

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Уфимский государственный авиационный технический университет»

А. А. ЧЕРНОУСОВ

ОСНОВЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ В ДВИГАТЕЛЯХ И ЭНЕРГОУСТАНОВКАХ

(конспект лекций)

Уфа 2021

ОГЛАВЛЕНИЕ

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ И СОКРАЩЕНИЙ	4
ВВЕДЕНИЕ	7
1. МЕТОДОЛОГИЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ	11
1.1. Модели и моделирование	11
1.2. Математическое моделирование	14
1.3. Физическое моделирование	27
1.4. Аналоговое моделирование	32
Вопросы для самоконтроля	33
2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПРОЦЕССОВ	35
2.1. Исходные гипотезы и уравнения моделей процессов	35
2.2. Примеры математических моделей процессов	49
Вопросы для самоконтроля	70
3. МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ	71
3.1. Задачи анализа процессов	71
3.2. Методы решения систем дифференциальных уравнений	74
3.3. Методы решения уравнений с частными производными	86
3.4. Задачи оптимизации	105
3.5. Методы минимизации функций	107
Вопросы для самоконтроля	116
4. ПРОГРАММНЫЕ МОДУЛИ, ПРОГРАММЫ, ПАКЕТЫ	118
4.1. Программные модули и библиотеки моделей	118
4.2. Программы для моделирования процессов	120
4.3. Пакеты прикладных программ	122
Вопросы для самоконтроля	123
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	124
ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ	125
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	128

ПРИЛОЖЕНИЕ А. МЕТОД ЭЙЛЕРА	130
ПРИЛОЖЕНИЕ Б. МЕТОД ЭЙЛЕРА С ПЕРЕСЧЕТОМ	134
ПРИЛОЖЕНИЕ В. МЕТОД ДОНОРСКОЙ ЯЧЕЙКИ	136
ПРИЛОЖЕНИЕ Г. МЕТОД РАСПАДА РАЗРЫВА	138
ПРИЛОЖЕНИЕ Д. МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ ..	141

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ И СОКРАЩЕНИЙ

Основные обозначения

Механические процессы:

t — время¹, с;

x, y, z — координаты точки, м;

$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ — радиус-вектор точки, м;

$\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$ — вектор скорости, м/с;

v_x, v_y, v_z (а также u, v, w) — проекции \mathbf{v} на оси координат, м/с;

m — масса, кг;

$\mathbf{P} = P_x\mathbf{i} + P_y\mathbf{j} + P_z\mathbf{k}$ — вектор силы, Н.

Термогазодинамические процессы:

V — область и ее объем, м³;

F — поверхность и ее площадь, м²;

ρ — плотность, кг/м³;

$v = 1/\rho$ — удельный объем, м³/кг;

p — давление (абсолютное), Па;

T — термодинамическая температура (абсолютная), К;

e — удельная внутренняя энергия, Дж/кг;

$E = e + \frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2$ — удельная полная энергия, Дж/кг;

$h = e + \frac{p}{\rho}$ — удельная энтальпия, Дж/кг;

$h^* = h + \frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2$ — удельная полная энтальпия, Дж/кг;

c_p — удельная теплоемкость при $p = \text{const}$, Дж/(кг · К);

c_v — удельная теплоемкость при $v = \text{const}$, Дж/(кг · К);

μ — коэффициент вязкости, Па · с;

$\mathbf{q} = q_x\mathbf{i} + q_y\mathbf{j} + q_z\mathbf{k}$ — плотность потока теплоты, Дж/(м² · с);

κ — коэффициент теплопроводности, Вт/(м · К);

a — коэффициент температуропроводности, м²/с;

Y_k — массовая доля k -го компонента смеси;

W_k — молярная масса k -го компонента, кг/моль;

$\omega_k \Sigma$ — объемная мощность источника вещества (k -го компонента смеси), образующегося в химических реакциях, моль/(м³ · с);

¹ Независимая переменная в моделях процессов.

Q_r — объемная мощность источника энергии, переносимой излучением, Вт/м³.

Рабочие процессы (теория ДВС):

n — частота вращения, мин⁻¹;

ω — угловая частота, рад/с;

φ — угол ПКВ, °;

$d_{ц}$ — диаметр цилиндра, м;

S — ход поршня, м;

r — радиус кривошипа, м;

$L_{ш}$ — длина шатуна, м;

$\varepsilon = V_{\max}/V_{\min}$ — степень сжатия (геометрическая);

l_0 — стехиометрическое отношение (масс окислителя и топлива);

H_u — низшая теплота сгорания топлива, Дж/кг;

η_V — коэффициент наполнения;

$\eta_{и}$ — коэффициент использования продувочного воздуха;

$\alpha_c = G_v/(G_{\text{топл}}l_0)$ — коэффициент избытка воздуха суммарный;

α — коэффициент избытка воздуха по условиям в РК;

α_{Σ} — средний к-т теплоотдачи в стенки РК, Вт/(м² · К).

Безразмерные величины в функциональных связях:

$M = |\mathbf{v}|/c$ — число Маха;

Nu — число Нуссельта;

Pr — число Прандтля;

Re — число Рейнольдса;

$\gamma = c_p/c_v$ — отношение теплоемкостей;

$\theta = T_w/T$ — температурный фактор.

Основные аббревиатуры

ВМТ — верхняя мертвая точка;

ГА — генетический алгоритм (алгоритмы);

ГД — газовая динамика;

ГВТ — газоздушный тракт;

ГУ — граничное условие (условия);

ЕЦ — ездовой цикл;

ЗП — зависимая переменная (переменные);

ЗС — закон (законы) сохранения;
КД — количество движения;
ЛТР — локальное термодинамическое равновесие;
МЖГ — механика жидкости и газа;
МКО — методы конечных объемов;
МКР — методы конечных разностей;
МНК — метод наименьших квадратов;
МС — модель связи;
МЭ — модель элемента;
НП — независимая переменная (переменные);
НУ — начальное условие (условия);
ОДЗ — область допустимых значений;
ОДУ — обыкновенное дифференциальное уравнение (уравнения);
ПКВ — поворот коленчатого вала;
ППП — пакет прикладных программ;
ПИ — параметрическая идентификация;
ПО — программное обеспечение;
ПС — продукты сгорания;
ПЧ — проточная часть (ГВТ ДВС);
РК — рабочая камера;
РП — рабочий процесс;
РТ — рабочее тело;
С/О — смесеобразование;
СЗ — свежий заряд;
ТС — транспортное средство;
УС — уравнение (уравнения) состояния;
УЧП — уравнение (уравнения) с частными производными;
ЦМ — центр масс;
ЦФ — целевая функция;
ЧМ — численный метод;
ЭМ — энергетическое машиностроение;
ЭУ — энергетическая установка;
ЯП — язык программирования;
0-D, 1-D и 3-D — нуль-, одно- и трехмерный (по числу координат);
CFD — англ. *computational fluid dynamics*.

