на ней уверенно представлялась эволюция вихревых структур вплоть до масштаба Колмогорова  $l_K$ . Этот масштаб связан с интегральным масштабом длины  $l_0$  (близким к характерному размеру расчетной области  $L$ ) как  $l_0/l_K = Re_l^{3/4}$ , где  $Re_l = \bar{\rho} (2\bar{k})^{1/2} l_0 / \bar{\mu}$  — «турбулентное» число  $Re$ , характеризующее степень турбулентности в потоке безотносительно от его геометрии. Здесь  $\bar{\rho}$ ,  $\bar{\mu}$  и  $\bar{k}$  — осредненные плотность, коэффициент вязкости и кинетическая энергия турбулентности в характерной точке потока.

Невыполнимыми требования к ресурсам ЭВМ получаются, когда характерный размер области  $L \approx l_0$  (определяющий масштаб самых крупных вихревых структур) и колмогоровский масштаб отличаются на порядки. Так, для типичного турбулентного течения с  $Re_l = 500$  получаем  $l_0/l_K \approx 100 = 10^2$ . Пусть применяемый численный метод таков, что требуется 10 ячеек сетки на длину  $l_K$ . Тогда для расчета «в режиме» *DNS* нужна сетка, содержащая порядка  $(10^2 \cdot 10)^3 = 10^9$ , т. е. миллиард ячеек, занимающих порядка 256 Гб оперативной памяти (для 4-компонент-

ной смеси). Предполагая, что не менее 1000 шагов по времени нужно для расчета интересующего процесса, оцениваем вычислительные затраты в  $10^{12}$  (один *триллион*) ячеек×шагов.

Оптимистически оценивая производительность современного процессорного ядра в  $10^6$  ячеек×шагов/с, получаем оценку потребного времени расчета в  $10^{12}/10^6 = 10^6$  секунд (т. е. около 10 суток). Сократить время данного расчета примерно до 10 часов можно, применив ЭВМ с числом процессорных ядер порядка 32. При еще бóльших  $l_0/l_K$ , характерных для практических задач, требования к ЭВМ становятся совершенно невыполнимыми.

Подобные оценки показывают, что число арифметических операций в таком расчете пропорционально *четвертой степени* числа  $Re$ . Поэтому в настоящее время расчеты «в режиме» *DNS* выполняются в основном для идеализированных задач при весьма умеренных значениях  $Re$  и  $Re_l$  (примерно для  $Re_l < 1000$ ) в областях простой конфигурации и по упрощенным кинетическим механизмам. Получаемые решения далеки от практики, но помогают выявлять количественные зависимости в структуре турбулентных потоков и пламен. Они служат для проверки и уточнения теории турбулентности и для «калибровки» моделей, применяемых в более «огрубленных» подходах (см. ниже).

**3.3.1. Моделирование по УНС, осредненным по Рейнольдсу.** Исторически первыми полезными моделями, позволившими рассчитывать турбулентные течения при решении инженерных задач, стали модели на основе уравнений Навье – Стокса, осредненных по О. Рейнольдсу (англ. *Reynolds Averaged Navier – Stokes, RANS*). Данная методика предполагает «замыкание» уравнений с помощью модельных гипотез и полуэмпирических моделей, призванных приближенно описать соотношения, характерные для *осредненного* поля турбулентного течения.

**Правила осреднения.** Расчет «в режиме» *DNS* мог бы дать необозримый массив данных о поле турбулентного течения в  $(\mathbf{r}, t)$ , нуждающийся в обработке. Ведь полезными для *инженерной практики*, как правило, являются *осредненные* параметры процессов и потоков: средние расходы топлива и окислителя, средние температуры и состав продуктов сгорания, средние величины работы цикла. Так, расчет процессов в проточной части ГВТ ДВС предсказал бы многие существенные стороны явлений, и, как следствие — эффект *межциклового неста-*

бильности. Но, с другой стороны, и при испытаниях ДВС индикаторная мощность получается осреднением по нескольким рабочим циклам.

Всегда можно, имея полный набор данных о поле течения

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = [\rho, Y_1, \dots, Y_K, u, v, w, p, \dots]^T,$$

получить осредненные локальные значения  $\bar{\varphi}$  и образованные такими значениями осредненные поля  $\bar{\varphi}(\mathbf{r}, t)$ ; обратное неверно.

Однако расчет турбулентного течения может иметь целью именно отыскание *средних полей параметров*  $\bar{\varphi}(\mathbf{r}, t)$  или  $\bar{\varphi}(\mathbf{r})$ , что требует значительно меньших ресурсов ЭВМ, чем расчет «в режиме» *DNS*.

Различают *статистически стационарные* и *статистически нестационарные* турбулентные течения. В первом случае имеется в виду течение при неизменных по времени *граничных условиях*. Для таких течений к любому параметру потока в точке  $\mathbf{r}$  можно с успехом применить *осреднение по времени*  $t$ , выбрав для этого достаточно большой временной интервал  $\Delta t$  (рис. 3.3, а):

$$\bar{\varphi} = \bar{\varphi}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_1}^{t_1+\Delta t} \varphi(\mathbf{r}, t) dt. \quad (3.45)$$

Чертой сверху обозначается в (3.45) *осредненная по времени* величина. Поля осредненных величин  $\bar{\varphi}(\mathbf{r})$  для *статистически* стационарного турбулентного течения оказываются существенно сглаженными, ввиду сильного влияния среднестатистического *турбулентного переноса*, интенсивность которого в развитых турбулентных течениях вдали от стенок *на порядки* превышает интенсивность молекулярного переноса в гипотетическом квазиламинарном течении с тем же числом  $Re$ .

Аналог осреднения по времени для течений вида (рис. 3.3, б) — осреднение *по множеству независимых реализаций*, «осреднение по ансамблю» (англ. *ensemble averaging*):

$$\bar{\varphi}(\mathbf{r}, t_1) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varphi(\mathbf{r}, t_1)_i, \quad (3.46)$$

позволяющее (хотя бы формально) оперировать *зависящими от времени* осредненными полями  $\bar{\varphi}(\mathbf{r}, t)$ . В любом случае действительное значение характеристики потока  $\varphi(\mathbf{r}, t)$  можно представить суммой *средней* и *пульсационной* составляющих

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \bar{\varphi}(\mathbf{r}, t) + \varphi'(\mathbf{r}, t), \quad (3.47)$$

или, сокращенно,  $\varphi = \bar{\varphi} + \varphi'$ . Применив осреднение к последнему выражению с учетом того, что повторное осреднение не изменяет  $\bar{\varphi}$ , получим

$$\bar{\varphi} = \overline{\bar{\varphi} + \varphi'} = \bar{\bar{\varphi}} + \bar{\varphi}', \quad \text{откуда } \bar{\varphi}' \equiv 0,$$

т.е. среднее значение пульсационной составляющей величины равно нулю.

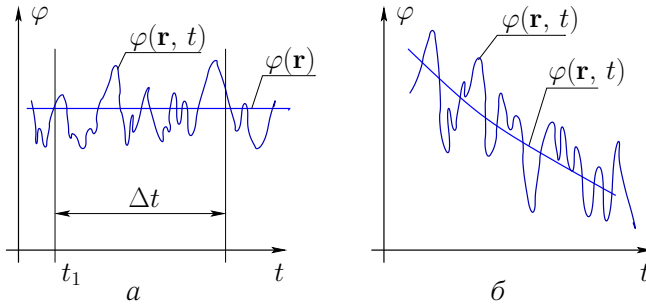


Рис. 3.3. К осреднению параметров *а)* статистически стационарного; *б)* статистически нестационарного потока

Операция осреднения с использованием плотности в качестве весовой функции (осреднение по Фавру, англ. *Favre averaging*) определяется как

$$\tilde{\varphi} = \frac{\overline{\rho\varphi}}{\bar{\rho}}, \quad \text{или } \bar{\rho}\tilde{\varphi} = \overline{\rho\varphi}. \quad (3.48)$$

Как и в случае (3.47), можно ввести разложение  $\varphi = \tilde{\varphi} + \varphi''$ , тогда условие, которому подчиняется флуктуация Фавра  $\varphi''(\mathbf{r}, t)$ , состоит в следующем:  $\overline{\rho\varphi''} \equiv 0$ . Выгода от использования средневзвешенных по плотности величин  $\tilde{\varphi}$  в том, что при таком осреднении членов вида  $\rho uv$  получаются особенно простые выражения, что ценно для моделирования турбулентных течений с переменной плотностью (реагирующих течений):

$$\overline{\rho uv} = \overline{\rho(\tilde{u} + u'')(\tilde{v} + v'')} = \overline{\rho\tilde{u}\tilde{v} + \rho\tilde{u}v'' + \rho\tilde{v}u'' + \rho u''v''} = \bar{\rho}\tilde{u}\tilde{v} + \overline{\rho u''v''}.$$

**Уравнения, описывающие осредненное течение.** Моделью осредненного турбулентного течения являются УНС или подобные им системы УЧП, подвергнутые описанной выше операции осреднения. Полученные в результате уравнения оказываются незамкнутыми, так как содержат корреляции пульсационных величин, появившиеся

в результате осреднения. Их «замыкание» — замена членов с корреляциями на модельные соотношения, дает возможность приближенно рассчитывать осредненную составляющую полей турбулентных течений с умеренными вычислительными затратами.

Уравнения, получаемые осреднением *уравнений Навье – Стокса*, носят название *УНС, осредненных по Рейнольдсу* или *уравнений Рейнольдса*. Приведем вид уравнений вида (3.8), (3.15) и (3.22), подвергнутых осреднению по Фавру (3.48).

Для ЗС массы компонента (3.6), используя (3.10) для выражения  $\rho_k v_{k dj}$ , получаем в результате осреднения

$$\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{Y}_k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \bar{\rho} \tilde{v}_j \tilde{Y}_k - \overline{\rho D_k \frac{\partial Y_k}{\partial x_j}} + \overline{\rho v_j'' Y_k''} \right) = W_k \bar{\omega}_{k\Sigma}. \quad (3.49)$$

ЗС массы смеси (3.8) после осреднения по (3.48) принимает вид

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \tilde{v}_j) = 0. \quad (3.50)$$

Для уравнения сохранения импульса (3.15) осреднение дает

$$\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{v}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \bar{\rho} \tilde{v}_j \tilde{v}_i + \overline{\Pi_{ji}''} + \overline{\rho v_j'' v_i''} \right) = \bar{\rho} \tilde{g}_i. \quad (3.51)$$

Для уравнения сохранения энергии (3.22), с учетом «закона» (3.19) получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{E}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \bar{\rho} \tilde{v}_j \tilde{h}^* - \sum_{k=1}^K h_k \cdot \overline{\rho D_k \frac{\partial Y_k}{\partial x_j}} - \varkappa \frac{\partial T}{\partial x_j} - v_i \overline{\Pi_{ij}''} + \overline{\rho v_j'' h^{*''}} \right) = \\ = \bar{\rho} \tilde{v}_j \tilde{g}_j + \bar{Q}_r. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Как и для исходных (не осредненных) ЗС, необходимо определить УС. Осреднение УС идеально-газовой смеси  $p = \rho R^0 T \sum Y_k W_k$  приводит к выражению

$$\bar{p} = R^0 \sum_{k=1}^K \left( \bar{\rho} \tilde{T} \tilde{Y}_k + \overline{\rho T'' Y_k''} \right) \frac{1}{W_k}.$$

Только пренебрегая различием молярных масс компонентов, можно вместо указанного уравнения использовать очевидное уравнение состояния для вычисления давления смеси  $\bar{p} = \bar{\rho} \bar{R} \tilde{T}$ .

Осредненные уравнения (3.50) – (3.52) содержат производные по времени и могут использоваться для описания *статистически нестационарных* течений. Напомним, в этом случае неявно принимается, что расчет по ним должен дать поле течения, осредненное не по времени (что некорректно в этом случае), а по ансамблю (набору) независимых реализаций (3.46).

**Модели турбулентного переноса.** Уравнения (3.50) – (3.52) осредненного течения в исходном виде *не замкнуты*, они содержат корреляционные члены, отражающие среднестатистическое влияние пульсационной составляющей на средние поля; число неизвестных больше числа уравнений. Для применения уравнений их следует *замкнуть*, т. е. исключить из них корреляционные члены, выразив их через искомые функции  $\bar{\rho}$ ,  $\bar{v}_j$ ,  $\bar{E}$ . Осреднение ведет к потере информации, поэтому любой подход к замыканию уравнений будет приближенным, а в его основу придется положить те или иные *модельные предположения*. Соответствующие модельные соотношения носят название *моделей турбулентного переноса* (МТП) или, еще короче, *моделей турбулентности*.

Так, член  $\overline{\rho v_j'' Y_k''}$  в (3.49) имеет смысл плотности потока массы компонента, переносимой в среднем турбулентными пульсациями, члены  $\overline{\rho v_j'' v_i''}$  в (3.51) и  $\overline{\rho v_j'' h''}$  в (3.52) — соответствуют переносу турбулентными пульсациями импульса и энергии смеси. Существующие практические МТП интерпретируют члены вида  $\overline{\rho v_j'' \varphi''}$  ( $\varphi = Y_k, v_i, h^*$ ) по аналогии с молекулярным переносом. В простейшем случае используется предположение (гипотеза) Буссинеска о пропорциональности вектора плотности потока скалярной величины, переносимого в среднем турбулентными молями, локальному значению градиента ее осредненного поля:

$$\overline{\rho v_j'' \varphi''} = -\bar{\rho} \nu_T \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x_j} \quad \text{или} \quad \overline{\rho \mathbf{v}'' \varphi''} = -\bar{\rho} \nu_T \mathit{grad} \tilde{\varphi}, \quad (3.53)$$

где  $\nu_T$  — *коэффициент турбулентного обмена* (КТО). Модельное предположение о «градиентном» переносе в турбулентном потоке хорошо «работает» для течений вида тонких сдвиговых слоев и струй, в общем же случае его универсальность является спорной: в ряде экспериментов показано, что перенос может происходить даже *против градиентов* средних величин.

Перепишем в дивергентной форме систему осредненных уравнений (3.49) – (3.52), замкнув ее с помощью модельных гипотез типа (3.53). Опустим в этих уравнениях члены с молекулярным переносом,



в таком виде данные уравнения будут пригодны для описания развитого течения реагирующей смеси вдали от стенок, где именно члены, отвечающие за средний турбулентный перенос, оказывают подавляющее влияние на поле осредненного течения:

$$\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{Y}_k}{\partial t} + \operatorname{div} \left( \bar{\rho} \tilde{\mathbf{v}} \tilde{Y}_k - \bar{\rho} \nu_T \operatorname{grad} \tilde{Y}_k \right) = W_k \bar{\omega}_{k\Sigma}, \quad k = 1, \dots, K-1, \quad (3.54)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \operatorname{div} (\bar{\rho} \tilde{\mathbf{v}}) = 0, \quad (3.55)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{\mathbf{v}}}{\partial t} + \operatorname{Div} \left[ \bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_j - \bar{\rho} \nu_T \left( \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial \tilde{u}_m}{\partial x_m} \right) \right] = \bar{\rho} \mathbf{g}, \quad (3.56)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{E}}{\partial t} + \operatorname{div} \left( \bar{\rho} \tilde{\mathbf{v}} \tilde{h}^* - \bar{\rho} \nu_T \operatorname{grad} \tilde{h}^* \right) = \bar{Q}_r + \overline{\rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{g})}. \quad (3.57)$$

КТО  $\nu_T$ , подставляемые в каждое этих уравнений, могут несколько отличаться. Соответствующие поправочные модельные коэффициенты — «турбулентные» числа Прандтля  $Pr_T$  или Шмидта  $Sc_{kT}$ , в силу аналогии процессов переноса «молями» вещества, энергии и импульса, близки к 1.

Описанного типа МТП опираются на способ расчета  $\mu_T = \bar{\rho} \nu_T$  в точке потока — *модель турбулентной вязкости* (МТВ).

**Алгебраические модели турбулентной вязкости.** МТВ различают по числу *уравнений переноса* специфических характеристик турбулентности, привлекаемых дополнительно для расчета коэффициентов  $\nu_T$  или  $\mu_T$ . Последние могут задаваться некоторой формулой (алгебраическим уравнением), не добавляющим уравнений переноса в систему. Классическая «алгебраическая» МТВ — *модель пути перемешивания* Л. Прандтля, пригодная в основном для расчета переноса в поперечном направлении в простых «сдвиговых» течениях типа пограничных слоев или струй. КТО по этой модели выражается формулой

$$\nu_T = l^2 \left| \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial y} \right|,$$

тогда плотность потока количества движения с учетом (3.53) примет вид

$$\overline{\rho \mathbf{v}'' \varphi''} = -\bar{\rho} l^2 \left| \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial y} \right| \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial y}. \quad (3.58)$$

Собственно длина перемешивания в случае свободного турбулентного течения вида тонкого сдвигового слоя может быть задана эмпирической формулой

$$l = l(x, y) = \begin{cases} \kappa y & \text{для } y \leq y_c \text{ (внутренняя зона слоя),} \\ \alpha \delta & \text{для } y_c < y \leq \delta \text{ (внешняя зона слоя),} \end{cases}$$

где, в свою очередь, толщина слоя с градиентом скорости  $\delta$  задается выражением

$$\delta = \delta(x) = \begin{cases} 0,115x & \text{для двумерного плоского потока,} \\ 0,085x & \text{для осесимметричного потока.} \end{cases}$$

Коэффициенты  $\alpha$  и  $\kappa$ , а также условная толщина  $y_c$  внутренней зоны сдвигового слоя определяются эмпирически. Для простейших условий течения вида тонкого сдвигового слоя они равны:  $\alpha = 0,075$ ,  $\kappa = 0,4$  и  $y_c = 0,1875\delta$ . Очевидный недостаток алгебраических МТВ — их неуниверсальность, резко ограничивает их применимость к РП ТД.

**Модели турбулентной вязкости с одним уравнением.** В таких моделях КТО вычисляется из одного дополнительного уравнения переноса некоторой характеристики турбулентности. Чаще всего используется *кинетическая энергия турбулентности*  $\tilde{k} = 0,5\rho \overline{\sum v_j''^2} / \bar{\rho}$ . КТО вычисляется по формуле  $\nu_t = l\sqrt{\tilde{k}}$ . Длина перемешивания  $l$  по-прежнему задается алгебраическим соотношением, и данные модели так же не универсальны в том смысле, что для разных задач должны применяться разные выражения для  $l(\mathbf{r})$ .

**Модели турбулентной вязкости с двумя уравнениями** применяются в настоящее время наиболее широко. Они добавляют в систему уравнений переноса вида (3.54) – (3.57) два дополнительных. Обычно первое из них — уравнение переноса кинетической энергии  $\tilde{k}$ . Наиболее широко применяемой моделью является  $(k - \varepsilon)$ -модель (и ее модификации), в которых вторым уравнением выступает уравнение переноса  $\tilde{\varepsilon}$  — величины, имеющей смысл *скорости диссипации кинетической энергии*  $\tilde{k}$ . Для  $\tilde{k}$  и для  $\tilde{\varepsilon}$ , которая задается формулой

$$\tilde{\varepsilon} = \nu \overline{\text{grad } \mathbf{v}''^T : \text{grad } \mathbf{v}''},$$

где  $\nu = \mu\rho$  — кинематический коэффициент вязкости, осредненные уравнения переноса могут быть получены формально и замкнуты мо-

дельными предположениями:

$$\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{k}}{\partial t} + \operatorname{div} \left( \bar{\rho} \tilde{\mathbf{v}} \tilde{k} - \bar{\rho} \nu_{\tau} \operatorname{grad} \tilde{k} \right) = G_k + \bar{\rho} \tilde{\varepsilon},$$

$$\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{\varepsilon}}{\partial t} + \operatorname{div} \left( \bar{\rho} \tilde{\mathbf{v}} \tilde{\varepsilon} - \bar{\rho} \nu_{\tau} \operatorname{grad} \tilde{\varepsilon} \right) = C_1 G_k + C_2 \bar{\rho} \frac{\tilde{\varepsilon}^2}{\tilde{k}}.$$

Для вычисления КТО привлекается «связка» Колмогорова — Прандтля

$$\nu_{\tau} = C_{\nu} \frac{\tilde{k}^2}{\tilde{\varepsilon}}.$$

Здесь  $C_{\nu} = 0,09$ ,  $C_1$  и  $C_2$  — две другие эмпирические константы модели [16]. Член  $G_k$  («генерация»  $\tilde{k}$ ) — функция средневзвешенной по плотности скорости и *тензора турбулентных напряжений*:

$$G_k = -\overline{\rho \mathbf{v}'' \otimes \mathbf{v}''} : \operatorname{grad} \tilde{\mathbf{v}}.$$

Главный недостаток моделей турбулентной вязкости (в том числе моделей с двумя уравнениями переноса, и  $(k - \varepsilon)$ -моделей) — используемое в них допущение о градиентном характере переноса. Недостатком же собственно подхода *RANS* (расчет по осредненным уравнениям) является нацеленность на получение картины течения, осредненной *по всем масштабам пульсаций* или *по всем реализациям* (для нестационарных задач). Эти недостатки подхода и моделей замыкания ограничивают их универсальность при решении сложных задач газофазного горения в технике.

Тем не менее, модели такого уровня широко используются в *CFD*-пакетах (*STAR-CD*, *CFX*, *FLUENT*, *FIRE*, *KIVA*, *PHOENICS*, *FlowVision* и др.), в том числе для химически реагирующих течений в задачах моделирования РП ТД.

За описанным подходом к расчету турбулентных течений (на основании решения осредненных уравнений) закрепилось обозначение *RANS* (*Reynolds Averaged Navier – Stokes*).

**3.3.2. Моделирование крупных вихрей.** Моделирование крупных вихрей (МКВ, англ. *Large Eddy Simulation*, *LES*) представляет собой отличный от *RANS* подход к расчету на ЭВМ турбулентных течений, при котором явному выявлению в численном расчете подлежат

относительно крупномасштабные вихревые структуры, вклад же мелко-масштабных приближено описывается («моделируется») на основе тех или иных представлений.

При расчете «в режиме» МКВ/*LES* (в отличие от «режима» *DNS*) размер расчетных ячеек все же не позволяет с достаточной точностью выявить все пространственно-временные детали моделируемого течения. Поэтому для расчета крупномасштабной составляющей течения при *LES* применяются уравнения, получаемые *фильтрацией* исходных (например, УНС). Размер ячейки  $\Delta$  при *LES* играет роль характерной пространственной ширины *фильтра*, сама операция в чем-то сходна с операцией осреднения — обе применяются к исходным уравнениям для получения «огрубленной» модели течения. «Отфильтрованные» уравнения описывают крупномасштабное (сглаженной с характерным масштабом  $\Delta$ ) *нестационарное течение* и должны «замыкаться» модельными соотношениями, в которых  $\Delta$  выступает в роли параметра.

Итак, при МКВ привлекают модели для описания мелкомасштабных «подсеточных» явлений. Учет как переноса мелкомасштабной турбулентности, так и влияния ее на химический источниковый член проводится на основе представлений о процессах на «подсеточном» масштабе, позволяющих связать статистику мелкомасштабного движения с локальными характеристиками крупномасштабного. Отметим, что модели замыкания при МКВ отражают статистику процессов более универсального характера и при этом они менее «ответственны» в целом за результат моделирования, чем модели замыкания, применяемые в рамках *RANS*.

**Уравнения крупномасштабного движения.** Если (без вывода) допустить, что при этом модификация исходных ЗС сведется к замене *мгновенных* («актуальных») значений искомых параметров потока параметрами отфильтрованного крупномасштабного движения, а также что влияние «подсеточного» движения на перенос состоит в интенсификации его мелкомасштабными пульсациями, сохраняет справедливость система уравнений

$$\frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_k v_j + \rho_k v_{k\Delta j}) = W_k \omega_{k\Sigma}, \quad k = 1, \dots, K,$$

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_j v_i + \delta_{ij} p - \Pi''_{ij}) = \rho g_i, \quad (3.59)$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \rho v_j E + \left( \sum_{k=1}^K \rho_k v_{k \text{ д}_j} h_k^* \right) + p v_j - v_i \Pi''_{ij} + q_j \right] = \rho g_j v_j + Q_r,$$

совпадающая по форме с *исходной системой ЗС*, но с заменой плотностей потоков молекулярного переноса  $\rho_k v_{k \text{ д}_j}$ ,  $\Pi''_{ij}$  и  $q_j$ , а также выражений для «источников» — в правых частях (3.59) — на их «эффективные» значения (обычный прием в практике моделирования по *RANS*). Для простоты здесь и далее не вводим специальных обозначений «надсеточных» параметров потока.

**«Градиентная» гипотеза замыкания.** Если же далее допустить, что дополнительный «подсеточный» турбулентный перенос может быть описан законами, аналогичными законам молекулярного переноса («градиентные» законы Фурье, Фика и обобщенная гипотеза Ньютона со скалярными коэффициентами переноса), то эффективные (суммарные) потоки примут вид

$$\begin{aligned} (q_j)_{\text{эфф}} &= -\varkappa_{\text{эфф}} \frac{\partial T}{\partial x_j}, \\ (\Pi''_{ij})_{\text{эфф}} &= \mu_{\text{эфф}} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial v_m}{\partial x_m} \right), \\ (\rho_k v_{k \text{ д}_j})_{\text{эфф}} &= -(\rho D_k)_{\text{эфф}} \frac{\partial Y_k}{\partial x_j}, \end{aligned}$$

где «эффективный» коэффициент получается суммированием «молекулярного» коэффициента и коэффициента, даваемого моделью переноса движениями подсеточного масштаба (англ. *Sub-Grid Model, SGM*). Приняв аналогию процессов диффузии и теплопроводности в варианте с постоянными «подсеточными» числом Прандтля  $Pr_{SGM}$  и (одинаковым для всех компонентов смеси) числом Шмидта  $Sc_{SGM}$ , «эффективные» коэффициенты теплопроводности и диффузионного переноса получим в виде

$$\begin{aligned} (\varkappa)_{\text{эфф}} &= \varkappa + \varkappa_{SGM} = \frac{\mu c_p}{Pr} + \frac{\mu_{SGM} c_p}{Pr_{SGM}}, \\ \mu_{\text{эфф}} &= \mu + \mu_{SGM}, \\ (\rho D_k)_{\text{эфф}} &= \rho D_k + (\rho D_k)_{SGM} = \frac{\mu}{Sc_k} + \frac{\mu_{SGM}}{Sc_{SGM}}. \end{aligned}$$

Таким образом, постоянные  $Pr_{SGM}$  и  $Sc_{SGM}$  являются константами модели подсчетного турбулентного переноса. В расчетах, представленных в данном пособии,  $Pr_{SGM} = Sc_{SGM} = 0,9$ .

**Модель Смагоринского для  $\mu_{SGM}$ .** Для вычисления локального значения коэффициента вязкости в модели подсчетного турбулентного переноса в хорошем приближении может служить классическая модель Смагоринского

$$\mu_{SGM} = 2\rho (C_s \Delta)^2 |\bar{S}|,$$

где  $C_s = 0,1$  — константа данной модели подсчетного переноса,  $\Delta$  — пространственная ширина фильтра, определяемая, например, как  $\sqrt[3]{\Delta x \Delta y \Delta z}$ , а  $\bar{S} = \sqrt{2S_{ij}S_{ij}}$ ,  $S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$ .

**3.3.3. Модели эффективной скорости реакций.** При численном моделировании турбулентного горения — как по осредненным уравнениям (3.54)–(3.57), так и по «отфильтрованным» вида (3.59), необходимо выразить величину  $\bar{w}_{k\Sigma}$  эффективного «выхода» компонента  $k$  в химических реакциях. Проблемой является то, что при сильной нелинейности выражений для скоростей химических реакций, в условиях значительных пульсаций температур и концентраций указанную величину (и каждую из ее составляющих  $\bar{w}_{ki}$ ) невозможно вычислить, подставляя в выражения *средние величины температур и концентраций*.

Так, для единственной необратимой бимолекулярной реакции вида « $A + B \rightarrow$  продукты»:

$$\bar{w}_A = -\overline{k_f(T) [X_A] [X_B]} \neq -k_f(\bar{T}) \overline{[X_A] [X_B]}. \quad (3.60)$$

Данная проблема, известная как *проблема замыкания химического «источника»*, актуальна в наибольшей степени для *RANS*, но также и для *LES*. Она существенно проявляется в практике моделирования РП ТД, влияя на достоверность методик расчета реагирующих течений по используемым в них *моделям турбулентного горения*.

Принципиально решение данной *проблемы замыкания  $\bar{w}_{k\Sigma}$*  в уравнениях (3.54)–(3.57) возможно при использовании **функции плотности вероятности (ФПВ)**, которая бы учитывала вклад *всевозможных сочетаний* температур и концентраций в  $\mathbf{r}$  при осреднении по времени. Так, если известна ФПВ, осредненная скорость той же реакции получа-

ется интегрированием

$$\bar{\omega}_A = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty k_f(T) [X_A] [X_B] P(T, [X_A], [X_B] \mathbf{r}) \times \\ \times dT d[X_A] d[X_B].$$

Проблема «замыкания», таким образом, сводится к проблеме знания (или моделирования, *реконструкции*) ФПВ  $P(\dots)$ . Есть различные методы определения ФПВ, пригодные для практических приложений. Наиболее гибкий способ — решение *уравнения переноса* самой ФПВ, которое получается формально из ЗС масс компонентов. Численный расчет переноса ФПВ выполняется методами Монте-Карло при дискретном представлении ФПВ множеством стохастических частиц, моделирующих различные состояния потока. При таком подходе велики затраты машинного времени, ощутимо ограничение на количество учитываемых компонентов, поэтому должны использоваться *сокращенные механизмы реакций*.

Полученные решения на базе ФПВ и упрощенных кинетических механизмов, а также экспериментальные факты говорят о том, что турбулентный перенос при горении — мощный фактор, во многом снимающий необходимость детального учета химической кинетики для достоверного воспроизведения интенсивности горения. Используя это обстоятельство, при моделировании турбулентного горения как перемешанных смесей, так и не перемешанных, по уравнениям RANS, для простоты замыкания химического источника достаточно часто оказываются полезны частные предположения, вплоть до предположения о «*бесконечно быстрой*» *скорости реакций*, точнее о том, что интенсивность горения лимитируется процессами турбулентного перемешивания, а не кинетикой.

**Модели разрушения вихрей** (англ. *Eddy Break-Up, EBU*) — модели замыкания для  $\bar{\omega}_{k\Sigma}$  на основе допущения о «быстрой химии», когда скорость переработки реагентов управляется интенсивностью турбулентной диссипации структуры пламени, процессом перемешивания («перемешанная смесь мгновенно сгорает»). Для эффективной скорости расходования горючего получается

$$\bar{\omega}_A = -\frac{\bar{\rho}C}{\bar{W}} \sqrt{\bar{Y}_A''^2} \frac{\tilde{\varepsilon}}{\bar{k}}, \quad \bar{Y}_A''^2 \leq \bar{Y}_A (1 - \bar{Y}_A), \quad (3.61)$$

где индексом  $A$  обозначается топливо,  $C$  — эмпирическая константа порядка единицы. Здесь принято модельное предположение о *структуре*

пламени как *суперпозиции* зон свежей смеси (СС) и продуктов сгорания (ПС). При этом турбулентное перемешивание ведет к образованию в объеме из фрагментов СС более мелких фрагментов, температура и состав которых существенно изменяются из-за турбулентной диффузии с ПС. В модели принято, что образовавшись, такие фрагменты быстро сгорают. Модель находит применение для расчета турбулентного горения предварительно перемешанной СС, часто в комбинации с моделями, все же принимающими во внимание химико-кинетическую сторону явления.

**Модели эффективной скорости реакций для LES.** При расчетах турбулентного горения в «режиме» МКВ проблема вида (3.60) также имеет место: в микрообъемах с высокой температурой малы концентрации реагентов и наоборот. Все же при МКВ/LES диапазоны изменения температуры и концентраций в масштабе одной ячейки уже, чем при расчете той же задачи «в режиме» RANS, а корреляции «подсеточных» пульсаций параметров внутри диапазонов приобретают более универсальный характер. В итоге подход LES надежно работает, особенно при уменьшении размера ячейки  $\Delta$  до предела, за которым наступает «режим» DNS. Стоит подчеркнуть, что адекватная «подсеточная» модель должна, по существу, отключаться (например, давать  $\mu_{\text{эфф}} \rightarrow \mu$  и т. п. для явлений переноса и  $(\omega_{k\Sigma})_{\text{эфф}} \rightarrow \omega_{k\Sigma}$  для «химического источника») при наступлении (хотя бы локально) «режима» DNS.

В результате на основе достаточно простых модельных представлений получаются SGM-модели для оценки  $(\omega_{k\Sigma})_{\text{эфф}}$ , позволяющие достичь более высокой достоверности результатов, чем «в режиме» RANS. Кроме того, в принципе поэтому же именно «режим» LES более «благоприятен» для расчета образования токсичных компонентов ПС и вообще для применения более детальных кинетических механизмов.

Подробнее о подсеточных моделях для численных расчетов турбулентного горения по технологии МКВ/LES — в [46].

## Вопросы для самоконтроля

- 1) В чем значение *гипотезы сплошности*, принимаемой при описании течений реагирующих и инертных однофазных сред?
- 2) Тот же вопрос относительно *гипотезы о локальном термодинамическом равновесии*.



- 3) Какие *эффекты* учитываются в ЗС масс компонентов? количества движения смеси? энергии смеси?
- 4) Какого вида УС нужны для «замыкания» математической модели РП ТД с представлением РТ в виде многокомпонентной смеси?
- 5) При каких условиях исходная система ЗС, описывающая пространственное течение реагирующей смеси, «переходит» в УНС?
- 6) Чем вызвана необходимость применения дополнительных моделей для описания *турбулентных эффектов* при численных расчетах течений газов и жидкостей?
- 7) Охарактеризуйте подходы к описанию турбулентных эффектов, а также гипотезы и модели для «замыкания» уравнений турбулентного течения.

## Глава 4

# Модели пониженной пространственной размерности

Рабочий процесс ТД можно моделировать в так называемой *квазиодномерной* (1D) постановке задачи о течении рабочего тела в ГВТ. В такой постановке ГВТ считается состоящим из элементов типа *каналов* и *емкостей*. Нестационарные (неустановившиеся, зависящие от времени) течения сжимаемых жидкостей на участках каналов имеют *волновой* характер. Элементы ГВТ типа *емкостей* рассматриваются как разделенные на одну или более *зон*, в которых распределение искомым параметров однородно — «нульмерное» (0D) приближение. Рассмотрение задач в технических системах как одномерных нестационарных в настоящее время широко внедрилось в *инженерную практику*, например, для расчета процессов в газоздушных трактах ДВС.

В данной главе приведена иерархия моделей, в вершине которой — описание течения в такой постановке соответствующей системой ЗС; конкретные модели элементов ГВТ выводятся в основном как следствия этой системы ЗС.

### 4.1. Законы сохранения для квазиодномерного движения

Изменение искомым параметров потока в одномерной постановке изучается в пространстве двух *независимых* переменных —  $\rho_k(x, t)$ ,  $k = 1, \dots, K$ ,  $\rho = \rho(x, t)$ ,  $u = u(x, t)$  и т. д., — координаты  $x$ , отсчитываемой вдоль слабо искривленной оси более или менее протяженного канала, а также времени  $t$ .

Вывод ЗС для течения, изучаемого в одномерном приближении, по существу, повторяет вывод их для пространственного движения применительно к контрольному объему, показанному на рис. 3.2, при наложении ограничений на форму контрольного объема и на распределение параметров потока внутри него: во-первых, контрольный объем (рис. 4.1) вписывается в участок канала с непроницаемыми для жидкости стенками, во-вторых, распределение параметров потока по попе-

речному сечению канала считается однородным. Как следствие, сильно упрощается запись объемных и поверхностных интегралов.

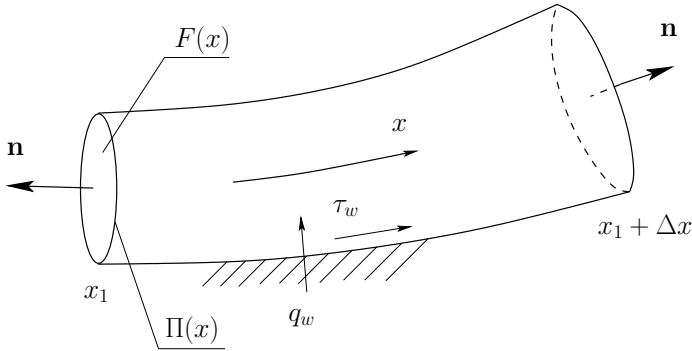


Рис. 4.1. К выводу законов сохранения для одномерного течения

Примем, что площадь  $F(x)$  и периметр  $\Pi(x)$  сечения канала — гладкие функции (в рассматриваемой области по  $x$ ). Примем также, что средние по периметру сечения напряжение трения  $\tau_w$  и плотность теплового потока  $q_w$  на стенке канала воздействуют на рабочее тело в данном сечении, а по нормали на стенку действует термодинамическое давление  $p$  в сечении. Процессы молекулярного и турбулентного переноса в продольном направлении не учитываем. Интеграл

$$\int_V \rho_k(x, t) dV = \int_{x_1}^{x_1 + \Delta x} \rho_k F dx$$

выражает массу молекул  $k$ -го компонента внутри контрольного объема при том, что  $\rho_k$  зависит в каждый момент только от  $x$ . Скорость изменения этой массы в объеме определяется разностью прихода и расхода массы компонента на левой и правой границах — в сечениях  $x_1$  и  $x_1 + \Delta x$ . При принятом положительном направлении  $x$  скорость изменения массы компонента в контрольном объеме выражается как

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_1 + \Delta x} \rho_k F dx = - (\rho_k u F)|_{x_1}^{x_1 + \Delta x}. \quad (4.1)$$

Уравнение (4.1) — интегральная форма ЗС массы  $k$ -го компонента смеси при нестационарном движении в канале ( $k = 1, \dots, K$ ).

Подобным же образом получается интегральная форма ЗС количества движения смеси, заключенной в контрольном объеме:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_1+\Delta x} \rho u F dx = & - [(\rho u^2 + p) F] \Big|_{x_1}^{x_1+\Delta x} + \\ & + \int_{x_1}^{x_1+\Delta x} \left[ p \frac{dF}{dx} + \tau_w \Pi \right] dx. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Уравнение количества движения (4.2) учитывает приход/расход количества движения от перетекания его вместе с массой смеси, движущейся со скоростью  $u$  и от импульса сил давления на левой и правой границах контрольного объема, а также от проекций сил нормального и касательного напряжений, действующих по периметру стенки со средней интенсивностью  $p$  и  $\tau_w$  соответственно.

Интегральная форма ЗС полной энергии смеси в контрольном объеме принимает вид

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_1+\Delta x} \rho E F dx = - [(\rho u E + p u) F] \Big|_{x_1}^{x_1+\Delta x} + \int_{x_1}^{x_1+\Delta x} q_w \Pi dx. \quad (4.3)$$

В уравнении энергии (4.3) рассматривается сохранение энергии, количество которой на 1 кг смеси определяется как сумма удельной внутренней и кинетической энергии смеси  $E = e + \frac{u^2}{2}$ . Правая часть (4.3) выражает приход/расход энергии на проницаемых для смеси границах контрольного объема — в форме притока внутренней и кинетической энергии смеси и совершения работы проталкивания в этих сечениях, а также в результате действия теплового потока через стенку канала со средней плотностью  $q_w(x, t)$ ,  $Bm/m^2$ .

Уравнения (4.1)–(4.3) образуют систему условий сохранения, замыкаемую уравнениями состояния и соотношениями, задающими условия трения и теплообмена со стенкой. Записанные в интегральной форме, (4.1)–(4.3) справедливы для одномерных задач даже в том случае, если искомые функции —  $\rho_k(x, t)$ ,  $\rho(x, t)$ ,  $p(x, t)$ ,  $u(x, t)$  и т. п. — не гладкие, а разрывные функции пространственной координаты и времени. Если искомые функции все же гладкие (в смысле дифференцируемости по  $x$  и  $t$ ), можно пользоваться дифференциальными аналогами уравнений, получаемыми при переходе к пределу при  $\Delta x = dx \rightarrow 0$ .

Действительно, если  $\Delta x = dx \rightarrow 0$ , то  $\int_{x_1}^{x_1+\Delta x} \mathbf{U} F dx \rightarrow \mathbf{U} F dx$ , где  $\mathbf{U} = [\rho_1, \dots, \rho_K, \rho u, \rho E]^T$ , а  $(\mathbf{F}_x F) \Big|_{x_1}^{x_1+\Delta x} \rightarrow d(\mathbf{F}_x F)$ , где

$\mathbf{F}_x = [\rho_1 u, \dots, \rho_K u, \rho u^2 + p, \rho u E + pu]^T$ , и после преобразований получается система уравнений в дифференциальной форме

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_k F}{\partial t} + \frac{\partial \rho_k u F}{\partial x} &= 0, \quad k = 1, \dots, K, \\ \frac{\partial \rho u F}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^2 + p) F}{\partial x} &= \tau_w \Pi + p \frac{dF}{dx}, \\ \frac{\partial \rho E F}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u E + pu) F}{\partial x} &= q_w \Pi, \end{aligned} \quad (4.4)$$

которую с применением символических «векторных» обозначений можно записать более компактно —

$$\frac{\partial \mathbf{U} F}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_x F}{\partial x} = \mathbf{S}, \quad (4.5)$$

где  $\mathbf{U}$  — «вектор» неизвестных и  $\mathbf{F}_x$  — «вектор» плотностей потоков (раскрыты выше), а  $\mathbf{S}$  — «вектор» объемной мощности «источников» в этих уравнениях:  $\mathbf{S} = [0, \dots, 0, \tau_w \Pi + p \frac{dF}{dx}, q_w \Pi]^T$ .

Форма, в которой записаны системы уравнений (4.4) или (4.5), называется *консервативной*, так как в ней сохраняется унаследованное от уравнений в интегральной форме представление об изменении величин масс компонентов, импульса и энергии смеси в контрольных объемах под действием *потоков* этих величин в сечениях канала и через его твердую стенку. Уравнения в этой форме, примененные формально при выводе ЧМ, позволяют получить *консервативные* методы с тем же успехом, как и при использовании интегральных уравнений (4.1)–(4.3).

Представляют интерес различные частные случаи системы (4.4). Так, если рассматриваемая газовая смесь однородна по составу ( $K = 1$ ), т. е. представляет собой однородную сжимаемую жидкость или газовую смесь, то в системе (4.4) останется лишь одно уравнение сохранения массы:

$$\frac{\partial \rho F}{\partial t} + \frac{\partial \rho u F}{\partial x} = 0,$$

а если постоянно поперечное сечение канала  $F$ , его можно вынести за знак дифференцирования и сократить, получив уравнения

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^2 + p)}{\partial x} = \tau_w \frac{\Pi}{F},$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial u (\rho E + p)}{\partial x} = q_w \frac{\Pi}{F}.$$

И наконец, если дополнительно несущественны трение и теплообмен со стенкой, будет справедлива (как мы помним, в подобластях гладкости искомым функций) система уравнений, описывающая плоские *нестационарные течения* невязкой и нетеплопроводной среды:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_x}{\partial x} = 0, \quad (4.6)$$

где  $\mathbf{U} = [\rho, \rho u, \rho E]^T$  и  $\mathbf{F}_x = [\rho u, \rho u^2 + p, \rho u E + pu]^T$ .

Упрощением «многомерных» ЗС, например (3.3), (3.13) и (3.20) получается система уравнений (3.31), совпадающая с (4.6).

**4.1.1. Характеристическая форма уравнений.** Система уравнений квазиодномерного движения газовой смеси вида (4.4), лежащая в основе описания неустановившихся течений рабочего тела тепловых двигателей в одномерном приближении, имеет смысл системы *законов сохранения* массы каждого из  $K$  компонентов, количества движения и полной внутренней энергии смеси, записанной для участка канала  $\Delta x$ .

Для численного расчета течений на «гладких» участках ГВТ по этим уравнениям могут быть использованы высокоточные явные численные методы (см. разд. 5.5). В этих методах исходные уравнения в интегральной форме (4.1)–(4.3) или же их следствия, получаемые в пределе  $\Delta x \rightarrow 0$  уравнения в дифференциальной форме (4.4), *аппроксимируются* на сетке ячеек — конечных объемов.

Система дифференциальных уравнений вида (4.4) и ряд ее частных случаев относятся к замечательному классу *систем квазилинейных гиперболических уравнений в частных производных* [22]; уравнения можно привести к так называемой *характеристической* форме, полезной при создании как эффективных методов численного решения на участках каналов, так и моделей взаимодействия нестационарного потока в трубопроводе с *местными сопротивлениями* (МС).

Для частного случая однородной ( $K = 1$ ) среды с нормальной сжимаемостью характеристическая форма системы уравнений (4.4) прини-

мает вид системы (вывод см. в [22]):

$$\frac{d^\pm u}{dt} \pm \frac{1}{\rho c} \frac{d^\pm p}{dt} = b^\pm, \quad \frac{d^0 p}{dt} - c^2 \frac{d^0 \rho}{dt} = b^0, \quad (4.7)$$

в которой

$$b^\pm = \pm \frac{c}{\rho} b_1 + b_2 \pm \frac{1}{\rho c} \left( \frac{\partial p}{\partial s} \right) b_3, \quad b^0 = \left( \frac{\partial p}{\partial s} \right) b_3,$$

где  $s$  — удельная энтропия,  $c$  — скорость звука и, в свою очередь,

$$b_1 = -\frac{\rho u}{F} \frac{dF}{dx}, \quad b_2 = \frac{\tau_w \Pi}{\rho F}, \quad b_3 = \frac{1}{T} \frac{dq}{dT},$$

где  $dq = dq_{\text{вн}} + dq_{\text{внеш}}$  — удельная теплота, подводимая к частице среды как от внутренних источников (трение о стенку), так и от внешних (теплообмен со стенкой).

Производные от искомым параметров среды  $u$ ,  $p$ ,  $\rho$  в (4.7) берутся на плоскости  $(x, t)$  в *характеристических* направлениях (рис. 4.2), определяемых как

$$\frac{d^\pm x}{dt} = u(x, t) \pm c(x, t), \quad \frac{d^0 x}{dt} = u(x, t). \quad (4.8)$$

Семейства интегральных кривых уравнений (4.8) в плоскости  $(x, t)$  — траектории индивидуальных частиц среды и элементарных упругих возмущений, распространяющихся со скоростью звука относительно частиц. Из (4.7) и (4.8) устанавливается важное свойство их решений — для конечных интервалов времени только решение в области (при  $t \geq t_D$ ), заключенной между крайними характеристическими кривыми («характеристиками»), может влиять на решение в точке  $D$ , и обратно, решение в точке  $D$  (рис. 4.2) способно влиять на решение в точках на  $(x, t)$  при  $t \geq t_D$ , заключенных между этими характеристиками; данные области получили название *область зависимости* и *область влияния*. Важным следствием этого является необходимость привлечения определенного числа соотношений (от 0 до 3) вдоль характеристик при постановке *условий совместности* или *граничных условий* на границе расчетной области [25].

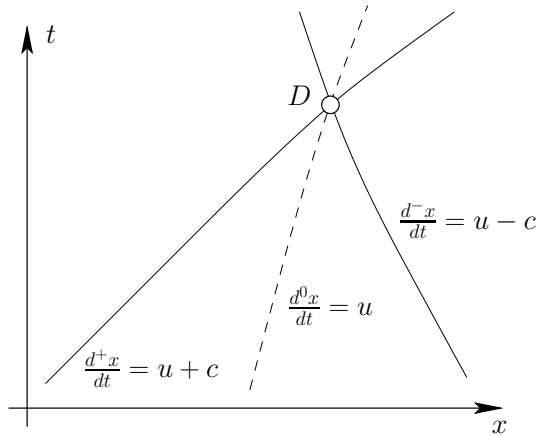


Рис. 4.2. К уравнениям одномерного движения в характеристической форме

#### 4.1.2. Газодинамические функции нестационарного течения.

В теории важен частный случай одномерного *нестационарного течения*, для которого сечение канала постоянно ( $F = \text{const}$ ), напряжения трения  $\tau_w$  и тепловые потоки на стенке  $q_w$  нулевые, в изучаемой области отсутствуют сильные разрывы искомых функций, а начальное распределение удельной энтропии  $s(x, t_0)$  однородно. Тогда правые части уравнений (4.7) обращаются в нуль, и однородным будет распределение энтропии  $s(x, t \geq t_0)$  в изучаемой области (изоэнтропное течение), при этом соотношения вдоль характеристических направлений примут особенно простой вид. В частном случае идеального совершенного газа ( $p = \rho RT$ ,  $e = c_v T$ , где  $c_v = c_p - R = \text{const}_1$ ,  $\gamma = c_p/c_v = \text{const}_2$ ) эти соотношения будут выражать постоянство *инвариантов Римана*

$$I_{\pm} = \frac{2}{\gamma - 1} c \pm u$$

вдоль соответствующих характеристических направлений.

Изменение одного из инвариантов Римана  $I_{\pm}$  в течении указанного вида на постоянную величину может наблюдаться при движении по газу простой изоэнтропной *волны конечной амплитуды* (ВКА), несущей возмущение  $I_+$  или  $I_-$ . Изменения параметров газа на фронтах таких волн выражаются газодинамическими функциями (ГДФ) [25].



Эти ГДФ удобны для записи моделей взаимодействия нестационарного потока с МС в трубопроводе.

Так, отношение статических параметров к параметрам газа, полностью заторможенного за фронтом волны, несущей возмущение инварианта Римана  $I_-$  и движущейся по невозмущенному газу *вправо*, определяется набором ГДФ от  $M = u/c$  и  $\gamma$ :

$$\begin{aligned} \frac{c}{c'} &= \alpha'(M, \gamma) = \frac{1}{1 - \frac{\gamma-1}{2}M}, \\ \frac{T}{T'} &= \tau'(M, \gamma) = [\alpha'(M, \gamma)]^2 = \frac{1}{\left(1 - \frac{\gamma-1}{2}M\right)^2}, \\ \frac{p}{p'} &= \pi'(M, \gamma) = [\alpha'(M, \gamma)]^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} = \frac{1}{\left(1 - \frac{\gamma-1}{2}M\right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

При торможении одномерного потока волной, несущей возмущение  $I_-$  и движущейся по нему *влево*, используется другая группа ГДФ:

$$\begin{aligned} \frac{c}{c''} &= \alpha''(M, \gamma) = \frac{1}{1 + \frac{\gamma-1}{2}M}, \\ \frac{T}{T''} &= \tau''(M, \gamma) = [\alpha''(M, \gamma)]^2 = \frac{1}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M\right)^2}, \\ \frac{p}{p''} &= \pi''(M, \gamma) = [\alpha''(M, \gamma)]^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} = \frac{1}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M\right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Благодаря обратимости процесса изоэнтропного торможения, данные ГДФ выражают отношения одноименных параметров состояния газа по обе стороны от фронта простой изоэнтропной ВКА; например, на фронте такой волны, движущейся по газу влево, справедливы выражения

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\pi''(M_2, \gamma)}{\pi''(M_1, \gamma)}, \quad \frac{T_2}{T_1} = \frac{\tau''(M_2, \gamma)}{\tau''(M_1, \gamma)} \text{ и т. д.,}$$

а при движении простой изоэнтропной ВКА по газу вправо —

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\pi'(M_2, \gamma)}{\pi'(M_1, \gamma)}, \quad \frac{T_2}{T_1} = \frac{\tau'(M_2, \gamma)}{\tau'(M_1, \gamma)} \text{ и т. д.,}$$

где индексы 1 и 2 обозначают постоянные параметры газа в зонах по обе стороны от *фронта* простой изоэнтروпной ВКА. Нужно отметить, что фронты простых ВКА сжатия есть именно скачки уплотнения, и применение для них ГДФ данной группы означает описание в *изоэнтропном приближении*.

**4.1.3. Модель квазистационарного течения.** Приведем сводку соотношений, используемых в моделях МС для описании аспектов *стационарного квазиодномерного течения*. Так, для однородной по составу сжимаемой жидкости ( $K = 1$ ), исключая производные по  $t$  из (4.4), получим соотношения, связывающие параметры в сечениях 1 и 2 канала в стационарном потоке:

$$(\rho u F)_2 = G_2 = G_1 = (\rho u F)_1, \quad (4.11)$$

$$[(\rho u^2 + p) F]_2 = J_2 = J_1 + \int_{x_1}^{x_2} \left[ \tau_w \Pi + p \frac{dF}{dx} \right] dx, \quad (4.12)$$

$$[(\rho u E + p u) F]_2 = (Gh^*)_2 = (Gh^*)_1 + \int_{x_1}^{x_2} q_w \Pi dx. \quad (4.13)$$

При допущении об адиабатности ( $q_w \equiv 0$ ) потока на участке между сечениями 1 и 2 из (4.11) – (4.13) получаются соотношения

$$G_2 = G_1, \quad J_2 = J_1 + \int_{x_1}^{x_2} \left[ \tau_w \Pi + p \frac{dF}{dx} \right] dx, \quad h_2^* = h_1^*. \quad (4.14)$$

Для идеального совершенного газа ( $h^* = c_p T^*$ ,  $c_p = \text{const}$ ) третье соотношение дает  $T_2^* = T_1^*$ .

Среди трех соотношений (4.14), связывающих параметры потока в сечениях 1 и 2, второе нетривиально. Поэтому для расчета течения через МС по (4.14) требуется вычислить интеграл по охватывающему МС контуру, что затруднительно. На практике для расчета потока через МС вместо уравнения сохранения количества движения используют связь полных давлений в сечениях, получаемую в общем случае продувкой МС и задаваемую критериальным уравнением, например, вида

$$\frac{p_2^*}{p_1^*} = \sigma_{12} (M_1, Re_1, \dots). \quad (4.15)$$

Полное торможение стационарного потока совершенного газа теоретически может быть выполнено в обратимом изоэнтропном ( $dq \equiv 0$ ,

$\sigma \equiv 1$ ) процессе. Отношения статических параметров в сечении к параметрам, получаемым в результате такого торможения, выражаются *газодинамическими функциями*

$$\begin{aligned} \frac{T}{T^*} &= \tau(M, \gamma) = \frac{1}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2\right)}, \\ \frac{c}{c^*} &= \alpha(M, \gamma) = [\tau(M, \gamma)]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\frac{1}{2}}}, \\ \frac{p}{p^*} &= \pi(M, \gamma) = [\tau(M, \gamma)]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \frac{1}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Газодинамическими функциями этой группы удобно связывать одноименные параметры газа в разных сечениях в энергоизолированном *стационарном течении* совершенного газа ( $T_2^* = T_1^*$ ). Так, с учетом *потерь полного давления* ( $p_2^* = \sigma_{12}p_1^*$ ) на участке  $1 - 2$ :

$$\frac{p_2}{p_1} = \sigma_{12} \frac{\pi(M_2, \gamma)}{\pi(M_1, \gamma)}, \quad \frac{T_2}{T_1} = \frac{\tau(M_2, \gamma)}{\tau(M_1, \gamma)} \text{ и т. п.}$$

В моделях течений через элементы ГВТ полезна связь числа  $M$  в некотором сечении с параметрами стационарного торможения  $p^*$  и  $T^*$ , расходом  $G$  и площадью сечения  $F$ :

$$G = \rho u F = \frac{p^* u F \tau(M, \gamma)}{R T^* \pi(M, \gamma)}.$$

После преобразований [25] получаем связь между указанными параметрами вида

$$G = m \frac{q(M, \gamma) p^* F}{\sqrt{T^*}} \quad (4.17)$$

через ГДФ

$$q(M, \gamma) = \frac{M}{\left[\frac{2}{\gamma+1} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2\right)\right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}} \quad (4.18)$$

и коэффициент  $m$ , который зависит от отношения теплоемкостей  $\gamma$  и газовой постоянной  $R$ :

$$m = \sqrt{\frac{\gamma}{R} \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}}.$$

Для воздуха с  $\gamma = 1,4$ ;  $R = 287,1 \text{ Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$  значение коэффициента  $m = 0,0404 \text{ м}^{-1}\cdot\text{с}\cdot\text{К}^{0,5}$ . Для продуктов сгорания углеводородных топлив можно брать приближенно:  $\gamma = 1,33$ ;  $R = 288,3 \text{ Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$ ;  $m = 0,0396 \text{ м}^{-1}\cdot\text{с}\cdot\text{К}^{0,5}$ .

При решении ряда задач удобнее связывать расход газа не с полным, а со статическим давлением в сечении. Тогда можно применить *газодинамическую функцию*  $y(M, \gamma) = q(M, \gamma) / \pi(M, \gamma)$ :

$$G = m \frac{y(M)pF}{\sqrt{T^*}}. \quad (4.19)$$

**4.1.4. Модель путевых потерь в канале.** Источниковый член в уравнении количества движения системы (4.4) в нашей модели «замыкается» через *коэффициент трения*  $\lambda$ , для вычисления локального значения которого имеется множество (полу-)эмпирических зависимостей; в случае газа они должны соответствовать общему *критериальному уравнению*

$$\lambda = \lambda(Re, \bar{\Delta}, Eu, \gamma, Pr, \theta),$$

где  $\bar{\Delta} = \Delta/d_3$  — относительная эквивалентная высота неровностей для шероховатой трубы и т. д. При умеренных «дозвуковых» значениях  $M$  в сечениях трубы не нужно учитывать сжимаемость, т. е. достаточно использовать зависимости вида  $\lambda = \lambda(Re, \bar{\Delta})$ . Во всех расчетах данной работы было принято  $\Delta \equiv 0$  и для развитого турбулентного режима течения в трубе применялась формула, рекомендованная в [1] для диапазона  $4 \cdot 10^3 < Re < 4 \cdot 10^6$ :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \log_{10} (Re \sqrt{\lambda}) - 0,8. \quad (4.20)$$

Локальная плотность потока импульса на стенке трубы в системе (4.4) через  $\lambda$  выражается как

$$\tau_w = -\lambda \frac{\rho u |u|}{2d_3} \cdot \frac{F}{\Pi}. \quad (4.21)$$

Локальная плотность теплового потока  $q_w$  в стенку канала может оцениваться при помощи *аналогии Рейнольдса*, тогда указанная величина, фигурирующая в уравнении энергии системы (4.4), определяется выражением

$$q_w = \lambda \frac{\rho |u|}{2d_3} c_p (T_w - T^*) \frac{F}{\Pi}. \quad (4.22)$$

Формула (4.22) получена в предположении о том, что «эффективное» число  $Pr_{\text{эфф}}$  во всем сечении равно 1. Поскольку как «молекулярные» числа  $Pr$ , так и «турбулентные»  $Pr_{\tau}$  в газе не достигают единицы, оценка теплового потока  $q_w$  по (4.22) окажется завышенной. В нашей модели в (4.22) введен поправочный коэффициент  $Pr^{0,5}$ , рекомендуемый в одной из моделей теплоотдачи для турбулентного пограничного слоя; для двухатомных газов и их смесей ( $Pr \approx 0,72$ ) значение этого коэффициента  $0,72^{0,5} \approx 0,85$ .

Традиционной для теории тепломассообмена является несколько иная формула<sup>1</sup>, а именно «закон» Ньютона – Рихмана

$$q_w = \alpha(T_w - T),$$

где  $\alpha$  — коэффициент теплоотдачи, локальное значение которого должно задаваться критериальным уравнением для числа Нуссельта (безразмерного коэффициента теплоотдачи), в общем случае имеющего вид

$$Nu = Nu(Re, \overline{\Delta}, Eu, \gamma, Pr, \theta).$$

Нетрудно видеть, что применение выражения (4.22) в пределе  $\frac{|T-T^*|}{|T-T_w|} \rightarrow 0$  означает неявное использование числа  $Nu$ , определяемого фактически критериальным уравнением  $Nu = Nu(Re, \overline{\Delta})$ .

Число  $Re$  для подстановки в указанные формулы вычисляются обычным образом:  $Re = \rho u d_s / \mu$ ; для расчета коэффициента динамической вязкости  $\mu$  можно применять формулу Сазерленда (3.43).

#### 4.1.5. Модель течения через местное сопротивление.

Для корректного расчета неустановившегося течения в трубопроводе с местными сопротивлениями (МС) квазистационарных соотношений в модели МС недостаточно. Как указывалось в подразд. 4.1.1, уравнения (4.4), моделирующие течение на «гладком» участке трубопровода (в канале), образуют систему уравнений в частных производных гиперболического типа [22], что налагает требование для модели МС учитывать (хотя бы с линеаризацией) соотношения на прибывающих к сечению МС характеристических кривых в  $(x, t)$ .

Этим требованиям к процедуре расчета потоков через МС на расчетном шаге удовлетворяет подход, развитый в работах Б.П. Рудого

<sup>1</sup> Отметим, что конкретный вид формулы — не более чем соглашение, задающее смысл коэффициента теплоотдачи  $\alpha$ .

(см., напр. [25]). В нем модель МС (более широко — узлового сечения стыка элементов трубопровода) в нестационарном потоке строится как обобщение задачи о *распаде произвольного разрыва* (РПР) параметров в исходных данных из примыкающих к МС каналов и емкостей. При решении указанной задачи простые ВКА любого знака рассматриваются как изоэнтروпные, т. е. по выражениям вида (4.9) и (4.10). Для собственно узлового сечения всегда предполагается возможность применения в наборе «закрывающих» соотношений его универсальной статической характеристики, заданной одним или более критериальными уравнениями.

Опишем последовательность расчета РПР для простейшего вида МС — элемента трубопровода, моделируемого «скачком сечения». В рамках нашего подхода необходимыми «закрывающими» соотношениями служат, во-первых, допущения о квазистационарности ( $G = \text{const}_1$ ) и энергоизолированности ( $Gh^* = \text{const}_2$ ) процесса перетекания, во-вторых, учитываются *потери полного давления* между входным и выходным сечениями МС. Критериальное уравнение, выражающее потери при течении определенной сжимаемой среды через заданное МС в указанной постановке, должно иметь, например, вид

$$\sigma = \sigma(M_T, Re_T), \quad (4.23)$$

где  $\sigma = p_{\text{вых}}^*/p_{\text{вх}}^* \leq 1$  — коэффициент сохранения (восстановления) полного давления,  $M_T$  и  $Re_T$  — числа Маха и Рейнольдса в контрольном сечении, относящемся к сечению примыкающего канала («трубы»), по возможности — на входе ( $M_T = M_{\text{вх}}, Re_T = Re_{\text{вх}}$ ) в МС. При течениях газов с большими скоростями (и числами  $Re_T$ ) зависимость (4.23) «вырождается» до

$$\sigma = \sigma(M_T) \quad (4.24)$$

и важным становится адекватный учет эффектов сжимаемости и возможного «запирания» в критическом сечении на МС, что существенно, например, при моделировании течения через органы газообмена ДВС.

Рассмотрим РПР на МС, установленном между участками каналов, имеющих в общем случае неодинаковое и переменное по длине сечение (рис. 4.3). Исходные данные задачи — параметры одномерного потока, свойств газовой смеси и площади граничных сечений примыкающих каналов:  $p_1, T_1, M_1, R_1, \gamma_1, F_1$  и  $p_5, T_5, M_5, R_5, \gamma_5, F_5$ .

Решением *автомодельной* по  $x/t$  задачи о РПР определяются параметры потока в зонах 4 и 3, а по ним — искомые плотности потоков

массы, импульса и энергии на границах крайних расчетных ячеек канала, необходимые для обновления решения в них на текущем временном шаге. Описываемая далее расчетная процедура использует приближение смеси совершенных газов; она используется в СИМ «Альбея» в качестве модели течения через МС типа ДИАФРАГМА.

В процедуре расчета РПР вначале определяется направление течения, для чего рассчитываются параметры нестационарного торможения потоков в зонах  $\bar{5}$  и  $1$ :

$$\begin{aligned} p_5'' &= p_5/\pi''(M_5, \gamma_5), & p_1' &= p_1/\pi'(M_1, \gamma_1), \\ T_5'' &= T_5/\tau''(M_5, \gamma_5), & T_1' &= T_1/\tau'(M_1, \gamma_1), \\ c_5'' &= c_5/\alpha''(M_5, \gamma_5), & c_1' &= c_1/\alpha'(M_1, \gamma_1). \end{aligned}$$

Этот (рекомендуемый в [25]) прием интерпретируется как появление в сечении МС на неопределенно малое время тонкой заслонки (рис. 4.3), после исчезновения которой, в силу обратимости торможения и разгона в простых изоэнтропных волнах, разовьется волновая картина РПР с теми же значениями искомых параметров  $p_4, T_4, M_4, R_4, \gamma_4, p_3, T_3, M_3, R_4, \gamma_3$ , как в отсутствие заслонки.

Газ при РПР будет двигаться в направлении меньшего давления нестационарно заторможенного потока. Так, при  $p_5'' > p_1'$  картина течения будет соответствовать показанной на рис. 4.3: течение в зонах 4, 3 и 2 вправо ( $M_4 > 0, M_3 > 0, M_2 > 0, \gamma_3 = \gamma_4 = \gamma_5, R_3 = R_4 = R_5, \gamma_2 = \gamma_1, R_2 = R_1$ ) — с образованием *контактной поверхности* (КП), разделяющей газы разного «происхождения». В противном случае ( $p_5'' < p_1'$ ) направление течения будет обратным, но расчетная схема (рис. 4.3) и процедура останутся в силе при перестановке параметров исходных данных.

После выражения соотношений на всех элементах структуры РПР (рис. 4.3) через газодинамические функции, получим систему уравнений, связывающих три неизвестные —  $M_4, M_3$  и  $M_2$ :

$$\frac{p_5''}{p_1'} = \frac{\pi'(M_2, \gamma_1)}{\pi''(M_4, \gamma_5)} \cdot \frac{\pi(M_4, \gamma_5)}{\pi(M_3, \gamma_5)} \cdot \frac{1}{\sigma_{43}(M_4, \dots)}, \quad (4.25)$$

$$\frac{c_5''}{c_1'} = \frac{M_2}{M_3} \cdot \frac{\alpha'(M_2, \gamma_1)}{\alpha''(M_4, \gamma_5)} \cdot \frac{\alpha(M_4, \gamma_5)}{\alpha(M_3, \gamma_5)}, \quad (4.26)$$

$$q(M_4, \gamma_5) F_5 = q(M_3, \gamma_5) F_1 \sigma_{43}(M_4, \dots). \quad (4.27)$$

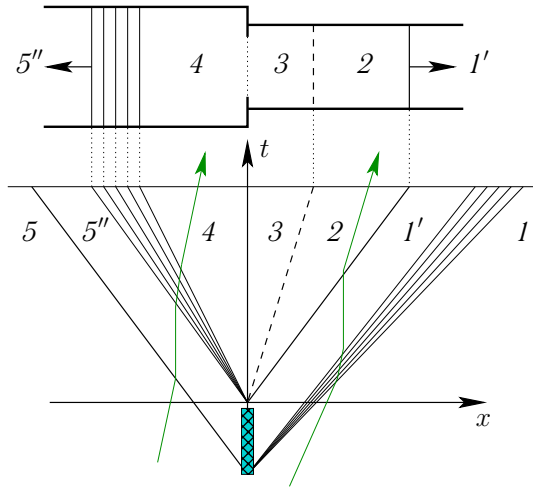


Рис. 4.3. Распад разрыва на скачке сечения (модель ДИАФРАГМА)

Решение задачи о РПР, описываемое системой (4.25) – (4.27), удобно находить, уточняя одну из неизвестных — например,  $M_4$  в интервале  $(0, M_{4\max}]$ , где  $M_{4\max}$  определяется конкретной зависимостью<sup>2</sup>  $\sigma_{43}(M_4, \dots)$ .

Полученное на очередной итерации значение  $M_4$  определяет статические параметры и параметры стационарного торможения в зоне 4:

$$p_4 = p_5'' \pi''(M_4, \gamma_5), \quad T_4 = T_5'' \tau''(M_4, \gamma_5),$$

$$p_4^* = p_4 / \pi(M_4, \gamma_5), \quad T_4^* = T_4 / \tau(M_4, \gamma_5).$$

Расход и параметры торможения в зоне 3 за МС определяются с использованием всех трех условий

$$G_3 = G_4 = m \frac{q(M_4, \gamma_5) F_5 p_4^*}{\sqrt{T_4^*}}, \quad T_3^* = T_4^*, \quad p_3^* = p_4^* \sigma_{43}(M_4),$$

<sup>2</sup>Единственность решения обеспечивается тем, что такая зависимость, полученная из аналитической модели МС, численным расчетом течения на нем или продувкой МС, монотонно убывает; причем (что для обычных условий вполне корректно) можно считать  $M_4 \leq 1$ . В дальнейшем, несколько упрощая, предполагаем, что зависимости для  $\sigma$  задаются функциями одного числа  $M$  (здесь:  $\sigma_{43}(M_4)$ ), а решения задач о РПР располагаются на ветви, где  $\sigma$  монотонно убывают. В противном случае решение найдется по модифицированной процедуре в точке ( $\sigma < \sigma(M)$ ,  $M = M_{\max}$ ), т. е. на вертикальном участке характеристики потерь, и будет соответствовать режиму «запирания» в потоке газа через МС.



число  $M_3$  находится из уравнения сохранения массы и энергии в зоне 3

$$G_3 = m \frac{q(M_3, \gamma_5) F_1 p_3^*}{\sqrt{T_3^*}},$$

после чего определяются статические параметры состояния в этой зоне и скорость потока:

$$T_3 = T_3^* \tau(M_3, \gamma_5), \quad p_3 = p_3^* \pi(M_3, \gamma_5), \quad c_3 = \sqrt{\gamma_5 R_5 T_3}, \quad u_3 = M_3 c_3,$$

затем из соотношения  $p_2 = p_3 = p_1' \pi'(M_2, \gamma_1)$  определяется число  $M_2$ , а по нему — остальные параметры потока в зоне 2:  $c_2 = c_1' \alpha'(M_2, \gamma_1)$ ,  $u_2 = M_2 c_2$ .

Итерации по  $M_4$  прекращаются по достижении равенства  $u_2 = u_3$  с заданной точностью.

Полученное решение удовлетворяет как соотношениям на фронтах простых волн и на КП, так и стационарным соотношениям на МС, описывающим течение как адиабатное и необратимое. Потоки массы  $G_i$  и энергии  $(Gh^*)_i$  в примыкающих к МС зонах 4 и 3 одинаковы, потоки импульса вычисляются из выражения  $(Gu + pF)_i$ , где  $i = 3, 4$  — индексы сечений (зон).

Если же с одной стороны от МС расположена *емкость*, а не *канал*, должна решаться задача о РПР иного вида, когда  $F_5 \rightarrow \infty$  или  $F_1 \rightarrow \infty$  (рис. 4.4). Описываемые расчетные процедуры также используют приближение *смеси совершенных газов* и реализованы в СИМ «Альбея» как модели течения через МС типа КЛАПАН.

При РПР на МС типа КЛАПАН возможны два направления течения — с истечением из емкости (рис. 4.4, а), которое реализуется при  $p_0 > p_1'$ , и с втеканием в емкость (рис. 4.4, б), реализуемом при  $p_0 < p_1'$ . Если же  $p_0 \approx p_1'$  (или сечение МС перекрыто запорным органом), принимается  $G_3 = (Gh^*)_3 = 0$ , а поток импульса в канал —  $(Gu + pF)_3 = p_1' F_1$  («тривиальный» РПР на МС).

При РПР с истечением из емкости ( $p_0 > p_1'$ , рис. 4.4, а) КП отделяет поступающий в канал газ от газа в трубопроводе. Режим *стационарного течения* через МС задается соотношениями  $T_3^* = T_0^* = T_0$  и  $p_3^* = p_0 \sigma_{03}(M_3, \dots)$ . Система уравнений модели данного МС на данном режиме течения связывает искомые числа  $M_3$  и  $M_2$  через ГДФ стационарного и нестационарного торможения:

$$\frac{p_0}{p_1'} = \frac{\pi'(M_2, \gamma_1)}{\pi(M_3, \gamma_0)} \cdot \frac{1}{\sigma_{03}(M_3, \dots)}, \quad (4.28)$$

$$\frac{c_0}{c'_1} = \frac{\alpha'(M_2, \gamma_1)}{\alpha(M_3, \gamma_0)} \cdot \frac{M_2}{M_3}. \quad (4.29)$$

Решение задачи о РПР по данной модели также удобно находить итерационным методом, уточняя, например,  $M_3$  в интервале  $(0, M_{3\max}]$ , определяемом зависимостью, задаваемой чаще всего как  $\sigma_{03}(M_3)$ . Тогда для  $M_3$  в очередном приближении вычисляются параметры в зоне 3

$$p_3 = p_0 \sigma_{03}(M_3) \pi(M_3, \gamma_0), \quad T_3 = T_0 \tau(M_3, \gamma_0),$$

а также скорость потока:  $u_3 = M_3 c_3$ , где  $c_3 = \sqrt{\gamma_0 R_0 T_3}$ .

Далее, аналогично тому, как описано выше для РПР на МС ДИА-ФРАГМА, определяются параметры в зоне 2; условие  $u_3 = u_2$  также может служить для проверки сходимости итераций.

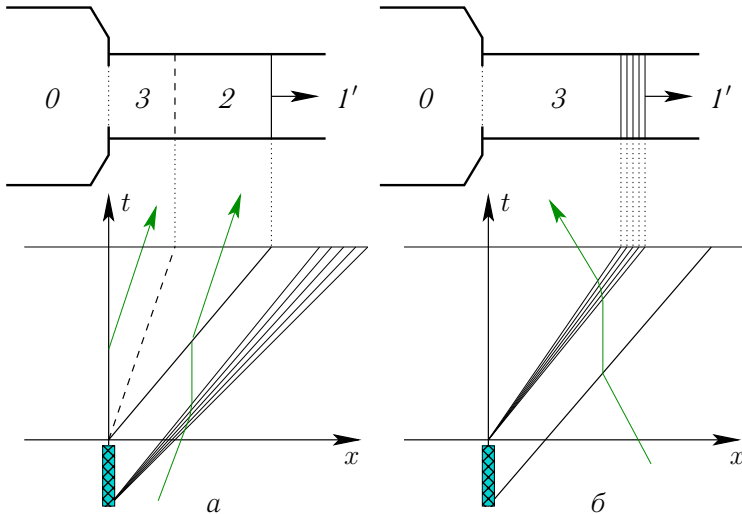


Рис. 4.4. Два режима течения при распаде разрыва на МС КЛАПАН: а) истечение из емкости; б) втекание в емкость

При РПР с втеканием в емкость ( $p_0 < p'_1$ , рис. 4.4, б), согласно принятой модели, в канале формируется простая изоэнтропная волна и для расчета течения в зоне 3 нужно найти  $M_3$  из уравнения

$$\frac{p_0}{p'_1} = \frac{\pi'(M_3, \gamma_1)}{\pi(M_3, \gamma_1)} \cdot \sigma_{30}(|M_3|, \dots). \quad (4.30)$$

Чаще всего в (4.30) подставляется зависимость в форме  $\sigma_{30} = \sigma_{30}(M_3)$  для  $\sigma_{30} = p_0^*/p_3^* = p_0/p_3^*$ . Поиск корня  $M_3$  уравнения (4.30) в интервале  $(0, |M_{3\max}|]$  должен проводиться в общем случае также итерационно.

#### 4.1.6. Модель течения через компрессор или турбину.

Обобщая модели, изложенные в подразд. 4.1.5 и описывающие взаимодействие потока со скачком сечения в ГВТ, на случай подвода энергии в форме механической работы, можно получить модели, описывающие нестационарное течение через компрессионную или расширительную машину (компрессор или турбину, рис. 4.5).

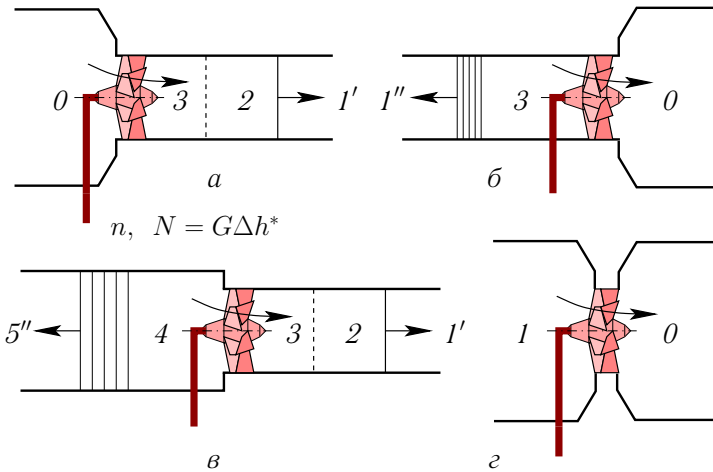


Рис. 4.5. Течение при РПР с подводом/отводом энергии в форме работы

Обобщение состоит в применении (для «замыкания» задачи) более сложной статической характеристики связующего элемента — уже не вида (4.24) для МС, а *универсальной характеристики* компрессора или турбины [36]. При течении через подобный элемент ГВТ (моделируемый здесь как *элемент-связь*) изменяются давление и температура торможения:  $p^*$  и  $T^*$ ; удельная энтропия  $s$  протекающего через машину газа возрастает ввиду термодинамической необратимости действительных процессов в ней.

Для расчета течения можно принять допущение о внешней адиабатности течения в машине, что приемлемо, как правило, для условий работы агрегатов наддува ДВС. Тогда достаточно использовать

две двухпараметрические<sup>3</sup> зависимости (составляющие *универсальную характеристику* машины), снимаемые обычно на специальном стенде. Для компрессоров могут использоваться зависимости для *степени повышения давления*  $\pi_k^*$  и *внутреннего изэнтропического КПД*  $\eta_{ks}^*$  от «режимных» параметров вида  $G_k \sqrt{T_H^*}/p_H^*$  и  $n_k/\sqrt{T_H^*}$ .

Так, если (для определенности) на рис. 4.5, в показан компрессор, требуемые зависимости имеют вид

$$\pi_k^* = \pi_k^* \left( \frac{G_4 \sqrt{T_4^*}}{p_4^*}, \frac{n}{\sqrt{T_4^*}} \right), \quad \eta_{ks}^* = \eta_{ks}^* \left( \frac{G_4 \sqrt{T_4^*}}{p_4^*}, \frac{n}{\sqrt{T_4^*}} \right), \quad (4.31)$$

где  $\pi_k^* = p_3^*/p_4^* > 1$ ,  $\eta_{ks}^* = l_{ks}^*/l_k^* < 1$  при  $G_4 = G_3$ . Для турбины применительно к рис. 4.5, в могут использоваться зависимости для показателей  $\pi_t^* = p_4^*/p_3^* > 1$  и  $\eta_{ts}^* = l_t^*/l_{ts}^* < 1$ .

Комплексные *определяющие* параметры характеризуют режим течения газа в проточной части машины (как объемного, так и динамического действия); они пропорциональны (здесь) «осевой»  $M_{4a}$  и «окружной»  $M_{4u}$  составляющим числа  $M_4$  и определяют *подобие* распределений параметров потока в проточной части машин с подобной геометрией и фиксированными свойствами РТ (а именно — совершенных газов с  $\gamma = idem, Pr = idem$ ).

Включение достаточно полной характеристики (4.31) в процедуру решения задачи о РПР представляет определенную проблему, разбор решения которой выходит за рамки данного пособия. Для справки приведем здесь лишь способ вычисления параметров потока за компрессором и турбиной с применением (4.31).

Так, для *компрессора* на рис. 4.5, в величинами расхода  $G_4$ , параметров  $p_4^*$  и  $T_4^*$ , и числа оборотов в минуту ротора  $n$  согласно (4.31) определяются  $\pi_k^*$  и  $\eta_{ks}^*$ , по которым вычисляются

$$p_3^* = \pi_k^* p_4^*, \quad l_{ks}^* = c_p T_4^* \left[ (\pi_k^*)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - 1 \right] > 0,$$

$$l_k^* = \frac{l_{ks}^*}{\eta_{ks}^*}, \quad T_3^* = T_4^* + l_k^*/c_p;$$

последнее соотношение следует из ЗС энергии для адиабатного течения через компрессор ( $h_3^* = h_4^* + l_k^*$  при  $h^* = c_p T^*$  и  $c_p = \text{const}$ ).

<sup>3</sup>В допущении об автомодельности по *Re*.

Аналогично, если течение вида рис. 4.5, в имеет место на турбине, то по характеристике вида (4.31) определяются  $\pi_T^*$  и  $\eta_{T_s}^*$ , а по ним —

$$p_3^* = \frac{p_4^*}{\pi_T^*}, \quad l_{T_s}^* = c_p T_4^* \left[ 1 - \frac{1}{(\pi_T^*)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}} \right] > 0,$$

$$l_T^* = \eta_{T_s}^* l_{T_s}^*, \quad T_3^* = T_4^* - l_T^*/c_p.$$

Расчет РПР в месте подвода/отвода механической работы в потоке, помимо согласованных газодинамических потоков в граничных сечениях на шаге, дает поток энергии (мгновенной мощности), передаваемой от ротора машины газу; применительно к рис. 4.5, в

$$N = G \Delta h_{43}^* = G_4 (h_3^* - h_4^*).$$

Модели указанного класса позволяют численно моделировать прохождение и отражение ВКА от компрессионных и расширительных машин в ГВТ, оценивать показатели работы комбинированных ДВС на различных режимах, а также моделировать переходные процессы, особенно важные в системах газотурбинного наддува с газовой связью.

#### 4.1.7. Модели течения через разветвление трубопровода.

Процедура решения задачи о РПР, описывающей взаимодействие нестационарного потока с местом разветвления гладкого канала («тройником») может быть построена с применением подхода из разд. 4.1.5. Так, для обобщенной расчетной схемы РПР на тройнике (рис. 4.6) нетрудно записать систему уравнений, связывающую (через ГДФ) соотношения параметров потока на элементах волновой картины [25]. Для замыкания этих уравнений могут формально привлекаться коэффициенты ( $\sigma_{76}$ ,  $\sigma_{73}$ , ... или  $\zeta_{76}$ ,  $\zeta_{73}$ , ...), связывающие полные давления в сечениях 7, 6 и 3.

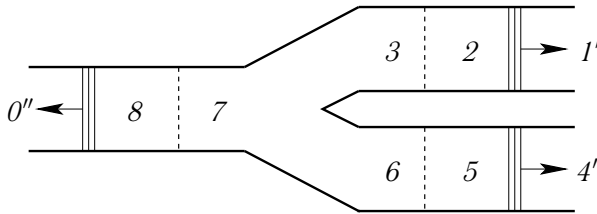


Рис. 4.6. Обобщенная расчетная схема течения при РПР на «тройнике»

Сразу укажем, что в принципе возможны шесть конкретных шаблонов течения при РПР, сводящиеся к двум расчетным схемам — когда течение непосредственно через тройник является либо *вытяжным*, либо *приточным* со стороны одного из трех каналов (с образованием одной и двух КП соответственно), не считая предельных (тривиальных) шаблонов, когда в сечении одного (или всех) каналов расход  $G$  оказывается пренебрежимо мал.

Универсальная модель РПР на тройнике должна обеспечивать выбор единственного из нескольких возможных шаблонов течения при РПР, а также адекватно определять соотношение расходов газа в каналах, составляющих тройник, и диссипацию в потоке (потери полного давления).

Сложность в том, что применительно к тройнику затруднительно как получить полную статическую характеристику разветвления на всех возможных режимах течения<sup>4</sup>, так и надежно «встроить» ее в процедуру расчета РПР. Поэтому на практике для расчетов течений на разветвлениях принимаются упрощенные модели замыкания, что отрицательно сказывается на достоверности результатов моделирования. В данном пособии приведем модель, построенную на простом допущении о равенстве статических давлений после РПР в сечениях каналов, образующих тройник:  $p_7 = p_6 = p_3$ .

**Приточный тройник при  $p_7 = p_6 = p_3$ .** Если  $p < p'_0$ ,  $p > p'_1$  и  $p > p'_4$ , образуется картина течения с волной разрежения, движущейся по газу в зоне  $0'$ , с разделением потока газа в зоне  $7$  на два потока — зоны  $3$  и  $6$ , отделяемые контактными поверхностями соответственно от зон  $2$  и  $5$ , и волн сжатия, движущихся по зонам  $1'$  и  $4'$ . В общем случае приведение шаблона течения к расчетной схеме на рис. 4.7 требует переиндексации параметров исходных данных.

При итерационном уточнении давления  $p = p_7 = p_3 = p_6$  невязка решения определяется следующим образом. Газ в зонах  $7$ ,  $3$  и  $6$  идентичен по составу и свойствам газу в зоне  $0''$ . Число  $M_7$  выражается из ГДФ  $\pi''(M, \gamma)$  как

$$M_7 = \frac{2}{\gamma_7 - 1} \left[ \left( \frac{p_0''}{p_7} \right)^{\frac{\gamma_7 - 1}{2\gamma_7}} - 1 \right],$$

<sup>4</sup> Анализ размерностей показывает необходимость использования многопараметрических зависимостей, т. е. например, применение постоянных коэффициентов потерь полного давления  $\zeta_{ij}$  в принципе неадекватно отражает особенности слияния или разделения потоков.

температура находится из  $T_7 = T_0'' \tau''(M_7, \gamma_7)$  или из уравнения изоэнтропы  $T_7 = T_0'' (p_7/p_0'')^{\frac{\gamma_7}{\gamma_7-1}}$ , температура стационарного торможения  $T_7^* = T_7/\tau(M_7, \gamma_7)$ , скорость потока  $u_7 = M_7 c_7 = M_7 \sqrt{\gamma_7 R_7 T_7}$ , расход —

$$G_7 = \rho_7 u_7 F_7 = \frac{p_7}{R_7 T_7} u_7 F_0.$$

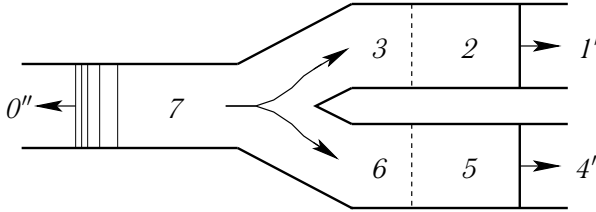


Рис. 4.7. Течение в режиме *проточного* тройника

Параметры потока и расход в зоне  $\mathcal{Z}$  при этом также рассчитываются через условие на КП  $p = p_3 = p_2$ . Число  $M_2$  определяется из ГДФ  $\pi'(M, \gamma)$  как за фронтом изоэнтропной волны сжатия

$$M_2 = \frac{2}{\gamma_1 - 1} \left[ 1 - \left( \frac{p'_1}{p_2} \right)^{\frac{\gamma_1 - 1}{2\gamma_1}} \right],$$

скорость потока  $u_2 = u_3$  (второе условие на КП) — через ГДФ  $\alpha'(M, \gamma) = [\tau'(M, \gamma)]^{1/2}$ :

$$u_3 = M_2 \frac{\sqrt{\gamma_1 R_1 T_1'}}{1 - \frac{\gamma_1 - 1}{2} M_2^2},$$

температура стационарного торможения в зоне  $\mathcal{Z}$  — такая же, как и в зоне  $\mathcal{7}$ :  $T_3^* = T_7^*$  — что следует из равенства удельных энтальпий торможения в адиабатном потоке  $h_3^* = h_7^*$  и равенств  $h^* = c_p T^*$  (для совершенных газов) и  $c_{p3} = c_{p7}$ . Наконец, статическая температура определяется выражением

$$T_3 = T_3^* - \frac{u_3^2}{2c_{p3}},$$

а расход —

$$G_3 = \rho_3 u_3 F_3 = \frac{p_3}{R_3 T_3} u_3 F_1.$$

Параметры потока и расход в зоне  $б$  определяются совершенно аналогично. В качестве минимизируемой невязки решения выступает разность расходов  $G_3 + G_6 - G_7$ .

**Вытяжной тройник при  $p_7 = p_6 = p_3$ .** Если  $p > p_0''$ ,  $p < p_1'$  и  $p < p_4'$ , образуется картина течения с волной сжатия, движущейся по газу в зоне  $0''$ , с образованием за ее фронтом зоны  $8$ , отделенной контактной поверхностью от газа в зоне  $7$ , образованной смешением потоков из зон  $3$  и  $6$ . Волны, движущиеся по зонам  $1'$  и  $4'$  — волны разрежения (рис. 4.8). Отметим, что и в этом случае для приведения к данной расчетной схеме вытяжного тройника, вообще говоря, может потребоваться переиндексация параметров.

Свойства газов в зонах  $3$  и  $6$  берутся соответственно из зон  $1'$  и  $4'$ . Число  $M$  в зоне  $3$  — из соотношения на фронте изоэнтروпной волны:

$$M_3 = \frac{2}{\gamma_3 - 1} \left[ 1 - \left( \frac{p_1'}{p_3} \right)^{\frac{\gamma_3 - 1}{2\gamma_3}} \right],$$

статическая температура в этой зоне — по уравнению изоэнтропы  $T_3 = T_1' (p_3/p_1')^{\frac{\gamma_3 - 1}{\gamma_3}}$  или  $T_3 = T_1' \tau'(M_3, \gamma_3)$ , температура стационарного торможения  $T_3^* = T_3/\tau(M_3, \gamma_3) = T_3 \left( 1 + \frac{\gamma_3 - 1}{2} M_3^2 \right)$ , скорость потока  $u_3 = M_3 c_3 = \sqrt{\gamma_3 R_3 T_3}$  и расход

$$G_3 = \rho_3 u_3 F_3 = \frac{p_3}{R_3 T_3} u_3 F_1.$$

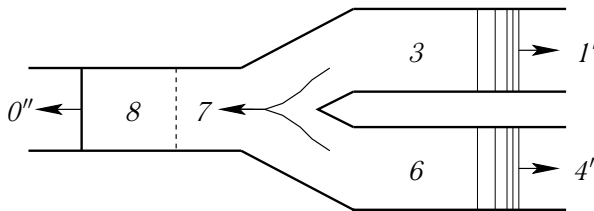


Рис. 4.8. Течение в режиме *вытяжного* тройника

Параметры потока и расход в зоне  $6$  определяются совершенно аналогично. Удельные изобарная теплоемкость и газовая постоянная в зоне  $7$  определяются с учетом соотношения расходов при слиянии по-



токов из зон 3 и 6:

$$c_{p7} = \frac{G_3 c_{p3} + G_6 c_{p6}}{G_3 + G_6}, \quad R_7 = \frac{G_3 R_3 + G_6 R_6}{G_3 + G_6},$$

а отношение теплоемкостей получается по определению как

$$\gamma_7 = \frac{c_{p7}}{c_{v7}} = \frac{c_{p7}}{c_{p7} - R_7}.$$

Так же, т. е. из уравнения энергии, находится температура торможения после слияния потоков

$$T_7^* = \frac{G_3 c_{p3} T_3^* + G_6 c_{p6} T_6^*}{G_7 c_{p7}}.$$

Число  $M$  в зоне 8 берется из соотношения на фронте изоэнтروпной волны ( $\gamma_8 = \gamma_0$ ,  $R_8 = R_0$ ,  $p_8 = p_7$ ):

$$M_8 = \frac{2}{\gamma_8 - 1} \left[ \left( \frac{p_0''}{p_8} \right)^{\frac{\gamma_8 - 1}{2\gamma_8}} - 1 \right],$$

скорость потока в этой зоне, с учетом условия на КП ( $u_7 = u_8$ ) — через ГДФ  $\alpha''(M, \gamma) = [\tau''(M, \gamma)]^{1/2}$  как

$$u_7 = M_8 \frac{\sqrt{\gamma_8 R_8 T_0''}}{1 + \frac{\gamma_8 - 1}{2} M_8},$$

статическая температура  $T_7$  — по выражению

$$T_7 = T_7^* - \frac{u_7^2}{2c_{p7}},$$

а расход —

$$G_7 = \rho_7 u_7 F_7 = \frac{p_7}{R_7 T_7} u_7 F_9.$$

В качестве невязки и в этом варианте берется разность расходов  $G_3 + G_6 - G_7$ .

**Модель, использующая нестационарную характеристику тройника.** Возможно замыкание задачи о РПР на тройнике с привлечением данных о давлениях  $p_2$  и  $p_5$  в волнах (рис. 4.6), полученных численным решением серии автомодельных задач о РПР в пространственной постановке.

Определяющими параметрами задачи о РПР являются параметры потока в зонах  $0''$ ,  $1'$  и  $4'$  (скорость потока исключается из рассмотрения переходом к «нестационарно заторможенным» параметрам). Искомые значения давлений интерполируются по табличным зависимостям для безразмерных давлений, полученных решением задач о РПР с варьированием определяющих параметров:

$$\bar{p}_2 = \bar{p}_2 \left( \bar{p}'_1, \bar{p}'_4, \bar{T}'_1, \bar{T}'_4 \right), \quad \bar{p}_5 = \bar{p}_5 \left( \bar{p}'_1, \bar{p}'_4, \bar{T}'_1, \bar{T}'_4 \right).$$

Здесь

$$\begin{aligned} \bar{p}_2 &= \frac{p_2 - p_0''}{p_0''}, & \bar{p}_5 &= \frac{p_5 - p_0''}{p_0''}, \\ \bar{p}'_1 &= \frac{p'_1 - p_0''}{p_0''}, & \bar{p}'_4 &= \frac{p'_4 - p_0''}{p_0''}, \\ \bar{T}'_1 &= \frac{T'_1 - T_0''}{T_0''}, & \bar{T}'_4 &= \frac{T'_4 - T_0''}{T_0''}. \end{aligned}$$

Располагая подобной зависимостью («нестационарной характеристикой» тройника), можно получать решение задач о РПР на шаге расчета в одномерном приближении, используя соотношения, подобные приведенным выше в данном подразделе.

Приведенные модели реализованы в МС ТРОЙНИК СИМ «Альбея».

#### **4.1.8. Модель течения при наличии бокового отверстия.**

Отверстие на стыке гладких участков трубопровода, сообщающее его с емкостью — вид разветвления, где вместо одного из трех каналов имеется емкость; сказанное в подразд. 4.1.7 о сложности строгого замыкания задачи о РПР на разветвлении относится и к данному случаю.

Приводимая ниже модель замыкания реализована в МС ЩЕЛЬ СИМ «Альбея».

Рис. 4.9 обобщает возможные конфигурации течения при РПР на элементе трубопровода рассматриваемого вида. Решением задачи о РПР определяются параметры потока в зонах 2, 3, 4 и 5, потоки масс компонентов и потоки импульса и энергии смеси в каналы, а также потоки масс и энергии в емкость на этапе расчетного шага численного расчета.

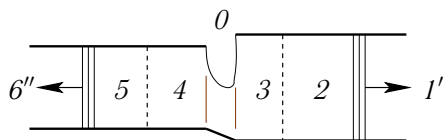


Рис. 4.9. Обобщенная расчетная схема течения при РПР на МС ЩЕЛЬ

В конкретных условиях могут иметь место четыре принципиально различных *нетривиальных* режима течения при РПР, условно называемых *приточным*, *вытяжным*, *полуприточным* и *полувытяжным* (рис. 4.10: конфигурации с двумя КП, без КП и с одной КП).

Легко видеть, что в приближении однородного совершенного газа решение автомодельной задачи о РПР на МС ЩЕЛЬ при заданной геометрии определяется параметрами нестационарного торможения в каналах  $p_6'', T_6'', p_1', T_1'$  и параметрами в емкости:  $p_0, T_0$ .

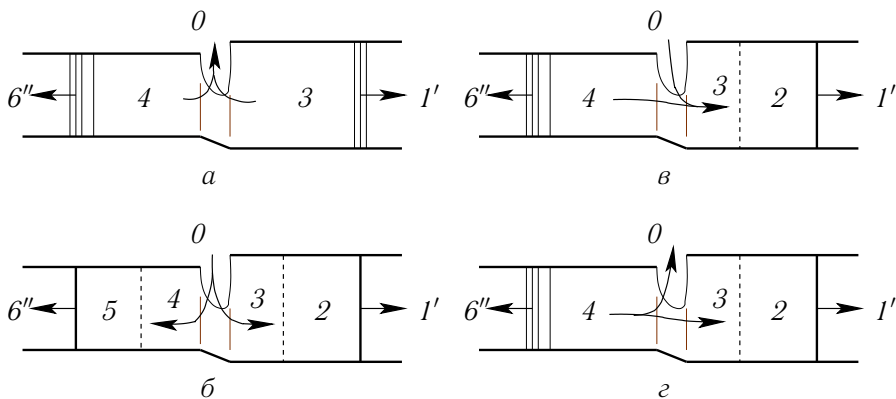


Рис. 4.10. Режимы течения при РПР на МС ЩЕЛЬ: а) вытяжной; б) приточный; в) и з) — полуприточный и полувытяжной режимы при течения вправо

При задании давлений  $p_2$  и  $p_5$  с обеих сторон от бокового отверстия («щели») отбирается *единственное* решение задачи о РПР. Давления могут приниматься по интерполированной таблице, построенной по результатам серии (вычислительных) экспериментов («нестационарной характеристики» щели). Эту характеристику — связь между *определяющими* и *определяемыми* параметрами задачи удобно обрабаты-

вать в безразмерном виде, например, как

$$\bar{p}_2 = \bar{p}_2(\bar{p}_6'', \bar{p}_1', \bar{T}_6'', \bar{T}_1'),$$

$$\bar{p}_5 = \bar{p}_5(\bar{p}_6'', \bar{p}_1', \bar{T}_6'', \bar{T}_1'),$$

где *определяемые* параметры —

$$\bar{p}_2 = \frac{p_2 - p_0}{p_0}, \quad \bar{p}_5 = \frac{p_5 - p_0}{p_0},$$

а *определяющие* —

$$\bar{p}_6'' = \frac{p_6'' - p_0}{p_0}, \quad \bar{p}_1' = \frac{p_1' - p_0}{p_0},$$

$$\bar{T}_6'' = \frac{T_6'' - T_0}{T_0}, \quad \bar{T}_1' = \frac{T_1' - T_0}{T_0}.$$

Рассмотрим последовательность расчета параметров потока в зонах 2, 3, 4 и 5 по заданным начальным данным для всех четырех режимов течения (рис. 4.10) при РПР.