ВВЕДЕНИЕ

Дисциплина «Основы моделирования процессов в двигателях и энергоустановках» (ОМПДЭ) преподается студентам, обучающимся по программам подготовки *бакалавров* по направлению 13.03.03 — «Энергетическое машиностроение».

Цель пособия — помочь студентам в формировании компетенций в области математического (и численного — на ЭВМ) *моделирования процессов* разной природы (в частности, процессов в системах двигателей и энергетических установок). Математическое моделирование процессов излагается как *методология* решения *задач* по уравнениям математических *моделей*.

В энергетическом машиностроении моделирование процессов нацелено на расчетное определение показателей объектов (*поверочный расчет*) и на этой основе — на расчетную оптимизацию конструктивного исполнения (*проектировочный расчет*) объектов.

В соответствии с рабочей программой дисциплины ОМПДЭ материал данного пособия поделен на четыре главы.

В главе 1 изложены основы *методологии* моделирования процессов на ЭВМ и обоснованы рациональные подходы. Отмечено, что основные этапы методологии вполне соответствуют *научному методу* (как общей методологии построения «объясняющих» теорий процессов в естественных науках). Подчеркнута важность выбора *исходных гипотез* для записи уравнений, выражающих *законы сохранения* (в рамках исходных гипотез). Обсуждается замыкание систем уравнений моделей процессов с привлечением «замыкающих» моделей (в рамках дополнительных гипотез). Подчеркнуты различия между величинами в дифференциальных уравнениях моделей процессов: выделены *независимые* и *зависимые* переменные, а также константы (параметры) моделей.

Обсуждается необходимость корректной постановки *задачи*, однозначно (для применяемой модели) определяющей ее единственное решение: необходимые условия однозначности задачи (включая начальные и др. условия), а также проблематика нахождения *численного решения* задачи, достаточно близкого к *точному решению* (последнее — для простых задач — может быть найдено аналитическими методами). Указывается, что решающий этап построения модели — ее *валидация* по данным экспериментов с объектом или его физической моделью.

Валидация выполняется прямым сравнением решения задачи с данными измерений в эксперименте (в условиях, адекватных задаче, а также при адекватной точности измерений). По результатам такой валидации модель может быть принята как адекватное описание процессов в некотором классе задач (моделируемых процессов и объектов). Указанные этапы составляют основу идентификации математической модели — подбора ее структуры и значений параметров (до или вместо валидации) перед применением для расчетов при проектировании технических объектов. На практике значения параметров моделей уточняют по данным экспериментов (для конкретного объекта и режимов его работы) методами *параметрической идентификации* (ПИ).

Далее обсуждаются задачи поверочного и проектировочного расчетов объекта — соответственно *прямая* и *обратная* задачи, решаемые по уравнениям моделей процессов в системах. Поверочный расчет охарактеризован как *параметрический анализ*, а проектировочный — как *структурный* и/или *параметрический синтез* объекта (обратная задача).

Обсуждаются также задачи и методы физического моделирования; подчеркнута рациональность применения *анализа размерностей* и *теории подобия* в экспериментах, выполняемых с целью валидации или идентификации математической модели.

В главе 2 (на с. 35) приведен материал темы «Математические модели процессов». Показаны рациональные приемы построения и описания моделей. На конкретных примерах представлен применяемый методологический подход — получение дифференциальных уравнений моделей процессов из *исходных гипотез* и *законов сохранения*, а также их замыкание (уравнениями и константами моделей², привлекаемых на основе дополнительных гипотез).

Так, в п. 2.1 приведена сводка систем исходных уравнений моделей механических, термо- и газодинамических процессов. Показаны исходные гипотезы и вывод из них уравнений, выражающих законы сохранения — от уравнений динамики точки до уравнений модели течения с учетом химических реакций. Далее в п. 2.2 из приведенных исходных уравнений выводятся замкнутые системы дифференциальных уравнений моделей конкретных процессов. Примерами служат модель затухающих колебаний массы, модели резервуара и емкости (обменивающихся мас-

²Моделей элементарных физических эффектов или моделей элементов систем.

сой и энергией с внешней средой), модель рабочей камеры двигателя внутреннего сгорания (ДВС), которая обобщает модель емкости на учет сгорания и теплоотдачи, и т. д.

Наиболее простые из показанных моделей выражаются уравнениями и системами обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), которые содержат одну независимую переменную — время t . Такие модели описывают процессы в элементах систем с «сосредоточенными» характеристиками. Вывод уравнений с частными производными (УЧП) моделей протекающих во времени и в пространстве процессов также показан на основе данного подхода (примеры УЧП моделей см. в гл. 2 и 3).

Глава 3 (с. 71) посвящена постановкам задач и методам получения их численных решений по дифференциальным уравнениям моделей, а также задачам и методам оптимизации. Обсуждается постановка задач с начальными данными для систем ОДУ моделей процессов в системах (или систем УЧП моделей полей величин). Подчеркнута важность получения численных решений, *сходящихся* к точным при измельчении расчетной сетки — при условиях *аппроксимации* производных в численном методе (ЧМ) решения ОДУ или УЧП и *устойчивости* алгоритма вычислений по формулам ЧМ. Приведены необходимые сведения о классических ЧМ решения систем ОДУ и УЧП моделей процессов. Даны примеры решения задач по ОДУ моделей (полученных в гл. 2) и по «модельным» УЧП (применимым для демонстрации и отладки программных реализаций численных методов).

Изложены сведения о постановках задач оптимизации параметров и о применяемых для их решения методах минимизации функций нескольких переменных — градиентных (см. с. 111) и эволюционных (с. 114) методах.

В главе 4 (с. 118) изложен материал темы «Программная реализация моделей; программные модули, программы и пакеты» курса дисциплины ОМПДЭ (вопросы темы не освещаются на лекциях, а вынесены на самостоятельное изучение). Раскрывается аспект программной реализации моделей процессов — вопросы численного решения задач (расчетами на ЭВМ), их интерпретации и анализа. Обсуждаются программный модуль как форма реализации на ЭВМ конкретной математической модели и библиотека модулей. Рассматривается также расчетная программа (солвер, «решатель») как базовый инструмент решения на ЭВМ задачи расчетного анализа процесса. Обсуждается состав ти-

пичного пакета прикладных программ (ППП) как развитого инструмента моделирования процессов для практических расчетов. Рассматривается возможность параметрического анализа, идентификации и оптимизации (средствами самого ППП или же внешними средствами). Дается краткая характеристика ряда ППП общего и специального назначения для моделирования процессов в двигателях и энергетических установках.