Так, при  $p_6'' > p_4$  и  $p_1' > p_3$  (рис. 4.10, а) на щели реализуется *вытяжной* режим течения, для которого параметры в зоне 4 вычисляются следующим образом. По известному безразмерному давлению  $\bar{p}_5$  определяется  $p_4 = p_5 = p_0(\bar{p}_5 + 1)$ , затем  $M_4 = M_5$  — из соотношения на фронте изоэнтропной волны разрешения, движущейся влево:  $p_5 = p_6'' \pi''(M_5, \gamma_5)$ . Скорость звука  $c_4 = c_5$  в зоне 4 определяется из аналогичного соотношения  $c_5 = c_6'' \alpha''(M_5, \gamma_5)$ , после чего из уравнения состояния  $\rho_4 = \gamma p_4 / c_4^2$  находится плотность, а из тождества  $u_4 = c_4 M_4$  — скорость потока. Параметры в зоне 3 определяются аналогично по безразмерному давлению  $\bar{p}_2$  через ГДФ изоэнтропного нестационарного торможения  $\pi'(M_2, \gamma_2)$  и  $\alpha'(M_2, \gamma_2)$  или же по *инвариантам Римана*.

*Приточный* режим течения имеет место при  $p_5 > p_6''$  и  $p_2 > p_1'$  (рис. 4.10, б). Параметры в зоне 5 определяются из соотношений на изоэнтропной волне сжатия, т. е. описанным выше способом. Для расчета параметров в зоне 4 привлекаются соотношения на КП ( $p_4 = p_5$ ,  $u_4 = u_5$ ) и закон сохранения энергии при *стационарном течении* из емкости в трубопровод  $h_4^* = h_0$ , из которого для совершенного газа следует  $c_4^* = c_0$ . Из соотношения  $u_4 = M_4 c_4^* \alpha(M_4, \gamma_4)$  определяется  $M_4$ , после чего определяются скорость звука и плотность:  $c_4 = u_4 / M_4$

( $M_4 \neq 0$ ),  $\rho_4 = \gamma p_4 / c_4^2$ . Параметры потока в зонах 2 и 3 определяются аналогично.

Течение вправо реализуется, если  $p_6'' > p_4$  и  $p_2 > p_1'$ . Если при этом  $G_3 > G_4$ , то это *полуприточный* (рис. 4.10, в), а иначе — *полувытяжной* (рис. 4.10, з) режим. При течении вправо на обоих указанных режимах параметры в зоне 4 рассчитываются так, как было описано для вытяжного режима, в зоне 2 — как для приточного режима, а для определения параметров в зоне 3 может быть использован итерационный алгоритм поиска такого значения  $M_3$ , при котором выполняются одновременно соотношения на КП  $p_3 = p_2$ ,  $u_3 = u_2$  и уравнение энергии в форме  $h_3^* = h_4^*$  для полувытяжного режима ( $G_4 > G_3$ ) или в форме  $G_3 h_3^* = G_4 h_4^* + (G_3 - G_4) h_0$  в случае полуприточного режима ( $G_3 > G_4$ ). Течение при РПР *влево* (с возможностью полуприточного и полувытяжного режимов) рассчитывается точно так же.

Во всех случаях для обеспечения сохранения массы и энергии в модели потоки массы и энергии в емкость согласуются с потоками этих величин в каналах:

$$G = G_4 - G_3, \quad Gh^* = G_4 h_4^* - G_3 h_3^*.$$

## 4.2. Законы сохранения для «нульмарной» терм. системы

Еще более просты ЗС, описывающие процесс в объеме реагирующей смеси, для которого сделано (достаточно сильное) допущение об однородности распределения параметров в нем. Получается модель (пространственно однородной) *открытой термодинамической системы* (ООТС) вида, называемого иногда «емкостью мгновенного перемешивания».

Искомые ЗС не содержат производных по пространству и их, в принципе, можно получить упрощением ЗС масс и энергии из разд. 3.1, но лучше делать это применительно к контрольному объему вида, показанного на рис. 4.11, корректно учитывая специфические ограничения.

Рассмотрим однородный по параметрам объем неподвижной смеси, обменивающийся с внешней средой *массой* в виде  $J$  дискретных потоков масс смеси, и *энергией* — вместе с этими потоками массы, а также в форме работы и теплоты через участки непроницаемой для вещества поверхности, отделяющей объем от *внешней среды* (рис. 4.11).

Таким образом, кроме действия дискретных потоков, на границе контрольного объема может иметь место обмен с внешней средой энергией

в форме работы сжатия-расширения объема  $V(t)$  и в форме теплоты — по механизмам теплообмена со стенкой с температурой  $T_w(t)$  и объемного тепловыделения от внешних же источников энергии ( $dq_{\text{внеш}}/dt$  на 1 кг или  $dQ_{\text{внеш}}/dt$  на  $m$  кг смеси). Следует учесть объемные источники/стоки масс компонентов в химических реакциях.

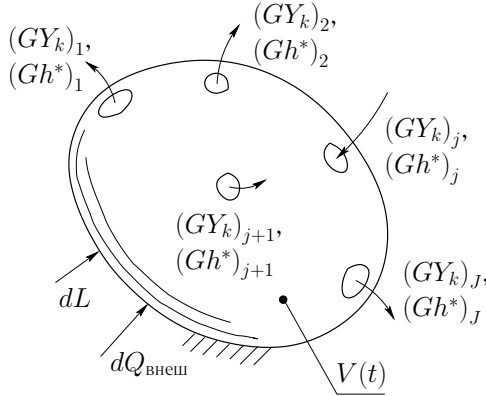


Рис. 4.11. К выводу ЗС для «емкости мгновенного перемешивания»

Тогда условия сохранения масс  $K$  компонентов смеси и внутренней энергии смеси в объеме выражаются уравнениями:

$$\frac{dm_k}{dt} = \sum_{j=1}^J (GY_k)_j + VW_k \omega_{k\Sigma}, \quad k = 1, \dots, K, \quad (4.32)$$

$$\frac{dU}{dt} = \sum_{j=1}^J (Gh^*)_j + \frac{dQ_{\text{внеш}}}{dt} - p \frac{dV}{dt}, \quad (4.33)$$

где  $U = me(\rho, T, Y_1, \dots, Y_{K-1})$ ,  $m = \sum m_k$  и  $\rho = m/V$ ; в самом частном случае однородного по составу идеального совершенного газа принимают  $U = mc_v T$ , Дж.

Итак, модели для расчета процессов в некоторой емкости, для которой принято допущение о мгновенном перемешивании, должны базироваться на системе ОДУ вида (4.32) и (4.33). Данные уравнения образуют систему ОДУ, для которой численным решением задачи Коши при конкретных условиях однозначности получают искомые зависимости во времени параметров состояния в емкости (или зоне) —

$Y_k = Y_k(t)$ ,  $T = T(t)$ ,  $p = p(t)$  и т. д. Именно эти уравнения лежат в основе моделей (в т. ч. двух- и многозонных) и программ расчета процессов в рабочих камерах ДВС моделями данного («термодинамического») уровня иерархии. На этом уровне иерархии моделей находятся многие конкретные модели РП ТД: одно- и многозонные модели процессов в РК и других элементах ГВТ, описываемых как емкости (см. разд. 4.3).

Из уравнений (4.32) и (4.33) как частные случаи выводится ряд соотношений *технической термодинамики*. Так, для закрытой (в смысле внешнего массообмена) термодинамической системы, для которой уравнение (4.32) тривиально:  $m = \text{const}$ , исключив из рассмотрения время и поделив уравнение (4.33) на постоянную массу  $m$  (т. е. переходя к *удельным* величинам), получают ЗС энергии, обычно именуемый *первым началом термодинамики*: подведенная извне к 1 кг рабочего тела теплота (здесь:  $dq = dq_{\text{внеш}}$ ) расходуется на совершение работы расширения и приращение удельной внутренней энергии:

$$dq = de + pdv. \quad (4.34)$$

Интегрированием уравнения (4.34) нетрудно получить выражения вида уравнений состояния с участием *энтропии*  $s$ , а также выражения для работы термодинамических *процессов* и *циклов*.

Так, для случая рабочего тела с уравнением состояния идеального совершенного газа  $de = c_v dT$ , где  $c_v = \text{const}_1$ ,  $v = 1/\rho$  (удельный объем),  $p = \rho RT$ ,  $c_p = c_v + R$  (закон Майера),  $c_p/c_v = \gamma = \text{const}_2$ . Согласно определению элементарного приращения удельной энтропии

$$ds = \frac{dq}{T}, \quad (4.35)$$

и можно преобразовать (4.34) как

$$\begin{aligned} ds &= \frac{dq}{T} = c_v \frac{dT}{T} + p \frac{dv}{T} = \left| dv = d\left(\frac{1}{\rho}\right) = -\frac{d\rho}{\rho^2} \right| = c_v \frac{dT}{T} - R \frac{d\rho}{\rho} = \\ &= \left| RT = \frac{p}{\rho}, \quad dT = \frac{dp}{R\rho} - \frac{pd\rho}{R\rho^2} \right| = c_v \left( \frac{dp}{\rho RT} - \frac{pd\rho}{\rho RT\rho} \right) - R \frac{d\rho}{\rho} = \\ &= \left| \rho RT = p \right| = c_v \frac{dp}{p} - (c_v + R) \frac{d\rho}{\rho} = c_v \frac{dp}{p} - c_p \frac{d\rho}{\rho} = ds. \end{aligned}$$

Интегрируя между начальным 1 и текущим состояниями термодинамического процесса, можно получить соотношение вида уравнения

состояния  $s = s(p, \rho)$

$$s = s_1 + c_v \ln \left[ \frac{p}{p_1} \left( \frac{\rho_1}{\rho} \right)^\gamma \right], \quad (4.36)$$

а выражая из (4.36) давление  $p$  явно — уравнение состояния вида  $p = p(s, \rho)$ , содержащее те же постоянные параметры свойств *однородного идеального и совершенного* газа  $c_v$  и  $\gamma$ :

$$p = p_1 \left( \frac{\rho}{\rho_1} \right)^\gamma \exp \left[ \frac{s - s_1}{c_v} \right]. \quad (4.37)$$

В технической термодинамике [5] особая роль принадлежит адиабатному изоэнтропному процессу как модели идеального (термодинамически обратимого) процесса изменения состояния частицы или всего объема рабочего тела. Если внутри однородной по составу частицы не протекают необратимые процессы и отсутствует теплообмен с внешней средой, должно выполняться условие  $dq = dq_{\text{вн}} + dq_{\text{внеш}} = 0$  и, как следствие —  $ds = 0$  и  $s = s_1$  (изоэнтропное сжатие или расширение). Из уравнения (4.37) получается

$$p = p_1 \left( \frac{\rho}{\rho_1} \right)^\gamma. \quad (4.38)$$

Уравнение (4.38) устанавливает степенной закон относительного изменения давления от относительного изменения плотности и носит название *уравнения адиабаты* Пуассона (*Poisson*). Это уравнение связывает параметры идеального совершенного газа при изоэнтропном адиабатном сжатии или расширении.

Выражения работы термодинамических процессов выводятся в курсах технической термодинамики [5]. При моделировании процессов по моделям на базе ЗС более общего вида (4.32) — (4.33), требующих численного интегрирования, работа процессов и циклов находится суммированием на расчетном шаге значений величины  $p \frac{dV}{dt}$ .

### 4.3. «Нульмерные» модели РП ТД

Модели процессов в РК ТД, использующие одно- или многозональное представление параметров в объеме РК, могут строиться на основе уравнений (4.32) — (4.33), описывающих каждую такую зону как ООТС [42, 41]. В этом разделе обсуждаются две важные модели такого класса.



**4.3.1. Базовая однозонная модель РП.** Модель процессов в РК, основанная непосредственно на ЗС (4.32)–(4.33), представляющих внутренний объем РК в виде одной «емкости мгновенного перемешивания», представляется наиболее очевидной.

Особенности модели — неучет в ней пространственной неоднородности в объеме РК ни в процессе смены рабочего тела, ни в процессе сгорания и возможность детально учесть состав РТ и механизм химических реакций.

Как следствие, данная модель может быть полезна лишь для описания процессов в РК (в основном — в ДВС), в которых несущественны потери свежего заряда при продувке, а воспламенение и выгорание смеси идут по объемному механизму (исследовательские «бомбы», РК ДВС с процессом *Homogeneous Charge Compression Ignition, HCCI*).

Вариант численной реализации данной модели в качестве учебного примера изложен в подразд. 5.3.1.

**4.3.2. Двухзонная модель РП.** Характеристики действительных процессов — смены заряда и переработки исходных компонентов *рабочего тела* (РТ) в ПС — недоступны описанию моделями данного класса из-за огрублений, вводимых как одно-, так и многозонным представлением, а также допущением о «нульмерности» распределений параметров в объеме РК (внутри каждой из зон).

Поэтому для достоверности моделирования на базе «нульмерных» ЗС нужно использовать (помимо эмпирических характеристик двух указанных выше, а также ряда других процессов) представление об объеме РК разделенном как минимум на две зоны — зону *свежего заряда* (СЗ) и зону *продуктов сгорания* (ПС).

Примем, что в базовом варианте модель такого класса описывает процесс сгорания при закрытых органах газообмена и не учитывает *диссоциацию* компонентов (РТ) в зоне ПС. Т. е. процесс в РК описывается в «замороженном» приближении, массовый состав ПС определяется как равновесный для выбранных условий по составу СЗ (*рабочей смеси*) и цикловой дозе топлива.

В свою очередь, масса, параметры и состав СЗ определяются на стадии расчета газообмена, для чего модель РК должна быть частью модели ГВТ, в котором в составе РТ учитываются как минимум два компонента — *свежая смесь* (СС)<sup>5</sup> и «чистые» ПС.

---

<sup>5</sup>При внутреннем смесеобразовании — чистый воздух.

Тогда в основу модели, описывающей процесс при закрытых органах газообмена, могут быть положены следующие ЗС, выражающие условия баланса масс и энергий двух контактирующих (при  $p_{СЗ} = p_{ПС}$ ) зон:

$$\frac{dm_{СЗ}}{dt} = -\frac{\alpha l_0}{Y_{CC}} \frac{dm_T}{dt}, \quad (4.39)$$

$$\frac{dm_{ПС}}{dt} = \frac{dm_T}{dt} - \frac{dm_{СЗ}}{dt} = \left(1 + \frac{\alpha l_0}{Y_{CC}}\right) \frac{dm_T}{dt}, \quad (4.40)$$

$$\frac{dU_{СЗ}}{dt} = h_{СЗ} \frac{dm_{СЗ}}{dt} - p \frac{dV_{СЗ}}{dt} + \left(\frac{dQ_{СЗ}}{dt}\right)_{\text{внеш}}, \quad (4.41)$$

$$\frac{dU_{ПС}}{dt} = -h_T \frac{dm_T}{dt} - h_{СЗ} \frac{dm_{СЗ}}{dt} - p \frac{dV_{ПС}}{dt} + \left(\frac{dQ_{ПС}}{dt}\right)_{\text{внеш}}, \quad (4.42)$$

образующие связанную систему ОДУ, в которой  $m_{СЗ} = \rho_{СЗ}/V_{СЗ}$  и  $m_{ПС} = \rho_{ПС}/V_{ПС}$ , кг — текущие величины массы РТ в зонах СЗ и ПС,  $U_{СЗ} = m_{СЗ} \cdot e_{СЗ}$  и  $U_{ПС} = m_{ПС} \cdot e_{ПС}$  — внутренняя энергия, Дж в этих зонах,  $Y_{CC}$  — массовая доля воздуха (СС) в составе СЗ,  $l_0$  — стехиометрическое отношение, кг возд./кг топл,  $\alpha$  — коэффициент избытка воздуха.

В модели принято простейшее допущение относительно характера сгорания при *внутреннем смесеобразовании*: считается, что поток подаваемого в РК топлива  $(dm_T/dt)(t)$  и поток необходимого для его окисления СЗ образуют ПС, попадающие в объем зоны ПС. При *внешнем смесеобразовании* в модели следует положить  $dm_T \equiv 0$  и учесть абсолютную энтальпию газообразного топлива в составе СЗ.

В (4.39)–(4.42)  $dm_T/dt$  — поток топлива, испытывающего условно полное химическое превращение; неполнота сгорания топлива может быть учтена коэффициентом  $x_z$ ; масса несгоревшего топлива в (4.39)–(4.42) для простоты не учитывается.

Для «замыкания» данной модели зависимость текущей массы топлива  $m_T(t)$ , эффективно переработанной в ПС, должна задаваться (неубывающей) табличной или алгебраической зависимостью  $m_T = x(t) \cdot m_{Tц}$ . Так, для описания сгорания в ДВС широко используется зависимость («закон» выгорания) И. И. Вибе

$$x(t) = 1 - \exp\left(C \cdot \left[\frac{t - t_y}{\Delta t_{yz}}\right]^{m+1}\right), \quad (4.43)$$

где  $t$  — время от начала сгорания,  $t_{yz}$  — заданная продолжительность сгорания, а константа  $C = \ln(1 - x_z)$ .

Мгновенный суммарный тепловой поток от стенок РК к РТ вычисляется по текущим осредненным параметрам в РК и правдоподобно распределяется между зонами:  $dQ_{\text{внеш}} = dQ_{\text{СЗ}} + dQ_{\text{ПС}}$ :

$$\frac{dQ_{\text{внеш}}}{dt} = \alpha_{\Sigma}(T_{wC} - T)F_{\text{РК}},$$

где суммарный коэффициент теплоотдачи  $\alpha_{\Sigma}$  в стенки РК может быть задан, применительно к ДВС, например, формулой Вошни (см. [21]):

$$\alpha_{\Sigma} = 0,118 \cdot 10^{-3} k_g d_{\text{ц}}^{-0,2} T^{-0,53} [p \cdot (k_m c_m + 0,308 c_u)]^{0,8}. \quad (4.44)$$

В формулу (4.44) на период газообмена (при  $\varphi \in [\varphi_b, \varphi_a]$ , см. рис. 4.12) подставляется значение  $k_m = 6,18$ , а на периоды сжатия, сгорания и расширения —  $k_m = 2,28$ . Суммарная воспринимающая тепловой поток поверхность  $F_{\text{РК}}$  задается соотношением

$$F_{\text{РК}} = F_c + N_{\text{п}} [F_{\text{п}} + \pi d_{\text{ц}} S(\varphi)],$$

где  $N_{\text{п}}$  — число поршней в цилиндре ( $N_{\text{п}} = 2$  для ДВС с ПДП),  $S(\varphi)$  — расстояние поршня(-ей) от ВМТ, определяемое его законом движения. При простом кривошипно-шатунном механизме —

$$S(\varphi) = r \cdot (1 - \cos \varphi) + l \cdot \{1 - \cos [\arcsin(\lambda \sin \varphi)]\}, \quad (4.45)$$

где  $r$  — радиус кривошипа,  $l$  — длина шатуна,  $\lambda = r/l$ .

Двухзонная модель сгорания наиболее адекватно описывает процесс в РК ДВС с внешним смесеобразованием, при наличии фронта турбулентного пламени, разделяющего зоны СЗ и ПС. Данная модель может применяться как непосредственно для расчетов, так и для решения «обратной задачи» — например, при обработке данных индицирования, в результате будет получен эмпирический «закон» выгорания в ДВС соответствующего типа.

Более адекватное описание состава и параметров в зоне ПС даст описание по модели полного или частичного равновесия в зоне (учет диссоциации). Для этого уравнение (4.40) системы нужно заменить набором уравнений сохранения химических элементов или индивидуальных компонентов смеси. В этом случае расширяются возможности применения

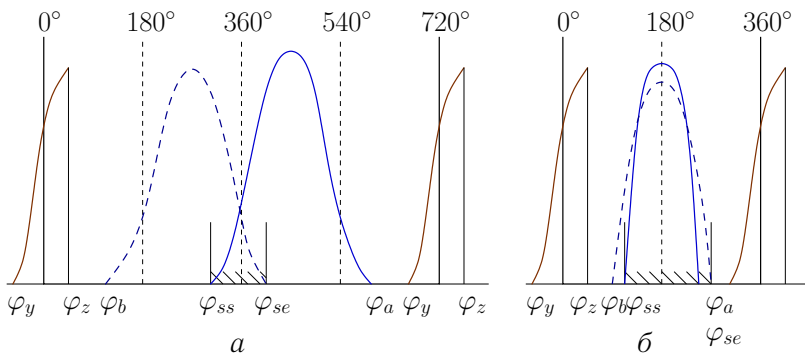


Рис. 4.12. Фазы процессов в ДВС: а) 4-тактных; б) 2-тактных

моделей, позволяющих более или менее адекватно оценивать выход основных токсичных компонентов при сгорании ( $CO$ ,  $NO_x$ ).

**Двухзонная модель продувки.** Модель «емкости мгновенного перемешивания», задаваемая уравнениями (4.32)–(4.33), неадекватно описывает течение газов через РК в период продувки и не позволяет предсказать действительный состав смеси ПС и *свежей смеси* (СС), покидающей РК в конкретных условиях в каждый момент времени.

Однако уже модель на основе *двухзонного* представления состояния в РК в принципе позволяет моделировать потери смеси при продувке, естественно, требуя эмпирическую зависимость, получаемую обработкой данных о действительном пространственном течении с турбулентным перемешиванием в РК потоков СС и ПС при продувке — *продувочную характеристику* (ПХ).

Данная двухзонная модель течения при продувке РК предполагает, что объем РК условно делится на две не смешивающиеся зоны — зону СС и зону ПС (см. рис. 4.13). Основным режимом течения считается втекание через впускные органы (в зону СС) и истечение через выпускные органы газообмена из обеих зон. А именно, предполагается, что поток смеси, входящий в РК через впускные органы, поступает в зону СС и мгновенно перемешивается с газами в этой зоне. Для потока смеси, покидающей РК через выпускные органы газообмена, состав и температура определяются моделью идеального перемешивания потоков из обеих зон, что возможно при известном соотношении объемных расходов  $Q_{СС}/Q_{ПС}$  или  $\bar{Q} = Q_{ПС}/(Q_{СС} + Q_{ПС})$ .

Относительный объемный расход из зоны СС  $\bar{Q}$  может быть задан зависимостью, как минимум, от текущего относительного объема этой зоны  $\bar{V} = V_{\text{ПС}} / (V_{\text{СС}} + V_{\text{ПС}})$ ; однопараметрическая зависимость

$$\bar{Q} = \bar{Q}(\bar{V}) \quad (4.46)$$

*продувочная характеристика* РК, привлекаемая для «замыкания» данной модели. Получение ее вычислительным экспериментом и применение в расчете газообмена двухтактного ДВС описано в разд. 7.4.

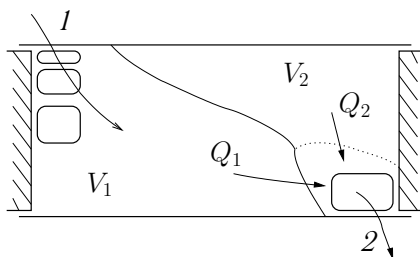


Рис. 4.13. Схема течения в двухзонной модели продувки: 1) впускные органы газообмена; 2) выпускные органы газообмена

После окончания периода перекрытия клапанов ( $\varphi \in [\varphi_{ss}, \varphi_{se}]$ ) по параметрам в зонах можно инициализировать однозонную модель РТ и начать расчет процесса «чистого» сжатия.

### Вопросы для самоконтроля

- 1) Какие ЗС применяются в качестве основы всех моделей, рассматривающих течение на элементах ГВТ ТД в «квазиодномерном» приближении?
- 2) Какие соотношения используются для «замыкания» задачи о перетекании газа через местное сопротивление («скачок сечения» канала)?
- 3) Для чего служат ГДФ вида  $\pi'(\dots)$ ,  $\pi''(\dots)$ , и т. д. в «квазиодномерных» моделях течения на стыках элементов ГВТ?
- 4) Какие соотношения могут привлекаться для «замыкания» модели нестационарного течения через сечение разветвления канала?

- 5) Какие ЗС составляют модель процессов в *однородной открытой термодинамической системе*?
- 6) При каких условиях индивидуальная частица РТ претерпевала бы *изоэнтропный процесс*?
- 7) Укажите, как вычисляется скорость переработки топлива и окислителя в ПС в РК ТД в изученной «двухзонной» модели РП?
- 8) Для чего используется *продувочная характеристика* в «двухзонной» модели течения в период продувки?

## Глава 5

# Численная реализация моделей процессов

В данной главе освещается аспект численной реализации моделей динамических процессов, а именно — методы *численного решения* лежащих в их основе *обыкновенных дифференциальных уравнений* (ОДУ) и *уравнений в частных производных* (УЧП).

Ранее (см. напр., с. 29) утверждалось, что основу ММ *нестационарных процессов* в сложных системах составляют ЗС в «нестационарной» форме, которые описывают *динамику* явлений той или иной природы. Для численного решения задач по такого вида ММ выполняется логическое разбиение (*декомпозиция*) моделируемой сложной системы на *элементы*, эволюция которых во времени описывается одним или системой ОДУ. Искомые функции (*зависимые переменные*) таких ОДУ — величины (наборы величин), характеризующие *состояние* элемента в каждый момент времени. В роли *независимой переменной* при моделировании процессов выступает время  $t$  или другая *времениподобная* координата<sup>1</sup>.

Вначале будет описан общий подход, применяемый для *дискретизации* ОДУ по  $t$  при численном решении применительно к элементу системы; в качестве примера применения подхода к реальной задаче изложена последовательность расчета по уравнениям модели процесса в РК ТД. Далее приводится материал по методам решения так называемых «*модельных*» *уравнений* в частных производных (УЧП), вводящий в проблематику и приемы моделирования процессов в системах, декомпозируемых на множество однородных элементов. А уже затем излагаются методы решения «*квазиодномерных*» (гл. 4) и «*пространственных*» (гл. 3) уравнений гидрогазодинамики.

*Численные методы* решения подобных систем УЧП строятся на соотношениях, которые являются дискретными аналогами соответствующих ЗС на сетке ячеек («конечных объемов») и явным обра-

---

<sup>1</sup> Например, угол поворота коленчатого вала  $\varphi$ .

зом связывают временную эволюцию среды (рабочего тела) на расчетном шаге в элементе (ячейке, конечном объеме) с пространственными распределениями.

### 5.1. Модель элемента — задача Коши для системы ОДУ

Начнем обсуждение численных методов (ЧМ) с методов решения ОДУ, описывающих эволюцию одиночного элементарного объекта. Задача моделирования эволюционного процесса в такой постановке есть *задача Коши*<sup>2</sup> (фр. *Cauchy*), или *задача с начальными данными*.

Например, в классической механике наиболее элементарный объект — *материальная точка*, для которой ЗС количества движения («уравнение движения») имеет вид *второго закона Ньютона*

$$\frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \sum_i \mathbf{P}_i. \quad (5.1)$$

Уравнение (5.1), дополненное очевидным кинематическим условием  $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ , в проекциях на оси  $x$ ,  $y$  и  $z$  составляют систему из 6 ОДУ первого порядка, *разрешенных относительно производных*

$$\begin{aligned} \frac{d(mv_j)}{dt} &= \sum_i P_i(mv_1, mv_2, mv_3, x_1, x_2, x_3, t), \\ \frac{dx_j}{dt} &= \frac{mv_j}{m}, \quad j = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (5.2)$$

по которым, если известны *начальные условия*  $\mathbf{v}_0$  и  $\mathbf{r}_0$  (при  $t = t_0$ ), можно рассчитать движение, т. е. определить *траекторию* материальной точки.

Произвольную систему ОДУ первого порядка, разрешенных относительно производных, запишем символически как

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} = \mathbf{S}, \quad (5.3)$$

где  $\mathbf{U}$  — «вектор» неизвестных (от англ. *unknown*) или *зависимых переменных*<sup>2</sup>,  $t$  — *независимая переменная* (время),  $\mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathbf{U}, t)$  —

---

<sup>2</sup>В выражениях вида (5.3), для систем ЗС вектор искоемых функций соответствующих систем ОДУ или УЧП  $\mathbf{U}$  именуют еще вектором «консервативных», т. е. «сохраняющихся», переменных (от англ. *conservative variables*).



«вектор» правых частей системы ОДУ, определяющих скорость изменения  $\mathbf{U}$ . «Векторные» обозначения систем ОДУ и УЧП позволяют так же кратко записывать конечно-разностные соотношения численных методов.

## 5.2. Методы численного решения задач Коши

Корректно поставленная задача Коши — задача с начальными данными  $\mathbf{U}_0$  для системы ОДУ вида (5.3) — всегда имеет *единственное решение* — *частное решение* системы ОДУ для конкретных  $\mathbf{U}_0$ . Будем называть такое решение *точным* (в отличие от *численного*, которое всегда есть решение *приближенное*).

В некоторых, редко представляющих практический интерес случаях, точное решение задачи Коши может быть найдено аналитически и выражено в форме (явных или неявных по отношению к  $\mathbf{U}$ ) зависимостей —

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}(t) \quad \text{или} \quad \mathbf{F}(\mathbf{U}, t) = 0. \quad (5.4)$$

В общем же случае требуется численное интегрирование системы ОДУ, для чего вводят *дискретизацию по времени*, т.е. представление *процесса* в расчете как последовательности *состояний* (с. 29), разделенных малыми, но конечными временными интервалами  $\Delta t^n = t^{n+1} - t^n$ ; в простейшем случае  $\Delta t^n = \text{const}$  при равномерной по  $t$  сетке узловых точек (рис. 5.1). При численном решении ОДУ отыскиваются не непрерывные функции вида (5.4), а функции *сеточные*, т.е. заданные таблично на дискретном множестве узловых точек сетки. В ЧМ производные, входящие в ОДУ, *аппроксимируются* (представляются приближенно) конечно-разностными выражениями через величины в узлах сетки. Свойство ЧМ аппроксимировать уравнения на сетке — необходимое условие *сходимости* — неограниченного стремления численного решения к точному  $\mathbf{U}^n \rightarrow \mathbf{U}(t^n)$  в пределе  $\Delta t \rightarrow 0$ , т.е. при неограниченном уменьшении шага узлов сетки по *независимой переменной*.

**Метод Эйлера.** Выражая производные в (5.3) для узла сетки  $t^n$  «разностями вперед»

$$\left(\frac{d\mathbf{U}}{dt}\right)^n = \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\Delta t} + O(\Delta t), \quad (5.5)$$

и вычисляя правые части системы ОДУ в узле сетки  $t^n$ , получаем формулу известного одноэтапного *метода Эйлера* для обновления «векто-

ра»  $\mathbf{U}$  состояния элементарного объекта на шаге от  $t^n$  до  $t^{n+1}$ :

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^n + \Delta t \cdot \mathbf{S}(\mathbf{U}^n, t^n). \quad (5.6)$$

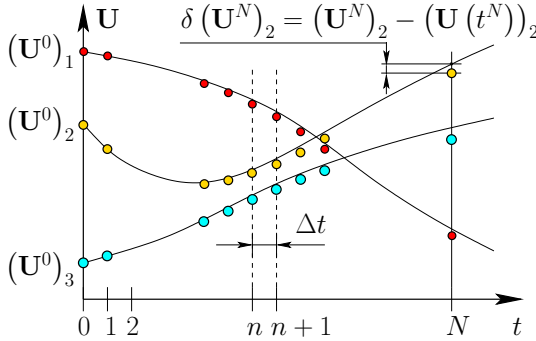


Рис. 5.1. К численному решению задачи Коши для систем ОДУ

Формула метода Эйлера (5.6) *явным образом* выражает значение неизвестной  $\mathbf{U}^{n+1}$  (в узле  $t^{n+1}$ ) через уже известные величины (в узле  $t^n$ ). Методы численного интегрирования ОДУ и УЧП, обладающие этим свойством, называются *явными*.

Выражение (5.6) отягощено погрешностью<sup>3</sup> формулы (5.5), вызванной однократным вычислением  $\mathbf{S}$  в «старом» узле (на старом «временном слое»). Если на применяемой сетке изменения искомых функций малы, зависимость погрешности  $\delta\mathbf{U}^n = \mathbf{U}^n - \mathbf{U}(t^n)$  от  $\Delta t$  в теории и на практике стремится к линейной, т. е. при достаточно малых  $\Delta t \rightarrow 0$  она ведет себя как  $C\Delta t$  — одночлен первой степени с заранее неизвестным коэффициентом.

**Пример из динамики материальной точки.** Покажем численное решение задачи Коши с начальными данными  $\mathbf{U}^0 = \mathbf{U}(t_0)$  на примере системы ОДУ (5.2) — модели динамики материальной точки. В данном случае  $\mathbf{U} = [mv_x, mv_y, mv_z, x, y, z]^T$ , а правые части —

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathbf{U}, t) = \left[ \sum_i (P_x)_i, \sum_i (P_y)_i, \sum_i (P_z)_i, v_x, v_y, v_z \right]^T.$$

<sup>3</sup>Эта погрешность обращается в нуль только в частном случае *кусочно-постоянной* зависимости  $\mathbf{S}(\mathbf{U}, t) = \text{const}$ .

Алгоритм численного решения задачи Коши явным одноэтапным методом (5.6) схематично показан на рис. 5.2. При расчете этим методом по обновленным значениям всех «компонент» «вектора» *консервативных* переменных  $\mathbf{U}^{n+1}$  вычисляются прочие характеристики нового состояния; так, для динамики материальной точки

$$\begin{aligned} v_x^{n+1} &= U_1^{n+1}/m, & x^{n+1} &= U_4^{n+1}, \\ v_y^{n+1} &= U_2^{n+1}/m, & y^{n+1} &= U_5^{n+1}, \\ v_z^{n+1} &= U_3^{n+1}/m, & z^{n+1} &= U_6^{n+1}. \end{aligned}$$

Зависимые переменные  $\mathbf{p} = [v_x, v_y, v_z, x, y, z]^T$  (называемые *первичными*, англ. *primitive variables*) обычно более удобны как для задания НУ, так и для вывода данных о состоянии элемента на расчетном шаге; именно они непосредственно используются в процедурах вычисления правых частей системы ОДУ.

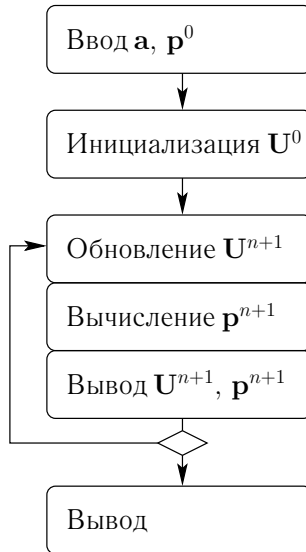


Рис. 5.2. К расчету эволюции элемента явным одноэтапным методом

Исходный текст программы численного решения системы ОДУ вида (5.2) *методом Эйлера* приведен на с. 253.

**Методы более высоких порядков.** Погрешность, вызванную *дискретизацией* по  $t$ , можно уменьшить либо уменьшением шага  $\Delta t$ , ли-

бо применяя методы, обеспечивающие более высокий *порядок аппроксимации* исходных ОДУ. В двухэтапной модификации *метода Эйлера* правые части системы ОДУ вычисляются дважды на шаге; обновление состояния элемента на первом и втором (уточняющем) этапах проводится по различным выражениям:

$$\mathbf{U}^{\overline{n+1}} = \mathbf{U}^n + \Delta t \cdot \mathbf{S}(\mathbf{U}^n, t^n), \quad (5.7)$$

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^n + \frac{1}{2}\Delta t \left[ \mathbf{S}(\mathbf{U}^n, t^n) + \mathbf{S}(\mathbf{U}^{\overline{n+1}}, t^{\overline{n+1}}) \right], \quad (5.8)$$

где  $t^{\overline{n+1}} = t^{n+1}$ ; обеспечивается *второй порядок* аппроксимации ОДУ или системы ОДУ по  $t$  ( $\delta \mathbf{U}^n \propto C_2 \Delta t^2$ ), так как, согласно (5.8), обновление до  $\mathbf{U}^{n+1}$  проводится по среднему значению  $\mathbf{S}$  за период  $[t^n, t^{n+1}]$ , которое оценивается средним арифметическим от  $\mathbf{S}^n$  и  $\mathbf{S}^{\overline{n+1}}$ . Это нетрудно показать, преобразовав (5.7) – (5.8) с использованием обозначений  $t^{(1)} = t^{\overline{n+1}} = t^{n+1}$  и  $\mathbf{U}^{(1)} = \mathbf{U}^{\overline{n+1}}$ :

$$\mathbf{U}^{(1)} = \mathbf{U}^n + \Delta t \cdot \mathbf{S}(\mathbf{U}^n, t), \quad (5.9)$$

$$\mathbf{U}^{n+1} = \frac{1}{2}\mathbf{U}^n + \frac{1}{2} \left[ \mathbf{U}^{(1)} + \Delta t \cdot \mathbf{S}(\mathbf{U}^{(1)}, t^{(1)}) \right]. \quad (5.10)$$

Таким образом, модификация алгоритма, показанного на рис. 5.2, сводится в данном случае к добавлению второго, уточняющего этапа обновления искомых величин на новом временном слое.

Еще более высокие порядки обеспечивают методы того же класса *явных многоэтапных одношаговых* методов, получившие наименование *методов Рунге – Кутты*. Так, *третий порядок аппроксимации* по времени на равномерной по  $t$  сетке достигается в трехэтапной схеме (с двумя промежуточными состояниями):

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^{(1)} &= \mathbf{U}^n + \Delta t \cdot \mathbf{S}(\mathbf{U}^n, t^n), \\ \mathbf{U}^{(2)} &= \frac{3}{4}\mathbf{U}^n + \frac{1}{4} \left[ \mathbf{U}^{(1)} + \Delta t \cdot \mathbf{S}(\mathbf{U}^{(1)}, t^{(1)}) \right], \\ \mathbf{U}^{n+1} &= \frac{1}{3}\mathbf{U}^n + \frac{2}{3} \left[ \mathbf{U}^{(2)} + \Delta t \cdot \mathbf{S}(\mathbf{U}^{(2)}, t^{(2)}) \right]. \end{aligned} \quad (5.11)$$

В *методе Рунге – Кутты* третьего порядка (5.11) правые части (5.3) вычисляются трижды за шаг — в «старом» узле при  $t^n$ , в новом узле при  $t^{(1)} = t^{n+1}$  и в промежуточной точке с  $t^{(2)} = t^n + \frac{1}{2}\Delta t$ . Весовые коэффициенты правых частей в итоге составляют соответственно 1/6, 1/6 и 2/3, что нужно учитывать при вычислении интегральных сумм с применением данного метода численного интегрирования систем ОДУ.

### 5.3. Численная реализация «нульмерных» моделей РП ТД

Применим описанные методы решения систем ОДУ к «нульмерным» моделям РП ТД (с. 136).

**5.3.1. Численная реализация базовой однозонной модели.** Система ОДУ (4.32)–(4.33) модели типа «емкости мгновенного перемешивания», обсуждаемая в 4.3.1 как базовая модель процесса в РК ТД, может решаться численно в следующей последовательности.

Пусть применяется двухэтапный *метод Эйлера* в варианте (5.9), (5.10), тогда *предварительные* значения  $\mathbf{U}^{(1)}$  вектора неизвестных

$$\mathbf{U} = [m_1, \dots, m_K, U]^T \quad (5.12)$$

определяются как

$$m_k^{(1)} = m_k^n + \Delta t \left[ \sum_{j=1}^J (GY_k)_j^n + V(t^n) W_k (\omega_{k\Sigma})^n \right], \quad k = 1, \dots, K,$$

$$U^{(1)} = U^n + \Delta t \left[ \sum_{j=1}^J (Gh^*)_j + \left( \frac{dQ_{\text{внеш}}}{dt} \right) - p \left( \frac{dV}{dt} \right) \right]^n,$$

а *окончательные* значения  $\mathbf{U}^{n+1}$  — как

$$m_k^{n+1} = \frac{m_k^n}{2} + \frac{m_k^{(1)}}{2} + \frac{\Delta t}{2} \left[ \sum_{j=1}^J (GY_k)_j^{(1)} + V(t^{(1)}) W_k (\omega_{k\Sigma})^{(1)} \right],$$

$$U^{n+1} = \frac{U^n}{2} + \frac{U^{(1)}}{2} + \frac{\Delta t}{2} \left[ \sum_{j=1}^J (Gh^*)_j + \left( \frac{dQ_{\text{внеш}}}{dt} \right) - p \left( \frac{dV}{dt} \right) \right]^{(1)}.$$

На каждом из двух этапов метода обновленный «вектор» *консервативных переменных*  $\mathbf{U}$  служит для обновления *первичных переменных*. Так, после обновления  $\mathbf{U}^{n+1}$  на втором этапе вычисляются: масса смеси  $m^{n+1} = \sum_{k=1}^K m_k^{n+1}$ , ее плотность  $\rho^{n+1} = m^{n+1}/V(t^{n+1})$  и массовый состав  $Y_k^{n+1} = m_k^{n+1}/m^{n+1}$ , а также величина удельной внутренней энергии  $e^{n+1} = U^{n+1}/m^{n+1}$ . Далее из *калорического УС* смеси определяется температура  $T^{n+1}$ :  $e^{n+1} = e(\rho^{n+1}, T^{n+1}, Y_1^{n+1}, \dots)$ , а из *термического УС* — давление:  $p^{n+1} = p(\rho^{n+1}, T^{n+1}, Y_1^{n+1}, \dots)$ .

Найденные значения первичных переменных

$$\mathbf{p} = [Y_1, \dots, Y_K, \rho, T, p, \dots]^T$$

на каждом этапе требуются для вычисления нового приращения  $\mathbf{U}$ : по (5.9) на первом этапе и по (5.10) — на втором этапе данного *метода*<sup>4</sup>.

Индикаторная работа цикла вычисляется суммированием по шагам численного расчета:  $L_i = \sum_N \Delta L^n$  — с учетом мощности изменения объема на обоих этапах метода:

$$\Delta L^n = \frac{\Delta t}{2} \left[ \left( p \frac{dV}{dt} \right)^n + \left( p \frac{dV}{dt} \right)^{(1)} \right].$$

**5.3.2. Численная реализация двухзонной модели.** Обновление параметров в зонах РК по двухзонной модели процесса на основе системы ОДУ (4.39) – (4.42), где

$$\mathbf{U} = [m_{C3}, m_{PC}, U_{C3}, U_{PC}]^T, \quad (5.13)$$

также может быть численно реализовано двухэтапным *методом Эйлера* вида (5.9), (5.10). Здесь также на каждом из двух этапов расчетного шага по результатам обновления величин  $\mathbf{U}$  — массы и внутренней энергии смеси в каждой зоне (5.13) — вычисляются «*первичные*» *переменные*, необходимые для вычисления правых частей системы ОДУ на следующем этапе. Так, после обновления решения для зоны ПС — на временной слой  $(n + 1)$  — привлекаются оба УС идеально-газовой смеси:

$$\begin{aligned} \rho_{PC}^{n+1} &= m_{PC}^{n+1} / V_{PC}^{n+1}, \quad e_{PC}^{n+1} = U_{PC}^{n+1} / m_{PC}^{n+1}, \\ T_{PC}^{n+1} &= T(e_{PC}^{n+1}), \quad p_{PC}^{n+1} = \rho_{PC}^{n+1} R_{PC} T_{PC}^{n+1}. \end{aligned}$$

Описанная выше последовательность отвечает расчету параметров в зоне ПС в «замороженном» *приближении* — при заданном компонентном составе в зоне.

Расчет состояния в зоне ПС на расчетном шаге в *равновесном приближении* сводится к применению процедуры, обобщающей процедуру использования калорического УС смеси заданного состава. Передавая

---

<sup>4</sup>Следует заметить, что если кинетический механизм обладает «жесткостью» (характерные времена реакций различаются на порядки), для численного решения уравнений модели нужно применять специальные методы решения «жестких» систем ОДУ.

в такую процедуру (на шаге, этапе или итерации) плотность, удельную внутреннюю энергию смеси и массив массовых долей элементов, получим давление и температуру, а также массив массовых долей компонентов для условий химического равновесия, см. [39].

Учет взаимной работы изменения объема двух зон приводит к обновлению вектора  $\mathbf{U}$  в процессе итераций, проводимых до выполнения условия  $p_{СЗ} = p_{ПС}$ . Второй *порядок аппроксимации* по  $t$  обеспечивается при оценке приращений объемов зон на этапах конечными разностями простого вида. Например, для зоны ПС

$$\left(\frac{dV_{ПС}}{dt}\right)^n = \frac{V_{ПС}^{(1)} - V_{ПС}^n}{\Delta t} + O(\Delta t^2)$$

— на первом этапе двухэтапного *метода Эйлера* и

$$\left(\frac{dV_{ПС}}{dt}\right)^{(1)} = \frac{V_{ПС}^{n+1} - V_{ПС}^n}{\Delta t} + O(\Delta t^2)$$

— на втором (уточняющем) этапе обновления.

Расходуемая за расчетный шаг «эффективная» порция топлива  $m_{\Gamma}^n$  известна в начале расчетного шага, так как задается интегрального вида зависимостью  $x(t)$  или  $x(\varphi)$ , например (4.43):

$$\Delta m_{\Gamma}^n = m_{\Gamma_{ц}} \Delta x^n = m_{\Gamma_{ц}} [x(\varphi^{n+1}) - x(\varphi^n)],$$

где  $m_{\Gamma_{ц}}$  — *цикловая доза* подаваемого в РК топлива, кг (или масса топлива в объеме СЗ, при внешнем смесеобразовании).

Тогда приращения масс зон на расчетном шаге в процессе сгорания при закрытых органах газообмена составят

$$\Delta m_{СЗ}^n = -\frac{\alpha l_0}{Y_{CC}} \Delta m_{\Gamma}^n,$$

$$\Delta m_{ПС}^n = \left(1 + \frac{\alpha l_0}{Y_{CC}}\right) \Delta m_{\Gamma}^n,$$

где  $Y_{CC}$  — *массовая доля свежей смеси* (свежего воздуха, при внешнем смесеобразовании) в зоне СЗ, заданная в исходных данных или определенная из расчета процесса газообмена.

## 5.4. Методы численного решения «модельных» УЧП

Явные методы первого (5.6), второго (5.7), (5.8) или (5.9), (5.10) и третьего (5.11) порядка применимы к численному решению систем ОДУ вида (5.3), описывающих эволюцию элементарного объекта (изолированного или искусственно выделенного) в зависимости от одной *независимой переменной*, чаще всего — времени  $t$ .

Можно применять соотношения этих методов и для численного интегрирования по времени уравнений и систем УЧП, описывающих эволюцию *полей параметров* в системах (областях) с неоднородными распределениями по пространству. Для решения нестационарных (эволюционных) задач, описываемых УЧП и их системами, кроме *дискретизации* по времени расчетная область разбивается и по пространственным переменным сеткой, составленной из расчетных узлов (*метод конечных разностей*, МКР) или из конечно-объемных ячеек (*метод конечных объемов*, МКО). Ниже будут рассматриваться в основном явные ЧМ решения УЧП, получаемые «в контексте» МКО.

Введение расчетной сетки для применения МКО к УЧП есть именно разбиение непрерывного объекта на элементарные с тем, чтобы эволюция последних на расчетном шаге описывалась *связанной системой ОДУ*. В «правые части» этих ОДУ (в силу сильной физической сопряженности таких элементов) входят выражения мгновенных *потоков* сохраняющихся величин на общих границах ячеек-элементов, образующих однородную совокупность (массив); к этому естественно приводит использование консервативной формы записи УЧП — законов сохранения (ЗС).

Получаемые в рамках МКО соотношения численных методов («разностные схемы») оказываются аналогами интегральных ЗС. В записи выражений ЧМ данного вида сохраняются выражения вида *потоков* через границы элементарных объемов (ячеек) — методы получают свойство *консервативности*<sup>5</sup>, а выражения методов сохраняют физическую наглядность исходных ЗС. Данный подход к дискретизации ЗС в пространстве и во времени рационален при моделировании нестационарных процессов по ЗС гидрогазодинамики и теплообмена, теории упругости, теории электромагнитных полей и т. п.

---

<sup>5</sup>Т. е. обеспечивают выполнение ЗС применительно к ячейкам конечно-объемной сетки.



Данный раздел содержит введение в явные консервативные методы решения УЧП на примере *модельных уравнений*, которые могут служить «моделями» основных («групповых») свойств систем УЧП реальных моделей при создании и исследовании методов их численного решения.

### 5.4.1. Модельное уравнение параболического типа.

Уравнение теплопроводности получим, упрощая уравнение переноса (сохранения) энергии общего вида. Описание свойств среды моделью абсолютно твердого тела ( $\rho = \text{const}_1$ ,  $\mathbf{v} \equiv 0$ ) дает  $E = e = e(T)$ , и из (3.23) получается

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} = - \left( \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right),$$

а с учетом (3.19) —

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \kappa \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \kappa \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \kappa \frac{\partial T}{\partial z}.$$

Допущение о том, что  $e = e(T) = cT$ , где  $c = \text{const}_2$  — постоянная удельная теплоемкость, дает следующее УЧП, описывающее поле  $T(\mathbf{r}, t)$  в твердом теле с указанными свойствами:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \kappa \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \kappa \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \kappa \frac{\partial T}{\partial z}.$$

Наконец, только при постоянстве величины *коэффициента теплопроводности*  $\kappa = \text{const}_3$  можно записать уравнение теплопроводности как

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \nabla^2 T = a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right), \quad (5.14)$$

где  $a = \kappa / (\rho c) = \text{const}_4$  — *коэффициент температуропроводности*,  $\text{м}^2/\text{с}$ .

Применительно к пространственно одномерному полю  $T(x, t)$  уравнение (5.14) эквивалентно уравнению

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \quad (5.15)$$

Используя общепринятое обозначение *неизвестной* (англ. *unknown*) в УЧП —  $u$  вместо  $T$  и компактно обозначая производные по времени и по пространству как  $u_t$  и  $u_{xx}$ , перепишем (5.15) в виде

$$u_t = a u_{xx}. \quad (5.16)$$

Уравнение (5.16) записано в неконсервативной форме. Эквивалентную, но консервативную по форме запись этого уравнения получим, определив искомую функцию как  $u = \rho e$ , а плотность потока энергии — как  $f = q_x = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x}$ . Здесь в общем случае вновь  $\kappa = \kappa(T)$ ,  $e = e(T)$ , и в консервативной форме искомое модельное УЧП *параболического* типа — уравнение теплопроводности — примет вид

$$u_t + f_x = 0, \quad \text{или} \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0. \quad (5.17)$$

#### 5.4.2. Модельные уравнения гиперболического типа.

Получим модельное УЧП, обладающее некоторыми свойствами уравнений *динамики невязкого газа*. Ограничиваясь случаем одной пространственной переменной, возьмем уравнение движения — второе уравнение системы (3.29) — и положим в нем произвольно  $\rho = \text{const}_1$ ,  $p = \text{const}_2$ ; получим *нелинейное* УЧП

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0, \quad (5.18)$$

где в данном случае  $f(u) = u^2$  — *потокковая функция* (от англ. *flux*). Уравнение (5.18) записано в дивергентной (консервативной) форме и эквивалентно (в подобластях гладкости решения) уравнению в интегральной форме

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_x^{x+\Delta x} u dx = -f(u)|_x^{x+\Delta x}. \quad (5.19)$$

Введя произвольно множитель  $\frac{1}{2}$  в  $f(u)$ , получим  $f(u) = u^2/2$ . При такой потокковой функции (5.18) есть модельное *уравнение Бюргерса* (англ. *Burger's equation*), неконсервативная форма которого, в силу того что  $\partial f(u^2/2) = u \partial u$ , принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (5.20)$$

и является также его *характеристической* формой. Действительно, в силу (5.20), производная сохраняющейся, по (5.19), величины  $\mathbf{U} = [u(x, t)]^T$  в направлении, задаваемом  $\frac{dx}{dt} = u$ , равна нулю, т. е.  $u(x, t)$  сохраняет значение вдоль *характеристических кривых*  $\frac{dx}{dt} = u$  единственного семейства для уравнения (5.20) или, что то же самое, уравнения (5.18) при  $f(u) = u^2/2$  в подобластях гладкости  $u(x, t)$ . Ввиду нелинейности уравнений, наклон «характеристик» —

линий уровня  $u(x, t)$  — изменяется вместе с  $u$ , что моделирует эффект нелинейности упругих возмущений (волн конечной амплитуды) в сжимаемой жидкости.

Линеаризуем уравнение (5.20), положив в нем коэффициент перед  $\frac{\partial u}{\partial x}$  постоянным:  $c = \text{const} \neq 0$ :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (5.21)$$

Для полученного линейного уравнения (5.21) наклон характеристик — постоянный ( $\frac{dx}{dt} = c$ ). Оно является одним из простейших УЧП гиперболического типа<sup>6</sup>. Точное решение уравнения при  $t > 0$  получается смещением со скоростью  $c$  профиля  $u(x, t_0)$ , заданного в НУ:  $u(x, t) = u(x - ct, t_0)$ .

Уравнение (5.21) служит моделью процесса адвекции — переноса характеристики (плотности вещества, температуры или примеси) движущейся жидкостью в отсутствие упругих волн и диффузионных явлений. Консервативная («дивергентная») форма этого уравнения также соответствует (5.18) с потоковой функцией  $f(u) = cu$ .

**5.4.3. Методы для модельных гиперболических уравнений.** Соотношения ЧМ решения уравнения вида (5.18) (как линейного, так и нелинейного) могут быть получены формальной заменой производных на конечные разности в (5.18) в контексте МКР, а также как аналоги интегральных законов сохранения (5.19) применительно к расчетной ячейке с индексом  $i$  (рис. 5.3) и с границами  $x_{i-\frac{1}{2}} = x_i - \Delta x/2$  и  $x_{i+\frac{1}{2}} = x_i + \Delta x/2$ , с привлечением гипотез о распределениях функций по  $x$  и  $t$  — «в контексте» метода конечных объемов (МКО).

Действительно, считая распределения  $u(x, t^n)$  и  $u(x, t^{n+1})$  кусочно-постоянными по пространству (в пределах  $i$ -й ячейки протяженностью  $\Delta x = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}$ ), а распределения потоков  $f(x_{i-\frac{1}{2}}, t)$  и  $f(x_{i+\frac{1}{2}}, t)$  на ее обеих границах — кусочно-постоянными по времени за период  $\Delta t = t^{n+1} - t^n$  и вычисляя потоки по  $u(x_{i-\frac{1}{2}}, t^n)$  и  $u(x_{i+\frac{1}{2}}, t^n)$ , получим непосредственно из (5.19):

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ f \left( u(x_{i-\frac{1}{2}}^n, t^n) \right) - f \left( u(x_{i+\frac{1}{2}}^n, t^n) \right) \right] \quad (5.22)$$

<sup>6</sup>О классификации УЧП и о классе гиперболических УЧП и их систем подробнее см. в [22, 28].

или, в кратких обозначениях:

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta t \cdot \left( \frac{f_{i-\frac{1}{2}}^n - f_{i+\frac{1}{2}}^n}{\Delta x} \right). \quad (5.23)$$

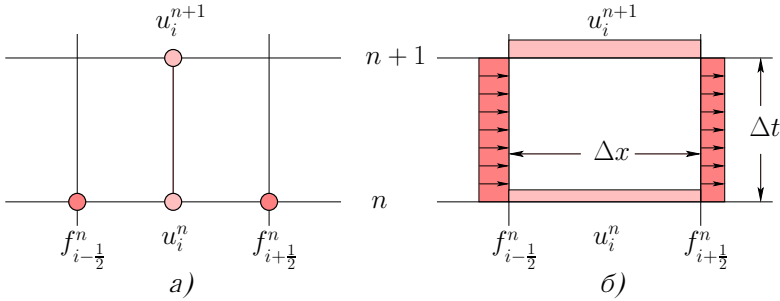


Рис. 5.3. К выводу формулы (5.23) в контексте: а) МКР, б) МКО

Формулы (5.22) и (5.23) интерпретируются просто: поток  $f_{i-\frac{1}{2}}^n$  на левой границе ячейки, постоянный в течение времени  $\Delta t$ , *вносит* некоторое количество сохраняющейся величины  $u$  в ячейку, тогда как поток  $f_{i+\frac{1}{2}}^n$ , напротив, *выносит* некоторое количество  $u$  из ячейки за время  $\Delta t$ . Текст демонстрационной программы приведен на с. 256.

Отметим, что в контексте МКО  $u_i^{n+1}$  и  $u_i^n$  соответствуют *среднеинтегральным* по длине  $i$ -й ячейки значениям  $u(x, t^{n+1})$  и  $u(x, t^n)$ . В силу того, что влияние на величину потоков на границе в нашем простом случае формально могут оказать лишь максимум две смежные ячейки с кусочно-постоянными распределениями  $u(x, t^n)$ , плотности потоков на границах  $i$ -й ячейки на «старом» временном слое могут быть выражены как  $f_{i-\frac{1}{2}}^n = f(u_{i-1}^n, u_i^n)$  и  $f_{i+\frac{1}{2}}^n = f(u_i^n, u_{i+1}^n)$ .

Удобно ввести *дифференциальный разностный оператор*, действующий на наборы значений *сеточных функций*, обозначая им способ вычисления разности потоков на старом временном слое. Так, в нашем случае можно обозначить  $L_h(u_{i-1}^n, u_i^n, u_{i+1}^n, \Delta x)$  (с учетом изложенного в предыдущем абзаце), а обозначая здесь  $\{u_i^n\} = u_{i-1}^n, u_i^n, u_{i+1}^n$  и опуская очевидное влияние размера ячейки, можно переписать (5.23) в виде

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta t \cdot L_h(\{u_i^n\}). \quad (5.24)$$

Соотношением (5.24) подчеркивается влияние соседних ячеек на эволюцию параметров в каждой  $i$ -й ячейке (конечном объеме). Ее можно прямо обобщить на случай системы УЧП вида (5.18), если положить  $\mathbf{U} = [u_1, \dots, u_K]^T$ :

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n + \Delta t \cdot L_h(\{\mathbf{U}_i^n\}). \quad (5.25)$$

До сих пор способ расчета потока на границе по величинам  $u$  в смежных ячейках  $f_{i-\frac{1}{2}}^n = f(u_{i-1}^n, u_i^n)$  не обсуждался. В момент  $t^n$  граница — местоположение разрыва функции  $u$ . Для линейного уравнения (5.21) значение  $u_{i-\frac{1}{2}}^n$  на границе при  $t \rightarrow t^n + 0$  для расчета по ней  $f_{i-\frac{1}{2}}^n$  окажется равным  $u_{i-1}^n$  при  $c > 0$ , и  $u_i^n$  — в противном случае (вспомним, что само значение  $u$  переносится в «характеристическом» направлении). Так же просто определяется  $u_{i-\frac{1}{2}}^n$  для модельного уравнения Бюргерса.

Формула (5.25) — не что иное, как формула метода Эйлера первого порядка по времени обновления параметров в ячейке. Действительно, первый порядок аппроксимации по времени (5.25) и также первый порядок аппроксимации по  $x$  обеспечивается для линейного уравнения (5.18) с  $f = cu$ :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial cu}{\partial x} = 0,$$

в подобластях гладкости решения, если используется кусочно-постоянное представление распределения искомой величины  $u$  внутри ячеек. Рассмотрим особенности данного метода первого порядка для УЧП гиперболического типа на примере того же уравнения, при  $c > 0$ ; в этом случае с учетом сказанного выше о параметрах на границах  $i$ -й ячейки распишем формулу пересчета на новый слой по времени:

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{c\Delta t}{\Delta x} (u_{i-1}^n - u_i^n) = \frac{c\Delta t}{\Delta x} u_i^n + \left(1 - \frac{c\Delta t}{\Delta x}\right) u_i^n. \quad (5.26)$$

Метод (5.26) получил название метода донорской ячейки; для объяснения обратимся к рис. 5.4. Кусочно-постоянное распределение, имевшееся на старом слое по  $t$ , сдвинется за время  $\Delta t$  на  $c\Delta t$ , т. е. слева (нами принято  $c > 0$ ) в каждую ячейку вступит «простая волна», в которой значение  $u$  будет значением из ячейки слева. В результате применения (5.26) в момент  $t = t^n$  в каждой ячейке окажется значение  $u_i^{n+1}$ , полученное осреднением «точного» (разрывного) распределения  $u(x, t \rightarrow t^n - 0)$ ,  $x \in (x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}})$  в ячейке; при осреднении информация о распределении при  $t \rightarrow t^{n+1} - 0$  будет потеряна.

В силу этого некоторое количество  $u$  из ячейки слева (если  $c > 0$ ) «попадет» после расчетного шага в правую часть данной ячейки вопреки законам, заданным в исходном УЧП или (5.19). В численном решении по подобным методам разрывы решения (и вообще области с высокими градиентами параметров) получаются сглаженными на интервале в несколько ячеек именно вследствие того, что самому методу присущи диффузионные свойства — *численная*, или *сеточная диффузия*, по проявлениям в численном решении аналогичная физической диффузии (вязкости, теплопроводности), присутствующей в некоторых УЧП.

Данного типа методы решения гиперболических УЧП и их систем (т. е. явные *консервативные методы* первого порядка, использующие характеристические свойства таких уравнений) обеспечивают достаточно численной диффузии, чтобы в решении не возникали осцилляции — нефизичные минимумы и максимумы рассчитываемых функций; т. е. численные решения, даваемые этими методами, обладают свойством *монотонности*.

Другая особенность явных методов численного решения гиперболических УЧП и систем — специфическое ограничение на шаг по времени *по устойчивости*. Действительно (см. рис. 5.4), если  $\Delta x < c\Delta t$ , то «простая волна» в точном решении успеет пересечь одну ячейку и вступит в следующую, а значение  $u_{i-1}^n$  на ее левой границе изменится на  $u_{i-2}^n$ , чего формула (5.26) не учитывает. В численном решении поэтому возникнут осцилляции, а при заметном превышении  $c\Delta t > \Delta x$  численное решение «развалится» (неустойчивость).

Условие устойчивости при применении явного *консервативного метода* для гиперболических УЧП требует, чтобы величина шага по времени  $\Delta t$  не превысила значения, при котором характеристики (элементарные волны) успевают пересечь ячейку размером  $\Delta x$ ; это условие носит название *условия Куранта* (*Courant*), в зарубежной литературе — условие Куранта – Фридрихса – Леви (или *CFL stability condition*, от *Courant, Friedrichs, Levy*). Для (5.26) верно следующее выражение данного критерия устойчивости —

$$\frac{c\Delta t}{\Delta x} \leq \nu, \quad (5.27)$$

где  $\nu$  — *число Куранта* (*CFL number*). При численном решении (5.26) явными методами (в частности, методом *донорской ячейки*, с. 159) допустимый интервал для  $\nu$  есть  $0 \dots 1$ , при этом в разной степени про-

является численная диффузия (рис. 5.4), вплоть до ее исчезновения при  $\nu = 1$ .

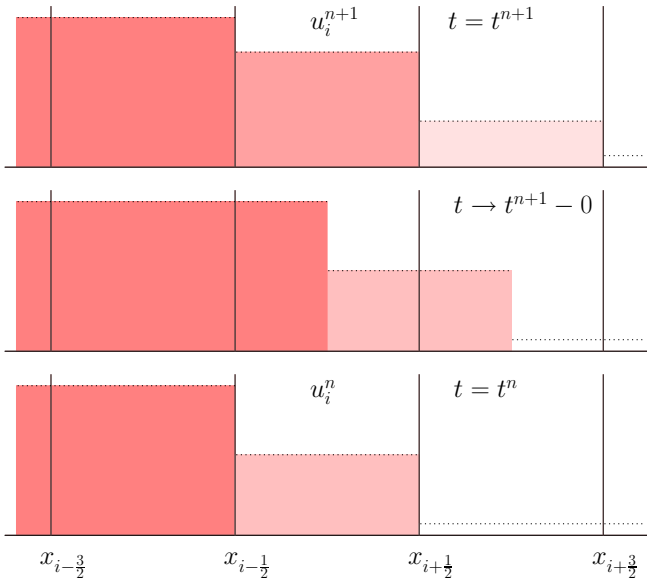


Рис. 5.4. К объяснению эффекта численной («сеточной») диффузии на примере метода *донорской ячейки* (5.26) при  $\nu = 0,5$

Для нелинейного же *уравнения Бюргерса* например, где характеристическая скорость есть  $u = var$ , невыполнение условия устойчивости может иметь место в наиболее «опасной» ячейке. Устойчивость на шаге гарантируется, если  $\Delta t \leq \nu \frac{\Delta x}{\max(u_i^n)}$ ; практически при численном интегрировании нелинейных гиперболических УЧП и их систем по явным схемам предельное по устойчивости значение  $\nu$  оказывается менее 1 («коэффициент запаса»).

#### 5.4.4. Методы для уравнений параб. и «смешанного» типа.

Теперь рассмотрим простейшее модельное УЧП *параболического* типа, а именно *одномерное уравнение теплопроводности* (или диффузии), которым «моделируются» некоторые свойства УЧП и систем УЧП гидродинамики и теплообмена, содержащих члены *градиентного переноса*, описывающие молекулярную и турбулентную вязкость, теплопроводность и диффузию — УЧП (5.17), в котором

$$f = -a \frac{\partial u}{\partial x}, \quad a = \text{const} > 0. \quad (5.28)$$

Действуя в контексте МКО, «реконструируем» распределение  $u(x, t^n)$  в двух примыкающих к границе  $x = x_{i-\frac{1}{2}}$  ячейках *кусочно-линейной* функцией, что даст оценку производной в (5.17) на границе ячейки со вторым порядком аппроксимации по  $x$ :

$$f_{i-\frac{1}{2}}^n = -\varkappa \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} + O(\Delta x^2), \quad (5.29)$$

и аналогичное выражение — для  $f_{i-\frac{1}{2}}^n$  через  $u_{i+1}^n$  и  $u_i^n$ .

Тогда явный *консервативный метод* обновления параметров в ячейках равномерной по  $x$  сетки для уравнения (5.17) с (5.28), обладающий первым порядком аппроксимации по  $t$  и вторым порядком по  $x$ , примет (после преобразований для данного конкретного случая) вид

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta t \cdot \varkappa \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2, \Delta t). \quad (5.30)$$

Заметим, что точно такое же выражение, т. е. (5.30), получится, если, действуя в контексте МКР, выразить производные в УЧП (5.15), которое в данном случае эквивалентно (5.17), в *узле* сетки, соответствующем в МКО центру ячейки, через конечные разности (рис. 5.3, а) —

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i^n = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + O(\Delta t),$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}\right)_i^n = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2).$$

Условие устойчивости этого метода для данного параболического уравнения есть

$$a \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}.$$

Гиперболическое нелинейное и параболическое модельные УЧП можно скомбинировать в единое модельное «уравнение сохранения» — уравнение адвекции-диффузии. Его консервативная форма будет соответствовать (5.17), но в данном случае

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u^2}{2} - a \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0. \quad (5.31)$$



Это «комбинированное» УЧП (5.31) моделирует такую особенность уравнений Навье – Стокса (УНС), как наличие в них наряду с «невязкими» также «градиентных» членов. Решение таких уравнений соответствующими методами позволяет убедиться, что для «поточковых» членов разной природы (*невязких* и *вязких* — в УНС) можно применять разные способы аппроксимации потоков по пространству.

Возможность такого «*расщепления*» по физическим процессам используется в описанных ниже численных методах решения систем уравнений газовой динамики.

Ограниченный объем и тематика учебного пособия не позволяют углубляться в вопросы доказательства устойчивости численных методов для УЧП различных типов, а также привести материал о *неявных методах*; эти вопросы более подробно рассмотрены, например, в [40, 3, 20].

## 5.5. Методы численного решения уравнений одномерной НГД

Все изложенные в данном разделе методы численного решения уравнений (4.4) относятся к классу монотонных *консервативных методов* сквозного счета.

В СИМ «Альбея» [32] основным методом расчета течения газов в МЭ ТРУБКА до 1997 г. был *сеточно-характеристический метод* (см. [25]). В реализованном варианте он обеспечивал первый *порядок аппроксимации* как по  $x$ , так и по  $t$ , но при этом не обладал свойством консервативности. Позже в данном модуле были реализованы консервативные методы, близкие к изложенным в подразд. 5.5.2 и 5.5.3.

**5.5.1. Метод «распада разрыва» С.К. Годунова.** В [8] С.К. Годунов предложил консервативный численный метод решения уравнений одномерных и многомерных уравнений газодинамики, впоследствии названный его именем. До этого для численного решения этих уравнений применялись (помимо *метода характеристик*, *сеточно-характеристического* и т. п. методов [25]) методы, основанные на формальной конечно-разностной *аппроксимации* уравнений.

В консервативных вариантах таких методов потоки на границах ячеек вычисляются фиксированным способом, и параметры решения в узлах сетки на новом слое по времени в конечно-разностных соотношениях «линейно» зависят от параметров в известных узлах сетки. Такие методы получили наименование *линейных*. При применении линейных

методов с порядком аппроксимации выше первого в областях высоких градиентов или на разрывах наблюдаются нефизичные дефекты численных решений, главным образом *осцилляции* сеточных функций, поэтому сами решения, а также методы характеризуются как *немонотонные*.

С. К. Годуновым (см. [40]) показано, что *среди линейных схем с порядком аппроксимации выше первого не существует схем, гарантирующих монотонность решения* (теорема Годунова). Причина нефизичных осцилляций численных решений — неадекватное описание линейной схемой нелинейных эффектов в уравнениях газовой динамики.

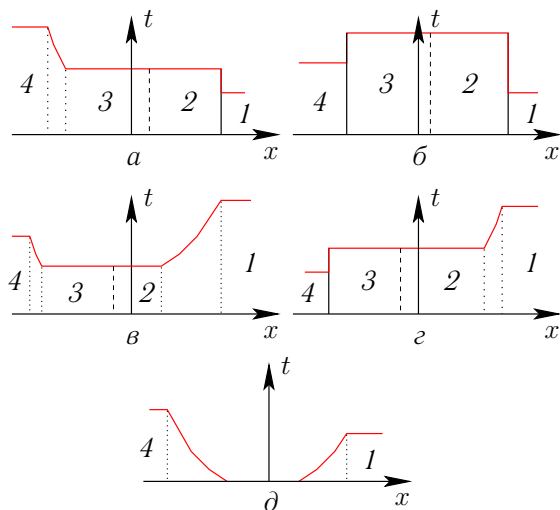


Рис. 5.5. Возможные картины течения при распаде произвольного разрыва

Классический *метод «распада разрыва»*, или конечно-разностная схема С. К. Годунова [40, 8] учитывает эту нелинейность при вычислении потоков на границах ячеек. Данный метод получается, если принять кусочно-постоянные распределения параметров решения по ячейкам на временных слоях, а потоки на границах ячеек брать из *точного решения задачи о распаде произвольного разрыва* (РПР), дающего при этом (рис. 5.5) кусочно-постоянные по времени величины потоков на границах в пределах расчетного шага (рис. 5.6).

Явная формула обновления консервативных переменных метода С. К. Годунова, «трехточечного» по  $x$  и одноэтапного по  $t$ , для систе-

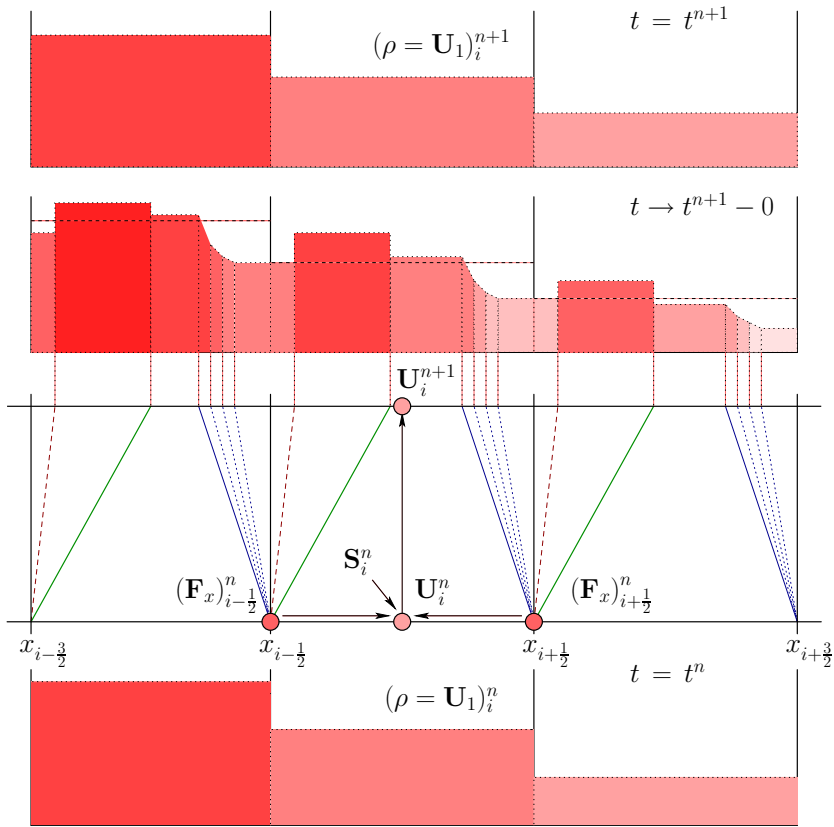


Рис. 5.6. Схема обновления решения в ячейках (конечных объемах) по методу «распада разрыва» С. К. Годунова; вид профилей решения характерен для плотности  $\rho = \mathbf{U}_1$  (сравн. с рис. 5.4 на с. 159)

мы (4.5) имеет вид

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x \cdot F_i} \left[ (\mathbf{F}_x \cdot F)_{i-\frac{1}{2}}^n - (\mathbf{F}_x \cdot F)_{i+\frac{1}{2}}^n \right] + \frac{\Delta t}{F_i} \mathbf{S}_i^n,$$

где  $(\mathbf{F}_x)_{i-\frac{1}{2}}^n = \mathbf{F}_x(\mathbf{U}_{i-1}^n, \mathbf{U}_i^n)$  и  $(\mathbf{F}_x)_{i+\frac{1}{2}}^n = \mathbf{F}_x(\mathbf{U}_i^n, \mathbf{U}_{i+1}^n)$  — «векторы» газодинамических потоков из решения задачи о РПР на границах  $i$ -й ячейки (с индексами  $i - \frac{1}{2}$  и  $i + \frac{1}{2}$ ) на «старом» временном слое.

Решение задачи о РПР на границах ячеек обладает свойством *авто-модельности*, в том смысле, что параметры решения неизменны вдоль лучей  $x/t = \text{const}$ . В четырех из пяти возможных вариантов волновой

структуры при РПР (рис. 5.5, а — з) образуется контактная поверхность (КП), по обе стороны от которой одинаковы давления и скорости газа. Вид волны, отделяющей возмущенный газ от невозмущенного по обе стороны от КП, определяется соотношением давлений на ней. Если в возмущенной зоне давление больше, чем в невозмущенной, образуется *ударная волна* (УВ), в противном случае — *простая изоэнтропная волна разрежения* (ИВР). Пятый вариант, с образованием зоны вакуума и с разлетом масс газа в обе стороны (рис. 5.5, д) реализуется при невозможности любого из вариантов с конечным положительным давлением на КП [40].

Определение потоков на границах ячеек из решения задачи о РПР позволяет определять потоки физически обоснованно; это одна из причин применимости метода С.К. Годунова в качестве метода сквозного счета (возможность расчета без выделения особенностей решения), дающего монотонные численные решения, сходящиеся к точным решениям задач. Метод Годунова обладает формально первым порядком аппроксимации на гладких решениях. Можно считать этот метод (и его модификации) обобщениями *метода донорской ячейки* (с. 159) на систему нелинейных УЧП газовой динамики. Сокращенный текст программы решения тестовой задачи *методом «распада разрыва»* приведен на с. 258.

### **5.5.2. Метод типа С.К. Годунова повышенной точности.**

Недостатками классического метода Годунова являются низкий порядок аппроксимации (и как следствие — сильная схемная диссипация) и относительно большие вычислительные затраты, а достоинством — монотонность решений. Простое расширение сеточного шаблона (для повышения аппроксимации) приведет к появлению в решениях нефизичных дефектов, главным образом *осцилляций* сеточных функций (немонотонность).

В силу теоремы Годунова (с. 162) невозможно создать метод повышенной точности по  $x$  с фиксированным шаблоном. Однако, применяя *адаптивный шаблон* для аппроксимации решения  $\mathbf{U}$  и потоков  $\mathbf{F}_x(\mathbf{U})$  по  $x$ , можно повысить порядок аппроксимации метода при сохранении монотонности численного решения.

Вариант монотонной разностной схемы повышенной точности был предложен впервые, по-видимому, в работе [13], где применена кусочно-линейная реконструкция решения в ячейке. Позднее были получены схемы повышенной точности с кусочно-параболической рекон-

струкцией для решения как одномерных, так и пространственных задач — например [11, 12].

Метод повышенного порядка аппроксимации строится на квадратичном представлении решения по ячейкам (см. рис. 5.7). Процедура расчета параметров решения, выходящих на границы ячеек и используемых как исходные данные задачи о РПП на границах, использует преобразование с участием диагональной матрицы собственных значений системы гиперболических уравнений. Процедура интерполяции  $\mathbf{U}$  на обе границы  $i$ -й ячейки имеет вид:

$$\begin{aligned}\mathbf{U}_{i+\frac{1}{2}}^{n(-)} &= \mathbf{U}_i^n + [S^{-1}]_i^n \left\{ \frac{1+\varphi}{4} \tilde{\Delta} \mathbf{W}_i^n + \frac{1-\varphi}{4} \tilde{\nabla} \mathbf{W}_i^n \right\}, \\ \mathbf{U}_{i-\frac{1}{2}}^{n(+)} &= \mathbf{U}_i^n - [S^{-1}]_i^n \left\{ \frac{1+\varphi}{4} \tilde{\nabla} \mathbf{W}_i^n + \frac{1-\varphi}{4} \tilde{\Delta} \mathbf{W}_i^n \right\}, \\ \tilde{\Delta} \mathbf{W}_i^n &= \text{minmod}(\Delta \mathbf{W}_i^n, b \nabla \mathbf{W}_i^n), \\ \tilde{\nabla} \mathbf{W}_i^n &= \text{minmod}(\nabla \mathbf{W}_i^n, b \Delta \mathbf{W}_i^n), \\ \Delta \mathbf{W}_i^n &= [S]_i^n \Delta \mathbf{U}_i^n = [S]_i^n (\mathbf{U}_{i+1}^n - \mathbf{U}_i^n), \\ \nabla \mathbf{W}_i^n &= [S]_i^n \nabla \mathbf{U}_i^n = [S]_i^n (\mathbf{U}_i^n - \mathbf{U}_{i-1}^n),\end{aligned}$$

где  $1 \leq b \leq b_{\max}$ ,  $b_{\max} = \frac{3-\varphi}{1-\varphi}$ ,  $\varphi \leq 1$ , а ограничительная функция  $\text{minmod}(x, y)$  определяется как

$$\text{minmod}(x, y) = \begin{cases} 0, & xy \leq 0 \\ \text{sign}(x) \min(|x|, |y|), & xy > 0 \end{cases}. \quad (5.32)$$

Значения параметров процедуры, обеспечивающие *третий* порядок пространственной аппроксимации в аналогичной схеме для модельного линейного гиперболического уравнения (5.21):  $\varphi = \frac{1}{3}$ ,  $b = b_{\max} = 4$  (см. [12]).

Матрица преобразования  $[S]$  и обратная ей матрица  $[S^{-1}]$  взяты из преобразования приращений вектора *консервативных переменных*  $\mathbf{U}$  в приращения вектора плотностей потоков  $\mathbf{F}_x$ , справедливого для системы уравнений (3.32) одномерного плоского движения однородного *совершенного газа* или смеси совершенных газов постоянного состава ( $\gamma = c_p/c_v$ ):

$$\delta \mathbf{F}_x = [A] \delta \mathbf{U}, \quad [A] = [S^{-1}] [\Lambda] [S], \quad [\Lambda] = \text{diag}\{u, u+c, u-c\},$$

$$[S] = \begin{bmatrix} -c^2 + \frac{\gamma-1}{2}u^2 & (1-\gamma)u & \gamma-1 \\ -cu + \frac{\gamma-1}{2}u^2 & c + (1-\gamma)u & \gamma-1 \\ cu + \frac{\gamma-1}{2}u^2 & -c + (1-\gamma)u & \gamma-1 \end{bmatrix},$$

$$[S^{-1}] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{c^2} & \frac{1}{2c^2} & \frac{1}{2c^2} \\ -\frac{u}{c^2} & \frac{u}{2c^2} + \frac{1}{2c} & \frac{u}{2c^2} - \frac{1}{2c} \\ -\frac{u^2}{2c^2} & \frac{u^2}{4c^2} + \frac{u}{2c} + \frac{1}{2(\gamma-1)} & \frac{u^2}{4c^2} - \frac{u}{2c} + \frac{1}{2(\gamma-1)} \end{bmatrix}.$$

Для расчета потоков массы компонентов смеси на границе необходимо интерполировать на нее значения парциальных плотностей  $\rho_k$ . Это легко сделать, дополнительно применив процедуру вышеописанного вида для массовых долей  $Y_k$ ; для них, как *характеристических* переменных системы (4.4), матричное преобразование в процедуре реконструкции не требуется.

Второй или третий порядок аппроксимации по  $t$  в методе повышенной точности достигается соответственно при двухэтапной (5.9) – (5.10) и трехэтапной (5.11) схеме обновления решения на шаге по  $t$ .

Можно записать эти схемы через разностный пространственный оператор  $L_h(\{\mathbf{U}_i^n\})$ ; применительно к (4.5) он имеет вид

$$L_h(\{\mathbf{U}_i^n\}) = \frac{1}{\Delta x \cdot F_i} \left[ (\mathbf{F}_x \cdot F)_{i-\frac{1}{2}}^n - (\mathbf{F}_x \cdot F)_{i+\frac{1}{2}}^n \right] + \frac{1}{F_i} \mathbf{S}_i^n.$$

В описываемом методе для расчета потоков по данным, интерполированным на границы, могут применяться как процедура точного расчета РПР, так и приближенные процедуры. Экономичная «характеристическая» процедура может быть построена на системе скалярных уравнений  $d^\pm I_\pm = 0$ ,  $d^0 I_0 = 0$  для *инвариантов*  $I_\pm = u + \alpha_\pm p$ ,  $I_0 = p + \alpha_0 \rho$  системы уравнений, полученной линеаризацией системы в форме (4.7) для плоского одномерного движения газа ( $\tau_w \equiv 0$ ,  $q_w \equiv 0$ ,  $F = \text{const}$ )

$$d^- u - \frac{1}{\rho c} d^- p = 0, \quad d^0 p - c^2 d^0 p = 0, \quad d^+ u + \frac{1}{\rho c} d^+ p = 0, \quad (5.33)$$

где  $\alpha_- = -1/\rho c$ ,  $\alpha_0 = -c^2$ ,  $\alpha_+ = 1/\rho c$  — постоянные.

Поясним способ вычисления параметров в некоторой точке  $D$  (например, на границе ячеек) по значениям инвариантов на прибывающих в точку характеристиках системы (5.33). Для простоты возьмем случай  $(u - c) < 0$ ,  $u > 0$ ,  $(u + c) > 0$ , показанный на рис. 5.8:

$$I_{-D} = u_B + \alpha_- p_B, \quad I_{0D} = p_C + \alpha_0 \rho_C, \quad I_{+D} = u_A + \alpha_+ p_A.$$

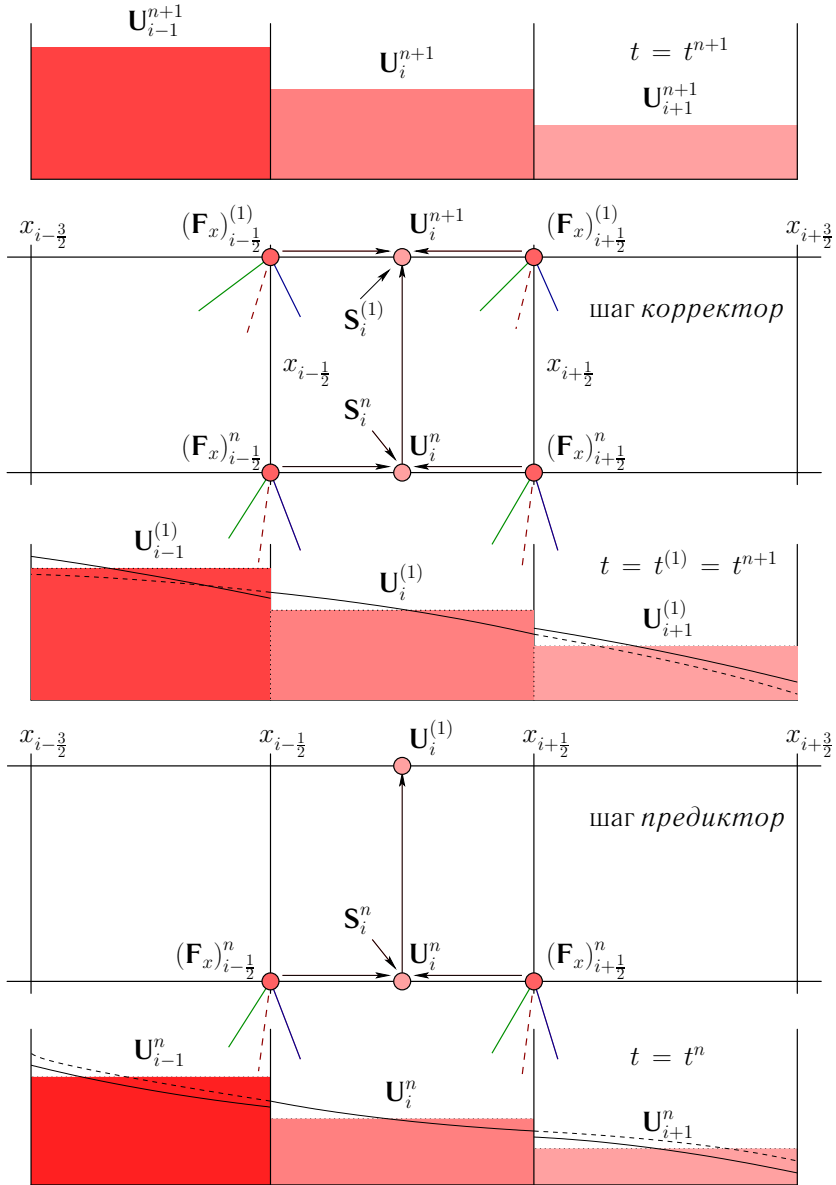


Рис. 5.7. Схема обновления решения в ячейках по методу Годунова повышенной точности (двухэтапный вариант; сравн. с рис. 5.6 на с. 163)

Простейший способ расчета коэффициентов в инвариантах —  $\alpha_- = \alpha_B$ ,  $\alpha_0 = \alpha_C$ ,  $\alpha_+ = \alpha_A$ ; он и предпочтителен для дозвуковых течений. По величинам инвариантов и коэффициентов вычисляются параметры в точке  $D$  (рис. 5.8):

$$p = \frac{I_+ - I_-}{\alpha_+ - \alpha_-}, \quad u = I_+ - \alpha_+ p, \quad \rho = \frac{I_0 - p}{\alpha_0},$$

после чего по УС определяется температура  $T = p/(R\rho)$ , где постоянная  $R$  или массовые доли  $Y_1, \dots, Y_{K-1}$  для ее расчета берутся для той смеси, которая, согласно знаку скорости потока, течет через границу.

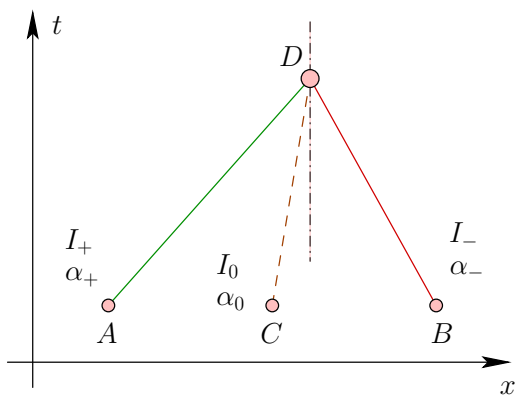


Рис. 5.8. Шаблон для решения линеаризованной характеристической задачи при  $(u - c) \leq 0$ ,  $u \geq 0$ ,  $(u + c) \geq 0$

Описанная процедура расчета потоков предпочтительна к применению в методе повышенной точности также и из-за уменьшенной (благодаря применению интерполяции) интенсивности разрывов параметров на границах ячеек. Она также используется (с изменениями) в методе, описываемом в следующем разделе.

**5.5.3. Экономичный одноэтапный метод.** Инварианты линеаризованной системы уравнений одномерной газодинамики дают возможность построить весьма экономичную монотонную схему для численного решения одномерных нестационарных задач. Идея и описание такого класса схем содержится в работе [14]. Опишем применяемую нами схему такого вида.

Используется то обстоятельство, что при скалярном виде уравнений для этих инвариантов (и для массовых долей компонент  $Y_k$ ) процедура



«монотонизированной» кусочно-параболической реконструкции решения в ячейке не требует матричного преобразования:

$$\mathbf{I}_i^n(x) = \mathbf{I}_i^n + \frac{\tilde{\Delta}\mathbf{I}_i^n + \tilde{\nabla}\mathbf{I}_i^n}{2\Delta x}(x - x_i) + \varphi \frac{\tilde{\Delta}\mathbf{I}_i^n - \tilde{\nabla}\mathbf{I}_i^n}{(\Delta x)^2}(x - x_i)^2,$$

$$\tilde{\Delta}\mathbf{I}_i^n = \min\text{mod}(\Delta\mathbf{I}_i^n, b\nabla\mathbf{I}_i^n), \Delta\mathbf{I}_i^n = \mathbf{I}_{i+1}^n - \mathbf{I}_i^n,$$

$$\tilde{\nabla}\mathbf{I}_i^n = \min\text{mod}(\nabla\mathbf{I}_i^n, b\Delta\mathbf{I}_i^n), \nabla\mathbf{I}_i^n = \mathbf{I}_i^n - \mathbf{I}_{i-1}^n.$$

Здесь в набор *зависимых переменных*  $\mathbf{I}$  включены и массовые доли  $K - 1$  компонентов газовой смеси:

$$\mathbf{I} = [I_-, I_0, I_+, Y_1, \dots, Y_{K-1}]^T.$$

Параметры смеси и газодинамические потоки на границах (рис. 5.9) определяются в данном методе с помощью характеристической процедуры, подобной описанной в подразд. 5.5.2. В данном же случае для расчета потоков на границах  $i$ -й ячейки нужно определить параметры потока в узлах сетки ( $i \pm \frac{1}{2}$ ,  $n + \frac{1}{2}$ ), как в точке  $D$  на рис. 5.8, т. е. по значениям инвариантов и коэффициентов  $\alpha$  в точках  $A$ ,  $B$ , и  $C$ , определяя эти величины по кусочно-параболическим распределениям  $\mathbf{I}_i^n(x)$  на «старом» временном слое (рис. 5.8).

В результате получается одноэтапная схема второго порядка аппроксимации по времени и повышенного порядка аппроксимации по пространственной переменной  $x$  следующего вида:

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x \cdot F_i} \left[ (\mathbf{F}_x \cdot F)_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - (\mathbf{F}_x \cdot F)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right] + \frac{\Delta t}{F_i} \mathbf{S}_i^{n+\frac{1}{2}}, \quad (5.34)$$

в которой потоки «на полушаге»  $(\mathbf{F}_x)_{i+1/2}^{n+1/2}$  вычисляются описанным выше способом, а источниковый член может быть задан (для сохранения второго порядка по времени) как  $\mathbf{S}_i^{n+1/2} = (\mathbf{S}_i^n + \mathbf{S}_i^{n+1}) / 2$ .

## 5.6. Метод численного решения пространственных уравнений

Изложим численный метод, использованный в расчетах пространственных турбулентных течений по технологии МКВ (с. 99) для решения уравнений, описывающих трехмерное движение газа на «надсеточном»

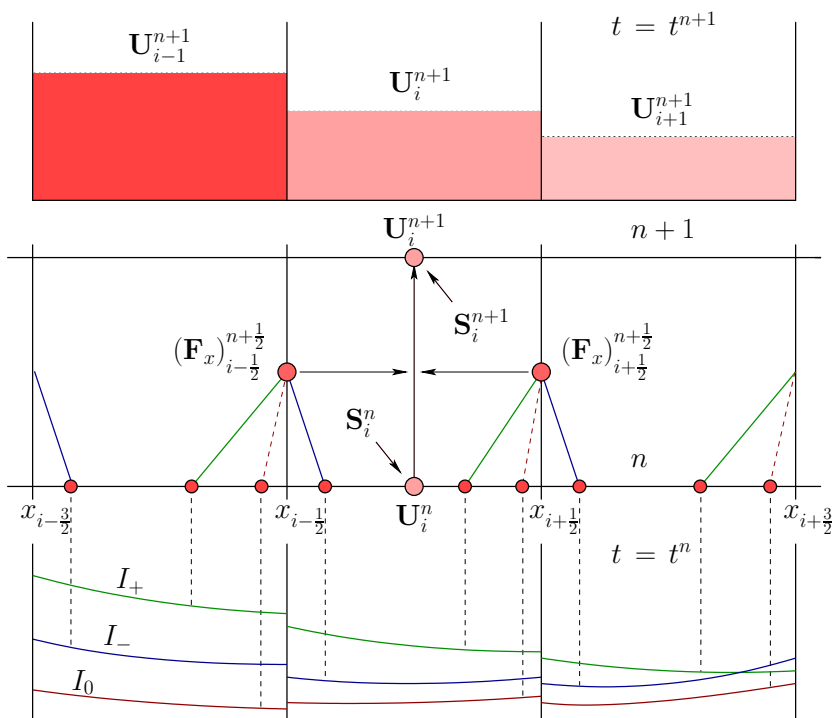


Рис. 5.9. Схема обновления решения в ячейках экономичным одно-этапным методом (сравн. с рис. 5.7).  $I_+$ ,  $I_-$  и  $I_0$  — инварианты линеаризованных соотношений вдоль характеристик (5.33)

масштабе. Основное требование к методу для расчетов в рамках МКВ — малая численная диссипация.

Для удобства описания такого метода решения уравнений вида УНС удобна условная «векторная» форма их записи

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = 0. \quad (5.35)$$

Пространственные производные уравнений (5.35) аппроксимируются разностным оператором

$$L_h(\{\mathbf{U}_{i,j,k}^n\}) = \frac{(\mathbf{F}_x)_{i-\frac{1}{2},j,k}^n - (\mathbf{F}_x)_{i+\frac{1}{2},j,k}^n}{\Delta x} + \\ + \frac{(\mathbf{F}_y)_{i,j-\frac{1}{2},k}^n - (\mathbf{F}_y)_{i,j+\frac{1}{2},k}^n}{\Delta y} + \frac{(\mathbf{F}_z)_{i,j,k-\frac{1}{2}}^n - (\mathbf{F}_z)_{i,j,k+\frac{1}{2}}^n}{\Delta z}$$

на равномерной по пространству прямоугольной сетке (рис. 5.10) с сохранением свойства консервативности.

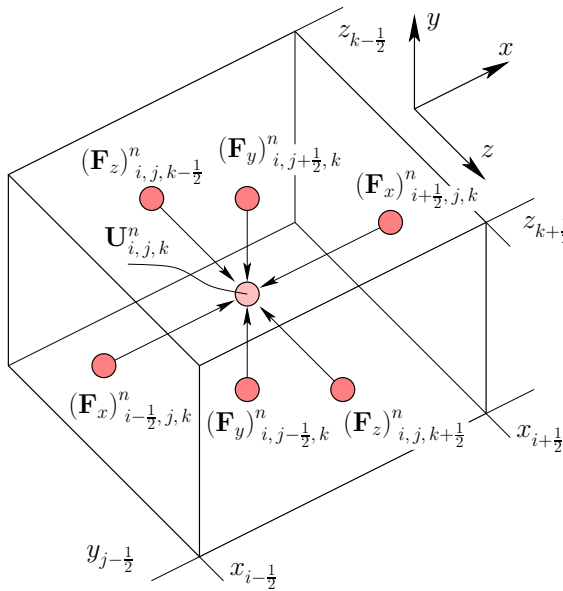


Рис. 5.10. Конечный объем — ячейка пространственной «декартовой» сетки

«Невязкая» составляющая (3.27) газодинамических потоков на границах ячеек вычисляется из решения задачи о РПР на границе ячейки с применением приближенной характеристической процедуры (с. 166); для плотностей потоков  $\mathbf{F}_x$  — по значениям  $\mathbf{U}_{i+\frac{1}{2},j,k}^{n(-)}$ ,  $\mathbf{U}_{i+\frac{1}{2},j,k}^{n(+)}$  и т. п.

Улучшенная аппроксимация по пространственным переменным для членов (3.27) достигается при использовании кусочно-параболических распределений параметров решения в ячейках по  $x$ ,  $y$  и  $z$ . Процедура

интерполяции *консервативных переменных* (вектора неизвестных системы уравнений однокомпонентной смеси  $\mathbf{U} = [\rho, \rho v_x, \rho v_y, \rho v_z, \rho E]^T$ ) на обе стороны некоторой границы между ячейками использует матричное преобразование.