При изучении дисциплины рекомендуется использовать книги из [списка литературы](#) на с. 128.

Так, [8] — хорошая монография по мат. моделированию в широком круге областей. Учебное пособие [12] (изданное в 2008 г. и имевшее целью изложение методологии моделирования РП ДВС — от моделей МЖГ и теории горения до решений задач) устарело и ему лучше предпочесть пособие [11] (в части изложения основ моделей МЖГ), а также *данное пособие* (в части описания *методологии* моделирования). Учебное пособие [10] рекомендуется в качестве учебника по численным методам, а пособие [7] — как общий обзор специальных ППП для моделирования процессов в ДВС. Основы и применение *анализа размерностей* и *теории подобия* можно освоить по [9] и [12, гл. 2]. Имеется стандарт на терминологию в области численного моделирования процессов [19]. Имитационному же моделированию (как методологии) посвящены книги [20, 21].

Из «предметно-ориентированных» учебников и учебных пособий рекомендуется учебник [5] по технической термодинамике, пособие [6] по прикладной нестационарной гидрогазодинамике и учебники [3, 4] по теории и моделированию *рабочих процессов* поршневых ДВС.

В конце данного пособия имеется [предметный указатель](#), которым также рекомендуется пользоваться при изучении дисциплины (с. 125).

В файле *PDF* пособия работают³ [гиперссылки](#) на разделы текста, формулы, рисунки и пункты [списка литературы](#). Из гиперссылок состоит Оглавление, продублированное в *закладках* Содержания *PDF*-файла.

Обновленный [файл учебного пособия](#) можно загрузить с [сайта](#) кафедры ДВС УГАТУ.

³Вернуться в исходное место документа после «посещения» элемента текста по гиперссылке позволяет комбинация клавиш [Alt] + [←] или др. навигационные средства программы просмотра *PDF*-файлов. Работает также поиск в тексте (начать — комбинация клавиш [Ctrl] + [F], продолжить — клавиша [F3]).

1. МЕТОДОЛОГИЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ

В главе обзорно изложены основы моделирования процессов на ЭВМ как *методологии*, в рамках которой реализуются рациональные приемы построения и применения математических моделей физических процессов разной природы.

Описан универсальный подход к построению модели любого процесса — формулирование *исходных гипотез* и на их основе — уравнений, принимаемых за исходные для построения целых классов математических моделей. Эти уравнения выражают фундаментальные *законы сохранения*, но требуют замыкания конкретными зависимостями. Последние (уравнения более элементарных моделей) привлекаются в состав модели в рамках дополнительных гипотез (частных предположений). Замкнутая система уравнений образует математическую модель конкретного процесса в объекте или его элементе.

Указывается, что математическое моделирование сводится в конечном счете к формулированию и решению *задач*.

Обсуждается формулирование задач о процессах как задание условий их однозначности (включая начальные и граничные условия), получение по моделям (численными или аналитическими методами) решений задач, близких к точным решениям. Обсуждается *валидация* [19] модели — проверка соответствия решений задач данным экспериментов. Дается также понятие об *идентификации* модели — повышении достоверности решений по ее уравнениям путем подбора параметров (или даже структуры) модели по экспериментальным данным.

Обсуждается дальнейшее применение принятых моделей для *поверочных* и *проектировочных* расчетов *объектов*, т. е. для расчетного анализа процесса (включая параметрический) и для обратной задачи — расчетного параметрического синтеза объекта (по тому или иному критерию оптимальности).

Вводимые положения раскрыты в последующих главах [2](#), [3](#) и [4](#).

1.1. Модели и моделирование

В наше время трудно назвать область науки и техники, где моделирование не имело бы существенного значения. Специалисты в разных областях вкладывают разный смысл в понятия «моделирование» и «модель». Поэтому начнем с наиболее общих определений.

Согласно [1]

Модель — в широком понимании — образ (в т. ч. условный или мысленный, изобретение, описание, схема, чертеж, график, план, карта и т. п.) или прообраз (образец) какого-либо объекта или системы объектов (*оригинала* данной модели), используемый в определенных условиях в качестве их заместителя или представителя.

В таком широком смысле полноправными моделями (для соответствующих задач) являются: глобус — модель планеты Земля, купол планетария — модель звездного неба и т. д.

Проще говоря, *модель* — это то, что для решения тех или иных задач заменяет оригинал. Приведем еще одно определение: модель есть описание ограниченной сложности. Т. е. моделью можно считать любое существующее предметное, словесное или математическое описание реального *объекта* (и, очевидно, мы постоянно имеем дело с моделями, даже не сознавая этого).

По характеру сторон (аспектов) объекта, воспроизводимых моделью, различают, в первую очередь, модели *структуры* и модели *поведения* (функции). Требуется обеспечивать структурное и/или функциональное соответствие (адекватность) модели и оригинала.

Построение *модели* не ставит целью получить точную копию оригинала, да и невозможно на практике построить и/или применить (в целях предсказания поведения) модель, дающую полное (в строгом смысле) описание сложного объекта. Назначение модели — воспроизводить основные его стороны (аспекты). При создании модели всегда принимаются упрощения и, естественно, она оказывается несовершенным описанием.

Итак, модель не тождественна самому объекту — она обязательно проще, схематичней. Многообразие моделей объекта — результат разных подходов и приемов схематизации и абстрагирования (для математических моделей — тех или иных упрощающих предположений, т. е. допущений или же *гипотез*). Разные виды моделей воспроизводят разные аспекты объектов. Словесная (вербальная) модель служит для формирования качественных представлений об объекте. Геометрическая — «хранилище» информации о форме, размерах и взаимном расположении частей объекта. Математическая модель — инструмент получения количественных характеристик объектов на основе более или менее

адекватного описания протекающих в них *процессов* и установившихся *состояний*.

Что же такое моделирование? Согласно [1]

Моделирование — исследование объектов познания на их моделях, построение и изучение моделей реально существующих предметов и явлений (живых и неживых систем, инженерных конструкций, разнообразных процессов — физических, химических, биологических, социальных) и конструируемых объектов (для определения, уточнения их характеристик, рационализации способов их построения и т. п.).

Подробная, всеобъемлющая классификация моделей и подходов к моделированию не входит в задачи пособия, кроме того, в силу многозначности этих понятий в науке и технике она представляется затруднительной. Однако простая классификация будет полезна. Выделяют два противоположных подхода (рис. 1.1): моделирование *предметное* и *знаковое*.

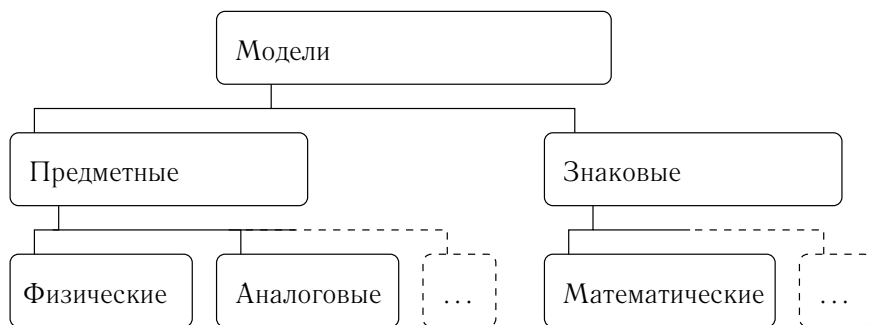


Рис. 1.1. Классификация моделей

Предметное моделирование — исследование, которое проводится на реальной модели, воспроизводящей основные геометрические, физические или динамические характеристики оригинала [1].

При этом если модель и оригинал имеют одну и ту же физическую природу, имеет место *физическое моделирование* (п. 1.3).

Возможно изучение оригинала и на его модели иной физической природы (лишь бы в теоретических описаниях того и другого обеспечивалась *аналогия*) — *аналоговое моделирование* (п. 1.4).

Знаковое моделирование — исследование, в котором моделью служат знаковые образования одного из видов: схемы, графики, чертежи, формулы, слова и предложения естественных и искусственных языков [1].

Важная разновидность знакового моделирования — *математическое моделирование* (п. 1.2) — создание и изучение математических моделей, основанное на языке математики и логики. Важная современная форма реализации математического моделирования — численное моделирование процессов в объектах с применением цифровых ЭВМ.

Цель данного пособия — изложение с единых позиций именно математического моделирования процессов различной природы, в частности — процессов в системах двигателей и энергоустановок. Математическое моделирование — методология, лежащая в основе инженерного анализа и синтеза (т. е. описания реальных процессов в технических системах и поиска оптимальных условий их организации).

1.2. Математическое моделирование

Математическое моделирование представляет собой методологию описания процессов для количественного прогнозирования показателей реальных объектов. Исследование природных и технических объектов методами математического моделирования сводится к формулированию, исследованию и решению математических задач. В настоящее время данная методология (особенно в связи с прогрессом в области ЭВМ) занимает ведущее место среди других методов исследования.

Выполняемые для создания математической модели действия можно укрупненно представить как 4 этапа, показанных на рис. 1.2:

- 1) принятие *гипотез* и на их основе формулирование «законов» для описания явлений в объектах (требуется знание фактов, относящихся к сущности процессов); этап завершается выражением в математических терминах существенных взаимосвязей, т. е. записью *замкнутой системы уравнений модели*;

- 2) постановка и исследование математических **задач** для решения их по уравнениям математической *модели*;
- 3) нахождение (вычисление, расчет) **решений** по условиям *задачи* или ряда задач; нужно получать *точные решения* задач по уравнениям *моделей* — аналитически или же численными расчетами на ЭВМ (во втором случае необходимо программно реализовать (а) модель и (б) алгоритм численного метода);
- 4) выяснение того, удовлетворяет ли принятая модель критерию практики, т. е. согласуются ли решения задач (следствия *гипотез* в основе модели) с *данными* наблюдений (в пределах их точности), т. е. *валидация* модели. В результате модель может быть принята или отклонена (и тогда требуется возврат к этапу 1 — для построения более совершенной модели, начиная с пересмотра гипотез, т. е. допущений, заложенных в основу модели, см. рис. 1.2).

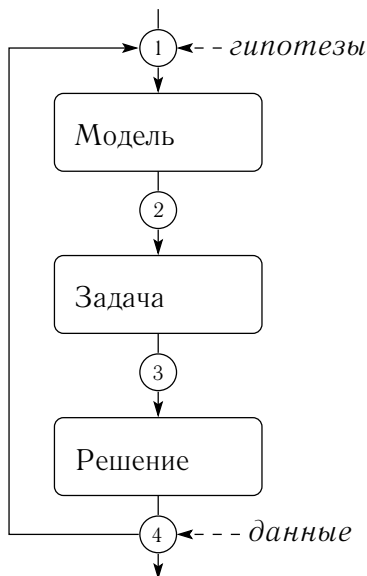


Рис. 1.2. Этапы математического моделирования

В таком виде математическое моделирование — методология, соответствующая *научному методу*, т. е. рациональной общей методо-

логии познания и исследования реальных объектов. Обратимся к определению.

Научный метод познания и исследования объективного мира заключается в следующей последовательности действий:

- 1) формулирование исходных гипотез;
- 2) вывод из них всех следствий;
- 3) сопоставление следствий с данными наблюдений;
- 4) принятие теории или отклонение ее в зависимости от того, согласуются ли ее результаты с наблюдаемыми фактами.

Общепринятым считается, что целью исследования, выполняемого научным методом, является *теория*.

Теория — система основных идей в той или иной области знаний; форма научного знания, дающая целостное представление о закономерностях и существенных связях действительности. Критерий истинности и основа развития теории — *практика*.

Можно видеть, что показанные на рис. 1.2 этапы создания модели соответствуют данному выше определению научного метода.

Действительно, лишь принятые на начальном этапе (и только на этом этапе) гипотезы определяют упрощения, следствием которых и является конкретная замкнутая математическая модель процессов в классе объектов. Далее, при постановке и решении конкретной задачи (или серии задач) внесение изменений в модель не допускается. Так, расчет численным методом на расчетной сетке должен давать численное решение задачи, достаточно близкое к точному (о сходимости численного решения к точному см. с. 73). Экспериментальная проверка модели предполагает определенную точность и полноту данных измерений на физической модели объекта, адекватной постановке задачи.

При выполнении этих условий экспериментальную проверку проходят заложенные в основу модели *гипотезы* (и только они). Математическая модель, адекватная экспериментальным данным (по заданному критерию соответствия) принимается, по существу, в качестве *теории* процесса в объекте¹ или классе объектов, т. е. для *класса задач* (свойство универсальности модели).

¹Принимая эту точку зрения, сложно различать понятия «теория» и «модель».

Такая математическая модель — все же несовершенное описание действительных процессов, однако принятое для решения соответствующего класса задач без дополнительной *валидации*.