Так, для  $x$ -границ применяются соотношения с использованием матрицы  $[S_x]$  и обратной ей матрицы  $[S_x^{-1}]$  преобразования  $\delta_x \mathbf{F}_x = [A_x] \delta_x \mathbf{U}$ , где  $[A_x] = [S_x^{-1}] [\Lambda_x] [S_x]$ , а  $[\Lambda_x]$  — диагональная матрица собственных значений  $[A_x]$ , а также ограничительной функции (5.32) с указанными на с. 165 параметрами:

$$\mathbf{U}_{i+\frac{1}{2}, j, k}^{n(-)} = \mathbf{U}_{i, j, k}^n + [S_x^{-1}]_{i, j, k}^n \left\{ \frac{1+\varphi}{4} \tilde{\Delta}_x \mathbf{W}_{i, j, k}^n + \frac{1-\varphi}{4} \tilde{\nabla}_x \mathbf{W}_{i, j, k}^n \right\},$$

$$\mathbf{U}_{i-\frac{1}{2}, j, k}^{n(+)} = \mathbf{U}_{i, j, k}^n - [S_x^{-1}]_{i, j, k}^n \left\{ \frac{1+\varphi}{4} \tilde{\nabla}_x \mathbf{W}_{i, j, k}^n + \frac{1-\varphi}{4} \tilde{\Delta}_x \mathbf{W}_{i, j, k}^n \right\},$$

где

$$\tilde{\Delta}_x \mathbf{W}_{i, j, k}^n = \min\text{mod}(\Delta_x \mathbf{W}_{i, j, k}^n, b \nabla_x \mathbf{W}_{i, j, k}^n),$$

$$\tilde{\nabla}_x \mathbf{W}_{i, j, k}^n = \min\text{mod}(\nabla_x \mathbf{W}_{i, j, k}^n, b \Delta_x \mathbf{W}_{i, j, k}^n),$$

$$\Delta_x \mathbf{W}_{i, j, k}^n = [S_x]_{i, j, k}^n \Delta_x \mathbf{U}_{i, j, k}^n, \quad \Delta_x \mathbf{U}_{i, j, k}^n = \mathbf{U}_{i+1, j, k}^n - \mathbf{U}_{i, j, k}^n,$$

$$\nabla_x \mathbf{W}_{i, j, k}^n = [S_x]_{i, j, k}^n \nabla_x \mathbf{U}_{i, j, k}^n, \quad \nabla_x \mathbf{U}_{i, j, k}^n = \mathbf{U}_{i, j, k}^n - \mathbf{U}_{i-1, j, k}^n.$$

Диагональная матрица собственных значений:

$$[\Lambda_x] = \text{diag} \{u, u, u, u + c, u - c\},$$

матрица преобразования ( $\chi = \gamma - 1$ ):

$$[S_x] = \begin{bmatrix} \frac{\chi}{2}(u^2 + v^2 + w^2) - c^2 & -\chi u & -\chi v & -\chi w & \chi \\ & -v & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & -w & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{\chi}{2}(u^2 + v^2 + w^2) - cu & -\chi u + c & -\chi v & -\chi w & \chi \\ \frac{\chi}{2}(u^2 + v^2 + w^2) + cu & -\chi u - c & -\chi v & -\chi w & \chi \end{bmatrix},$$

обратная матрица:

$$[S_x^{-1}] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{c^2} & 0 & 0 & \frac{1}{2c^2} & \frac{1}{2c^2} \\ -\frac{u}{c^2} & 0 & 0 & \frac{u}{2c^2} + \frac{1}{2c} & \frac{u}{2c^2} - \frac{1}{2c} \\ -\frac{v}{c^2} & 1 & 0 & \frac{v}{2c^2} & \frac{v}{2c^2} \\ -\frac{w}{c^2} & 0 & 1 & \frac{w}{2c^2} & \frac{w}{2c^2} \\ -\frac{|\mathbf{v}|^2}{2c^2} & v & w & \frac{|\mathbf{v}|^2}{4c^2} + \frac{u}{2c} + \frac{1}{2(\gamma-1)} & \frac{|\mathbf{v}|^2}{4c^2} - \frac{u}{2c} + \frac{1}{2(\gamma-1)} \end{bmatrix}.$$

Парциальные плотности компонентов  $\rho_k = \rho Y_k$  на границах ячеек (для многокомпонентной смеси) вычисляются затем по интерполированным на границы величинам *плотности*  $\rho$  с применением также кусочно-параболической интерполяции на границы величин *массовых долей компонентов*  $\mathbf{Y} = [Y_1, \dots, Y_{K-1}]^T$ , не требующей матричного преобразования:

$$\mathbf{Y}_{i+\frac{1}{2},j,k}^{n(-)} = \mathbf{Y}_{i,j,k}^n + \left\{ \frac{1+\varphi}{4} \tilde{\Delta}_x \mathbf{Y}_{i,j,k}^n + \frac{1-\varphi}{4} \tilde{\nabla}_x \mathbf{Y}_{i,j,k}^n \right\},$$

$$\mathbf{Y}_{i-\frac{1}{2},j,k}^{n(+)} = \mathbf{Y}_{i,j,k}^n - \left\{ \frac{1+\varphi}{4} \tilde{\nabla}_x \mathbf{Y}_{i,j,k}^n + \frac{1-\varphi}{4} \tilde{\Delta}_x \mathbf{Y}_{i,j,k}^n \right\},$$

где

$$\tilde{\Delta}_x \mathbf{Y}_{i,j,k}^n = \min\text{mod}(\Delta_x \mathbf{Y}_{i,j,k}^n, b \nabla_x \mathbf{Y}_{i,j,k}^n),$$

$$\tilde{\nabla}_x \mathbf{Y}_{i,j,k}^n = \min\text{mod}(\nabla_x \mathbf{Y}_{i,j,k}^n, b \Delta_x \mathbf{Y}_{i,j,k}^n).$$

Плотности потоков масс компонентов, тензора потока импульса и вектора потока энергии, соответствующие эффективным потокам диффузии, вязкости и теплопроводности в системе (5.35), представляются в методе обычными центральными аппроксимациями второго порядка по пространственным координатам, и складываются с «невязкими» потоками. Так, например, плотность эффективного потока тепла через  $x$ -границу с индексами  $i + \frac{1}{2}$ ,  $j$ ,  $k$  на  $n$ -м временном слое задается соотношением

$$(q_{\text{эфф}})_{i+\frac{1}{2},j,k}^n = -(\varkappa_{\text{эфф}})_{i+\frac{1}{2},j,k}^n \frac{T_{i+1,j,k}^n - T_{i,j,k}^n}{\Delta x}, \text{ и т. д.}$$

По временной координате уравнения (5.35) интегрируются двухэтапной схемой второго порядка аппроксимации с одним «промежуточным» слоем и уточняющим пересчетом при переходе на новый слой по времени (схема «предиктор-корректор»):

$$\mathbf{U}_{i,j,k}^{\overline{n+1}} = \mathbf{U}_{i,j,k}^n + \Delta t \cdot L_h(\{\mathbf{U}_{i,j,k}^n\}),$$

$$\mathbf{U}_{i,j,k}^{n+1} = \frac{1}{2} \left[ \mathbf{U}_{i,j,k}^n + \mathbf{U}_{i,j,k}^{\overline{n+1}} + \Delta t \cdot L_h(\{\mathbf{U}_{i,j,k}^{\overline{n+1}}\}) \right].$$

Описанный метод лег в основу программ для ЭВМ, использованных в расчетах пространственных течений, результаты которых представлены в разд. 7.3 и 7.4. Данный метод представляет собой явный монотонный *консервативный метод* — обобщение на случай 3D метода типа Годунова (подразд. 5.5.2) повышенной точности для равномерной сетки.

## 5.7. О методологии и методах расчета в *CFD*-пакетах

Изложенный в разд. 5.6 метод для расчета пространственного течения сжимаемого рабочего тела пригоден для решения как УНС, так и уравнений, замкнутых в предположении о расчете «в режиме» МКВ. Однако данный метод, использующий простейшую «декартову» равномерную сетку ячеек (конечных объемов), например, затруднительно приспособить для корректного решения реальных задач детального моделирования РП ТД, в которых очертания расчетной области произвольные и зачастую переменные во времени.

Реализация подобных методов может быть оправдана при создании расчетных программ *специального назначения*, нацеленных на решение ограниченного круга *исследовательских и учебных* задач.

Производители же (коммерческих) *CFD*-пакетов *общего назначения*, предназначенных для решения широчайшего круга прикладных задач гидрогазодинамики, при создании расчетных программ вынуждены удовлетворять множеству противоречивых требований. Поэтому общепринятым при создании расчетных программ (солверов) таких *CFD*-пакетов является следование примерно следующей *методологии*:

- рассмотрение исходной системы уравнений модели течения среды как набора обобщенных интегральных уравнений переноса вида (3.28) — что обеспечивает необходимую гибкость независимого выбора частных моделей и набора совместно решаемых уравнений переноса при использовании:
  - предположений о сжимаемом, слабо- и несжимаемом течении;
  - уравнений состояния — от  $\rho = \text{const}$  до задаваемых пользователем;
  - моделей одно- и многокомпонентной, реагирующей или инертной смеси, в т.ч. модели многофазного течения и излучения;
  - моделей влияния эффектов турбулентности на перенос (в т.ч. — в пристенной зоне), химические реакции, межфазный обмен и излучение;
- *дискретизация* уравнений по пространству (не выше 2-го порядка аппроксимации) — в контексте МКО, рассчитанная на при-

менение сеток с ячейками в форме многогранников (рис. 5.11) — для обеспечения корректности и удобства:

- задания расчетной области с произвольным, в т.ч. изменяющимся со временем очертанием пространственных границ, причем для численных методов существенно требование о «выходе» граней поверхностных ячеек сетки на границы;
  - реализации произвольного измельчения ячеек сетки для выявления детальной местной структуры решения, в первую очередь — в пристенных зонах с повышенными градиентами характеристик потока;
- *дискретизация* уравнений по времени — через применение *неявных методов*, позволяющих:
    - существенно повысить допустимую величину временного шага  $\Delta t$  (невысокую для явного аналога того же метода — из-за ограничения на  $\Delta t$  по условию  $CFL$  для мелких ячеек, наличия ячеек сетки «плохой» формы и др. факторов, снижающих устойчивость разностной схемы), а также в некоторой степени ослабить вредное влияние «жесткости» конкретных частных моделей и сочетания конкретных УЧП в решаемой системе;
    - в расчетах, нацеленных на получение стационарной (*stationary*) картины течения — использовать шаги по времени, характеризующиеся  $CFL \gg 1$  и достигать сходимости к стационарному решению за весьма умеренное число *итераций* (*iterations*);
    - в расчетах *нестационарных* (*transient*) течений — использовать желаемые (адекватные для ячеек в «ядре» потока) значения  $CFL \approx 1$  без потери устойчивости от вышеупомянутых факторов, и с неплохими шансами (см. ниже) на получение физически достоверной картины развития решения по времени (*time-resolved solution*).
  - решение систем линейных уравнений, вытекающих из соотношений неявных методов для уравнений переноса — численные, итерационными методами и часто (особенно для слабо- и «несжимаемого» случая) — с использованием приемов, не позволяющих учесть особенности движения упругих волн во всей полноте.

В [45] описан классический численный метод такого класса (см. также [33, 34]).

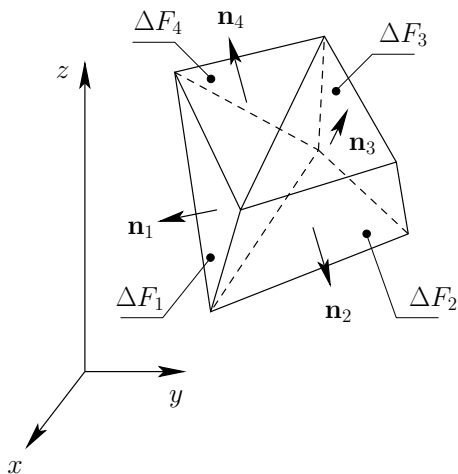


Рис. 5.11. Пространственная ячейка — конечный объем (сравн. с рис. 3.2 и рис. 5.10)

Применение описанного подхода приводит к удовлетворительным (в пределах допущений, содержащихся в моделях) результатам расчета течений с преобладанием процессов конвекции и градиентного переноса (диффузии, вязкости и теплопроводности, в т. ч. турбулентных). Но расчеты течений, где важны упругие возмущения (от звуковых волн до ВКА и скачков), движущиеся (по потоку) со скоростями порядка  $c$ , в ряде случаев могут обнаруживать погрешности, вызванные отклонением от физической адекватности. В то время как *явные методы повышенной точности* для сжимаемых течений как раз приспособлены к выявлению в расчете указанных структур течения, но становятся неэффективными для «медленных» течений ( $1 \gg |v|/c$ ).

Кроме того, следует учесть, что применяемый как в последние десятилетия, так и в настоящее время *инженерный подход* к моделированию течений в технических приложениях (в т. ч. и в ГВТ ТД) предполагает численный расчет по уравнениям *модели осредненного течения*, а отнюдь не выделение в расчете хотя бы крупномасштабной составляющей вихревой структуры турбулентного потока (*LES*, с. 99), что достижимо все еще на пределе (или *за пределами*) возможностей



доступных ЭВМ. При данном подходе к моделированию течений рабочих тел в ТД (особенно с учетом смесеобразования и горения) достоверность результатов может не вполне удовлетворять расчетчика ввиду недостаточной детализации в модели течения, лежащей в основе подхода (с. 92).

Указанная, а также ряд других<sup>7</sup> причин снижения достоверности моделирования РП ТД численными расчетами пространственных течений РТ в их ГВТ актуальны при использовании коммерческих *CFD*-пакетов, поэтому при планировании расчетов следует не полагаться на *заявленные возможности* пакетов, а критически оценивать *ограничения*, присущие тому или иному пакету, методологии и модели.

Документация, прилагаемая к пакету (например, том *Methodology* документации на пакет *STAR-CD*), может и должна служить отправной точкой для знакомства с уровнем моделей и особенностями их численной реализации. И ничто не заменит *опыта* — как собственного, так и опыта решения сходных задач другими исследователями.

Для наиболее ответственных (а значит, наиболее детальных) расчетов течений в ГВТ ТД («в режиме» *LES*) также применимы имеющиеся *CFD*-пакеты; в этой области также существует «ниша» для применения программных средств *специального назначения*. Так, на кафедре ДВС УГАТУ разрабатывается расчетная программа для моделирования течений РТ в ГВТ явными высокоточными методами для высокопроизводительных ЭВМ с большим (порядка сотен и тысяч) числом процессорных ядер.

## Вопросы для самоконтроля

- 1) Для решения каких задач может применяться метод Эйлера?
- 2) Укажите пути уменьшения погрешности, вызванной дискретизацией уравнений по  $t$ .
- 3) Укажите, каким физическим эффектам, учитываемым например, в УНС, примерно соответствуют члены простых модельных УЧП а) теплопроводности; б) линейного и в) нелинейного гиперболического уравнения?

---

<sup>7</sup>Ограничения модели осредненного течения, не вполне адекватные модели турбулентных эффектов и модели межфазного взаимодействия и излучения, применение не адекватных задаче (слишком грубых) расчетных сеток в  $(\mathbf{r}, t)$ , особенности численных методов.

- 4) Охарактеризуйте подход, с применением которого получены приведенные в данной главе явные методы «сквозного» счета для одно- и многомерных уравнений нестационарного течения газа?
- 5) Для чего используется кусочно-параболическая интерполяция («реконструкция») характеристик потока внутри расчетных ячеек?
- 6) Охарактеризуйте подход к численному решению уравнений гидродинамики, принятый в *CFD*-пакетах общего назначения.
- 7) Охарактеризуйте особенности современного инженерного подхода к численному расчету турбулентных течений в ГВТ ТД в *CFD*-пакетах общего назначения.

# Глава 6

## Принципы построения прикладных программных пакетов

Глава 5 начинается с изложения подхода к численной реализации моделей динамики систем на примерах систем, состоящих из *единственного элемента*. При переходе к *сложным системам* с их множественностью *элементов* и *связей* весьма желательно, чтобы численная (имитационная) модель системы (в виде программы для ЭВМ) для проведения вычислений не создавалась каждый раз заново, а «набиралась» из *типовых компонентов — моделей элементов (МЭ) и моделей связей (МС)* predefined типов.

В данной главе с позиций общих требований, предъявляемых к развитым ППП, обосновываются проектировочные решения, принимаемые при их создании.

### 6.1. Общие требования к программному пакету

Перечислим требования, предъявляемые к ППП для численного моделирования процессов (в т. ч. процессов в ТД) как к программной системе:

- **«полнота» библиотек** предоставляемых математических моделей (процедур и модулей);
- **вычислительная эффективность** — использование располагаемых ресурсов ЭВМ в основном для численного расчета по методам, обладающим высокими *порядками аппроксимации*;
- **расширяемость** — возможность развития ППП (с добавлением в библиотеки моделей новых модулей, при сохранении *обратной совместимости* по формату исходных данных), а также возможность добавления пользовательских процедур и модулей;
- **гибкость** применения — возможность автоматизации вычислений, работы в удаленном и распределенном режимах, в частности, при проведении массовых и оптимизационных расчетов;

- **масштабируемость** — возможность эффективного использования вычислительных ресурсов многопроцессорных ЭВМ, в т. ч. с многоядерными ЦПУ;
- **переносимость (платформонезависимость)** — возможность полноценной работы пакета на всех основных программно-аппаратных платформах;

К ППП, предназначенному для широкого применения, кроме упомянутых выше, предъявляется требование

- **высоких потребительских качеств**, которые, при выполнении перечисленных выше требований, достигаются, как минимум, при наличии единообразного, продуманного и комфортного *графического интерфейса пользователя* (ГИП).

## 6.2. Архитектура моделирующей программы

Основным принципом, позволяющим справляться со сложностью задач проектирования, реализации и развития ППП, является *модульный принцип*, проявляющийся уже в функциональном разделении *программных компонент* пакета. Основным компонентом ППП, вокруг которого группируются прочие программные компоненты, является ее моделирующая программа (солвер, от англ. *solver* — букв. «решатель»). Выделение солвера в отдельный программный компонент диктуется рядом требований к ППП, перечисленных в разд. 6.1).

Современный инструментарий для численного моделирования процессов в сложных физических (технических) системах реализуется в *прикладных программных пакетах* (ППП). Традиционно ППП включают в себя *моделирующую программу* или *солвер*, а также набор вспомогательных программ, отвечающих за организацию *графического интерфейса пользователя* (ГИП), подготовку исходных данных (англ. *pre-processing*), поддержку распределенных, массовых и оптимизационных расчетов, а также отображение и анализ результатов (англ. *post-processing*).

Для эффективной работы и успешного развития такого ППП важно, чтобы каждый компонент хорошо решал свою задачу; задача солвера ППП рассматриваемого типа — численное решение уравнений динамики систем.

Придерживаться *модульного принципа* в солвере ППП означает оформлять *модели элементов (МЭ)* и *модели связей (МС)* в виде *программных модулей* — структурных единиц программы, «инкапсулируя» в них совокупность данных моделей и операций над ними, что является тривиальной задачей, решаемой при программировании. Оформление МЭ и МС в виде программных модулей позволяет, при всем многообразии *предметных областей* и видов модулей в каждой из них и множественности элементов и связей в моделях систем, создавать библиотеки типовых моделей, пригодных для описания эволюции во времени сложных систем.

Такое решение вполне соответствует основному подходу при численном моделировании динамики систем — обновлению на шаге *сохраняющихся величин* в расчетных ячейках по ЗС. Модели элементарных объектов «упаковываются» в программные модули, скрывающие особенности методов обновления состояния для элементов каждого типа, с сохранением сути подхода — обновление рабочих переменных  $U$  внутри каждого из них на шаге по времени. Обратная сторона принципа сокрытия особенностей — невозможность получить доступ напрямую к «содержимому» других *модулей-элементов (МЭ, англ. component)*. Как следствие — необходимость в *модулях-связях (МС, англ. connector)*, задача которых — *вычислить взаимодействие* двух (или более) МЭ и сделать лишь результат этого вычисления доступным им. Абстрагирование от особенностей устройства конкретных модулей повышает гибкость, для чего требуется вспомогательная сущность — разделяемая область памяти для обмена данными (в терминологии ППП «Альбея» [32] эта область именуется *порт*) — см. рис. 6.1.

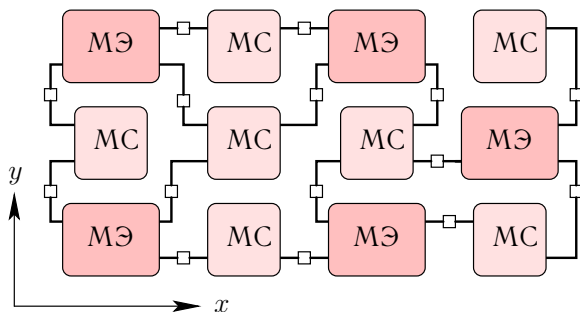


Рис. 6.1. Модули-элементы, модули-связи и порты, представляющие модель системы на поле сборки

Каждый МЭ представляет собой «с точки зрения» моделирующей программы как бы элементарную расчетную ячейку, специфичную для соответствующей *предметной области*. Простейшие МЭ можно с успехом компоновать в *составные* МЭ, связи между которыми нет нужды выделять в отдельные объекты — это повышает производительность и ясность. Например, на таком принципе организуется работа МЭ, описывающего процессы в цилиндре ДВС по двух- и многозонным моделям, или МЭ, описывающий одномерное течение в канале (трубке) и т. д. Таким же образом (т. е. в виде модулей-элементов) могут быть реализованы и модели, реализующие «ресурсоемкие» численные расчеты многомерных задач (например, газодинамических).

Моделирующая программа выполняет следующие действия. На этапе инициализации модели вызываются соответствующие функции всех наличных МЭ, заполняющие (на основе исходных данных) массивы **U** начальными значениями, после чего программа входит в цикл расчетных шагов. Для обновления состояния модулей-элементов на шаге (рис. 6.2) им требуются данные о потоках *сохраняющихся величин*, которые берутся из *портов*. А чтобы потоки были вычислены и занесены в порты, текущее численное решение в модулях-элементах должно стать доступным модулям-связям — также через порты. Для обеспечения этой цепочки вначале вызываются функции расчета модулей-связей — они получают нужные для расчета взаимодействий параметры из портов, куда они передаются ранее модулями-элементами, производят расчеты и записывают обратно в порты вычисленные *потоки*. Далее активность проявляют модули-элементы — они выбирают из портов величины *потоков*, вычисляют внутренние *источники* и обновляют свое состояние — вначале значения *консервативных переменных*, вычисляя по ним обновленные значения *первичных переменных*. После этого модули-элементы записывают в порты обновленные параметры своего состояния, позволяющие модулям-связям вновь вычислить взаимодействия на следующем шаге и т. д.

С «точки зрения» каждого из МЭ данная последовательность действий отрабатывает алгоритм, показанный на рис. 5.2 (с. 147).

Для повышения точности численного интегрирования уравнений моделей элементов по времени достаточно просто реализуются многоэтапные методы обновления решения на шаге — например, по *методу Эйлера* 2-го порядка точности по времени («двухэтапная» схема). При этом в расчете по таким многоэтапным схемам (методы Эйлера и *Рун-*

ge – Кутта) модули-связи могут и «не знать», для какого из этапов они вызываются.

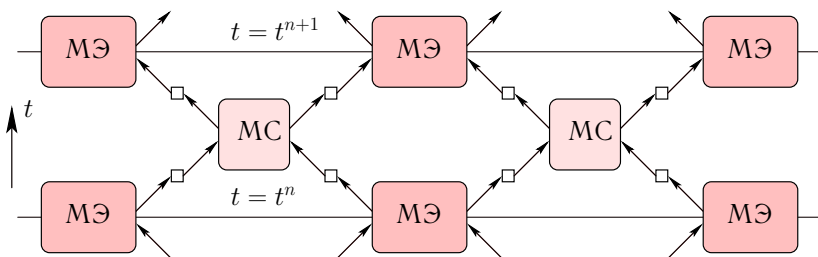


Рис. 6.2. Последовательность расчета эволюции модели, набранной из модулей-элементов и модулей-связей

Очевидно, что для моделирования разнообразных технических систем с задействованием одной или нескольких *предметных областей* потребуется набор (библиотека) различных типов МЭ и МС из этих областей. При этом предпочтительно придерживаться следующего «схемотехнического» принципа: модули-элементы — достаточно (до разумной степени) элементарны, а их набор достаточен для описания данной *предметной области* на принятом уровне *иерархии моделей*, но при необходимости несложно «набираются» модели *составных объектов* из МЭ и МС данной (или даже нескольких) предметных областей (т. е. без необходимости создания специального модуля разработчиком пакета).

Для этого наборы МЭ для данной предметной области желательно создавать без какого-либо учета соглашений для других предметных областей. Для наборов модулей-связей можно рекомендовать тот же принцип; однако МС могли бы служить «мостами» между предметными областями (возможно, не напрямую). А именно, необходимость иметь такие «мосты» заставляет создавать специальные связи («пустышки»), только для этого предназначенные. Тем самым можно предельно локализовать информацию о специфике структур данных портов, характерных для некоторой предметной области. Проиллюстрируем сказанное несколькими примерами.

Так, моделирующий *емкость переменного объема* МЭ текущие значения своего объема и мощности работы расширения мог бы получать именно из портов. Такого рода модуль-элемент ЦИЛИНДР ДВС может не иметь в своем составе структур данных, характеризующих ки-

нематику КШМ, что, в частности, обеспечит бóльшую гибкость задания закона движения поршня в нем — например, можно учесть движение «свободного» поршня, определяемое *моделями элементов*, учитывающими его динамику, и *моделями связей*, учитывающими силы упругости и трения («линейный» или свободно-поршневой ДВС).

Также, например, для моделирования течения через компрессионные и расширительные машины следует иметь — в базовом варианте — модели этих машин типа модулей-связей (см. с. 123), на которых стыкуются модули из *предметных областей* «нестационарная газовая динамика» и «динамика». Так, модель течения через компрессор или турбину позволяет вычислить на расчетном шаге, помимо прочего, мгновенную мощность, подводимую к потоку или отводимую от него ротором машины. Такой МС может служить *мостом* между МЭ МЭ указанных предметных областей, а передаваемая из его «механического» порта работа может быть использована для расчета приращения момента количества движения инертного ротора машины, что позволит моделировать переходные процессы в механической подсистеме модели сложного объекта (например, комбинированного ДВС).

### 6.3. Типичная архитектура пакета

При создании *прикладного программного пакета* (ППП) для численного моделирования процессов принимают модульную (компонентную) архитектуру (рис. 6.3) с тем, чтобы, разделив различные по функциональному назначению компоненты, уменьшить сложность ППП и увеличить ее *гибкость*, *масштабируемость* и *расширяемость* (см. требования в начале данной главы).

Как *ядром* МЭ является процедура обновления его состояния на шаге, так и ядром моделирующей программы (солвера) — *сборка* (англ. *assembly*) — объект, инкапсулирующий набор модулей-элементов и модулей-связей и способный обновлять свое состояние на шаге.

Солвер, реализуемый в качестве центрального компонента (*ядра*) ППП, может быть наделен дополнительными функциями (не в ущерб основной). Так, если ППП должен допускать манипулирование состоянием (составом, связностью, параметрами свойств) модели системы в ходе расчета (в некоторых современных ППП это зачастую так), в солвере следует реализовать не только режим независимого расчета («пакетный» режим), но также «управляемый», «интерактивный» ре-



жим, в котором солвер может вести не только счет, но и диалог посредством *графического интерфейса пользователя* (ГИП). Последний целесообразно выполнять как программный компонент, запускающей солвер, например, как *дочерний процесс*. Для указанной связи может быть принят такой подход к проектированию («шаблон», англ. *design pattern*), часто принимаемый для интерактивных программ, как *MVC (Model-View-Controller)*. При применении *MVC* солверу отводится роль «контейнера» для *Модели* системы, а на долю ГИП отводятся функции *отображения* — *Вид* и *контрольной панели* — *Контроллер*.

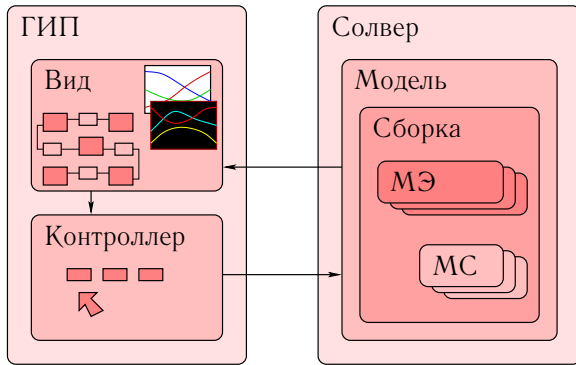


Рис. 6.3. Типичная архитектура ППП для моделирования процессов в сложных системах

При этом возникает необходимость двунаправленной коммуникации между солвером и ГИП по некоторому каналу связи и протоколу. Несмотря на кажущуюся сложность, при использовании объектно-ориентированного подхода к проектированию, это относительно просто и надежно реализуется. Асинхронность посылки запросов от ГИП (играющего роль *клиента*) к солверу (выступающего в роли *сервера*) и приема сообщений от него достигается введением одного дополнительного потока выполнения для «прослушивания» поступающих сообщений на стороне клиента с синхронизацией. Исключается какой-либо непроизводительный простой ЦПУ и обеспечивается необходимая «отзывчивость» системы моделирования на вводимые команды даже во время счета.

Отделенность *Вида* и *Контроллера* от *Модели* дает ряд преимуществ, в их числе — многовариантность коммуникационных каналов

между клиентом и сервером, облегчающая, например, *распределенные вычисления*. Так, расчетную часть программы можно разместить на высокопроизводительном *вычислительном сервере* (с. 189), доступ к которому возможен с маломощных *клиентских* настольных ПЭВМ.

Касаясь вопроса о высокопроизводительных вычислениях, сразу укажем, что *вычислительный сервер* мог бы представлять собой многопроцессорную ЭВМ (например, кластерной архитектуры), а солвер мог бы при этом поддерживать исполнение вычислительных моделей, требующих высоких затрат времени ЦПУ в параллельном режиме. Подробнее об этом — в разд. 6.4.

#### **6.4. Высокопроизводительные вычисления**

В этом разделе обсуждается организация высокопроизводительных вычислений (англ. *High Performance Computing, HPC*) для моделирования РП ТД и соображения относительно архитектуры ППП, поддерживающей параллельное исполнение расчетной программы (солвера).

При моделировании РП ТД в наиболее детальной постановке требования к вычислительным ресурсам (быстродействию и объему оперативной памяти ЭВМ) могут быть очень велики, например, в расчетах турбулентных течений с выделением нестационарной вихревой структуры (подходы *LES* и *DNS*). При проведении «ресурсоемких» расчетов целесообразно распределить вычислительную работу между процессорами многопроцессорной ЭВМ, чтобы значительно сократить продолжительность каждого конкретного расчета и (или) использовать суммарно значительный объем оперативной памяти. Для таких задач, которым присущ параллелизм вычислений, возможно создание «параллельных» версий алгоритмов и программ, позволяющих эффективно использовать ресурсы ЭВМ с большим количеством (в т. ч. *многоядерных*) процессоров.

К счастью, в задачах вычислительной газодинамики (особенно решаемых *явными методами*), подобное «распараллеливание» оказывается относительно простым и достаточно эффективным. Действительно, достаточно предусмотреть в алгоритме сегментацию расчетной области на подобласти, чтобы вычисления для каждой подобласти на расчетном шаге требовали минимальной информации о состоянии в смежных подобластях. Тогда каждое такое вычисление можно проводить на отдельном вычислительном узле (процессоре) многопроцессорной ЭВМ,

а для восполнения недостающей информации обращаться с запросом к соответствующим узлам (процессорам).

Идеальный конечный результат «распараллеливания» вычислений — ускорение расчета в  $N$  раз, где  $N$  — число идентичных процессоров (процессорных ядер). В действительности ускорение расчета всегда оказывается несколько меньше  $N$  из-за а) накладных расходов, в т. ч. связанных с передачей данных между процессорами и б) несбалансированности загрузки процессоров. В любом случае производительность параллельной системы лимитируется наиболее медленно выполняемой подзадачей; при неблагоприятных условиях «эффективность» «распараллеливания» может резко снижаться.

Рассмотрение всех возможных архитектур многопроцессорных ЭВМ и лежащих в их основе принципов организации параллельных вычислений выходит за рамки данной книги. За подробностями можно обратиться, в частности, к [7, 18]. Ниже мы остановимся только на практическом применении так называемых *кластеров рабочих станций* (называемых еще по традиции *Beowulf*-кластерами, см. [18, 48]).

**6.4.1. Аппаратное обеспечение: кластеры.** *Кластер* рабочих станций (*Beowulf*-кластер) [7, 18, 48, 47] представляет собой набор высокопроизводительных одно- или многопроцессорных ЭВМ (вычислительных *узлов*), соединенных высокопроизводительной сетью и специально предназначенных для исполнения на них вычислительных задач. Примечательная особенность их в том, что кластеры могут целиком комплектоваться стандартным (но производительным, на данный момент) аппаратным обеспечением и специфическим (но также стандартным, в т. ч. находящимся в свободном доступе) ПО. Вычислительные системы данного класса по производительности могут конкурировать со специализированными многопроцессорными ЭВМ, а по соотношению цена/производительность — даже опережать их.

На каждом узле кластера выполняется отдельная копия операционной системы (ОС), а под ее управлением — расчетные процессы (по одному на процессор или ядро процессора), располагающие свои данные в локальной памяти узла. Между собой расчетные процессы «общаются» по определенному протоколу, используя высокопроизводительную сеть, объединяющую узлы.

За прошедшие полтора десятилетия было создано множество подобных вычислительных систем. На момент выхода данного пособия типичный недорогой кластер представлял собой набор из примерно 8...24

одно- или двухпроцессорных компьютеров на базе (двух- или четырехъядерных) процессоров фирм *Intel* или *AMD*, работающих под управлением ОС *Linux*. Количество процессоров в кластерах, входящих в верхние строчки рейтинга суперкомпьютеров **Тор500** [49], достигает десятков тысяч.

Возможно создание кластеров, работающих под управлением ОС семейства *Windows* (NT/2000/XP/2003), но доминируют в этом секторе все же свободные версии *Unix*-подобных ОС, главным образом в силу традиции и удобства, а отчасти из стремления снизить полную стоимость вычислительной системы.

В УГАТУ в 2000–2006 гг. функционировали несколько кластеров, наиболее крупный — 64-процессорный кластер из 32 узлов с процессорами *Pentium III* на тактовой частоте 1,0 ГГц. На момент написания продолжал работать собранный в 1999 г. 13-процессорный кластер на процессорах *DEC Alpha 21164* (тактовая частота 667 МГц).

На рис. 6.4 показан кластер, собранный в 2006 г. на кафедре ДВС УГАТУ из 4 материнских плат с процессорами *AMD Sempron 3000+* (тактовая частота около 1,9 ГГц), работающий под управлением ОС *Linux*.

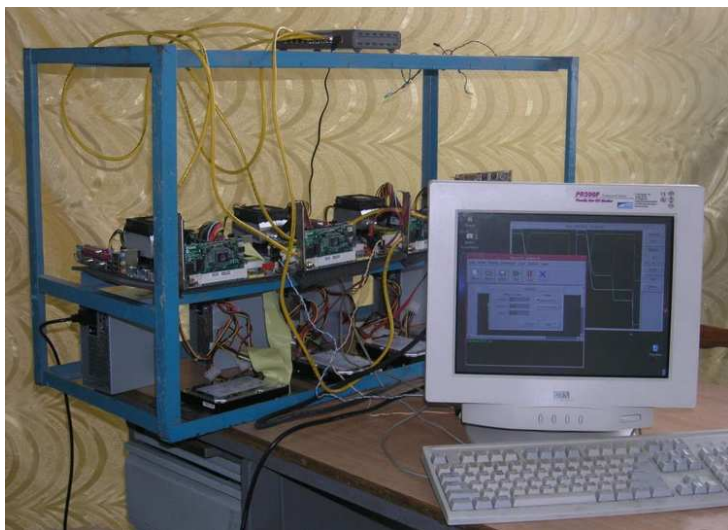


Рис. 6.4. Четырехпроцессорный кластер, собранный на кафедре ДВС УГАТУ в 2006 г.

Показательно, что по производительности кластер на рис. 6.4) уступает в  $\approx 1,5$  раза настольному компьютеру с четырехъядерным процессором Intel Core 2 Quad.

В декабре 2007 г. в УГАТУ вступил в эксплуатацию суперкомпьютер кластерной архитектуры, содержащий 266 двухпроцессорных узлов с четырехъядерными процессорами Intel Xeon (2128 ядер, частота 2,33 ГГц). Показав пиковую производительность 19,86 Тфлопс<sup>1</sup>, он занял 169-е место в рейтинге Top500 [49] по состоянию на июнь 2008 г.

**6.4.2. Программное обеспечение: MPI и параллельный солвер.** Для расчетов на многопроцессорных ЭВМ требуется переработка алгоритмов — их «распараллеливание», которое технически сводится к встраиванию в текст программы вызовов процедур передачи сообщений между расчетными процессами.

Наибольшее распространение получило использование вызовов процедур библиотек, реализующих спецификации *интерфейса передачи сообщений* (Message Passing Interface, MPI), стандартизованной в 1993 г., что позволяет создавать *переносимые* параллельные программы (в стандарте MPI), компилировать и исполнять их на многопроцессорных системах различной архитектуры (т. е. не только на *кластерах*).

Свободно распространяемый пакет MPICH реализует спецификацию MPI (MPICH2 — спецификацию MPI второй версии), позволяет работать с программами, написанными на C, C++ и Fortran. Кроме собственно исходных текстов библиотеки, сценариев трансляции и запуска, пакет MPICH содержит исходные тексты утилит отладки, диагностирования и профилирования MPI-программ и документацию на пакет.

Имеется версия MPICH для линейки ОС Windows, установка и использование которой существенно отличаются от таковых для Unix-систем.

Спецификация MPI и некоторые ее реализации имеют статус промышленного стандарта де-факто, и, например, солверы коммерческих CFD-пакетов используют именно их при запуске в «параллельном» режиме.

Итак, для проведения «параллельных» расчетов (в стандарте MPI) в многопроцессорной вычислительной системе (для кластеров —

---

<sup>1</sup>Т. е.  $19,86 \times 10^{12}$  операций над вещественными числами в секунду.

на всех узлах) должен быть установлен пакет поддержки компиляции и выполнения (например, MPICH). Тогда *MPI*-программа, включающая файл заголовков и содержащая вызовы процедур *MPI*, компилируется и компоуется с объектным кодом этих процедур в исполняемый файл, который запускается в вычислительной системе в нужном числе экземпляров.

С параллельным программированием (с использованием *MPI* и др. подходов) можно познакомиться по [7, 18, 15].

Солвер ППП также может быть написан с поддержкой режима параллельных вычислений (рис. 6.5). Это оправдано в основном при использовании «ресурсоемких» моделей. Тогда, при включении в расчетный проект («сборку») подобного элемента (элементов), расчет его следует проводить на многопроцессорной ЭВМ (например, на кластере). Может быть применено (усложненное по сравн. со схемой на рис. 6.3, но сохраняющее гибкость и эффективность) архитектурное решение для ППП, когда «ресурсоемкие» расчеты передаются на многопроцессорный *вычислительный сервер* (кластер), а «легковесные» модули рассчитываются, например, на клиентской машине.

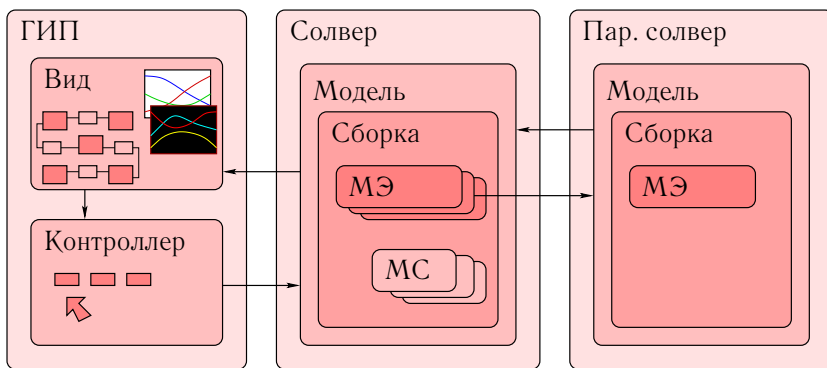


Рис. 6.5. Вариант архитектуры со специальным «параллельным» солвером

Другое решение — удаленный запуск единого для ППП солвера в «параллельном» режиме работы на кластере, с перенаправлением графического вывода на терминал, на котором запущена программа ГИП, выполняющая функции «тонкого клиента».

## Вопросы для самоконтроля

- 1) Какие требования можно считать наиболее приоритетными при разработке ППП, предназначенных для широкого распространения? для «внутрифирменного» использования?
- 2) Укажите программные компоненты, необходимые для реализации функциональных возможностей развитого прикладного программного пакета.
- 3) Перечислите основные операции, выполняемые расчетной программой ППП (солвером) как при запуске, так и на шаге численного расчета.
- 4) Перечислите базовые классы объектов, которыми может быть представлена компонентная модель сложного моделируемого объекта (системы) — «сборка» в солвере.
- 5) Чем обусловлено применение многопроцессорных вычислительных систем для численного моделирования рабочих процессов тепловых двигателей?
- 6) К чему в идеале должно приводить «распараллеливание» вычислений на  $N$  идентичных процессоров (процессорных ядер)?
- 7) Что представляет собой высокопроизводительная ЭВМ кластерной архитектуры?

# Глава 7

## Примеры моделирования процессов

В данной главе приводятся результаты некоторых расчетных и расчетно-экспериментальных исследований, в которых численное моделирование выполнено с применением описанных в предыдущих главах моделей и подходов.

### 7.1. Решение тестовых задач методами типа Годунова

Прежде чем использовать тот или иной метод для расчета реальных течений в ГВТ, полезно убедиться в том, что он дает численные решения, сходящиеся к точным, и что численные решения не содержат нефизических дефектов. Для этого вполне подходит решение идеализированных тестовых задач, точные решения которых известны. Это позволяет сравнивать решения, полученные разными методами, с ним как с эталонным, а численные решения, полученные разными методами — между собой.

С применением трех консервативных методов для численного решения одномерных уравнений газовой динамики (раздел 5.5) решены две тестовые задачи о распаде разрыва. Выбор тестовых задач обусловлен необходимостью проверки работоспособности данных монотонных методов сквозного счета на задачах, содержащих как сильные разрывы искоемых функций (КП и скачок уплотнения), так и изоэнтропных волн. В условиях обеих задач задавалась нулевая начальная скорость однородного газа с  $c_p/c_v = 1,40 = \text{const}$ . Отношения плотностей и давлений по обе стороны от начального разрыва составляли 2 и 20 для первой и второй задач соответственно. В решении первой задачи весь газ в зоне, возмущенной при распаде начального разрыва, движется с дозвуковой скоростью, в условиях второй задачи за хвостом волны разрежения поток движется быстрее скорости звука в этой зоне ( $M \approx 1,36$ ).

На рис. 7.1 показано решение первой тестовой задачи классическим методом «распада разрыва» С. К. Годунова, а на рис. 7.2 — решение второй задачи этим же методом. Расчетная сетка содержит 100 ячеек, сделано 100 шагов по времени с числом Куранта, равным 0,5. Числен-



ные решения на рисунках наложены на точные решения тестовых задач. В методе Годунова, реализованном в специальной программе для ЭВМ на языке С, применена процедура решения задачи о РПР на границах ячеек итерационным методом Ньютона из [40].

В решениях (рис. 7.1 и 7.2) этим методом заметно сильное «размазывание» решения, хотя положение разрывов воспроизводится правильно. В решении второй, «сверхзвуковой» задачи, виден дефект, присущий всем методам типа Годунова первого порядка — нефизичный скачок параметров на звуковой линии ( $|u| = c$ ).

Метод повышенной точности (с. 164) применен в трехшаговом варианте, с линеаризованной процедурой решения задач о РПР на границах ячеек. Решения тестовых задач этим методом на той же сетке показаны на рис. 7.3 и рис. 7.4. Видно, что нефизичные осцилляции практически отсутствуют, значения параметров в зонах постоянных параметров и положение разрывов воспроизводится правильно, как и в решениях по методу Годунова, а численное «размазывание» разрывов значительно меньше.

Решения тех же тестовых задач экономичным одноэтапным методом (с. 168) показаны на рис. 7.5 и рис. 7.6. Эта схема показывает наибольшую «разрешающую способность», однако в решениях заметна некоторая «шероховатость», которая, очевидно, является следствием примененных линеаризаций; впрочем, этот дефект существенно проявляется лишь для «сверхзвуковой» задачи (рис. 7.6).

Затраты времени процессора: для метода Годунова — 3,58 с, метода повышенной точности — 8,33 с, экономичного метода — 2,23 с (задача о «дозвуковом» РПР, сетка из 1000 узлов по  $x$  и по  $t$ , Intel Pentium III на частоте 700 МГц).

По результатам этого (и других) тестов метод повышенной точности (в двухэтапном варианте) и экономичный одноэтапный метод были приняты в качестве методов численного интегрирования уравнений модели *нестационарного течения* в МЭ ТРУБКА в СИМ «Альбея» [32].

## 7.2. Моделирование движения ВКА в трубопроводе

Следующей задачей тестирования моделей, используемых для численного расчета нестационарных течений по трубопроводам, становится проверка всей расчетной методики на задачах, содержащих движение длинных ВКА по трубопроводам, включающим местные сопротивления.