Таким образом, математическое моделирование — современная мощная методология познания, прогнозирования и управления, соответствующая классическому научному методу.

Ниже в данном п. рассмотрены существенные понятия и этапы методологии математического моделирования как учения о рациональных приемах создания и применения математических моделей процессов. Данная методология, положенная в основу расчетных работ при проектировании технических объектов (изделий), нацелена на создание изделий с заданными высокими показателями, т. е. функционирующих оптимальным образом.

Доступное и глубокое введение в общую проблематику математического моделирования содержится в [8].

1.2.1. Исходные гипотезы и уравнения

Рационален описанный выше (так называемый гипотетико-дедуктивный) методологический подход к построению модели любого процесса. На первом этапе — формулирование *исходных гипотез* и вывод из них уравнений, принимаемых за исходные для целых классов моделей. Такие исходные уравнения, с одной стороны, выражают фундаментальные *законы сохранения* (ЗС), с другой — требуют замыкания конкретными уравнениями, содержащими (в конечном счете) постоянные параметры, которым присвоены конкретные значения; подход показан в гл. 2.

В широком смысле конкретная математическая модель есть лишь замкнутая система уравнений: для моделей процессов — дифференциальных уравнений, содержащих время t в качестве одной из независимых переменных (НП). Число дифференциальных уравнений в модели равно числу зависимых переменных (ЗП), характеризующих ход процесса.

Так, в основе моделей классической механики (простейшая из которых — модель движения материальной точки, с. 35) — неявно принимаемые допущения об абсолютных пространстве и времени t и о справедливости основных положений («законов») динамики Ньютона.

Другой пример: гипотеза сплошности (см., напр., с. 38) и гипотеза локального термодинамического равновесия (ЛТР, с. 41) служат исходными для пространственных и одномерных моделей процессов в сплош-

ных средах — от моделей теплопроводных и деформируемых тел до моделей течений в механике жидкости и газа (МЖГ) и теории горения.

1.2.2. Гипотезы и «подмодели» для замыкания моделей

Исходные уравнения, выражающие ЗС в процессах, не замкнуты. Замкнутые системы уравнений конкретных моделей получают из них, привлекая математические модели, приближенно описывающие элементарные явления в ходе сложного процесса (и/или взаимодействия элементов сложных систем). Уравнения таких «подмоделей», «субмоделей» или же *моделей замыкания* (англ. *closure models*) описывают элементарные явления и/или взаимодействия элементов систем. Уравнения «подмоделей» в модель вводятся в рамках дополнительных (к исходным) гипотез — допущений (или частных предположений), которые как бы и порождают конкретную модель.

Например, систему исходных уравнений МЖГ, выражающих ЗС в потоке однородной по составу среды (в рамках гипотез сплошности и ЛТР), замыкают, во-первых, конкретными (для данной среды) уравнениями состояния (УС) — «термическим» УС вида $p = p(\rho, T)$ и «калорическим» $e = e(\rho, T)$. Эти УС задают дополнительные функциональные связи между ЗП p , e и ρ , T . Далее, конкретным образом выражая компоненты тензора вязких напряжений Π''_{ij} и вектора плотности теплового потока \mathbf{q} через гипотезы (Ньютона и Фурье: см. [11]), получают систему из 5 уравнений с частными производными (УЧП) со следующим набором ЗП в роли неизвестных (т. е. искомых функций координат и времени t): $p = p(\mathbf{r}, t)$, $T = T(\mathbf{r}, t)$ и $v_i = v_i(\mathbf{r}, t)$, где $i = 1, 2, 3$. Полученную систему называют уравнениями Навье – Стокса.

Модели процессов в системах, условно разделенных («декомпозированных») на взаимодействующие элементы — это системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Модели замыкания («подмодели» в составе такого рода моделей процессов), как правило, представлены функциональными связями, содержащими нелинейные алгебраические уравнения. Эти связи описывают текущую интенсивность какого-либо физического взаимодействия на основе локального «квазистатического» допущения.

Так, модель (2.36)–(2.37) на с. 49 описывает колебания тела массой m в рамках дополнительных гипотез — допущений о линейной упругости и пренебрежимо малой массе пружины. Такой моделью пружины

(с параметрами L , x_1 и k) в (2.37) выражается текущая сила $F_{\text{пр}}$ сжатия пружины, действующая на тело — инертный элемент системы.

Другой пример: система УЧП модели нестационарного течения в трубопроводе в одномерном приближении (см. с. 40 и с. 63); для вывода ее исходных уравнений привлекается, в частности, исходная гипотеза об однородном распределении характеристик среды в сечениях канала. Как следствие, к описанию течения на границе каналов (где площадь сечения $F(x)$ изменяется скачком: $F_2 \neq F_1$) применима квазистатическая модель *местного сопротивления* [11]. Уравнения модели выражают равенство потоков массы $G_2 = G_1$ и энергии $(Gh^*)_2 = (Gh^*)_1$ на входе и выходе и потери полного давления: $p_2^* = \sigma p_1^*$. Замкнуть уравнения модели можно подмоделью, определяющей функциональную связь для коэффициента сохранения полного давления: $\sigma = \sigma(\dots)$.

Заметим, что в структуре моделей сложных процессов (и/или систем) прослеживается иерархичность — подмодели элементарных явлений или взаимодействий как бы подчинены дифференциальным уравнениям единой модели самого процесса («принцип единства модели»). Подмодели, в свою очередь, могут иметь в своем составе другие подмодели. Иерархичность структуры модели учитывают при ее разработке, реализации и описании.

1.2.3. Задачи и их условия однозначности

Математическое моделирование состоит, по существу, в формулировании и решении математических задач. Формулирование конкретной задачи предполагает задание всех ее условий однозначности (позволяющих однозначно выделить конкретную задачу из класса задач).

Для модели процесса в системе, однозначно заданной структурой *элементов* и *связей*, состав системы ОДУ модели определяется этой структурой. При заданных однозначно подмоделях в системе ОДУ задача конкретизируется путем задания значений параметров в уравнениях модели системы и параметров *начальных условий* (НУ).

Итак, должны быть заданы параметры системы, учитываемые ее моделью; например, для модели (2.36)–(2.37) системы на рис. 2.4 — параметры модели m , k , c , L и x_1 . В НУ задаются начальные координаты и скорости x_0, v_{x0}, \dots , а также начальные параметры состояния p_0, T_0, \dots (и т. д.) во всех элементах моделируемых систем.

Для задач, решаемых по моделям процессов в виде систем УЧП, в качестве условий однозначности должны быть заданы очертания рас-

четной области, НУ (начальные распределения ЗП внутри области), *граничные условия* (ГУ, т. е. распределения ЗП на ее границах) и, разумеется, числовые значения всех параметров в уравнениях самой модели.