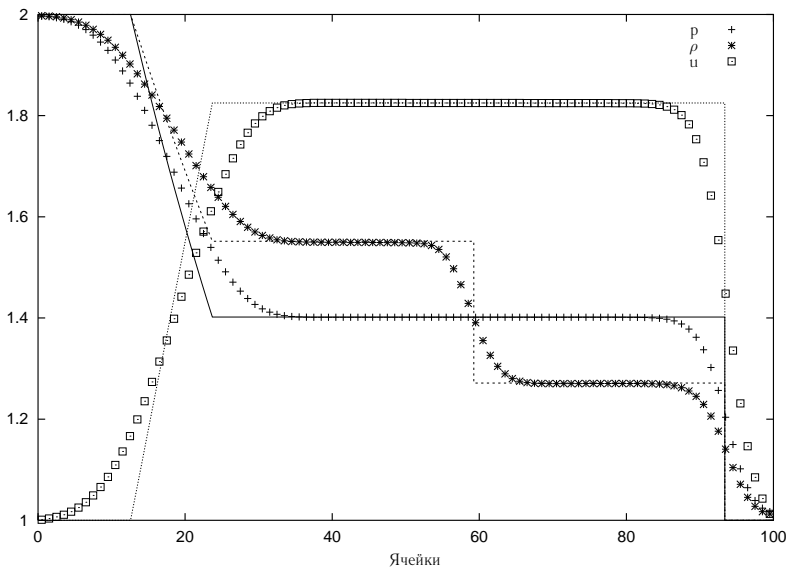


Рис. 7.1. Решение «дозвуковой» задачи о РПР методом Годунова

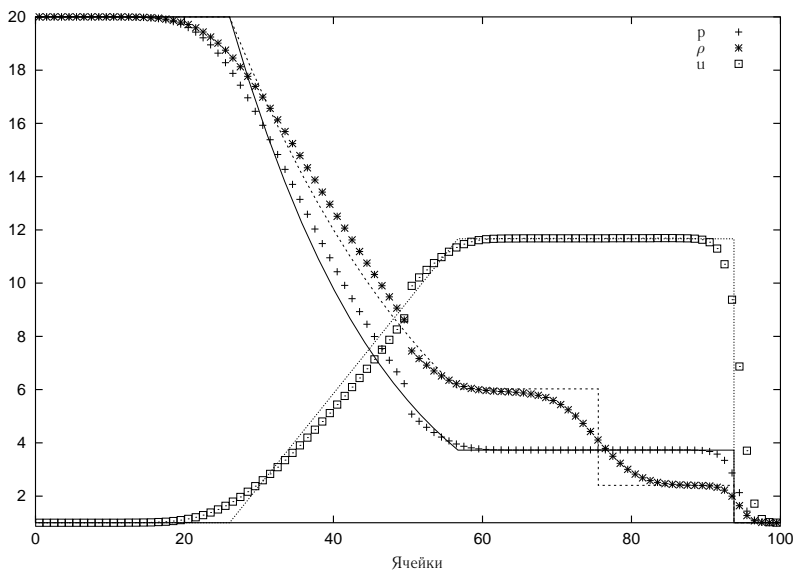


Рис. 7.2. Решение «сверхзвуковой» задачи о РПР методом Годунова

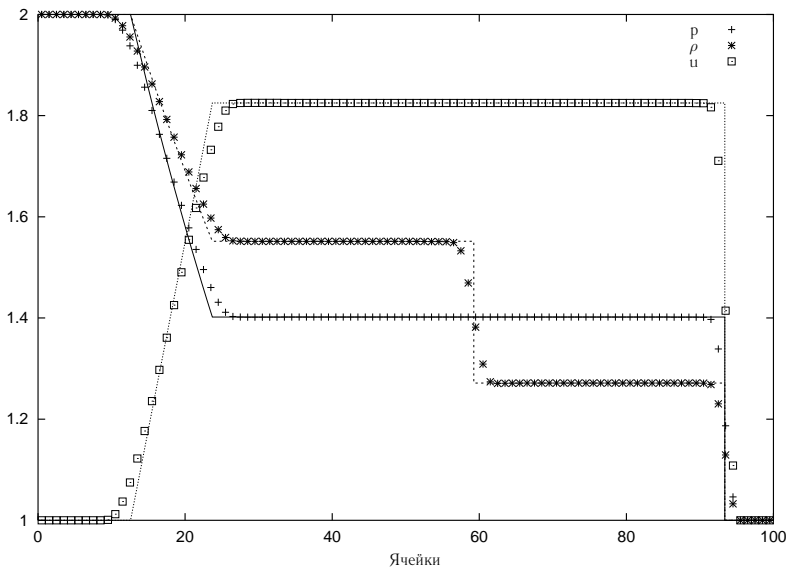


Рис. 7.3. «Дозвуковой» распад разрыва; метод повышенной точности

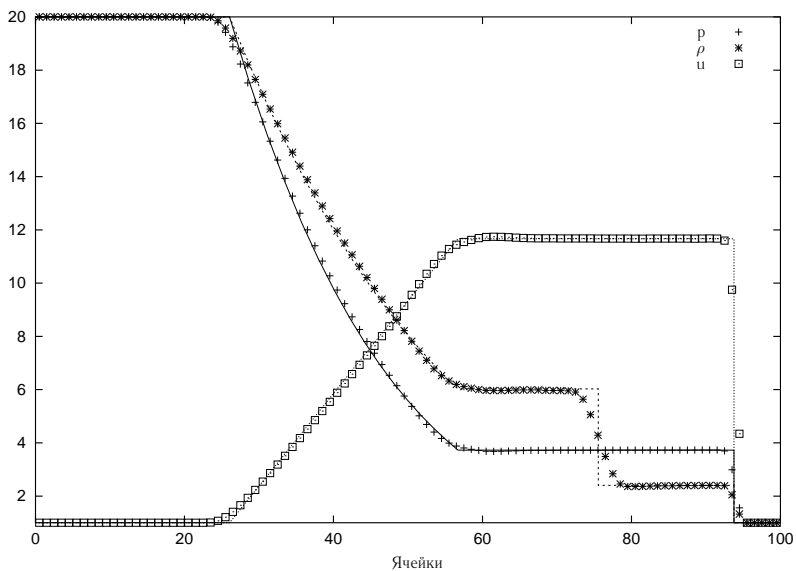


Рис. 7.4. «Сверхзвуковой» распад разрыва; метод повышенной точности

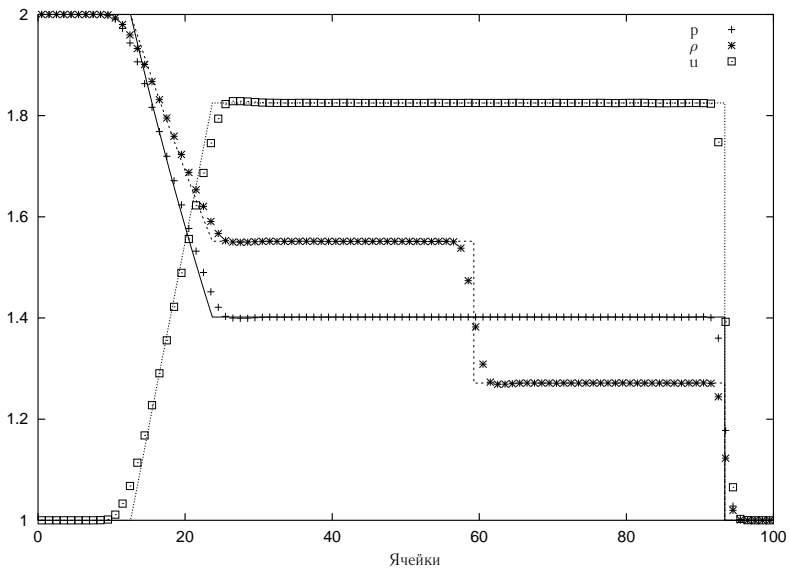


Рис. 7.5. Решение (ср. рис. 7.1 и 7.3) методом из подразд. 5.5.3

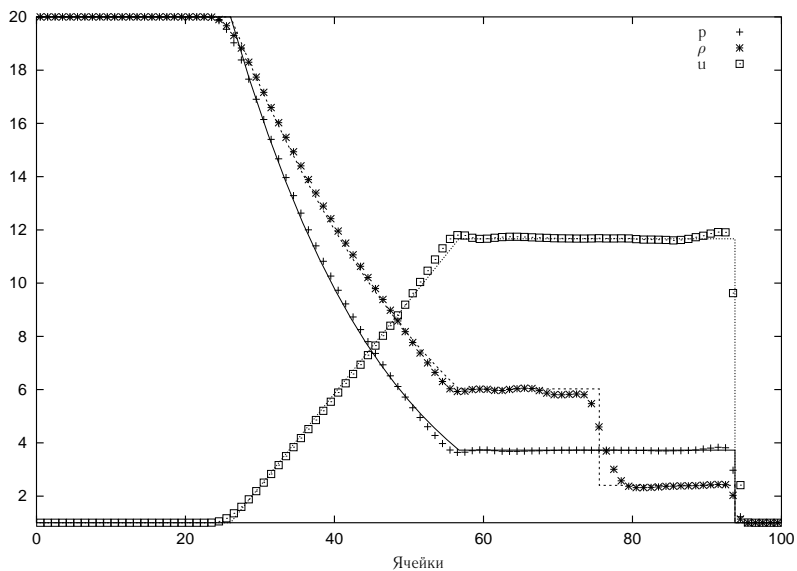


Рис. 7.6. Решение (ср. рис. 7.2 и 7.4) методом из подразд. 5.5.3

### 7.2.1. Одноцикловая установка и условия экспериментов.

Нестационарное движение ВКА по длинному неразветвленному трубопроводу с МС воспроизводилось в экспериментах на одноцикловой установке, содержащей *генератор волн* и присоединенный к нему трубопровод. Схема генератора волн представлена на рис. 7.7.

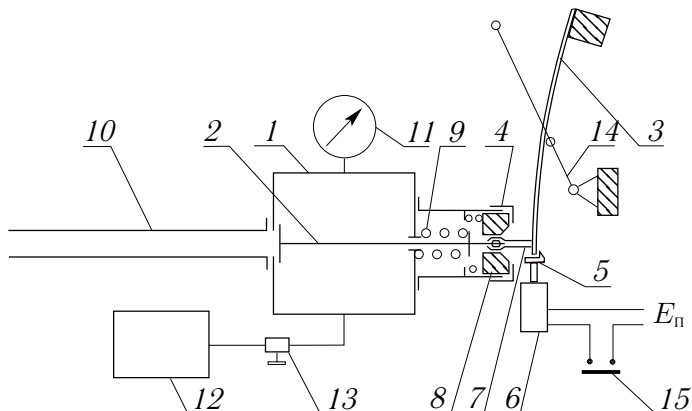


Рис. 7.7. Схема генератора волн одноцикловой установки

Основной элемент генератора волн — емкость *1*, соединенная с трубопроводом клапаном *2*, открываемым при помощи рессоры *3*; подъем и время открытия клапана регулируются гайкой *4*. Рессора удерживается во взведенном состоянии защелкой *5*, соединенной с сердечником соленоида *6*. При подаче тока на соленоид защелка освобождает рессору, которая приводит в движение клапан. После того, как зажимы *7* на рессоре выходят из втулки *8* и освобождают клапан, он под действием возвратной пружины *9* закрывается.

К емкости присоединен трубопровод *10*, по которому распространяются ВКА. Разрежение или повышенное давление в емкости создается либо компрессором, либо вакуумным насосом *12*. Величина давления регулируется вентилем *13*. Рессора вводится в зацепление с клапаном и защелкой при помощи рычага *14*.

В измерительную систему входят: один или два датчика давления, усилитель-преобразователь, аналого-цифровой преобразователь (АЦП) и персональная ЭВМ. Первичный преобразователь измерительной системы — малоинерционный датчик давления с чувствительным элементом в виде кремниевой пластинки с нанесенным на нее

активным сопротивлением, включенным по мостовой схеме. Вторичным преобразователем служит индуктивный высокочастотный многоканальный преобразователь (усилитель) 6705+ фирмы *AVL*. Измеряемый сигнал с выходов преобразователя подается на АЦП *PCI-1711* фирмы *Advantech*, установленный в слот *PCI* материнской платы ПЭВМ. Данный АЦП разрядностью 12 бит обеспечивает преобразование аналогового сигнала в диапазоне напряжений от  $-10 В$  до  $+10 В$  в цифровой эквивалент (отсчет) от 0 до 4095. Взаимодействие с АЦП обеспечивается специально разработанной программой для ЭВМ, позволяющей выполнять тарировки измерительных каналов, воспроизводить записи сигналов датчиков на экране и записывать полученные данные в файл.

Перед проведением серии измерений выполнена тарировка обоих измерительных каналов с датчиками давления. При тарировке на датчики подавались разрежения от 0 до  $-0,64 \text{ кгс/см}^2$  через каждые  $0,16 \text{ кгс/см}^2$  (и такие же уровни избыточных давлений) с применением образцовых манометра и вакууметра класса точности 0,4 и шкалами на  $1 \text{ кгс/см}^2$ . Тарировочные зависимости каналов для учета их нелинейности аппроксимируются в программе по методу наименьших квадратов многочленами третьей степени:

$$y_j = \varphi(x_j) = A_i x_j^3 + B_i x_j^2 + C_i x_j + D_i, \quad i = 1, 2,$$

где  $x_j$  — величина отсчета АЦП.

Перед тарировкой и перед каждым измерением показания датчика (датчиков) при поданном на них атмосферном давлении приводились к нулю — для исключения его «дрейфа». Дискретность по времени считывания показания в измерительном канале составляла 40 мкс. Приведенные ниже экспериментальные кривые подвергнуты осреднению по трем точкам с целью фильтрации помех:  $\bar{y}_j = (y_{j+1} + y_j + y_{j-1})/3$ .

Трубопровод экспериментальной установки (рис. 7.8) собирался из труб (материал — нержавеющая сталь), в которых с высокой точностью выдержана круглая цилиндрическая форма внутренней поверхности с шероховатостью не более  $Rz 10$ . Трубопровод собирался в двух исполнениях: в варианте на рис. 7.9, а — лемниската Бернулли (ЛБ) или шайба устанавливалась на конце трубопровода, в варианте на рис. 7.9, б шайбы с различным номинальным диаметром  $d_0$  устанавливались в месте соединения двух труб примерно одинаковой длины.

Таким образом, в проведенном расчетно-экспериментальном исследовании прохождения ВКА через шайбы трубопровод, показанный

на рис. 7.9, а, служил для выявления погрешностей модели МС КЛА-ПАН, на рис. 7.9, б — погрешностей модели МС ДИАФРАГМА.



Рис. 7.8. Одноцикловая установка, трубопровод и система измерений

В качестве элементов трубопровода, примыкающих к шайбам или ЛБ, использованы отрезки труб, примененные при статических продувках этих МС. Суммарные длины участков трубопровода:  $l_1 = 3028$  мм,  $l_2 = 3692$  мм, диаметры —  $d_1 \approx 24,1$  мм,  $d_2 = 24,1 \dots 24,8$  мм (реальные профили составных труб учтены в расчетах), координаты датчиков:  $l_{Д1} = 781$  мм и  $l_{Д2} = 992$  мм (рис. 7.9). Объем емкости генератора волн определен расчетным путем на основе поэлементного обмера:  $V = 748,2 \pm 5,7$  см<sup>3</sup>. Исходными ВКА во всех экспериментах данной серии были волны разрежения.

**7.2.2. Стенд, методика и результаты статических продувок.** Необходимые для расчетов движения волн по трубопроводу экспериментальной установки характеристики потерь полного давления на его местных сопротивлениях (МС) определены натурным экспериментом — статическими продувками на специальном стенде, общий вид которого показан на рис. 7.10.

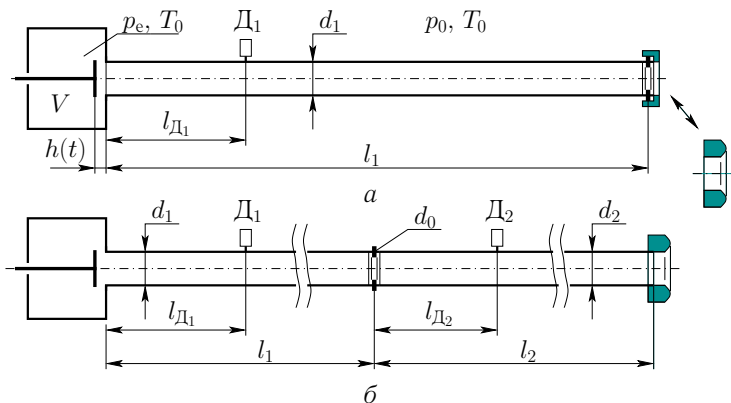


Рис. 7.9. Схема двух вариантов исполнения трубопровода: а) с МС на конце трубы; б) с МС на стыке труб

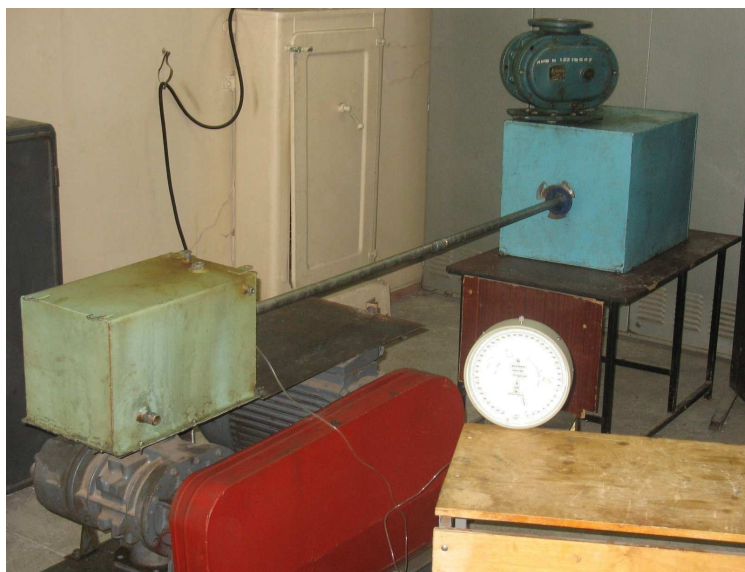


Рис. 7.10. Продувочный стенд с расходомером РГ-250 и вакууметром





Рис. 7.11. Отрезки труб, шайбы, лемниската Бернулли и фиксирующая гайка

Роль МС в экспериментах выполняли круглые шайбы с номинальными диаметрами отверстий  $d_0 = 18 \text{ мм}$ ,  $14 \text{ мм}$ ,  $10 \text{ мм}$  и  $6 \text{ мм}$ , устанавливаемые как между двумя участками трубопровода, так и на его конце. Для фиксации шайб на конец трубы наворачивалась специальная гайка с отверстием  $d_0 = 24 \text{ мм}$ , при установке которой *без шайбы* дополнительно получалось МС с указанным выше «номиналом». Для получения *наименьшего* сопротивления потоку при втекании в трубу была изготовлена «гайка» специальной формы, часть поверхности которой выполнена по лемнискату Бернулли (ЛБ) и чисто обработана (рис. 7.11).

Потери полного давления определялись обработкой измерений  $\sigma_{03}$ ,  $\sigma_{30}$ ,  $\sigma_{43}$  для различных значений числа  $M_T$  для всех вариантов установки сопротивлений на трубопровод по приведенной ниже методике. Для случая «свободного» втекания в емкость из трубы (через гайку без шайбы:  $d_0 = 24 \text{ мм}$  и через ЛБ) характеристика потерь может быть задана как  $\sigma_{30} = \pi(M_T, \gamma = 1,4)$ , что эквивалентно условию  $p_T = p_0$  на срезе трубы для  $M_T \leq 1,0$ .

Измерения проведены в потоке атмосферного воздуха (рис. 7.12), расход которого  $G$  создавался насосом  $I$ , а измерялся расходомерами 2 объемного типа РГ-250 и РГ-40 (последний применялся при величине объемного расхода менее  $40 \text{ м}^3/\text{час}$ ). Давление  $p_2$  в ресивере-успоко-

ителе  $З$  измерялось образцовым вакуумметром 4 класса точности 0,25. Для разрежений  $\Delta p_{02} = p_0 - p_2 < 1,2$  м вод. ст. применялся водяной пьезометр, не показанный на рис. 7.12, им же контролировался перепад давлений  $\Delta p_{01}$  на расходомере.

Атмосферное давление  $p_0$  в лаборатории определялось по настенному барометру-анероиду ( $\pm 0,5$  мм рт. ст.), температура  $T_0$  — по лабораторному термометру ( $\pm 0,25^\circ\text{C}$ ). Интервалы времени (20...75 с) для измерения  $G$  отмечались по секундомеру «Агат» ( $\pm 0,2$  с). Измерение для каждой экспериментальной точки производилось трижды.

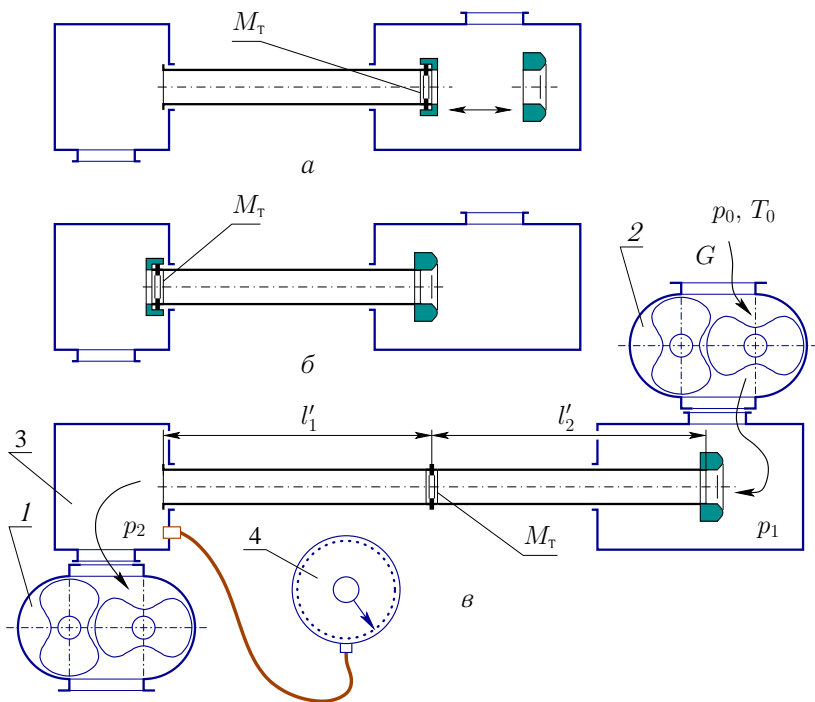


Рис. 7.12. Схема воздушного тракта продувочного стенда для снятия характеристик: а)  $\sigma_{03}(M_T)$ ; б)  $\sigma_{30}(M_T)$ ; в)  $\sigma_{43}(M_T)$

При обработке результатов измерений в методике использовано допущение об адиабатности течения  $T^* = T_0$ . Параметры потока приводились к сечениям, примыкающим к МС, для чего выполнялся формальный учет трения о стенку на длине труб

( $l'_1 = 1038 \text{ мм}$ ,  $l'_2 = 931 \text{ мм}$ ), которые с достаточной точностью считались цилиндрическими с  $d_T = 24,1 \text{ мм}$ .

Так, для измерений по схеме на рис. 7.12, а число  $M_2$  в выходном сечении трубы определялось из уравнения

$$G = m \frac{y(M_2, \gamma) F_T p_2}{\sqrt{T^*}},$$

где  $m = 0,0404 \text{ м}^{-1} \cdot \text{с} \cdot \text{К}^{0,5}$  для воздуха с  $R = 287,1 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$  и  $\gamma = 1,4$ , а  $y(M, \gamma) = q(M, \gamma) / \pi(M, \gamma)$ , см. (4.19). По известным значениям  $G$ ,  $M_2$ ,  $p_2$  с учетом  $T^* = \text{const}_1$  и  $G = \text{const}_2$  численным решением ОДУ, полученного из (4.12) при  $dF/dx \equiv 0$  и  $\Pi = \pi d_T$

$$\frac{dJ}{dx} = \pi d_T \tau_w,$$

на цилиндрическом участке длиной  $l'_1$  вычисляются  $p_T^*$  и  $M_T$ , приведенные к сечению за МС, а  $\sigma_{03}$  для данного режима течения по  $M_T$  — из определяющего соотношения  $p_T^*/p_1$ . Таким способом определена и зависимость  $\sigma_{03\text{ЛБ}}(M_T)$  для ЛБ, использованная для обработки измерений по схемам на рис. 7.12, б и в.

Измерения по схеме на рис. 7.12, б обрабатывались несколько иначе. Решением уравнения

$$G = m \frac{q(M, \gamma) F_T p_1 \sigma_{03\text{ЛБ}}(M)}{\sqrt{T^*}}$$

определялись параметры  $M$ ,  $p = p_1 \sigma_{03\text{ЛБ}}(M)$  на входе в трубопровод, а после расчета течения с трением по (4.21) и (4.20) — параметры  $p_T^*$  и  $M_T$  перед шайбой, установленной на выходе из трубы, после чего  $\sigma_{30}$  определялся как  $p_T^*/p_2$ .

Процедура обработки измерений по схеме на рис. 7.12, в представляет собой комбинацию двух описанных. В этом случае определяемая для каждого измерения величина  $\sigma_{34}$  вычислялась как отношение полных давлений, приведенных к сечению шайбы, «режимным» параметром являлось число  $M_T$  перед шайбой.

Полученные таблицы экспериментальных точек были аппроксимированы (рис. 7.14 — 7.16) зависимостями, которые при  $M_T \rightarrow 0$  демонстрируют «квадратичное» поведение.

### 7.2.3. Сравнение рассчитанных и измеренных $p_i(t)$ .

Для изучения адекватности обсуждавшихся выше моделей и методик, с их применением были проведены численные расчеты нестационарных течений в трубопроводе для условий выполненных экспериментов. Для этого в системе имитационного моделирования (СИМ) «Альбея» (рис. 7.13) были построены модели обоих вариантов исполнения трубопровода (рис. 7.9), где задавались их действительные размеры, свойства и начальные параметры рабочего тела (атмосферного воздуха), а также полученные из статических продувок зависимости для потерь полного давления на шайбах и лемнискате Бернулли (рис. 7.14 – 7.16).

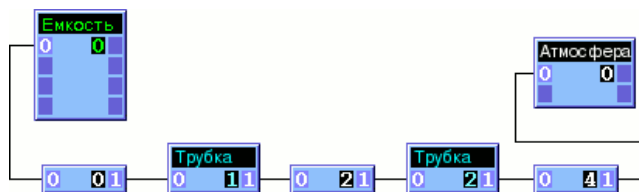


Рис. 7.13. Модель воздушного тракта в СИМ «Альбея»

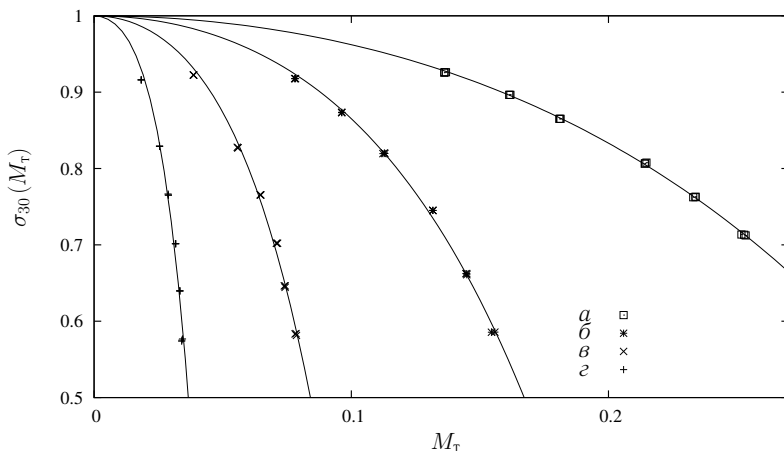


Рис. 7.14. Зависимости  $\sigma_{30}(M_T)$  на режиме истечения из трубопровода: а)  $d_0 = 18$  мм; б)  $d_0 = 14$  мм; в)  $d_0 = 10$  мм; з)  $d_0 = 6$  мм

Течение через клапан генератора волн одноциклового устройства рассчитывалось в СИМ «Альбея» также по модели РПР на МС, для чего

в исходных данных были заданы зависимости для коэффициента восстановления полного давления на нем  $\sigma_{03}$  и  $\sigma_{30}$  от  $M_T$  в примыкающем сечении трубы, полученные расчетами для нескольких значений высоты его подъема  $h_i$  по приближенной методике, описанной в [23].

На рис. 7.17 показаны графики зависимостей  $\sigma_{30}(M_T, h_i)$ , полученных для случая течения газа с  $\gamma = 1,4$  из канала в емкость.

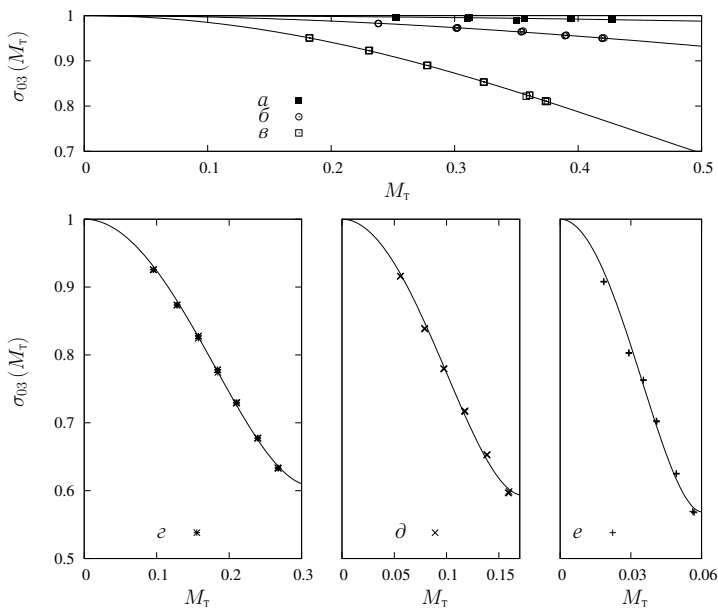


Рис. 7.15. Зависимости  $\sigma_{03}(M_T)$  на режиме втекания в трубопровод: а)  $d_0 = 24$  мм (ЛБ); б)  $d_0 = 24$  мм; в)  $d_0 = 18$  мм; г)  $d_0 = 14$  мм; д)  $d_0 = 10$  мм; е)  $d_0 = 6$  мм

Применение для расчета характеристики клапана, полученной по приближенной методике, оправдано тем, что амплитуда и форма исходной ВКА разрежения в расчетах задавалась путем подбора закона изменения единственной зависимости, выступающей в роли граничного условия в сечении трубопровода, соответствующем седлу клапана. Однако, поскольку в СИМ «Альбея» возможность задания граничных условий вида, например,  $p(t)$  не реализована, подбором определялся закон открытия клапана  $h(t)$  генератора волн.

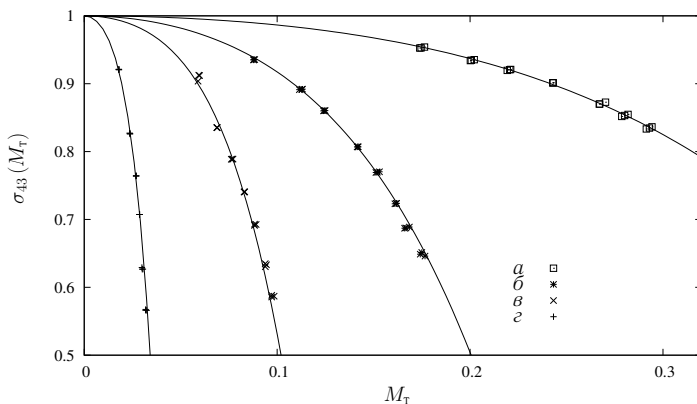


Рис. 7.16. Зависимости  $\sigma_{43}(M_T)$  для шайб в трубе: а)  $d_0 = 18$  мм; б)  $d_0 = 14$  мм; в)  $d_0 = 10$  мм; з)  $d_0 = 6$  мм

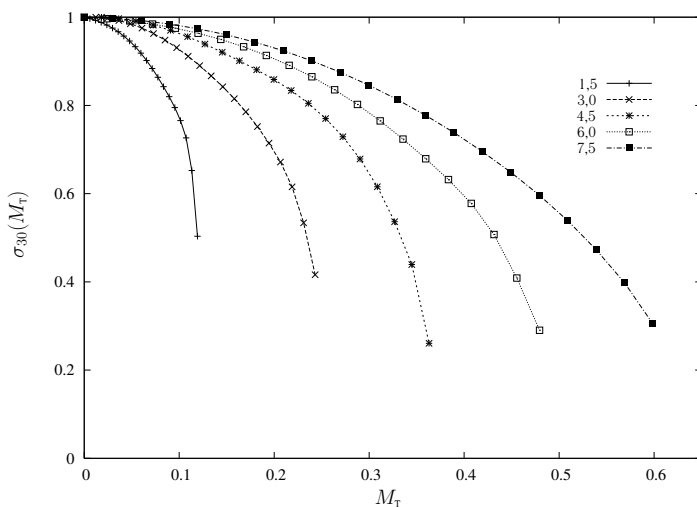


Рис. 7.17. Графики расчетных зависимостей  $\sigma_{30}(M_T)$  для клапана одноцикловой установки для разных значений высоты его подъема:  $h = 1,5; 3,0; 4,5; 6,0; 7,5$  мм

Зависимость  $h(t)$  подбиралась с помощью программной утилиты многопараметрической оптимизации, входящей в СИМ «Альбея». Для каждого расчета определены наборы оптимальных значений 16-ти параметров закона  $h(t)$  открытия клапана с учетом двух подскоков после его первой посадки. Минимизировано среднеквадратическое отклонение расчетного давления от измеренного на участке исходной волны. Дальнейшее расхождение кривых расчетного и измеренного давления должно указывать на погрешности модели нестационарного течения в трубопроводе — как на пути между МС, так и при прохождении самих МС.

В расчетах волнового течения в трубопроводах применено уравнение состояния для воздуха как смеси идеальных газов с теплоемкостями, зависящими от  $T$ . Моделью (4.21) и (4.20) учтено локальное напряжение от трения на стенке; ввиду того, что при движении ВКА по трубе  $T^*(x, t) \neq T_w = T_0$ , в расчетах учтен локальный тепловой поток от стенки — соотношением (4.22) с поправочным коэффициентом.

Расчеты проведены с шагом по времени  $\Delta t = 10 \text{ мкс}$ , применен двухэтапный (со вторым порядком аппроксимации по  $t$ ) метод обновления искоемых переменных в ячейках расчетной сетки. В МЭ ТРУБКА использован метод повышенной точности (см. с. 164), дающий при сетке в 460 и 560 ячеек соответственно в 1-й и во 2-й трубках более чем достаточную для практики *сходимость* численного решения задачи к точному.

Расчет процесса в трубопроводе на рис. 7.9, б в течение  $t_1 = 0,2 \text{ с}$  модельного времени этим методом требовал 82 с процессорного времени одного ядра Intel Core 2 Duo при тактовой частоте 1,5 ГГц.

На рис. 7.18 — 7.23 приведены расчетные и измеренные зависимости от времени для давления в сечении  $D_1$  трубопровода вида рис. 7.9, а при установленных на свободном конце трубопровода соответственно ЛБ (рис. 7.18) и шайбах с номинальными диаметрами  $d_0 = 24, 18, 14, 10$  и 6 мм. Ход измеренного давления показан прерывистой линией.

На рис. 7.18 видно, что избыточное давление в волне сжатия, отраженной от ЛБ (минимальные потери давления при втекании) превышает перепад давления в исходной ВКА разрежения. Заметно снижение интенсивности отраженной волны при переходе от ЛБ к шайбе с  $d_0 = 24 \text{ мм}$  (рис. 7.19). Напротив, при  $d_0 = 6 \text{ мм}$  отражение от МС на конце трубы происходит почти как от закрытого конца — отражен-

ная ВКА имеет тот же знак (разрежение) и примерно такой уровень минимального давления, что и исходная (рис. 7.23).

Во всех расчетах этой серии отмечается хорошее совпадение формы и величины давления, по крайней мере, на участке первой отраженной волны; на расчетных кривых давления на протяжении всего интервала модельного времени отсутствуют какие-либо нефизичные дефекты.

Следует отметить характерное для всех экспериментов серии нарастание погрешности расчета протекания кривых давления на датчиках *по времени*, а именно — занижение расчетом характерного периода волнового процесса.

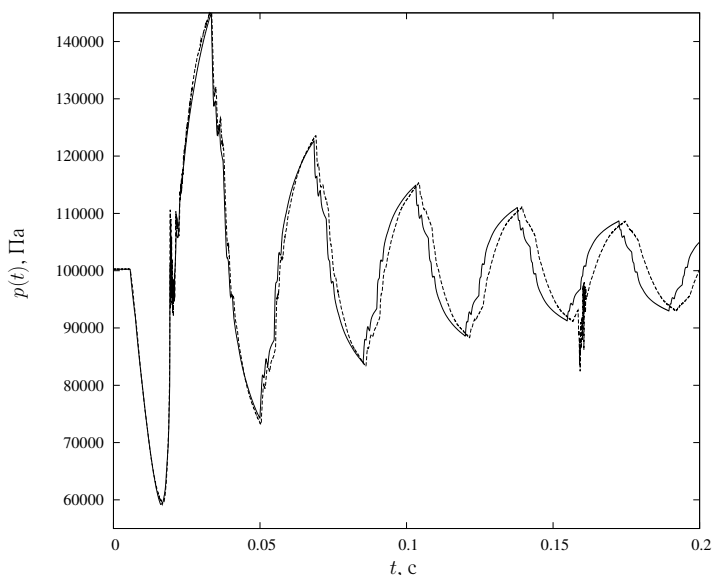


Рис. 7.18. Давление на  $D_1$ ;  $d_0 = 24$  мм (ЛБ)

Погрешность времени регистрации характерных участков волн датчиками нарастает приблизительно линейно, и это нарастание, по-видимому, слабо связано как с интенсивностью, так и со знаком волн. Такого порядка временное рассогласование ( $-2,0 \dots -2,8$  %, по данным рис. 7.18) моментов прибытия волн к датчикам отмечена автором еще в [38] на основе данных, полученных с другой измерительной системой и обработанных другой расчетной программой; это практически исключает вероятность «промаха» от задержек в измерительной систе-



ме, ошибочного задания длиновых размеров труб или уравнения состояния, искажающего величину скорости звука. Обнаруживаемое расхождение, скорее всего, указывает на неадекватность квазиодномерной модели применяемого вида для расчета нестационарных процессов даже для случая достаточно протяженных участков ( $l/d \approx 140$ ) между МС.

На рис. 7.24 – 7.28 сопоставлены зависимости  $p_i(t)$  в сечениях  $D_1$  и  $D_2$  для трубопровода вида рис. 7.9, б с номинальными  $d_0 = 24, 18, 14, 10$  и  $6$  мм соответственно; во всех случаях на свободном конце трубопровода (суммарной длиной  $l_1 + l_2 \approx 6,7$  м) устанавливалась ЛБ.

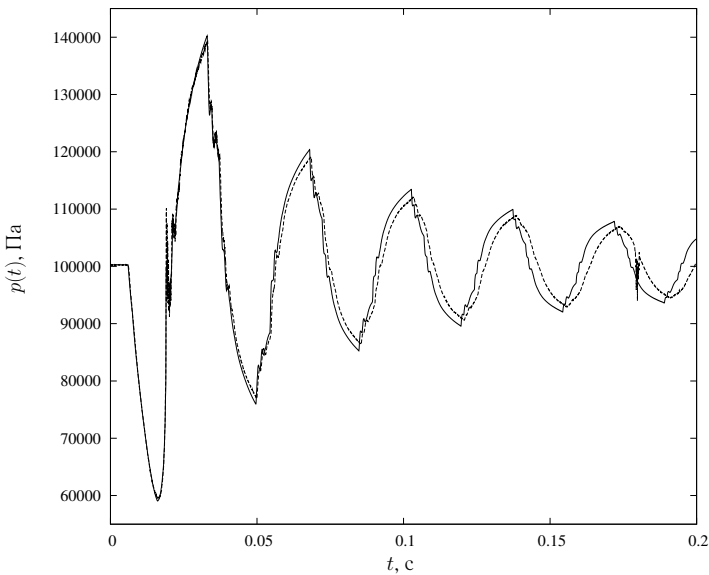


Рис. 7.19. Давление на  $D_1$ ;  $d_0 = 24$  мм (шайба)

В данной серии также не наблюдается каких-либо нефизичных «образований» на расчетных кривых давления («всплески» на экспериментальных кривых — рис. 7.18 – 7.20 и рис. 7.24 – 7.26 — помехи в цепи соленоида в момент отпускания кнопки ПУСК).

Согласование величин расчетного и измеренного давлений в данной серии несколько хуже — что видно даже по  $p(t)$  на  $D_2$  в отсутствие МС на стыке каналов (рис. 7.24); возможно, это — следствие приближенности модели путевых потерь на бóльшей длине труб.

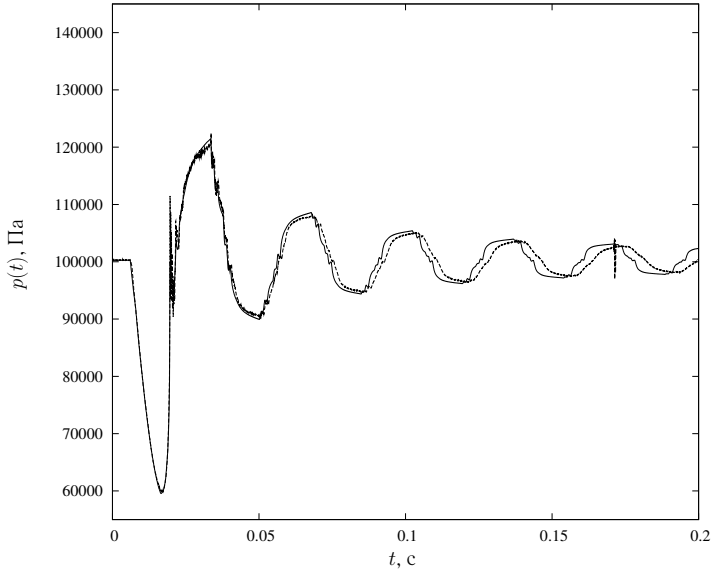


Рис. 7.20. Давление на  $D_1$ ;  $d_0 = 18 \text{ мм}$

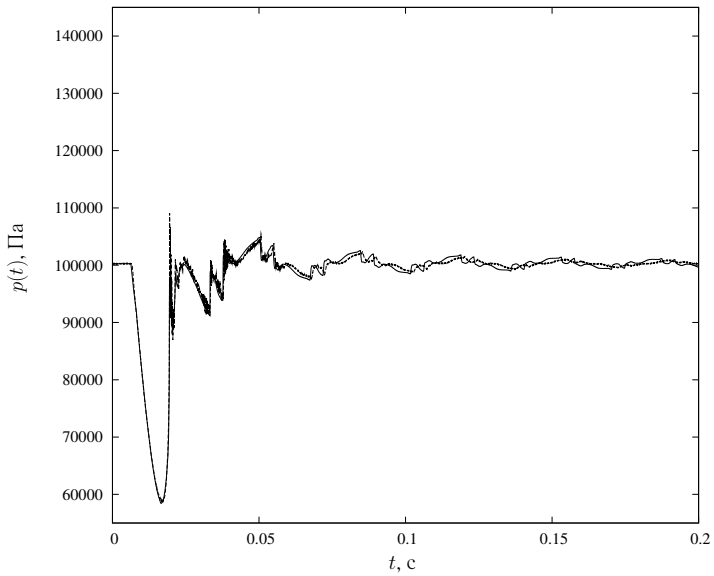


Рис. 7.21. Давление на  $D_1$ ;  $d_0 = 14 \text{ мм}$

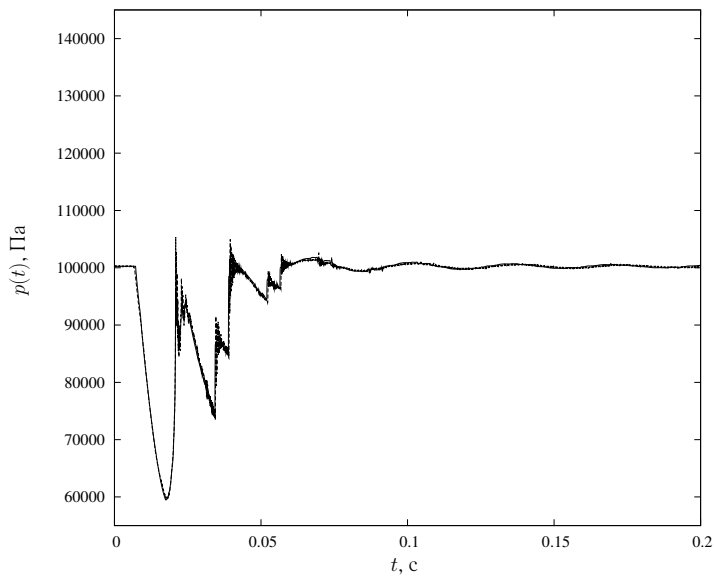


Рис. 7.22. Давление на  $D_1$ ;  $d_0 = 10$  мм

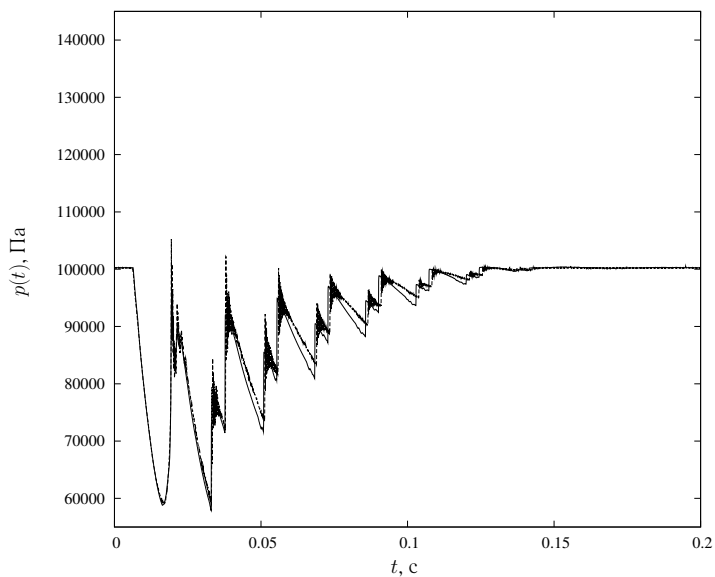


Рис. 7.23. Давление на  $D_1$ ;  $d_0 = 6$  мм

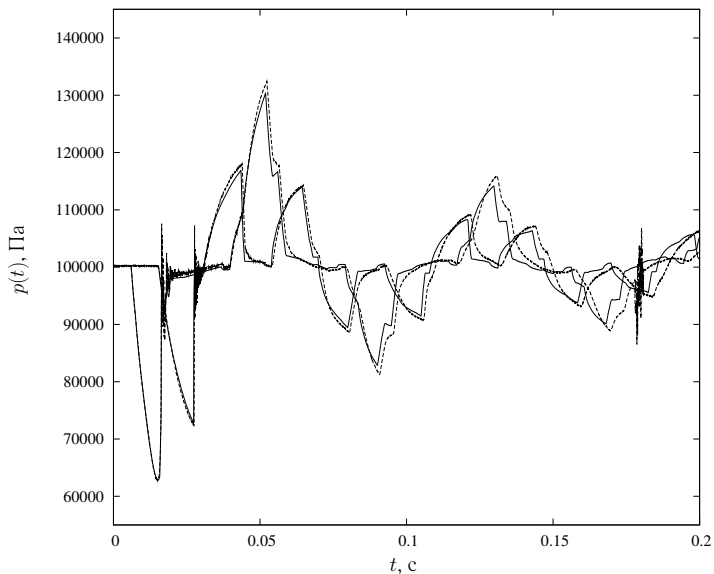


Рис. 7.24. Давление на  $D_1$  и  $D_2$ ;  $d_0 = 24$  мм (шайбы нет)

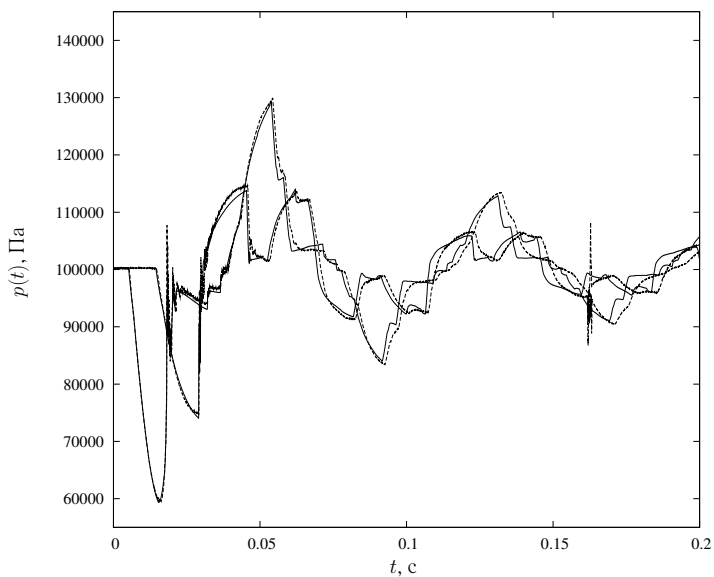


Рис. 7.25. Давление на  $D_1$  и  $D_2$ ;  $d_0 = 18$  мм

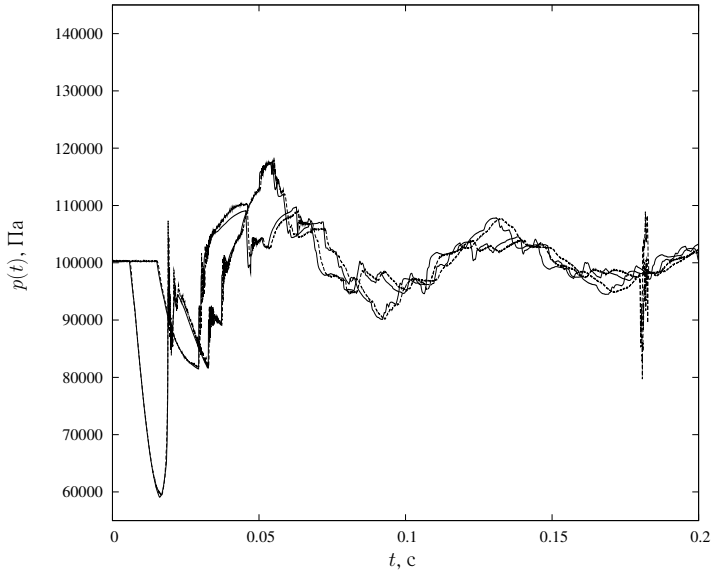


Рис. 7.26. Давление на  $D_1$  и  $D_2$ ;  $d_0 = 14$  мм

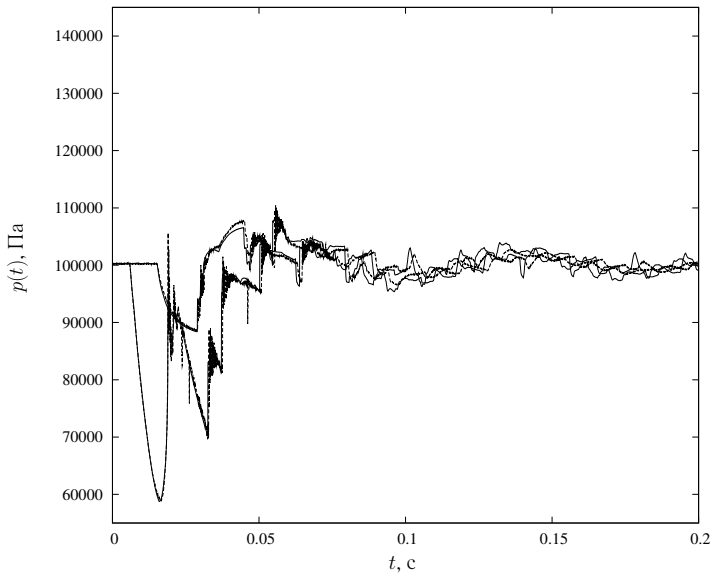


Рис. 7.27. Давление на  $D_1$  и  $D_2$ ;  $d_0 = 10$  мм

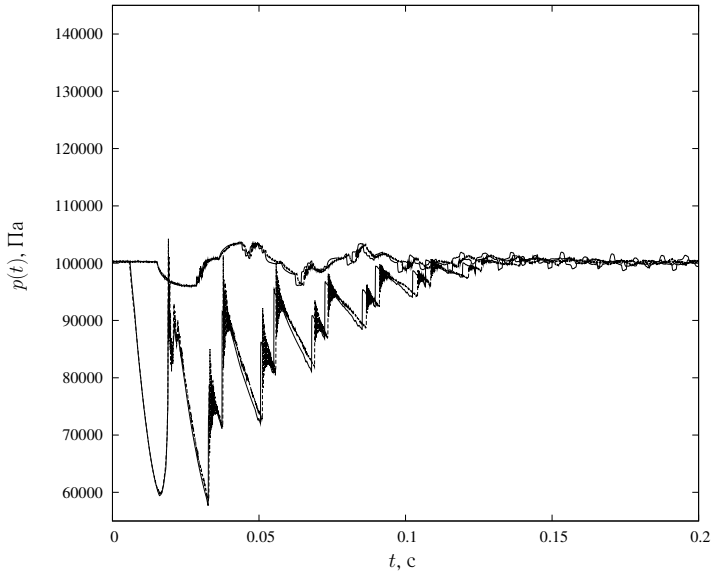


Рис. 7.28. Давление на  $D_1$  и  $D_2$ ;  $d_0 = 6$  мм

Погрешность, проявляющаяся в уменьшении периода волнового процесса характерна и для данной серии расчетов (рис. 7.24 – 7.28).