Например, может быть поставлена задача обтекания тела потоком жидкости или газа как вязкой ньютоновской среды, т. е. по уравнениям Навье — Стокса. Помимо геометрии тела, в условиях однозначности задаются ГУ — распределения ЗП, например $p = p(\mathbf{r}, t)$, $T = T(\mathbf{r}, t)$ и $v_i = v_i(\mathbf{r}, t)$, где $i = 1, 2, 3$, на границах области. Для нестационарных задач (когда характеристики частиц среды зависят и от координат, и от времени) существенны НУ: $\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{r}, t_0)$. Также задаются значения всех параметров задачи и модели. В частности, задаются параметры в уравнениях состояния (для частного случая подмодели совершенного газа с постоянными коэффициентами переноса — R, γ, μ_0 и κ_0).

Другой пример — класс задач о нестационарных течениях рабочих тел в проточной части ДВС на установившихся режимах. Находя решения по единой одномерной модели², определяют показатели газообмена и рабочего процесса двигателя. Режим работы ДВС в условиях однозначности задач задается частотой вращения n и параметром, характеризующим нагрузку ($G_{\text{топл}}$ или, например, α). Также задаются геометрические характеристики расчетной области — профили каналов, объемы ресиверов, законы изменения объемов рабочих и кривошипных камер, а также законы изменения номинальных сечений органов газообмена. В качестве ГУ выступают условия в окружающей среде (атмосфере) и условия теплообмена со стенками проточной части (чаще — ГУ 1-го рода, т. е. заданная $T_{wi}(x)$ стенок). Решение задачи — установившиеся (регулярные, т. е. повторяющиеся от цикла к циклу) зависимости искомых величин — $\mathbf{p} = \mathbf{p}(x, t)$, где $\mathbf{p} = [p, T, u, Y_1]^T$ и др. — берутся по последнему рассчитанному циклу ДВС. Поэтому для таких задач распределения давления $p(x, t_0)$, температуры $T(x, t_0)$, скорости $u(x, t_0)$ и массовой доли СЗ $Y_1(x, t_0)$ (доля ПС — $Y_2(x, t_0) = 1 - Y_1$), задаваемые как НУ в *элементах* системы (каналах и емкостях проточной части ДВС) — не определяющие, и могут задаваться достаточно произвольно (как для стационарных задач расчета одно- и многомерных течений).

²Включающей, например, подмодели ЦИЛИНДР (с. 58) и ТРУБКА (с. 63).

Т. обр., в постановках задач для моделей $1-D$, $2-D$ и $3-D$ течений указывают модели текучих сред, типы ГУ, НУ и величины параметров в них.

1.2.4. Численные и аналитические методы решения

У корректно поставленной (для некоторой модели процесса) задачи должно быть единственное решение. При практических расчетах процессов не ищут математических доказательств, а неявно предполагают существование и единственность решений задач. Решения задач о процессах: по моделям в виде систем ОДУ — траектории тел и зависимости параметров состояния рабочих сред от параметров задачи и от НП (времени t). Решения систем УЧП — поля (распределения в пространстве и во времени) характеристик рабочих сред и т. п.

Будем называть такие решения точными, чтобы подчеркнуть, что расчетами на ЭВМ с применением численных методов (ЧМ) получают лишь приближенные представления — *численные решения* (т. е. массивы значений ЗП в узлах или ячейках расчетных сеток). Корректное³ применение ЧМ на практике обеспечивает *сходимость* (см. пп. 3.1.2) численного решения задачи к точному.

Точные решения задач обычно представляют функциональными связями зависимых переменных с независимыми, а также с параметрами задачи \mathbf{a} . Такие связи, заданные в явном или неявном виде, т. е. как $\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{a}, x, t)$ или $\mathbf{F}(\mathbf{p}, \mathbf{a}, x, t) = 0$, могут быть найдены аналитическими методами. Но известными методами дифференциальные уравнения моделей процессов «интегрируются» лишь для простых задач, по соответствию упрощенным (т. е. частного вида) моделям. Такие задачи, решаемые аналитическими методами, полезны для тестов на корректность реализации математических моделей. Задачи же по уравнениям моделей общего вида необходимо решать численно, а *адекватность* моделей проверять сравнением численных решений задач с данными экспериментальных измерений (в полном соответствии с научным методом).

³Получаемые при некорректном применении как численных, так и аналитических методов решения задач могут как угодно отклоняться от точных решений. Так, решения задач численными методами, некорректно аппроксимирующими производные в уравнениях модели (или реализованных неустойчивыми — на заданной сетке — алгоритмами), не сходятся к точным решениям. Поэтому же недопустимы и упрощения на этапе решения уравнений моделей (как численными, так и аналитическими методами).

1.2.5. Валидация по экспериментальным данным

Следующий этап (4 — на рис. 1.2) методологии математического моделирования — проверка (*валидация*) модели на адекватность, т. е. на соответствие практике — экспериментальным данным.

Важно, что при валидации проверяется именно адекватность набора гипотез, положенных в основу модели.

Действительно, согласно научному методу замкнутая система уравнений модели — следствие всех принятых в ней (исходных и других) гипотез. Далее решения задач (корректно поставленных для данной модели) должны получаться корректным применением численных (или аналитических) методов. Экспериментальная установка и режимы функционирования объекта — оригинала — должны быть адекватны (т. е. соответствовать) условиям задачи (класса задач, решаемых при валидации модели). Наконец точность измерений должна превышать (по принятым в метрологии стандартам) точность, выступающую критерием адекватности, т. е. соответствия модели (а в сущности — ее гипотез) практике. Т. е. проходят проверку именно гипотезы.

Теории фундаментальной науки (теоретическая физика) призваны объяснить сущность известных явлений, т. е. познать законы природы. Эксперименты здесь служат проверке таких теорий (а также обнаружению ранее неизвестных явлений). В специально выбранных условиях экспериментов изучают расхождения между ходом некоторого процесса и предсказаниями его *теории* (принятой на данном этапе). Эти данные необходимы для построения более общей (более универсальной и точной) теории — с более фундаментальными гипотезами в основе.

1.2.6. Идентификация по экспериментальным данным

Модели же процессов, развиваемые в рамках прикладных (технических) наук, имеют иное назначение: предмет этих наук — не законы природы, а методологии создания и применения технических объектов. Поэтому методология моделирования процессов в проектируемых объектах допускает применение математических моделей, описывающих процессы с существенным ограничением по детализации (понижение размерности пространства НП и т. д.). Модели, построенные на сильных допущениях, ограничены по адекватности и универсальности; применяются они ввиду экономичности, т. е. умеренных требований к ресурсам ЭВМ для решения задач по их уравнениям.

В практике расчетов этапом применения таких моделей (для повышения их адекватности) выступает *идентификация* — уточнение по экспериментальным данным, а не *валидация* (т. е. проверка адекватности моделей) по этим данным. Но соответствует ли такая идентификация модели научному методу вообще (см. схему на рис. 1.2)?

Ответ будет положительным, если трактовать все действия по построению модели (см. рис. 1.2) как ее *идентификацию*, результат которой — полное определение как *структуры* модели (включение в нее тех или иных уравнений), так и значений *параметров* в уравнениях. Расширенно трактуя понятие «гипотеза», можно также видеть: то или иное значение внутреннего параметра модели — лишь гипотеза (более или менее соответствующая экспериментальным данным).

Так, для модели с определенной структурой внутренние ее параметры могут подбираться для конкретного объекта по данным о его показателях в пространстве режимных (и, возможно, конструктивных) параметров. Такая «настройка» (или «калибровка») параметров модели по экспериментальным данным оправдана хотя бы тем, что значения ряда параметров уравнений подмоделей (введенных в модель в рамках допущений, т. е. гипотез) могут быть найдены лишь экспериментально.

Такой подбор значений внутренних параметров модели называют *параметрической идентификацией* (ПИ). Обсуждение методов ПИ выходит за рамки пособия (см. с. 107), но все же отметим следующее. Рациональный методологический подход к ПИ модели — подбор параметров *уравнений регрессии*, отвечающих в модели объекта (и подмоделях его элементов и физических эффектов) за представление эмпирических данных. Определяющими и определяемыми параметрами таких «эмпирических» подмоделей должны быть соответственно безразмерные (или «приведенные») параметры режима объекта (и его элементов) и показатели процессов в них. При ПИ такие параметры единой модели подбираются стандартными методами (см. п. 3.5). Критерием соответствия (целевой функцией) при ПИ модели служит мера отклонения определенных по модели величин от измеренных. Обычно берется сумма квадратов их разностей, минимум которой и достигается при ПИ.

Подход, описанный выше, способствует тому, чтобы уточненная посредством ПИ модель объекта была универсальной по режимам его работы (т. е. адекватной в диапазоне параметров режима объекта). Если

требуется, можно оценить адекватность⁴ полученной модели (выполнить ее валидацию). Делать это лучше на расширенной выборке экспериментальных данных о показателях объекта в интересующих диапазонах режимных, конструктивных, регулировочных и др. его параметров.

1.2.7. Расчетный анализ объекта по модели

Решение задачи по уравнениям модели позволяет определить расчетные значения показателей объекта в процессе, заданном условиями этой задачи.

Расчеты процессов выполняются по математическим моделям, как правило, полностью или частично реализованным в библиотеках моделей в составе применяемого ППП (гл. 4). Модель процессов в двигателях и ЭУ формируется с учетом интересующих физических аспектов (динамика, термо- и газодинамика рабочих процессов тепловых машин, процессов в электромашинах и в схемах силовой электроники, в исполнительных механизмах систем управления и с учетом заложенных в них алгоритмов). Единая модель, описывающая разнородные физ. процессы в сопряженных системах объекта, характеризуется как «мультифизичная» (англ. *multiphysics* или *multidomain*) модель.

Так, эффективные показатели поршневого ДВС (G_b , M_e и др.) на установившемся режиме работы (т. е. для неизменных значений параметров режима n и $G_{\text{топл}}$ или α) исторически определяли из теплового расчета. Замыкание модели процессов в ДВС 1-D моделями газообмена позволило рассчитывать рабочий процесс (РП), задавая в ГУ лишь условия в атмосфере и температуру стенок проточной части ГВТ. Но расчет термо- и газодинамических процессов в ПЧ ГВТ позволяет определить лишь индикаторные показатели ДВС (M_i , N_i , g_i и др.). Для обоснованного расчета эффективных показателей в поле режимов — $M_e(n, G_{\text{топл}})$, $N_e(n, G_{\text{топл}})$, $g_e(n, G_{\text{топл}})$ и т. д. — необходимо привлекать модели динамики и трибологии, обеспечивающие сопряженные с расчетом РП расчеты нагрузок на детали и механических потерь. Единая модель процессов, позволяющая сделать это, оказывается уже «мультифизичной». По ней, варьируя параметры установившегося режима (здесь: n и $G_{\text{топл}}$), можно получать расчетом характеристики ДВС (скоростные, нагрузочные и др. [3, с. 229]). Варьирование конструктивных параметров (определяющих длины и профили участков каналов ГВТ, фазы газооб-

⁴Адекватная модель принимается (рис. 1.2) для расчетов по ней.

мена и многое другое) позволяет анализировать их влияние на характеристики ДВС. Предварительно, чтобы обеспечить адекватность модели (в интересующем диапазоне параметров режима ДВС), следует выполнить ее ПИ («калибровку»; см. пп. 1.2.6 и 1.3.2) по данным измерений показателей двигателя на моторном стенде.

Расчет, в котором показатели проектируемого *объекта* определяются по заданным (а) *структуре* модели и (б) *параметрам* модели и объекта, характеризуется как его поверочный расчет (или *расчетный анализ*) — решение прямой задачи о протекании процесса.

Решение задачи в такой постановке может быть представлено для анализа человеком. Расчеты для изучения влияния конструктивных и режимных параметров объекта на его показатели (с представлением результатов в таблицах, на графиках и т. п.) характеризуется как *параметрический анализ* объекта.

Возможность варьировать конструктивные и режимные параметры, получать и обрабатывать решения для оценки совершенства конструкции — основа для перехода к обратным задачам оптимизации параметров объекта, т. е. к его *параметрическому синтезу*.

1.2.8. Расчетный синтез (оптимизация) объекта

Если реализованная в программном инструменте для расчетного анализа (т. е. решения прямой задачи *поверочного расчета*) модель адекватна, то имеет смысл ставить и решать по ней обратные (оптимизационные) задачи *проектировочных расчетов*. Для нахождения их решений используются численные методы оптимизации.

При этом если совершенство исполнения объекта (степень соответствия его ТЗ) можно адекватно оценить однозначной ЦФ от конструктивных параметров, то подбор их значений⁵ возможен методами однокритериальной оптимизации параметров (см. п. 3.5).