Оценивая достоверность результатов расчета величиной относительной погрешности определения амплитудного значения давления в первой отраженной от МС волне (а именно, относя абсолютную погрешность к возможному разбросу амплитудного давления для отраженной волны любого знака) получим, что для всех показанных на рис. 7.18 – 7.28 результатов эта величина не превышает 1,6 %.

Поэтому с некоторой оговоркой (см. ниже) можно утверждать, что проведенное исследование показало достаточную (для технических расчетов) достоверность результатов, даваемых моделированием нестационарных течений газа в протяженных неразветвленных трубопроводах с МС по методике, основанной на:

- системе уравнений, описывающей течение в канале в квазиодномерном приближении (4.1) – (4.3);
- численном методе решения уравнений (с. 164);

- локальных моделях трения и теплоотдачи в канале вида эмпирических соотношений, справедливых для стационарных условий (с. 116);
- моделях нестационарного течения газа через МС, основанных на обобщении задачи о РПР на МС (с. 117), замыкаемой статическими зависимостями вида  $\sigma(M_T)$  для описания характеристик МС в потоке;
- методике проведения и обработки статических продувок МС для получения указанных характеристик.

Подтвердилось описанное ранее [38] небольшое завышение расчетом в квазиодномерном приближении скорости распространения ВКА по трубопроводу. Наиболее вероятная причина погрешности — неадекватность использованной системы уравнений, описывающей волновое движение в канале в квазиодномерном приближении.

Можно предположить, что обоснованная коррекция вида исходных уравнений, приближенно учитывающая распределения параметров в сечении канала и изменяющая вид выражений для наклона характеристических кривых (4.8), позволила бы в значительной степени компенсировать данную погрешность.

### 7.3. Тестовые расчеты турбулентных течений

Для решения задач детального численного моделирования РП ТД на основе расчета турбулентных (как инертных, так и реагирующих) течений РТ, следует внедрять в инженерную практику подход с «моделированием крупных вихрей» (с. 99).

Создаваемое на кафедре ДВС УГАТУ ПО, использованные в нем «подсеточные» модели и ЧМ для решения модельных уравнений пространственного нестационарного течения газовой смеси (см. с. 169), нуждались в тестировании, для чего проведена серия вычислительных экспериментов.

В качестве примеров были выбраны турбулентные течения нескольких видов, хорошо изученные экспериментально. Достоверность моделирования *свободных турбулентных течений* изучалась на примере *осесимметричной струи*, моделирования *пристенных течений* — на примере *течения в квадратной трубе*.

Расчеты выполнялись на *многопроцессорных кластерах* (с. 187), в разные годы действовавших в УГАТУ: 13-процессорном кластере

на базе процессоров DEC Alpha 21164, 64-процессорном на базе Intel Pentium-III и 13-процессорном на базе AMD Athlon XP 3000, а также созданном в 2006 г. на кафедре ДВС УГАТУ 4-процессорном *кластере* (рис. 6.4).

**7.3.1. Расчет свободной турбулентной струи.** На этой задаче протестирован ЧМ (с. 169) как таковой и модель подсеточного турбулентного обмена (см. с. 102). Непосредственной целью являлось обнаружение зависимости погрешностей воспроизведения осредненных профилей скорости и температуры от мелкости разбиения расчетной области ячейками сетки. Расчеты выполнялись на *кластере* с 4 процессорами AMD Sempron 3000+ (тактовая частота 1,98 МГц, ОС Mandrake Linux 10.1, см. рис. 6.4) и на кластере с 13 процессорами AMD Athlon XP 3000.

Параллельная версия программы моделирования свободных турбулентных течений написана на языке C и использует интерфейс параллельного программирования MPI (с. 189). При счете трехмерная расчетная область (параллелепипед) в продольном направлении равномерно делилась между вычислительными узлами.

Выполнена серия из трех расчетов неизотермической струи с  $u_1/u_0 = 0,30$  и степенью подогрева  $\theta = T_0/T_1 = 1,85$  на режиме с  $Re_0 = 422000$  (турбулентный режим течения в диапазоне автомодельности по  $Re_0$  при  $M_{\max} \approx 0,4 \ll 1$ ). Наиболее грубая сетка (в первом расчете) содержала только 12 ячеек сетки в начальном поперечнике примерно осесимметричной струи. Во втором и третьем расчетах размер ячейки расчетной сетки последовательно уменьшался в 1,4 раза. В третьем расчете вся область содержала уже 432 ячейки в продольном и по 147 ячеек в поперечных направлениях (9,34 млн ячеек), для расчета были задействованы 12 расчетных узлов 13-процессорного *кластера*. В этом расчете для 250000 шагов моделирования, необходимых для осреднения профилей по сечению струи, потребовалось более 20 суток машинного времени. Остальные расчеты выполнены на 4-процессорном кластере (рис. 6.4).

В *граничные условия* (ГУ) втекания струи вносились случайные возмущения — выставлялась случайная последовательность ненулевых значений поперечных компонент скорости, не более 8 м/с по абсолютной величине. На выходной границе ставились ГУ вытекания, на боковых границах — периодические ГУ.



Типичный вид полей плотности (в диапазоне  $0,634 \dots 1,174 \text{ кг/м}^3$ ; меньшей плотности соответствует темный тон) для некоторых моментов в каждом из указанных трех расчетов показан на рис. 7.29. Вид мгновенных расчетных полей течения в струе достаточно хаотический, что характерно для расчетов *турбулентных течений* по технологии *LES*. Заметно увеличение детализации картины крупновихревого «надсеточного» течения при измельчении сетки.

Профили скорости и температуры, полученные путем осреднения «мгновенных» значений за 180000 шагов в расчете с промежуточным размером ячеек (рис. 7.29, б), показаны на рис. 7.30 и соответствуют сечению на расстоянии  $\bar{x} = 2x/d_0$  от начала струи (т. е., в *основном* участке, рис. 7.29, б). Осредненные профили (рис. 7.30) практически симметричны относительно оси и имеют форму, характерную для стационарных турбулентных струй.

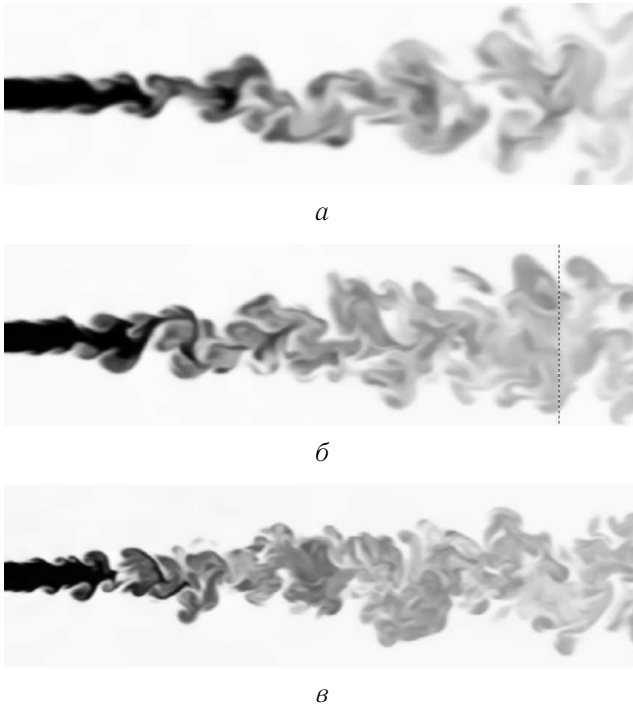


Рис. 7.29. Расчетные поля «надсеточной» плотности из расчетов на разных сетках: а)  $N_x = 220$ ,  $N_y = N_z = 75$ , б)  $N_x = 308$ ,  $N_y = N_z = 105$ , в)  $N_x = 432$ ,  $N_y = N_z = 147$

Расчетные значения избыточных осредненных скорости и температуры на оси струи в выбранном сечении сравнивались со значениями, полученными из полуэмпирической модели, описанной в [10]. Относительные погрешности для трех расчетов на последовательно измельченной сетке оказались равными:  $\Delta u_m = -11,8\%$ ,  $-8,6\%$ , и  $-7,3\%$  и  $\Delta T_m = -13,8\%$ ,  $-10,1\%$  и  $-9,5\%$  — соответственно для избыточных скоростей и температур на оси струи. Как и ожидалось, расчеты на более мелкой сетке позволяют добиться более удовлетворительных результатов; вероятно, это — следствие более адекватного моделирования крупных вихрей в начальном и переходном участках струи. Однако вычислительная методика, по-видимому, все же обладает повышенными диссипативными свойствами.

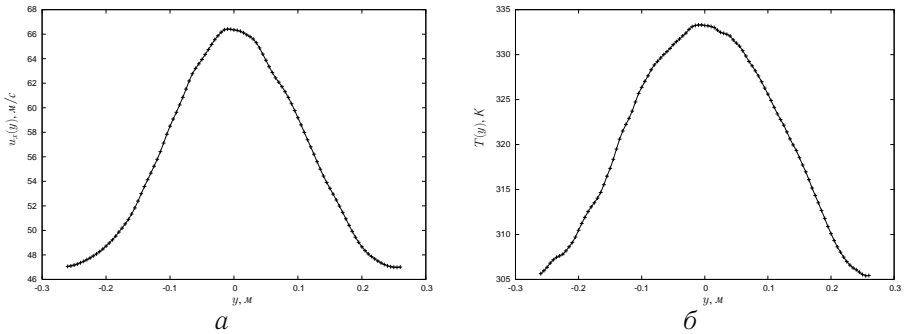


Рис. 7.30. Поперечные расчетные профили осредненных: а) продольной скорости  $\bar{u}_x(y)$ ; б) температуры  $\bar{T}(y)$  — в сечении, показанном на рис. 7.29, б

**7.3.2. Турбулентное течение в квадратной трубе.** Целью данной серии вычислительных экспериментов, выполненных по методологии *LES*, было подтвердить возможность моделирования внутреннего турбулентного течения хотя бы с использованием «алгебраической» модели, учитывающей ослабление турбулентного переноса в пристеночном слое.

Тестовая задача ставилась следующим образом. Сжимаемый газ с термодинамическими свойствами воздуха и параметрами осредненного потока  $M = 0,5$ ,  $Re = 20000$  течет в гладком канале квадратного сечения (значение  $Re = 20000$  достаточно для поддержания раз-

витого *турбулентного течения*, причем толщина пристеночного слоя еще вполне достаточна для его разрешения в расчете, а эффекты сжимаемости при величине числа  $M = 0,5$ , по имеющимся данным, еще незначительно сказываются на среднем напряжении трения на стенке).

В выражение пристеночной функции в качестве ожидаемого среднего напряжения трения подставлялось значение, вычисляемое по известной формуле Никурадзе. Для компенсации торможения потока напряжениями трения в основные уравнения турбулентного течения был включен источниковый член массовых сил, действующий продольно по потоку.

В первом расчете область содержала по 75 ячеек в ширину и высоту:  $N_y = N_z = 75$  и  $N_x = 416$  ячеек в длину ( $2,34 \times 10^6$  ячеек). Отношение длины к высоте участка трубы составило 8:1. На боковых стенках трубы выставлялось ГУ непротекания и адиабатности, на входе и выходе — ГУ периодичности. В численном расчете было сделано 50000 шагов по времени с шагом, близким к предельному по числу Куранта.

Расчет выполнялся на 13-процессорном *кластере* с процессорами DEC Alpha 21164, работающем под управлением ОС Red Hat Linux 6.2. Для эффективной организации параллельных вычислений расчетная область была равномерно поделена между процессорами. Расчет занял 193 часа машинного времени.

Первые 20000 шагов расчета позволили получить развитое квазитурбулентное течение, которое самостоятельно поддерживалось. По результатам дальнейшего расчета получены осредненные по времени и по сечению параметры одномерного течения в некотором сечении трубы и среднее касательное напряжение. По данным параметрам расчетное среднее число  $Re$  оказалось равным 20075. Относительное отклонение расчетной величины коэффициента трения от соответствующего значения по формуле Никурадзе составило всего 0,65 %.

На рис. 7.31 показан профиль осредненной по времени продольной компоненты скорости. Можно видеть, что полученный профиль скорости практически симметричен.

Мгновенные поля вихря скорости в срединной плоскости трубы приведены на рис. 7.32. Видно развитое турбулентное течение, в котором на расчетной сетке представлены вихри, примерно на порядок различающиеся по величине.

Следовало проверить, как влияет мелкость разбиения сетки на точность получаемых результатов. Для этого были проведены аналогичные

расчеты на менее подробных сетках с 65, 55 и 45 ячейками на высоту трубы (рис. 7.33, 7.34). Расчетные осредненные числа  $Re$  составили 20192, 20687 и 21852, а отклонения коэффициента трения по отношению к значению по формуле Никурадзе — соответственно 1,68 %, 5,65 % и 19,54 %, т. е. погрешность монотонно и быстро нарастает, но лишь начиная примерно с расчета с 55 ячейками на высоту трубы она становится практически ощутимой (для данного значения  $Re = 20000$ ).

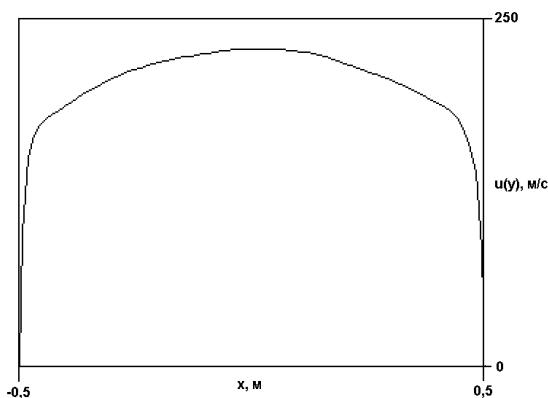


Рис. 7.31. Профиль осредненной по времени продольной скорости в средней плоскости трубы из расчета при  $Re = 20000$ ,  $N_x = N_y = 75$

Также изучалось поведение погрешности расчетного  $\lambda$  от  $Re$  для фиксированной сетки, что позволило бы судить о возможности расчета развитого турбулентного течения при больших  $Re$  и об универсальности модельного коэффициента в формуле пристеночной функции.

На сетке с  $N_x = N_y = 55$  проведены еще 2 расчета течений: с  $Re = 10000$  ( $\Delta = 1,84$  %) и  $Re = 5000$  ( $\Delta = 17,2$  %). Повышение точности результатов с переходом от  $Re = 20000$  ( $\Delta = 19,5$  %) к  $Re = 10000$  говорит о применимости данного модельного коэффициента в области умеренных значений  $Re$  в условиях развитого турбулентного течения (рис. 7.35).

В расчете же с  $Re = 5000$  развитого турбулентного течения не наблюдается (рис. 7.36). Картина течения до известной степени воспроизводит реальные течения с *перемежаемостью* в действительности наблюдаемого при таких значениях  $Re$ . Ограниченный длиновой размер расчетной области позволяет воспроизвести это явление лишь каче-

ственно, очевидно поэтому количественные результаты сильно отличаются от экспериментальных данных Никурадзе.

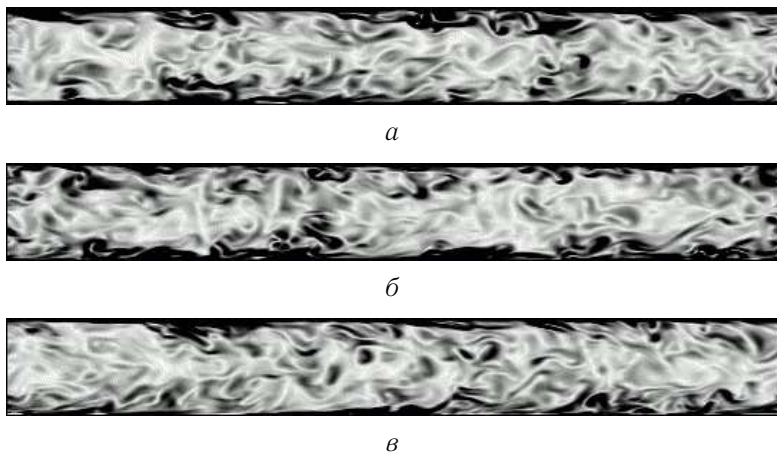
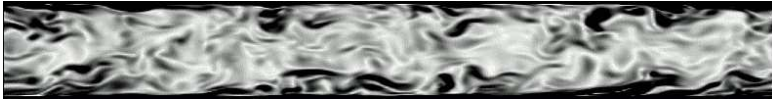


Рис. 7.32. Расчетные поля  $|\text{rot}\bar{V}|$  в трубе на: а) 30000-м; б) 35000-м; в) 40000-м шаге ( $Re = 20000$ ;  $N_y = N_z = 75$  ячеек,  $\Delta = 0,65\%$ )

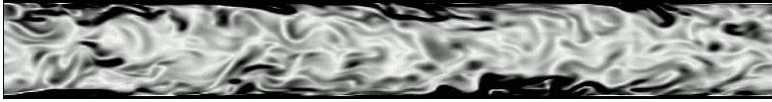
Наконец, важно то, каково максимально достижимое число  $Re$  при моделировании по принятой модели и методике. Попыткой ответить на данный вопрос стал аналогичный расчет с  $Re = 40000$  на сетке с  $N_x = N_y = 91$  ( $4,3 \times 10^6$  расчетных ячеек). В расчете (проведенном также на 13-процессорной ЭВМ с процессорами Alpha 21164), за 11 суток счета сделано 46500 шагов. Отклонение расчетного коэффициента  $\lambda$  от значения по Никурадзе —  $\Delta = 8,85\%$ , что ставит под сомнение универсальность используемой пристеночной модели для широкого диапазона чисел  $Re$ .

Как видно из рис. 7.37, расчетное поле течения на такой подробной сетке обнаруживает многомасштабную развитую структуру турбулентного течения.

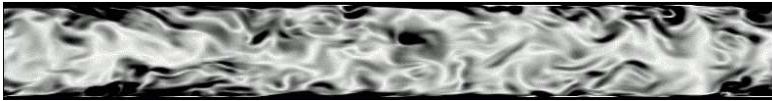
Таким образом, показано, что даже при применении относительно простых моделей турбулентности подсеточного масштаба и разностных схем метода конечных объемов повышенной точности возможно удовлетворительное (с ошибкой 0,7 ... 20% для рассчитанных течений) моделирование турбулентных течений газов по технологии МКВ, как для случаев свободной турбулентности, так и для течений, ограниченных стенками.



*a*

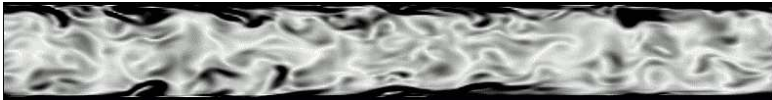


*б*

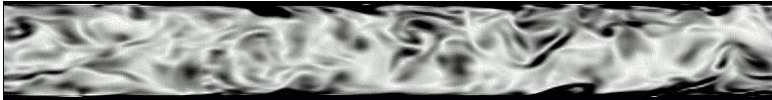


*в*

Рис. 7.33. Расчетные поля  $|\text{rot}\bar{V}|$  в трубе на: *a*) 35000-м; *б*) 40000-м; *в*) 45000-м шаге ( $Re = 20000$ ;  $N_y = N_z = 65$  ячеек,  $\Delta = 1,68\%$ )



*a*

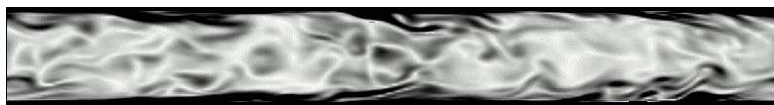


*б*

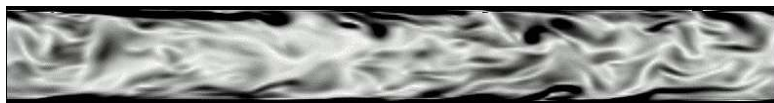


*в*

Рис. 7.34. Расчетные поля  $|\text{rot}\bar{V}|$  в трубе на: *a*) 25000-м; *б*) 30000-м; *в*) 35000-м шаге ( $Re = 20000$ ;  $N_y = N_z = 55$  ячеек,  $\Delta = 5,65\%$ )



*a*

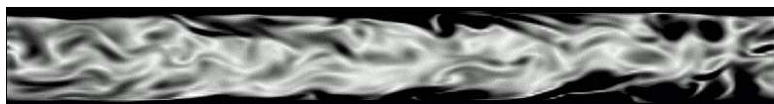


*б*

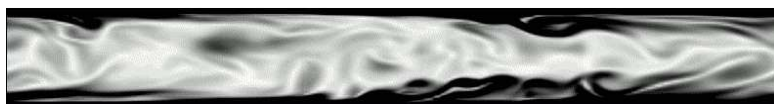
Рис. 7.35. Расчетные поля  $|\text{rot}\bar{V}|$  в трубе на: *a*) 25000-м; *б*) 30000-м шаге ( $Re = 10000$ ;  $N_y = N_z = 55$  ячеек,  $\Delta = 1,84\%$ )



*a*



*б*



*в*

Рис. 7.36. Расчетные поля  $|\text{rot}\bar{V}|$  в трубе на: *a*) 25000-м; *б*) 30000-м; *в*) 35000-м шаге; ( $Re = 5000$ ;  $N_y = N_z = 55$  ячеек,  $\Delta = 17,2\%$ )

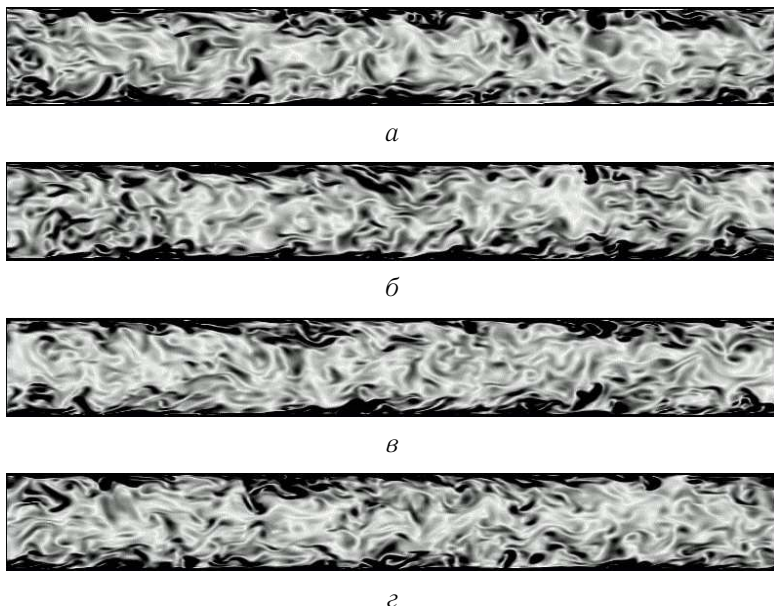


Рис. 7.37. Расчетные поля  $|\text{rot}\bar{V}|$  в трубе на: а) 30000-м; б) 35000-м; в) 40000-м; г) 45000-м шаге; ( $Re = 40000$ ;  $N_y = N_z = 91$  ячейка,  $\Delta = 8,85\%$ )

#### 7.4. Моделирование двухтактного двигателя ЭМ-50

Показатели двухтактных двигателей существенно зависят от совершенства процесса смены заряда в период газообмена. Качеством этих процессов определяется как массовое наполнение рабочей камеры к концу периода газообмена, так и величина потерь свежей смеси в выпускные окна за этот период, что особенно существенно для двухтактных ДВС.

Часть усилий, направляемых на совершенствование СИМ «Альбея», была сосредоточена на создании практичных моделей и методик, позволяющих повысить достоверность моделирования на ЭВМ процессов газообмена двухтактных ДВС.

В данном разделе приведены результаты сравнения расчетных характеристик ЭМ-50 — прототипа двухтактного карбюраторного одноцилиндрового ДВС с противоположно движущимися поршнями (ПДП) размерностью  $d_{ц} = 32$  мм,  $S = 26$  мм.



**7.4.1. Расчет продувочных характеристик РК.** Для расчета газообмена и РП двухтактного двигателя с ПДП ЭМ-50 использована *двухзонная модель* течения в РК при продувке (см. с. 140), «замыкаемая» *продувочной характеристикой* ПХ. Ниже приведены результаты определения ПХ *вычислительным экспериментом* по упрощенной методике [24], предполагающей численное моделирование пространственного течения газа в модели РК при неизменном положении поршня (поршней) и постоянными ГУ.

Численное моделирование течения газа в модели РК проводилось по технологии МКВ/*LES*<sup>1</sup>, на сетке, содержащей 120 ячеек в  $d_c$ . Расчеты выполнены на 64-процессорном *кластере* (с. 188), с задействованием от 10 до 14 процессоров.

Во всех расчетах варьировалась конструкция перепускных окон, конструкция выпускных окон не менялась (2 прямоугольных окна размером 11 мм × 9 мм). Вначале была рассчитана ПХ *базового варианта* ЭМ-50 (три круглых продувочных окна диаметром 9 мм).

Поля плотности из расчета, взятые через интервал в 15000 шагов расчета в характерных плоскостях, изображены на рис. 7.38. Плотность здесь указывает на массовую долю СС: большему содержанию СС соответствует светлый тон изображения. Из рис. 7.38 видны недостатки базовой конструкции продувочных окон — картина течения весьма далека от идеала «*послойного вытеснения*» из-за интенсивного перемешивания СС и ПС в объеме РК.

Регистрация в ходе расчета и последующая обработка параметров потока на входе и выходе из области позволили получить ПХ вида (4.46), показанную на рис. 7.39. По виду ПХ ясно, что при данной конструкции СС появляется в выпускных органах газообмена при достижении зоной СС относительного объема всего в 20 % от объема РК; также вид кривой ПХ указывает на значительные потери смеси при продувке и на низкое качество очистки.

После ряда пробных расчетов наметилась близкая к оптимальной схема организации прямоточной продувки РК ДВС, предполагающая увеличение количества продувочных окон (до 12 ... 18) и придание им определенного наклона для организации течения, приближающегося к картине *послойного вытеснения*.

Большое число продувочных окон позволяет ослабить турбулентное перемешивание, а выбор правильного тангенциального наклона их осей

---

<sup>1</sup>Для выявления деталей вихревой структуры турбулентного течения.

дает умеренную степень закрутки потока в РК, что способствует сбалансированной очистке<sup>2</sup>. В проведенной серии расчетов (их результаты здесь не приведены) изучалась картина течения при 12 продувочных окнах, имеющих суммарно то же сечение, что и три окна в базовом варианте; варьировался их наклон. Наклон определяется радиусом  $r_0 < d_{ц}/2$  окружности (с центром на оси цилиндра), которой касались оси окон. В направлении оси цилиндра оси окон не были наклонены.

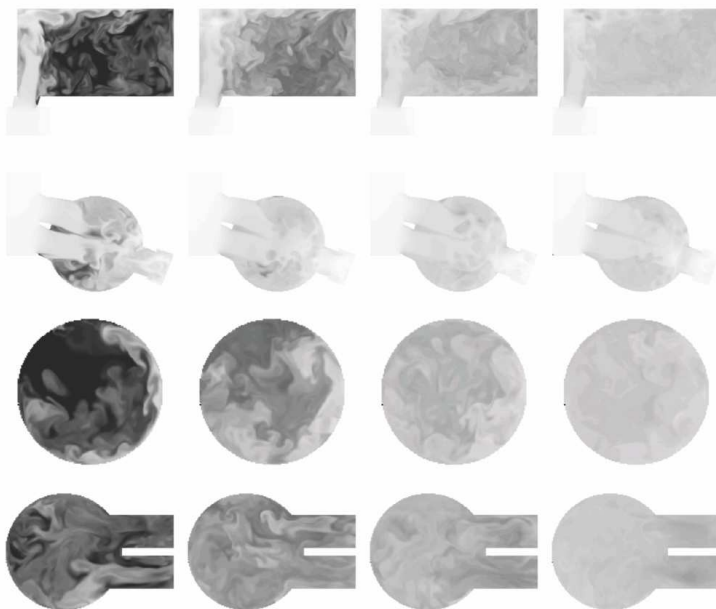


Рис. 7.38. Расчетные поля плотности в характерных сечениях модели РК ЭМ-50: базовый вариант перепускных окон

Оптимальным (по протеканиювиду ПХ) оказался вариант с  $r_0/d_{ц} = 0,11$  (*улучшенный вариант* перепускных окон ЭМ-50); для него картина течения в ходе продувки заметно лучше (ср. рис. 7.41 и 7.40). Здесь уже только при 30 %-ном объеме зоны СС в вып. окнах появляется примесь СС, доля которой невелика ( $\bar{Q}_{СС} < 0,3 < 0,3$ ) примерно до достижения условной зоной СС 70 % объема РК.

<sup>2</sup>При слишком малом наклоне перепускных окон сходящиеся струи, встречаясь в области оси цилиндра, быстро достигают выпускных окон. При большом наклоне из-за слишком сильной закрутки СС достигает выпускных окон, двигаясь вдоль стенок РК.

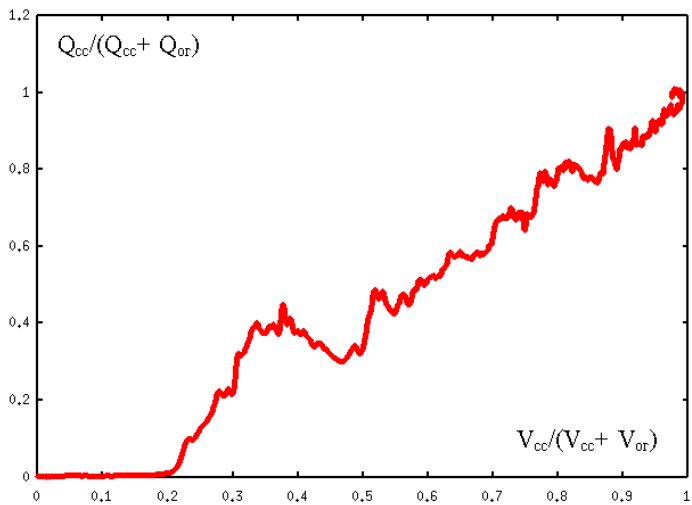


Рис. 7.39. Расчетная ПХ для базовых перепускных окон

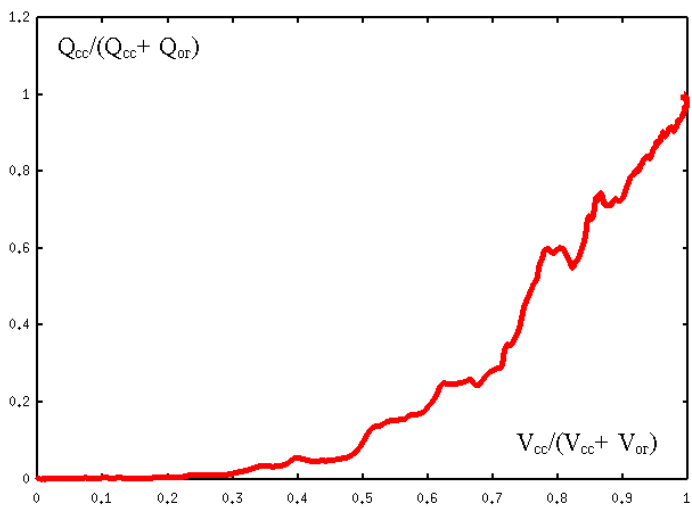


Рис. 7.40. Расчетная ПХ для улучшенных перепускных окон

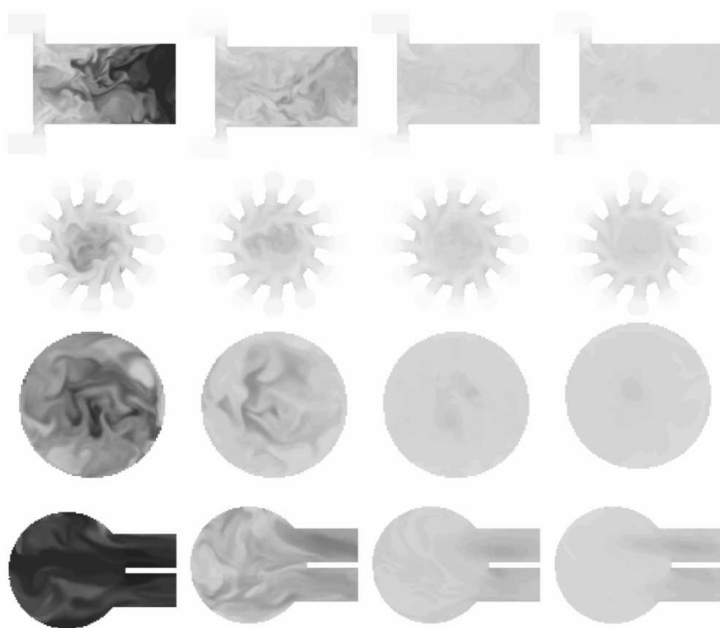


Рис. 7.41. Расчетные поля плотности в характерных сечениях модели РК ЭМ-50: *улучшенный вариант* перепускных окон

**7.4.2. Расчет внешних скоростных характеристик.** Сравнительные «сквозные» расчеты процессов в ГВТ двигателя ЭМ-50 были проведены в СИМ «Альбея» с применением ПХ, полученных в ВЭ. Базовый образец ЭМ-50 характеризовался большими потерями смеси и плохим наполнением при работе на полной нагрузке (по ВСХ). Цель серии расчетов состояла в оценке влияния конструктивных изменений (перепускные окна, размеры «настроенного» выпускного тракта) на показатели двигателя.

В численных расчетах базового варианта ЭМ-50 без настроенной выпускной системы на оборотах  $n = 6000 \text{ мин}^{-1}$  было подобрано эффективное сечение обратного клапана, установленного под карбюратором ( $f = 0,39 \text{ см}^2$ ), которое в дальнейшем не изменялось. Контрольной величиной служило значение индикаторной мощности  $N_i = 1,470 \text{ кВт}$  при принятом уровне механических потерь  $N_m = 0,565 \text{ кВт}$  и эффективной мощности  $N_e = 0,905 \text{ кВт}$  (по данным моторных испытаний). В расчетах использована ПХ с рис. 7.39.

Другие расчетные показатели базового варианта ЭМ-50 оказались равны: расход воздуха  $G_b = 10,30 \text{ кг/ч}$  (практически равен измеренному  $G_b = 10 \text{ кг/ч}$ ), коэффициент наполнения  $\eta_V = 0,360$ , коэффициент продувки  $\varphi = 1,58$  (при меньших оборотах расчетный  $\varphi$  еще больше), удельный эффективный расход  $g_e = 774 \text{ г/(кВт}\cdot\text{ч)}$  — меньше измеренного ( $1000 \text{ кг/(кВт}\cdot\text{ч)}$ ), но надо учесть, что ЭМ-50 работал на охлаждающей заобогащенной смеси; без учета потерь смеси расчетный индикаторный КПД —  $\eta_i = 0,287$ .

Улучшенный вариант ЭМ-50 моделировался при заданной «оптимальной» (рис. 7.40) ПХ, закон открытия перепускных окон задавался как для 18 круглых окон (для изучения эффекта от уменьшения продолжительности их открытия). Фазы перепуска и выпуска подбирались по условию максимальной мощности на данных оборотах, получено  $\varphi = 126,4^\circ \text{ ПКВ}$  и  $90,4^\circ \text{ ПКВ}$  после ВМТ соответственно. Расчетные показатели двигателя на номинальной чистоте вращения улучшились (по ср. с базовым вариантом): эффективная мощность  $N_e = 1,579 \text{ кВт}$ , (при  $N_i = 2,224 \text{ кВт}$  и  $N_m = 0,645 \text{ кВт}$ ),  $G_b = 10,52 \text{ кг/ч}$  (почти не увеличился), коэффициент продувки  $\varphi = 1,167$ , наполнения  $\eta_V = 0,497$ , индикаторный КПД  $\eta_i = 0,3116$ , удельный эффективный расход топлива  $g_e = 458 \text{ г/(кВт}\cdot\text{ч)}$  (с учетом продувки; всего 59 % от значения для базового варианта).

На рис. 7.42, 7.43 и 7.44 приведены графики соответственно  $N_i$ ,  $\eta_V$  и  $\varphi$  по ВСХ, полученные расчетами с шагом по углу в  $1/8$  градуса ПКВ в 40-м цикле, после достижения полного установления решения. Видно, что повышение мощности в *улучшенном варианте* протекает плавно по оборотам и имеет причиной заметное повышение коэффициент наполнения  $\eta_V$ . Также равномерно уменьшен коэффициент продувки  $\varphi$ , указывая на заметное снижение потерь СС в выпускную систему.

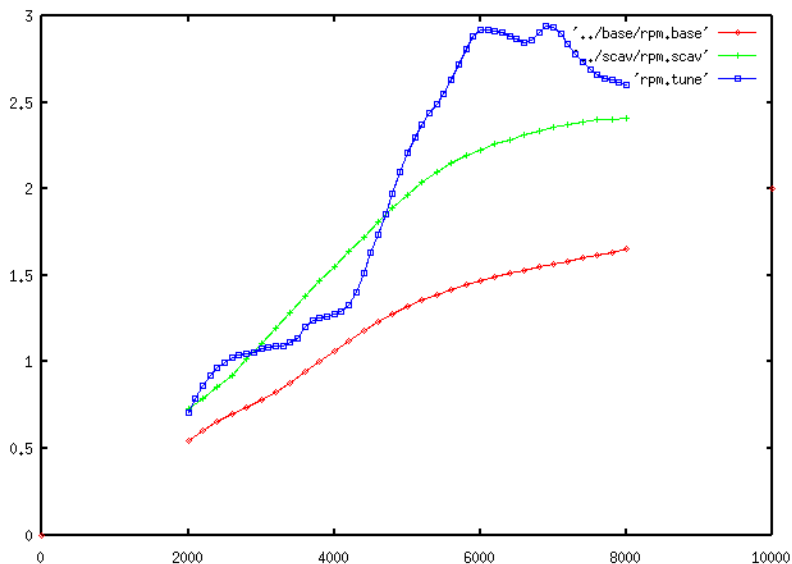


Рис. 7.42. Расчетная  $N_i$  по ВСХ для трех вариантов ГВТ

Третий вариант — с «настроенным» ГВТ, модель его построена на основе *улучшенного варианта* конструкции перепускных окон. Выпускная система — классический настроенный трубопровод (англ. *tuned exhaust pipe*) с «расширительной камерой» (англ. *expansion chamber*, [42]). Профиль выпускной трубы был подобран из условия максимальной индикаторной мощности на оборотах  $n = 6000 \text{ мин}^{-1}$ . На этом режиме расчет дал:  $N_i = 2,92 \text{ кВт}$ ,  $G_b = 13,55 \text{ кг/ч}$ ,  $\eta_V = 0,647$ ,  $\varphi = 1,17$ . На рис. 7.42, 7.43 и 7.44 показаны ВСХ, построенные для трех вариантов ГВТ.

**Выводы по результатам расчетов.** Проведена серия численных расчетов РП ЭМ-50, в которых на основе определенных в ВЭ ПХ количественно оценивался эффект от а) изменения конструкции проду-

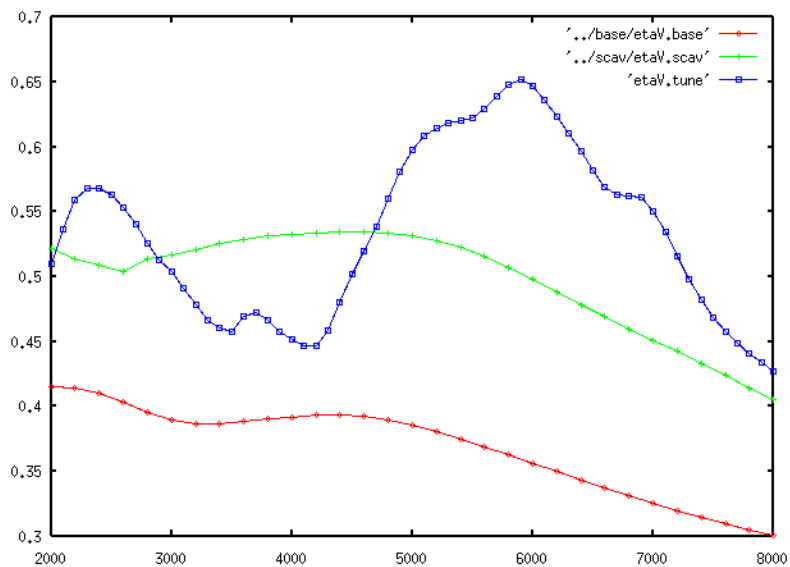


Рис. 7.43. Расчетный  $\eta_V$  по VSX для трех вариантов ГВТ

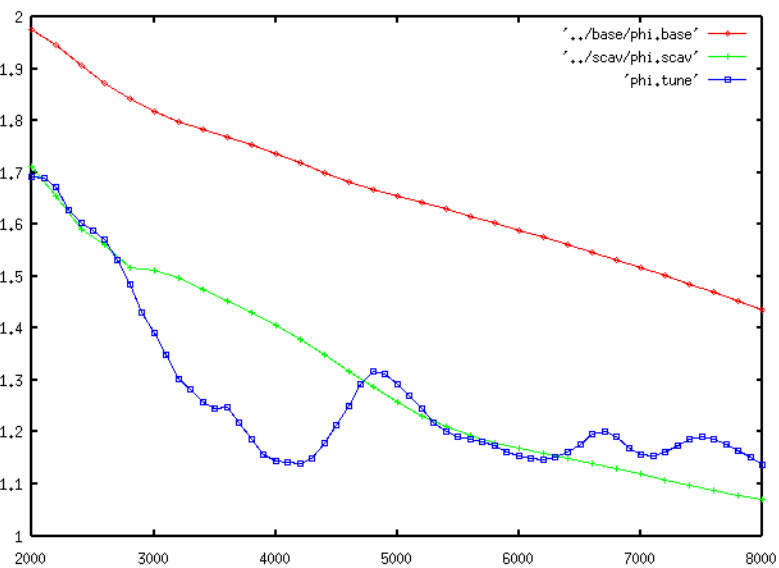


Рис. 7.44. Расчетный  $\varphi$  по VSX для трех вариантов ГВТ

вочных окон и б) от применения волновой настройки ГВТ. Установлено следующее:

- 1) объяснено неудовлетворительное качество продувки РК базового варианта ЭМ-50;
- 2) предсказано существенное улучшение ПХ при увеличении числа окон в пределах 8 ... 18;
- 3) определен близкий к оптимальному наклон продувочных окон;
- 4) оценен количественно эффект от изменения конструкции продувочных окон в данном двигателе без настроенной выпускной системы; при переходе на новую конструкцию ожидается увеличение  $N_e$  на 74 %,  $\eta_V$  — на 38 %, снижение удельного эффективного расхода топлива  $g_e$  — на 41 %.

Можно предположить, что «попадание» в диапазон мощности  $N_e = 2,2 \dots 2,5 \text{ кВт}$  при  $n = 6000 \text{ мин}^{-1}$  и умеренные потери топливовоздушной смеси обеспечит сочетание настроенной выпускной системы и фаз газообмена, подобранных с учетом «настройки» ГВТ.

## 7.5. Предельный коэффициент заполнения двухтактного ДВС

Ниже изложено решение задачи о предельном теоретическом значении  $\eta_V$  двухтактного ДВС, полученное *многопараметрической оптимизацией* при численных расчетах процессов газообмена в  $1D$  (гл. 4).

**7.5.1. Постановка задачи.** На стадии постановки задачи выполнена параметризация геометрии конкретной (рис. 7.45) схемы ГВТ — двухтактного ДВС, без наддува, с кривошипно-камерной продувкой, золотником на впуске и «настроенными» впускными и выпускными каналами, работающего на атмосферном воздухе.

Допустим описание в терминах приближенного подобия, приняв гипотезу об автомодельности течения в ГВТ по  $Re_{\text{п}}$  и  $\theta$ , в том числе для представления эмпирических данных — а) характеристик потерь полного давления на органах газообмена и б) продувочной характеристики РК. Сделаем обсуждавшиеся выше допущения и в описании свойств РТ. Тогда, очевидно, параметризация размеров ГВТ сведется к добавлению новых переменных (в основном вида симплексов) в критериальное уравнение (2.8).



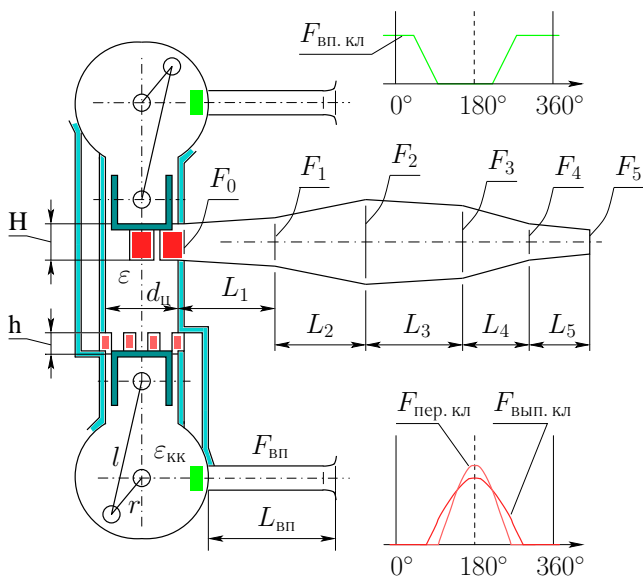


Рис. 7.45. Параметризованный «настроенный» ГВТ 2-тактного ДВС

Для этого применительно к схеме ГВТ на рис. 7.45 получаем следующий перечень факторов, определяющих величину  $\eta_V$ :

- обобщенная характеристика скоростного режима; отношение средней скорости поршня к скорости звука в атмосфере  $M_{п} = v_{п}/c_0 = 4rf/\sqrt{\gamma RT_0}$ ;
- геометрическая степень сжатия в РК  $\varepsilon = (V_h + V_c)/V_c$ ;
- отношение хода поршня к диаметру цилиндра  $\bar{S} = S/d_{ц}$ ;
- отношение радиуса кривошипа к длине шатуна  $\lambda = r/l$ ;
- профиль впускного канала; в рассматриваемом частном случае канала постоянного сечения  $\bar{L}_{вп} = L_{вп}/d_{ц}$  и  $\bar{F}_{вп} = F_{вп}/d_{ц}^2$ ;
- закон открытия золотника на впуске в *кривошипную камеру* (КК); в частном случае трапецеидального закона с заданной угловой длительностью открытия и закрытия  $\Delta\varphi = idem$  и  $\bar{F}_{вп \max} = \bar{F}_{вп}$  определяющие параметры — углы ПКВ открытия и закрытия  $\varphi_{вп 0}$  и  $\varphi_{вп з}$ ;

- геометрическая степень сжатия в КК  $\varepsilon_{\text{КК}} = V_{\text{КК max}}/V_{\text{КК min}}$ ;
- закон открытия перепускных органов; для группы прямоугольных окон определяется относительными а) высотой  $\bar{h} = h/d_{\text{ц}}$  и б) эффективной шириной  $\bar{b} = b/d_{\text{ц}}$ , которые определяют также угол ПКВ открытия перепускного органа  $\varphi_{\text{пер о}}$  и  $F_{\text{пер max}}$  и угол-сечение  $(F\varphi)_{\text{пер}} = \int_{\varphi_{\text{пер о}}}^{\varphi_{\text{пер з}}} F_{\text{пер}}(\varphi)d\varphi$ ;
- закон открытия выпускных органов; для группы прямоугольных окон — относительные высота  $\bar{H} = H/d_{\text{ц}}$  и эффективная ширина  $\bar{B} = B/d_{\text{ц}}$ , определяющие  $\varphi_{\text{вып о}}$  и  $F_{\text{вып max}} \leq F_0$  и угол-сечение  $(F\varphi)_{\text{вып}} = \int_{\varphi_{\text{вып о}}}^{\varphi_{\text{вып з}}} F_{\text{вып}}(\varphi)d\varphi$ ;
- профиль выпускного трубопровода; для показанного на рис. 7.45 задается рядами значений относительных длин участков и площадей сечений:  $\bar{L}_1 = L_1/d_{\text{ц}}$ , ...,  $\bar{L}_5 = L_5/d_{\text{ц}}$ ,  $\bar{F}_0 = F_0/d_{\text{ц}}^2$ , ...,  $\bar{F}_5 = F_5/d_{\text{ц}}^2$ .

Если характерные сечения выпускной трубы в основном круглые, то вместо  $\bar{F}_i$  удобно использовать диаметр сечения, отнесенный к диаметру цилиндра —  $\bar{d}_i = d_i/d_{\text{ц}}$ . Тогда критериальное уравнение, описывающее влияние на наполнение параметров двигателя с ГВТ, показанном на рис. 7.45, примет вид

$$\eta_V = \eta_V ( M_{\text{п}}, \varepsilon, \bar{S} = \frac{S}{d_{\text{ц}}}, \lambda = \frac{r}{l}, \bar{L}_{\text{вп}}, \bar{F}_{\text{вп}}, \varphi_{\text{вп о}}, \varphi_{\text{вп з}}, \varepsilon_{\text{КК}}, \bar{h}, \bar{b}, \bar{H}, \bar{B}, \bar{L}_1, \dots, \bar{L}_5, \bar{d}_0, \dots, \bar{d}_5 ). \quad (7.1)$$

В таком виде и были обработаны данные, полученные в результате расчетной оптимизации.

Полученное с учетом соображений, высказанных на с. 56, критериальное уравнение (7.1) позволяет представить результаты расчета в обобщенных переменных, когда рекомендованные параметры ГВТ применимы к двигателям с разной размерностью и частотой циклов.

**7.5.2. Результаты оптимизации.** Задача оптимизации выполнялась с помощью программной утилиты *многопараметрической оптимизации* из СИМ «Альбея», реализующей *генетический алгоритм*. При ее работе пользовательская функция, загружаемая из разделяемой библиотеки, обрабатывала файл исходных данных, подставляя

значения для каждого нового сочетания определяющих параметров задачи, управляла запуском расчета и получением величины  $\eta_V$  в качестве значения ЦФ (пример — см. на с. 261).

Численный расчет процесса в ГВТ (рис. 7.46) выполнялся *солвером* СИМ «Альбея». Расчеты проводились с шагом  $0,5^\circ$  ПКВ, до 40-го цикла ДВС, для гарантированного выхода на регулярный режим нестационарного течения в ГВТ.

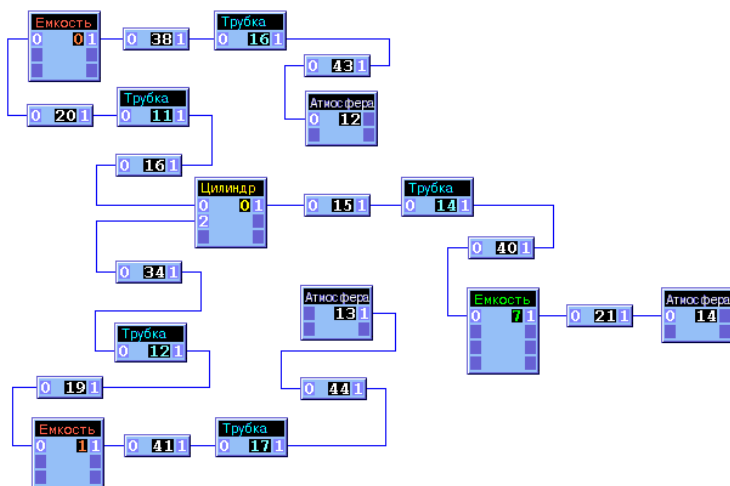


Рис. 7.46. Модель газоздушного тракта ДВС с ПДП в СИМ «Альбея»

Подбиралось оптимальное по  $\eta_V$  сочетание значений 19 варьируемых параметров из (7.1) — «режимного»  $M_n = v_n/c_0 = rn/15c_0$  (обобщенная частота циклов) и остальных (конструктивных). Варьирование параметров проводилось на 32 уровнях, что является достаточным для выявления оптимальных значений определяющих параметров (в выбранных диапазонах) и экстремума ЦФ  $\eta_V$  с «технической» точностью.

С известной долей произвольности в расчетах задавались постоянными следующие определяющие параметры (7.1). Во-первых, фиксированными были *параметры атмосферного воздуха* — давление  $p_0 = 100$  кПа и температура  $T_0 = 300$  К (т.е. скорость звука в атмосфере составила  $c_0 = 347,3$  м/с). *Размерность двигателя* определялась величиной  $d_{ц} = 100$  мм, «компактность» его РК — отношением  $S/d_{ц} = 0,86$  (радиус кривошипа  $r = S/2 = 43$  мм). Приняты геометрическая степень сжатия  $\varepsilon = 15$  и длина шатуна  $l = 151$  мм

(отношение  $\lambda = r/l \approx 0,285$ ). Эффективная ширина перепускных и выпускных окон принята предельно возможной по конструктивным соображениям —  $\bar{b} = 1,88$  и  $\bar{B} = 1,0$ . Т. е. не варьировались следующие факторы, входящие в критериальное уравнение (7.1):  $\varepsilon$ ,  $\bar{S}$ ,  $\lambda$ ,  $\bar{b}$  и  $\bar{B}$ . Закон открытия золотника — трапецевидный, с наклонными участками по  $40^\circ$ ПКВ и максимальным проходным сечением, равным сечению канала на впуске в КК. Длины перепускных каналов приняты минимальными по условию компоновки, их сечения — равными сечению перепускных окон.

Также зафиксирован элементарный состав топлива, его свойства (приняты для бензина среднего состава  $C = 0,855$ ,  $H = 0,145$ ), стехиометрическое соотношение  $l_0 = 14,78$ , низшая теплотворная способность —  $H_u = 43,9$  МДж/кг, применена модель внутреннего смесеобразования с  $\alpha = 1,2$ . «Закон» выгорания задан уравнением Вибе с параметром  $m = 2$ , угол начала горения  $\varphi_y = 330^\circ$ ПКВ подобран по условию максимума  $\eta_i$ , который в оптимальной точке по  $\eta_V$  составил 0,407, при длительности сгорания  $\Delta\varphi_{yz} = 60^\circ$ ПКВ и полноте выделения химической энергии  $x_z = 0,98$ .

С применением ГА (с. 40) смоделирована эволюция «популяции» из 50 «экземпляров» в течение 1000 поколений, сделано 50000 оценок ЦФ, уникальный расчет потребовался примерно в половине случаев. Поиск занял около 110 часов времени процессора AMD Sempron 3200+ на тактовой частоте 1,94 ГГц. Решение задачи методом полного перебора потребовало бы  $32^{19}$  (или около  $3,96 \cdot 10^{28}$ ) вычислений ЦФ.

В результате оптимизации получена точка, в которой расчетное значение  $\eta_V$  составило 1,10. Другой интегральный параметр качества газообмена — коэффициент использования продувочного воздуха, оказался равным  $\varphi_i = 0,848$ . Координаты точки экстремума в пространстве варьируемых параметров приняли следующие значения.

Безразмерные **длина и сечение впускных каналов** (на входе потока в КК)  $\bar{L}_{вп} = 4,78$  и  $\bar{F}_{вп} = 0,270$ , а **углы открытия и закрытия золотника** на впуске в КК — соответственно  $\varphi_{впo} = 282^\circ$ ПКВ и  $\varphi_{впз} = 37^\circ$ ПКВ. Геометрическая **степень сжатия в КК**  $\varepsilon_{кк} = 2,00$  (без учета объема перепускных каналов). Как и ожидалось, подбор величины  $\varepsilon_{кк}$  «натолкнулся» на принятое конструктивное ограничение. Безразмерная **высота перепускных и выпускных окон** оказалась соответственно равна  $\bar{h} = 0,1275$  и  $\bar{H} = 0,305$ , что соответствует угловой длительности их открытия в  $\Delta\varphi_{пер} = 104^\circ$ ПКВ и  $\Delta\varphi_{вып} = 163^\circ$ ПКВ.

Найденные (и отнесенные к  $d_{ц}$ ) **длины участков выпускной трубы** (по форме — круговые конусы с прямолинейной образующей, рис. 7.45) равны  $\bar{L}_1 = 6,96$ ,  $\bar{L}_2 = 11,31$ ,  $\bar{L}_3 = 10,00$ ,  $\bar{L}_4 = 4,18$  и  $\bar{L}_5 = 2,174$ . Относительные диаметры ее сечений, начиная с примыкающего к выпускным окнам —  $\bar{d}_0 = 0,623$ ,  $\bar{d}_1 = 0,965$ ,  $\bar{d}_2 = 2,07$ ,  $\bar{d}_3 = 2,48$ ,  $\bar{d}_4 = 0,607$  и  $\bar{d}_5 = 0,258$ . Стоит отметить, что подбор дал величину площади сечения трубы, примыкающего к выпускным окнам, равную максимальному эффективному сечению окон при положении поршней в НМТ.

Наконец, оптимальный по  $\eta_V$  **скоростной режим** характеризуется расчетным значением  $M_{п} = v_{п}/c_0 = 0,0198$  обобщенной частоты циклов. Так, при принятых (см. выше)  $T_0$  и  $S/d_{ц}$  оптимальная по наполнению **средняя скорость поршня**  $v_{п}$  оказывается близкой к  $7$  м/с. Влияние отклонения от оптимальных оборотов вала (частоты циклов) на  $\eta_V$  и  $\varphi_{и}$  демонстрирует расчетная *скоростная характеристика*, показанная на рис. 7.47. Оптимальное сочетание многих конструктивных параметров ГВТ, «настроенного» на определенные обороты, обусловило наличие резкого максимума  $\eta_V$  на скоростной характеристике (рис. 7.47).

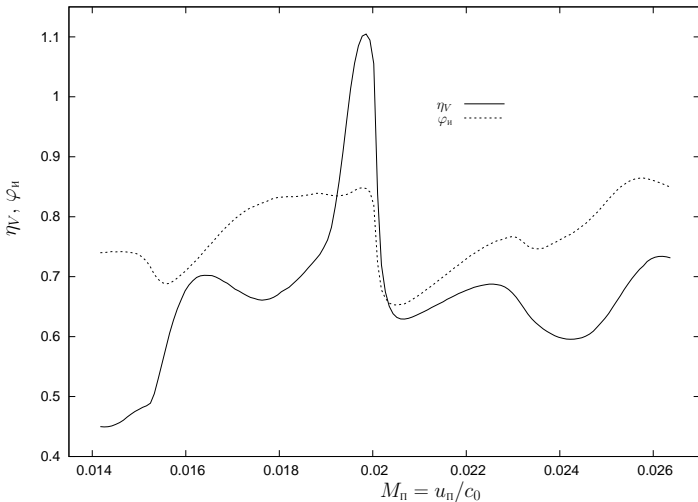


Рис. 7.47. Расчетные характеристики  $\eta_V(M_{п})$  и  $\varphi_{и}(M_{п})$  для оптимального ГВТ

Расчетные графики расхода смеси газов  $G$  и расхода СЗ в составе этой смеси  $G_{СЗ}$  ( $\kappa\epsilon/c$ ) в выпускном окне по углу ПКВ для оптимального скоростного режима представлены на рис. 7.48.

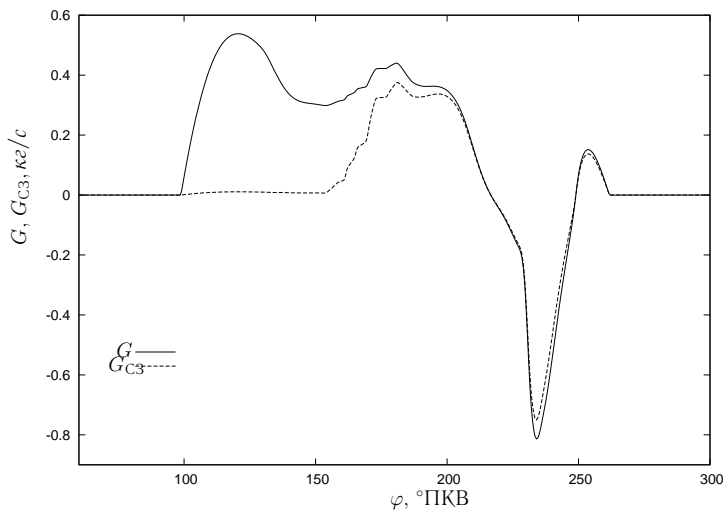


Рис. 7.48. Расход  $G$  и расход  $G_{СЗ}$  в выпускных окнах при предельном  $\eta_V$

Располагаемое количество воздуха за цикл оценивается величиной *коэффициента подачи*  $\eta_V/\varphi_{и}$ , учитывающего как массу свежего воздуха, оставшегося после газообмена в цилиндре, так и потерянного в выпускную систему. Коэффициент подачи в гипотетическом двухтактном ДВС с кривошипно-камерной продувкой при бесконечно медленном осуществлении газообмена стремится к 1 — пределу идеальной эффективности работы КК как продувочного насоса (без «настройки»). В реальных ДВС при продувке неизбежны существенные потери СЗ ( $\varphi_{и} < 1$ , особенно для ненастроенного ГВТ) при том, что и  $\eta_V/\varphi_{и}$  оказывается меньше указанного теоретического предела, поэтому в них невозможно в принципе достичь значений  $\eta_V$ , близких к 1, а тем более — превысить это значение.

Интенсивные волновые явления в «настроенном» ГВТ позволяют в принципе превысить единичное значение величины  $\eta_V/\varphi_{и}$  (при организации продувки КК и «настройки» впуска в нее), а также приблизить к единице  $\varphi_{и}$ , минимизировав потери смеси при продувке РК (используя дозарядку на выпуск).

Как видно из результатов проведенных расчетов, коэффициент наполнения может заметно превысить единичное значение ( $\eta_V = 1,10$ ). Еще больше единицы, естественно, оказывается расчетный коэффициент подачи ( $\eta_V/\varphi_{и}$ ) = 1,30, свидетельствуя о существенной продувке КК под действием волновых явлений в настроенных впускных и выпускных каналах найденного оптимального ГВТ при подобранных законах открытия окон и золотниковых клапанов на впуске.

Полученную расчетом (т. е. теоретически) величину  $\eta_V = 1,10$  следует расценивать как предельно достижимое значение коэффициента наполнения для рассмотренной конструкции ГВТ ДВС, даваемое классической теорией газообмена, использующей описанные выше модели процессов в ГВТ. Эти модели выведены из законов сохранения для одно- и нульмерных форм движения газовой смеси в каналах и емкостях ГВТ. Высокая их адекватность для относительно длинных каналов и волн экспериментально подтверждена (см. с. 193).

Но, строго говоря, явления в настроенном ГВТ могут содержать и стороны, описываемые указанными моделями количественно не вполне верно. Во-первых, настроенные каналы (и волны в них) не являются достаточно длинными, а значит, количественно неверным окажется «гидравлическое» предположение о квазистатичности условий на органах газообмена и других граничных сечениях каналов. Так, в действительности может играть некоторую роль не учитываемая протяженность отрывных зон на МС, а втекание в компактную КК, как и истечение из нее, могут осложняться не учитываемым в расчете загромождением потока. Действительный состав смеси, истекающей из РК при продувке может не соответствовать продувочной характеристике, полученной сколь угодно детальным вычислительным экспериментом, но для упрощенных условий однозначности. Наконец, одномерные уравнения (4.4) совершенно не учитывают эффект продольного турбулентного перемешивания. Последний эффект должен снижать эффективности «дозарядки», а его неучет — приводить к завышению расчетной величины  $\eta_V$ .

По этим причинам действительная величина «предельного»  $\eta_V$  для ГВТ такого типа может заметно отличаться от теоретически вычисленной, причем, вероятнее всего, в меньшую сторону. На этом основании следует считать полученное расчетами значение  $\eta_V$  недостижимой «теоретически предельной» величиной для ГВТ рассматриваемой схемы (рис. 7.45). При этом есть основания предполагать, что расчетные оп-

тимальные значения конструктивных параметров ГВТ достаточно точно указывают на положение действительного максимума  $\eta_V$ .

Опыт и здравый смысл подсказывают, что подобные рекомендации на практике являются лишь отправной точкой для поиска конкретного решения применительно к реальному двигателю — проектируемому или модернизируемому.

Отметим, что довольно ценным является комбинирование методик расчета по «одномерным» моделям описания газообмена и термодинамического процесса в ДВС и процедур автоматической оптимизации. Предполагается, что возможность настройки значений калибровочных коэффициентов модели по данным моторных экспериментов на базовом двигателе позволяет повысить точность прогнозирования предлагаемого («синтезируемого») варианта конструкции ГВТ — с желаемыми показателями; автоматическая оптимизация позволяет на обоих этапах повысить производительность работ по подбору параметров.



# Список обозначений и сокращений

## Термо- и гидродинамические величины:

- $x, y, z$  — оси прямоугольной системы координат;  
 $\mathbf{r} = x\mathbf{i}_x + y\mathbf{i}_y + z\mathbf{i}_z$  — радиус-вектор точки;  
 $\mathbf{n}$  — единичный вектор внешней нормали к поверхности контрольного объема;  
 $\mathbf{v}$  — вектор среднemasсовой скорости газовой смеси,  $m/c$ ;  
 $u, v, w$  (а также  $v_x, v_y, v_z$ ) — проекции  $\mathbf{v}$  на оси декартовой системы координат,  $m/c$ ;  
 $\mathbf{v}_{kд}$  — вектор диффузионной скорости компонента,  $m/c$ ;  
 $E = e + \frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2$  — полная удельная энергия смеси,  $Дж/кг$ ;  
 $\Pi_{ij}$  — тензор плотности потока импульса,  $Па$ ;  
 $\Pi'_{ij}$  — тензор напряжений,  $Па$ ;  
 $\mu$  — динамический коэффициент вязкости,  $Па \cdot c$ ;  
 $\nu$  — кинематический коэффициент вязкости,  $m^2/c$ ;  
 $\Pi''_{ij}$  — тензор «вязких» напряжений,  $Па$ ;  
 $\kappa$  — коэффициент теплопроводности смеси,  $Вт/(m \cdot K)$ ;  
 $Pr$  — число Прандтля для смеси;  
 $\mathbf{q}$  — вектор плотности кондуктивного теплового потока,  $Вт/m^2$ ;  
 $D_k$  — коэффициент диффузии  $k$ -го компонента смеси,  $m^2/c$ ;  
 $Sc_k$  — число Шмидта для  $k$ -го компонента;  
 $\mathbf{j}_k$  — вектор плотности диффузионного потока,  $кг/(m^2 \cdot c)$ ;  
 $\mathbf{g}$  — вектор ускорения массовой силы,  $m/c^2$ ;  
 $Q_r$  — мощность объемного источника энергии, переносимой излучением,  $Вт/m^3$ ;  
 $\alpha_\Sigma$  — суммарный коэффициент теплоотдачи,  $Вт/(m^2 \cdot K)$ ;  
 $R^0 = 8,314472 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot K)$  — молярная газовая постоянная;  
 $R$  — удельная газовая постоянная,  $Дж/(кг \cdot K)$ ;  
 $c_p$  — удельная теплоемкость при  $p = \text{const}$ ,  $Дж/(кг \cdot K)$ ;  
 $c_v$  — удельная теплоемкость при  $v = \text{const}$ ,  $Дж/(кг \cdot K)$ ;  
 $\gamma = c_p/c_v$  — отношение теплоемкостей;  
 $s$  — удельная энтропия,  $Дж/(кг \cdot K)$ ;  
 $U$  — внутренняя энергия смеси в объеме,  $Дж$ .

## Величины из теории рабочих процессов:

$n$  — скорость вращения вала двигателя,  $\text{мин}^{-1}$ ;

$\tau$  — тактность поршневого ДВС (2 или 4);

$p_0, T_0, \rho_0, c_0$  — давление, температура, плотность воздуха и скорость звука при стандартных или атмосферных условиях;

$V_h$  — рабочий объем одного цилиндра поршневого ДВС,  $\text{м}^3$ ;

$V_c$  — объем камеры сгорания,  $\text{м}^3$ ;

$\varepsilon = (V_h + V_c) / V_c$  — (геометрическая) степень сжатия в рабочей камере поршневого ДВС;

$H_u$  — низшая теплота сгорания топлива,  $\text{Дж}/\text{кг}$ ;

$\alpha$  — коэффициент избытка окислителя (воздуха);

$l_0$  — стехиометрический коэффициент,  $\text{кг ок.}/\text{кг топл.}$ ;

$m_{Tц}$  — цикловая доза топлива,  $\text{кг}$ ;

$m_{ц}$  — цикловая масса СЗ или воздуха,  $\text{кг}$ ;

$\eta_V$  — коэффициент наполнения;

$\varphi_n$  — коэффициент использования продувочного воздуха;

$\eta_i$  — индикаторный КПД;

$\eta_m$  — механический КПД.

## Сокращения:

ВМТ — верхняя мертвая точка;

ВСХ — внешняя скоростная характеристика ДВС;

ГА — генетический алгоритм;

ГВТ — газоздушный тракт;

ГИП — графический интерфейс с пользователем;

ГУ — граничные условия;

ДВС — двигатель внутреннего сгорания;

ЗС — закон (законы) сохранения;

ИМ — имитационное моделирование, имитационная модель;

КК — кривошипная камера;

КП — контактная поверхность;

КПД — коэффициент полезного действия;

КТО — коэффициент турбулентного обмена;

ЛБ — лемниската Бернулли;

ЛТР — локальное термодинамическое равновесие;

МЖГ — механика жидкости и газа;  
МКВ — «моделирование крупных вихрей»: численный расчет турбулентного течения с явным выделением лишь крупномасштабной составляющей полей зависимых переменных;  
МКО — метод конечных объемов;  
МКР — метод конечных разностей;  
ММ — математическая модель (моделирование);  
МСС — механика сплошной среды;  
МТП — модель турбулентного переноса;  
НИР — научно-исследовательские работы;  
НУ — начальные условия;  
ОДУ — обыкновенное дифференциальное уравнение;  
ОКР — опытно-конструкторские работы;  
ПК — программный комплекс;  
ПО — программное обеспечение;  
ППП — прикладной программный пакет;  
ПС — продукты сгорания;  
ПХ — продувочная характеристика;  
ПЭВМ — персональная ЭВМ;  
РП — рабочие процессы;  
РТ — рабочее тело;  
СЗ — свежий заряд;  
СС — свежая смесь;  
СИМ — система имитационного моделирования;  
ТД — тепловой двигатель;  
ЧМ — численный метод; численные методы;  
УС — уравнение (уравнения) состояния;  
УНС — уравнения Навье – Стокса;  
УЧП — уравнение (уравнения) в частных производных;  
ЦПУ — центральное процессорное устройство; процессор ЭВМ;  
ЦФ — целевая функция;  
*CAE (Computer-Aided Engineering)* — технические расчеты, выполняемые посредством моделирования на ЭВМ;  
*CFD (Computational Fluid Dynamics)* — вычислительная гидрогазодинамика;

*DNS (Direct Numerical Simulation)* — численный расчет течения непосредственно по уравнениям детальной модели (уравнениям пространственного движения реагирующей смеси или УНС);

*LES (Large Eddy Simulation)* — то же, что МКВ;

*MPI (Message Passing Interface)* — интерфейс передачи сообщений;

*RANS (Reynolds Averaged Navier – Stokes)* — расчет течения по осредненным уравнениям (Навье – Стокса и т. п.).

# Предметный указатель

- анализ размерностей, 22, 49, 56, 62  
аналогия Рейнольдса, 116  
аппроксимация, 33, 161, 171  
аэрозоль, 21
- безразмерные величины, 52
- газодинамические функции, 112, 115, 116  
генетический алгоритм, 40, 234  
гипотеза Ньютона обобщенная, 76  
гипотеза о ЛТР, 71  
гипотеза сплошности, 70  
графический интерфейс пользователя, 180, 185
- дискретизация, 6, 28, 32, 143, 145, 147, 152, 174, 175  
диссоциация, 137, 139  
диффузия, 74
- задача Коши, 134, 144, 253  
закон Фика, 75, 101  
закон Фурье, 78, 101  
законы сохранения, 6, 69, 70, 72, 106, 110, 133
- идеальный газ, 87, 88  
иерархия моделей, 183  
излучение, 78  
инварианты Римана, 112, 132  
индикаторная мощность, 261  
интерфейс передачи сообщений, 189
- капельная жидкость, 21  
кластер, 187, 216, 219, 225  
компрессор, 124
- коэффициент восстановления полного давления, 118, 205  
коэффициент вязкости, 75, 78, 86  
коэффициент диффузии, 75, 86  
коэффициент избытка воздуха, 138  
коэффициент наполнения, 229, 239  
коэффициент потерь, 67  
коэффициент продувки, 229  
коэффициент сопротивления, 22  
коэффициент теплопроводности, 78, 153  
кривошипная камера, 233  
критериальное уравнение, 116, 117  
критерий подобия, 62
- математическая модель, 15  
местное сопротивление, 16, 67, 110, 117  
метод донорской ячейки, 157–159, 164, 256  
метод конечных объемов, 152, 155  
метод консервативный, 158, 160, 161, 173  
метод Рунге – Кутты, 27, 148, 183  
метод распада разрыва, 162–164, 192, 258  
метод Эйлера, 145, 147–151, 157, 182, 253
- методы градиентные, 39  
методы неявные, 175  
методы эволюционные, 40  
моделирование, 10, 41  
моделирование аналоговое, 11, 47  
моделирование знаковое, 11  
моделирование математическое, 13, 14

моделирование предметное, 11  
 моделирование физическое, 11, 41  
 модель, 10  
 модель продувки двухзонная, 140, 225  
 модель Смагоринского, 102  
 модель связи, 179, 181, 184  
 модель турбулентного переноса, 21  
 модель элемента, 179, 181, 184  
 модульный принцип, 181  
  
 научный метод, 7, 14, 15  
 нестационарное течение, 193  
 ньютоновская жидкость, 16  
  
 обыкновенное дифференциальное уравнение, 27, 143  
 оптимизация глобальная, 38, 39  
 оптимизация многодисциплинарная, 38  
 оптимизация многопараметрическая, 232, 234, 261  
 оригинал, 10, 11  
  
 параметр состояния, 72  
 переменные консервативные, 149  
 переменные зависимые, 143, 144, 169  
 переменные консервативные, 144, 147, 165, 172, 182  
 переменные независимые, 143–145, 152  
 переменные первичные, 150, 182  
 порядок аппроксимации, 148, 151, 157, 161, 179  
 потери полного давления, 115, 118  
 предметная область, 6, 181–184  
 прикладной программный пакет, 184  
  
 продувочная характеристика, 140, 225  
 продукты сгорания, 137  
 продукты сгорания «чистые», 137  
  
 рабочее тело, 6, 69, 81, 83, 137  
 рабочий процесс, 6  
 равновесие термодинамическое, 71  
 размерность, 51  
 размерные величины, 52  
 расчетная программа, 261  
 решение аналитическое, 13, 32, 50  
 решение точное, 15  
 решение численное, 13, 15, 32, 50, 143  
  
 свежая смесь, 137, 140, 151  
 свежий заряд, 56, 137  
 связь, 179  
 симплекс, 52  
 скачок сечения, 16  
 скорость звука, 86  
 смесеобразование внешнее, 138  
 смесеобразование внутреннее, 138  
 совершенный газ, 88, 89, 165  
 солвер, 180, 235, 261  
 сплошная среда, 70  
 стехиометрическое отношение, 138  
 сходимость, 15, 33, 207  
  
 теория, 14  
 теория подобия, 42  
 теория газообмена ДВС, 58  
 течение многофазное, 81  
 течение нестационарное, 100, 110, 112  
 течение стационарное, 114, 115, 121, 132  
 течение турбулентное, 24, 65, 92, 215, 217, 219

турбина, 125

уравнение Бюргерса, 154, 157, 159, 256

уравнение в частных производных, 28, 143

уравнение состояния, 72, 80

уравнение теплопроводности, 153, 159

уравнения Навье – Стокса, 16, 24, 82

уравнения Рейнольдса, 95

уравнения Эйлера, 24, 83–85

условия однозначности, 50

условия подобия, 61

формула Вибе, 138

формула Вошни, 139

формула Сазерленда, 88, 117

цикловая доза топлива, 151

числа подобия, 42, 62

численный метод, 15, 17, 143

число Куранта, 158, 192

число Маха, 65, 118

число Нуссельта, 66

число Прандтля, 57, 67, 78

число Рейнольдса, 65, 118

число Шмидта, 57, 67, 75

элемент, 179

энергия внутренняя, 86, 138

энтальпия, 77, 87

энтропия, 86, 135

# Список литературы

1. **Абрамович, Г. Н.** Прикладная газовая динамика: учебн. руководство. В 2 ч. Ч. 1. — 5-е изд., перераб. и доп. — М.: Наука, 1991. — 600 с.
2. **Адлер, Ю. П.** Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий / Ю. П. Адлер, С. В. Маркова, Ю. В. Грановский. — М.: Наука, 1976. — 278 с.
3. **Андерсон, Д.** Вычислительная гидромеханика и теплообмен. В 2-х т. Т. 1. / Д. Андерсон, Дж. Таннехилл, Р. Плетчер; пер. с англ. — М.: Мир, 1990. — 384 с.
4. **Белоцерковский, О. М.** Метод крупных частиц в газовой динамике / О. М. Белоцерковский, Ю. М. Давыдов. — М.: Наука, 1982. — 391 с.
5. **Болгарский, А. В.** Термодинамика и теплопередача / А. В. Болгарский, Г. А. Мухачев, В. К. Щукин. — М.: Высш. шк., 1975. — 495 с.
6. **Большая советская энциклопедия:** в 30 т. — 3-е изд. — М.: Советская энциклопедия, 1969. — Т. 16: Мезия-Моршанск, 1974. — 615 с.
7. **Воеводин, В. В.** Параллельные вычисления / В. В. Воеводин, Вл. В. Воеводин. — СПб.: БХВ-Петербург: 2002. — 608 с.
8. **Годунов, С. К.** Разностный метод численного расчета разрывных решений гидродинамики // Матем. сб. — 1959. — Т. 47, вып. 3. — С. 276 — 306.
9. **Гухман, А. А.** Обобщенный анализ. — М.: Факториал, 1998. — 304 с.
10. **Дейч, М. Е.** Техническая газодинамика. — 3-е изд, перераб. — М.: Энергия, 1974. — 592 с.



11. **Иванов, М. Я.** Неявная схема повышенной точности для численного интегрирования уравнений Эйлера / М. Я. Иванов, Р. З. Нигматуллин // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. — 1987. — Т. 27, № 11. — С. 1725 — 1735.
12. **Иванов, М. Я.** Неявная схема С. К. Годунова повышенной точности для интегрирования уравнений Навье — Стокса / М. Я. Иванов, В. Г. Крупа, Р. З. Нигматуллин // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. — 1989. — Т. 29, № 6. — С. 888 — 901.
13. **Колган, В. П.** Применение принципа минимальных значений производной к построению конечно-разностных схем для расчета разрывных решений газовой динамики // Уч. записки ЦАГИ. — 1972. — Т. 3, № 6. — С. 68 — 77.
14. **Копченов, В. И.** Монотонная разностная схема второго порядка для гиперболических систем с двумя независимыми переменными / В. И. Копченов, А. Н. Крайко // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. — 1983. — Т. 23, № 4. — С. 848 — 859.
15. **Корнеев В. Д.** Параллельное программирование в МРІ. — Москва — Ижевск, Ин-т компьютер. иссл.-ний, 2003. — 304 с.
16. **Лойцянский Л. Г.** Механика жидкости и газа. — 7-е изд., испр. — М.: Дрофа, 2003. — 840 с.
17. **Моисеев, Н. Н.** Математические задачи системного анализа. — М.: Наука, 1982. — 345 с.
18. **Немнюгин, С. А.** Параллельное программирование для многопроцессорных вычислительных систем / С. А. Немнюгин, О. Л. Стефик. — СПб.: БХВ-Петербург, 2002. — 400 с.
19. **Никитин, Р. В.** Технология подготовки специалистов: практическое пособие / Р. В. Никитин, Б. П. Рудой. — Уфа: УГАТУ, 2002. — 61 с.
20. **Оран, Э.** Численное моделирование реагирующих потоков / Э. Оран, Дж. Бóрис; пер. с англ. — М.: Мир, 1990. — 660 с.
21. **Рудой, Б. П.** Расчет характеристик двигателя внутреннего сгорания: учеб. пособие / Б. П. Рудой, Р. А. Галиев, С. Б. Даянов, Р. В. Никитин, Н. В. Рудая. — Уфа: УАИ, 1986. — 107 с.

22. **Рождественский, Б. Л.** Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике / Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко. — М.: Наука, 1978. — 687 с.
23. **Рудой, Б. П.** Определение коэффициентов гидравлических потерь в вычислительном эксперименте / Б. П. Рудой, А. А. Черноусов // Актуальные проблемы авиадвигателестроения: межвуз. науч. сб. — Уфа: УГАТУ, 1998. — С. 189 – 197.
24. **Рудой, Б. П.** Определение продувочных характеристик рабочих камер двигателей внутреннего сгорания вычислительным экспериментом / Б. П. Рудой, А. А. Черноусов // Тр. Межд. науч.-техн. конф., 23–25 апреля 2003 г. — Челябинск: ЮУрГУ, 2003. — С. 133 – 140.
25. **Рудой, Б. П.** Прикладная нестационарная гидрогазодинамика: учеб. пособие. — Уфа: УАИ, 1988. — 184 с.
26. **Рудой, Б. П.** Теория газообмена ДВС: учеб. пособие. — Уфа: УАИ, 1978. — 110 с.
27. **Самарский, А. А.** Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры / А. А. Самарский, А. П. Михайлов. — 2-е изд., испр. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 320 с.
28. **Самарский, А. А.** Разностные методы решения задач газовой динамики / А. А. Самарский, Ю. П. Попов. — М.: Наука, 1980. — 352 с.
29. **Седов, Л. И.** Методы подобия и размерности в механике. — 8-е изд., перераб. — М.: Наука, 1977. — 440 с.
30. **Седов, Л. И.** Механика сплошной среды: В 2 ч. Ч. 1. — 5-е изд., испр. — Рос. АН, 1994. — 528 с.
31. **Седов, Л. И.** Механика сплошной среды: В 2 ч. Ч. 2. — 5-е изд., испр. — Рос. АН, 1994. — 560 с.
32. **Система** имитационного моделирования «Альбея» (ядро). Руководство пользователя. Руководство программиста: учеб. пособие / В. Г. Горбачев и др. — Уфа: УГАТУ, 1995. — 112 с.
33. **Флетчер, К.** Вычислительные методы в динамике жидкостей. В 2-х т.: пер. с англ. Т. 1. — М.: Мир, 1991. — 502 с.

34. **Флетчер, К.** Вычислительные методы в динамике жидкостей. В 2-х т.: пер. с англ. Т. 2. — М.: Мир, 1991. — 552 с.
35. **Химмельблау, Д.** Прикладное нелинейное программирование / Д. Химмельблау; пер. с англ.; под ред. М. Л. Быховского. — М.: Мир, 1975. — 534 с.
36. **Холщевников, К. В.** Теория и расчет авиационных лопаточных машин / К. В. Холщевников, О. Н. Емин, В. Т. Митрохин. — 2-е изд., перераб. и доп. — М: Машиностроение, 1986. — 431 с.
37. **Цирельман, Н. М.** Методы теории подобия и моделирования тепло-массопереноса: учеб. пособие. — Уфа: УГАТУ, 2000. — 94 с.
38. **Черноусов, А. А.** Определение гидравлических характеристик местных сопротивлений в газоздушных трактах ДВС вычислительным экспериментом: дис. . . . канд. техн. наук. — Уфа: Уфимск. гос. авиац. техн. ун-т, 1998. — 164 с.
39. **Черноусов, А. А.** Основы теории и моделирования горения в ДВС: учеб. пособие. — Уфа: ДизайнПолиграфСервис, 2007. — 224 с.
40. **Численное** решение многомерных задач газовой динамики / С. К. Годунов и др. — М.: Наука, 1976. — 400 с.
41. **Blair, G.P.** Design and Simulation of Four Stroke Engines. — SAE International, 1999. — 815 p.
42. **Blair, G.P.** Design and Simulation of Two Stroke Engines. — SAE International, 1996. — 647 p.
43. **Grefenstette, J.J.** GENESIS: a system for using genetic search procedures. — Proc. of the Conference on Intelligent Systems and Machines, 1984. — p. 161 – 165.
44. **Nelder, J.A.** A simplex method for function minimization / J. A. Nelder, R. Mead. — Comp. J., 7, 308 – 313, 1965.
45. **Patankar, S.V.** A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows / S.V. Patankar, D.B. Spalding. — Int. J. Heat Mass Transfer. — 1972. — v. 15. — p. 1787.

46. **Poinsot, Tierry.** Theoretical and numerical combustion / Tierry Poinsot, Denis Veynante. — Edwards, 2005. — 2nd ed. — 522 p.
47. <http://www.beowulf.org>.
48. <http://tldp.org/HOWTO/Beowulf-HOWTO/index.html>.
49. <http://www.top500.org>.

# Приложение А. Программа расчета по уравнениям динамики

Текст программы на языке C++ для численного решения конкретной задачи Коши для уравнений динамики материальной точки вида (5.1) в 2D методом Эйлера (5.6):

```
// dynamic.cpp

#include <iostream>
#include <cmath>

using namespace std;

void output(double t, double x, double y, double u,
            double v)
{
    streamsize precnOld = cout.precision(3);
    cout /* вывод текущего решения на шаге */
        << fixed << t << ' '
        << fixed << x << ' ' << fixed << y << ' '
        << fixed << u << ' ' << fixed << v << endl;
    cout.precision(precnOld);
}

int main()
{
    //== исходные данные
    const double
        m = 1., // масса кг []
        d = 0.1, // диаметр м []
        Cx = 0.4, // постоянный коэффт. – сопря. – бр [ / ]
        rho = 1.293, // постоянная плотность среды кгм [ / ^ 3 ]
        g = -9.81, // ускорение масс. силы g_{x} м [ / c ^ 2 ]
        x0 = 0., // хкомпонента – нач. координаты м []
        y0 = 0., // укомпонента – нач. координаты м []
        u0 = 50., // хкомпонента – нач. скорости м [ / c ]
        v0 = 50., // укомпонента – нач. скорости м [ / c ]
        dt = 0.1; // шаг по времени с []

    const int N = 100; // число шагов по времени
    const int K = 4; // длина вектора конс. переменных
    int n, k; // номер шага и индекс уравнения
```

```

// рабочие переменные: скорость, сила сопротивления
double V, F;

// первичные переменные на n=0...Nm- слое по t
double x, y, u, v;

double S[K]; // вектор источников: правых " частей"
double U[K]; // вектор консервативных переменных

double t = 0.; // время

// первичные переменные на m(0)- временнОм слое
x = x0, y = y0;
u = u0, v = v0;

// вектор консервативных переменных на старте
U[0] = x;
U[1] = y;
U[2] = m * u; // xкомпонента- количества движения
U[3] = m * v; // укомпонента- кд..

//— вывод решения на старте начальные( условия)
output(t, x, y, u, v);

//== цикл шагов расчета по времени
for (n = 1; n <= N; n++) {

    // расчет силы сопротивления движению
    V = sqrt(u * u + v * v);
    F = Cx * (M_PI_4 * d * d) * rho * V * V / 2.;

    // вычисление правых частей на старом<<>> слое
    S[0] = u;
    S[1] = v;
    S[2] = - F * u / V;
    S[3] = - F * v / V + m * g;

    // обновление вектора консервативных переменных
    for (k = 0; k < K; k++)
        U[k] += dt * S[k]; // U^{n+1} = U^n +
                          // \Delta t S(U^n)

    // обновление t: t^{n+1} = t^n + \Delta t
    t += dt;

    // декодирование ' ' консервативных переменных

```

```
x = U[0];
y = U[1];
u = U[2] / m;
v = U[3] / m;

//— вывод решения на шаге
output(t, x, y, u, v);
}
return 0;
}

// end of dynamic.cpp
```

# Приложение Б. Программа метода донорской ячейки

Программа на C++, реализующая решение тестовой задачи для *уравнения Бюргерса* (5.20) и линейного волнового уравнения (5.21) *методом донорской ячейки* в варианте (5.23):

```
// donor.cpp

#include <iostream>

using namespace std;

inline double flux_fun(double u)
{
    static const double c = 0.5; // > 0!
    // для линейного волнового уравнения:
    return c * u;
    // для уравнения Бюргерса: return 0.5 * u * u;
}

int main()
{
    const int NX = 100; // количество реальных ячеек;
    const int N = 100; // число шагов по времени

    const double dt = 1.; // шаг по времени, с
    const double dx = 1.; // размер ячейки, м

    // номер ячейки и номер шага
    int ix, n;

    // переменные в ячейках (с фиктивными)
    double u[NX+2];

    // потоковая функция на границах ячеек
    double f[NX+1];

    // начальные условия
    for (ix = 1; ix <= NX; ix++)
        u[ix] = (ix >= 10 && ix < 20)? 1.0: 0.0;

    // цикл шагов расчета по времени
```



```

for (n = 1; n <= N; n++) {

    // вывод номера текущего шага
    cerr << n << '\n';

    // граничные условия периодического<<>> вида
    u[0] = u[NX];
    u[NX+1] = u[1];

    // расчет плотностей потоков
    for (ix = 0; ix <= NX; ix++)
        f[ix] = flux_fun(u[ix]);

    // обновление параметров в ячейках по потокам
    for (ix = 1; ix <= NX; ix++)
        u[ix] += dt * (f[ix-1] - f[ix]) / dx;
}

// вывод численного решения в ячейках
for (ix = 1; ix <= NX; ix++)
    cout << fixed << dx * (ix - 0.5) << ' '
         << fixed << u[ix] << endl;

return 0;
}

// end of donor.cpp

```

# Приложение В. Программа метода «распада разрыва»

Главный модуль (на C++) программы решения тестовой задачи о РПП по (3.32) методом «распада разрыва» С. К. Годунова (с. 161):

```
// godunov.cpp

#include <iostream>

using namespace std;

#include "riemann.h" // процедура расчета РПП
#include "properties.h" // параметры свойств газа

void encode (double [3], double&, double&, double&);
void decode (double [3], double&, double&, double&);
void flux_fun(double [3], double [3], double [3]);

int main()
{
    const int NX = 100; // число ячек
    const int N = 80; // число шагов по времени
    const double dx = 1.; // размер ячейки. м
    const double dt = 0.001; // шаг по времени. с

    int n, ix, k; // номер шага, ячейки и уравнения

    // массивы:
    double U[NX+2][3]; // консервативные
    double F[NX+1][3]; // плотности потоков

    double rho, T, e, E, p, u = 0.; // параметры газа

    // начальные условия НУ()
    for (ix = 1; ix <= NX; ix++) {

        // первичные переменные
        if (ix <= NX / 2) { p = 200000., rho = 2.0; }
        else { p = 100000., rho = 1.0; }

        // консервативные переменные
        encode(U[ix], rho, u, p);
    }
}
```

```

}

//== цикл шагов расчета по времени
for (n = 1; n <= N; n++) {

    // вывод номера текущего шага
    cerr << n << '\n';

    // граничные условия отражения
    U[ 0][0] = U[1][0];
    U[ 0][1] = - U[1][1];
    U[ 0][2] = U[1][2];
    U[NX+1][0] = U[NX][0];
    U[NX+1][1] = - U[NX][1];
    U[NX+1][2] = U[NX][2];

    // расчет плотностей потоков
    for (ix = 0; ix <= NX; ix++)
        flux_fun(U[ix], U[ix+1], F[ix]);

    // обновление параметров в ячейках по потокам
    for (ix = 1; ix <= NX; ix++)
        for (k = 0; k < 3; k++)
            U[ix][k] += dt * (F[ix-1][k] - F[ix][k]) / dx;
}

// вывод численного решения в ячейках
for (ix = 1; ix <= NX; ix++) {
    decode(U[ix], rho, u, p);
    cout << fixed << dx * (ix - 0.5) << ' '
         << fixed << p << ' ' << fixed << rho << ' '
         << fixed << u << ' ' << endl;
}
return 0;
}

inline void encode(double U[3], double &rho, double &u, double &p)
{
    static double T, e, E;

    // уравнения состояния
    T = p / (rho * R_GAS);
    e = cv * T;
    E = e + 0.5 * u * u;

    // консервативные переменные
    U[0] = rho;

```

```

    U[1] = rho * u;
    U[2] = rho * E;
}

inline void decode(double U[3], double &rho,
    double &u, double &p)
{
    static double E, e, T;

    // консервативные переменные
    rho = U[0];
    u   = U[1] / rho;
    E   = U[2] / rho;

    // уравнения состояния
    e   = E - 0.5 * u * u;
    T   = e / cv;
    p   = rho * R_GAS * T;
}

inline void flux_fun(double U_L[3], double U_R[3],
    double F[3])
{
    static double rho_L, u_L, p_L;
    static double rho_R, u_R, p_R;
    static double rho, u, p, T, e, E;

    // параметры в ячейке:
    decode(U_L, rho_L, u_L, p_L); // слева от границы
    decode(U_R, rho_R, u_R, p_R); // справа от границы

    // решение задачи о РИП
    riemann_problem(rho_L, u_L, p_L, rho_R, u_R, p_R, &rho, &u, &p);

    // уравнения состояния
    T = p / (rho * R_GAS);
    e = cv * T;
    E = e + 0.5 * u * u;

    // плотности потоков:
    F[0] = rho * u; // массы
    F[1] = rho * u * u + p; // количества движения
    F[2] = rho * u * E + p * u; // энергии
}

// end of godunov.cpp

```

# Приложение Г. Модуль для вычисления целевой функции

Пользовательский модуль для динамического подключения к «штатной» программе *многопараметрической оптимизации* (для вычисления ЦФ (*индикаторной мощности*  $N_i$ )) вызывается *расчетная программа —солвер*:

```
// eval.cpp

#include <cstdlib> // exit(), system()
#include <cstdio> // sscanf()

#include <iostream>
#include <iomanip>
#include <fstream>
#include <sstream>

using namespace std;

//— конфигурация —
const char* prog_dir = "albea";
const char* prep_name = "albeap";
const char* solver_name = "albeas";
const char* prj_name = "tuned_pipe";
const string prj_template_name = (string)"/" +
    prj_name + ".template";
const string
    prj_dir_name = (string)"/home/andrei/" +
    prog_dir + "/prj/" + prj_name;
const string
    out_file_name = prj_dir_name + "/ind.dat";
const string
    err_file_name = prj_dir_name + "/errors.log";
const char*
    endcmd = " ";

//
// eval(): вычисляет значение функции соответствия
//
extern "C" // для подавления символических имен C++
double eval(
    double *x, // массив значений признаков
```

```

    int    n) // размерность этого массива
{
    char   buf[2048];
    char* ptr;
    double N_i = 0.; // значение целевой функции

    //— сложная команда
    stringstream cmd;

    // (1) очистка каталога проекта
    cmd << "rm -f " << prj_dir_name << "/*" << endcmd;

    // (2) копирование "thermo" из исходного каталога
    cmd << "cp " << prj_template_name << "/thermo" << ' ' ,
        << prj_dir_name << endcmd;

    // (3) копирование данных "input" через препроцессор
    cmd << prep_name
        << " L_in=" << x[0] << " L_ex=" << x[1] << ' ' ,
        << prj_template_name << "/input" << ' ' ,
        << prj_dir_name << "/input" << endcmd;

    // (4) запуск расчетной программы солвера()
    cmd << "cd ~/ " << prog_dir << endcmd
        << solver_name << ' ' << prj_name
        << " > " << out_file_name << ' ' ,
        << "2>" << err_file_name << endcmd;

    //— выполнение сложной" команды"
    system(cmd.str().c_str());

    //— получение $N_i$ из файла
    ifstream ifs(out_file_name.c_str());
    if (!ifs) {
        cerr << "Не открывается файл \""
            << out_file_name << "\"\n";
        exit(EXIT_FAILURE);
    }
    for (int count = 0; ; count++) {
        ifs.getline(buf, sizeof buf);
        if (!ifs.good())
            break;
        if (count%2) {
            ptr = strstr(buf, "N_i=");
            if (!ptr || sscanf(ptr, "N_i=%lf", &N_i) != 1)
            {
                cerr << "Не читается величина 'N_i' из \""

```

```

        << out_file_name << "\\n";
    exit(EXIT_FAILURE);
    }
}
ifs.close();

// индикаторная мощность последнего цикла ДВС
// возвращается как значение максимизируемой ЦФ
cerr
<< "L_in=" << fixed << setprecision(7) << x[0]
<< ", L_ex=" << fixed << setprecision(7) << x[1]
<< ", N_i=" << fixed << setprecision(4) << N_i
<< '\n';
return N_i;
}

// end of eval.cpp

```