Таким образом, в проектировочном расчете объекта решается задача его оптимизации. Условия этих задач должны однозначно следовать из ТЗ на проектирование или модификацию объекта (изделия). Поэтому методология проектирования сложных объектов в первую очередь (т. е. еще на этапе выдачи ТЗ) должна предусматривать формализацию требований к объектам. Такие методологии требуют применять инструменты (речь идет о ППП для ЭВМ, см. гл. 4), реализующие как моде-

⁵Так же, как и подбор параметров *модели* при ПИ (см. пп. 1.2.6).

ли процессов, так и методы ПИ моделей и проектировочных расчетов по ним. Соответствующие модели, методы и инструменты должны применяться на всех этапах проектирования (включая доводку), вообще же говоря, — на любом этапе жизненного цикла изделия.

Расчеты сложных изделий должны проводиться по адекватным мультифизическим моделям. Модели для численного расчета показателей объекта в процессе его функционирования должны содержать адекватные подмодели элементов и алгоритмов систем управления. Постановки задач проектировочных расчетов по таким моделям могут (и должны) учитывать противоречивые требования к изделиям, т. е. задачи оптимизации ставятся в общем случае как многокритериальные и требуют соответствующих методов решения.

Так, работа двигателя и всей ЭУ в составе транспортного средства (ТС) должна моделироваться с учетом динамики ТС (аналогично и для др. потребителей механической энергии ЭУ). Причем для расчета собственно двигателя (на установившихся или же переходных режимах) нужно моделировать взаимосвязанные подсистемы с учетом нескольких физических аспектов процессов в них (динамика, трибология, рабочие процессы: термо- и газодинамика, горение, электромагнетизм).

Более того, задача проектировочного расчета должна в принципе ставиться в общем виде — как задача оптимизации и структуры объекта и его параметров (структурно-параметрический синтез). Требования к объекту из ТЗ (и противоречивые, и сложно формализуемые) должны быть для этого формализованы, т. е. представлены в виде критерия (критериев) оптимальности и ограничений. Для оценки соответствия этим критериям и ограничениям следует решать прямую задачу (массив прямых задач) о работе объекта как расширенной системы, т. е. с учетом системы управления, а также потребителя (при описании его динамическими или квазистатическими — эмпирическими или даже статистическими подмоделями).

Именно в такой постановке моделируют, например, ТС при прохождении им ездового цикла (ЕЦ). Требуется, вообще говоря, оптимальное функционирование двигателя и ЭУ в составе ТС в переходных процессах. Поэтому расчеты при проектировании (включая доводку двигателя и настройку алгоритмов управления) ведутся по модели, упрощенно описывающей работу ряда подсистем, однако включающей подмодели двигателя, трансмиссии, потребителя (здесь: модель динамики

ки ТС в ЕЦ), а также системы управления (электронные блоки с программами управления, исполнительные механизмы и оператора — водителя). Решение задач *анализа* (и на этой основе — *синтеза*, т. е. оптимизации параметров конструкции и алгоритмов управления) может потребовать серии расчетов на ЭВМ прохождения объектом (ТС) набора «модельных» ЕЦ.

Нужна поддержка вышеперечисленных возможностей в специальных ППП для ЭВМ — реализация в них моделей и методов решения задач в упомянутых постановках. В связи с недостатками программных инструментов (и по другим причинам) проектировочные расчеты двигателей и ЭУ для столь общих постановок задач оптимизации реализовать затруднительно. Поэтому на практике расчеты выполняются в лучшем случае как решение задач оптимизации параметров объекта (при заданной его структуре), т. е. реализуется параметрический синтез (с. 105).

Модели, однако, часто недостаточно адекватны и универсальны. Недостатки моделей и применяемых подходов к их уточнению резко снижают эффективность проектирования и доводки объектов ЭМ с применением математического (численного, на ЭВМ) моделирования.

Таким образом, есть большие резервы улучшения моделей, методов решения задач и инструментов для расчета на ЭВМ процессов в двигателях и ЭУ. Соответствующие разработки выполнялись и выполняются для интеграции в специальные ППП (гл. 4).

Дальнейший материал данной главы при первом чтении можно пропустить (контрольные вопросы — на с. 33).

1.3. Физическое моделирование

По Л. И. Седову, моделирование — «замена изучения интересующего нас явления в натуре изучением аналогичного явления на модели меньшего или большего масштаба, обычно в специальных лабораторных условиях» [9, с. 56]. Как мы помним, это *физическое* моделирование; т. е., согласно БСЭ [1], вид моделирования, который «состоит в замене изучения некоторого объекта или явления экспериментальным исследованием его модели, имеющей ту же физическую природу». Т. е., изучение объекта при физическом моделировании сводится к проведению экспериментов на его физической модели.

Прибегают к физическому моделированию (как к моделированию «в уменьшенном масштабе») как по экономическим соображениям, так

и ввиду того, что натурное испытание и исследование объекта («прямой» эксперимент) невозможно из-за недоступности самого объекта или неприемлемых его физических характеристик: размеров, температур, давлений, скоростей и т. д.

В науке эксперимент служит:

- 1) для выявления тех или иных закономерностей;
- 2) для проверки правомерности и границ применимости найденных теоретическим путем результатов.

В технике (т. е. при построении технических объектов) измерения на моделях или образцах объектов выполняются, в частности, для уточнения (калибровки, идентификации: см. пп. 1.2.6 и 1.3.2) прикладных математических моделей процессов в объектах, т. е. применимых на практике приближенных «теорий» этих процессов.

1.3.1. Подобие при моделировании в масштабе

Физическое моделирование на моделях объекта или его элементов (включая модели, выполненные в масштабе) должно выполняться с учетом соображений *анализа размерностей* и *теории подобия*. Условие, необходимое для пересчета значений измеренных на модели величин (как локальных, так и «интегральных») в значения соответствующих величин в объекте — *подобие* полей физических величин (в пространстве и во времени: \mathbf{r} и t) в модели и в объекте. Очевидно, что необходимое условие подобия процессов — геометрическое подобие модели и оригинала (натурального объекта).

Достаточные же условия подобия процессов обеспечивает подобие также и других условий однозначности задачи («решаемой» путем физического моделирования). Так, должны быть подобны и физические свойства рабочих тел и материалов, и внешние условия («режимы») протекания процессов. Из *анализа размерностей* [12, гл. 2] величин в задаче получают связь (в общем виде) ее параметров с искомыми величинами. Безразмерные комбинации («комплексы») параметров задачи (в виде степенных одночленов) называют также *числами подобия*.

Равенства же значений чисел подобия, составленных из параметров, входящих в условия однозначности задач (т. е. критерии подобия условий однозначности для модели и объекта), служат *критериями подобия* самих процессов в них («подобны процессы, условия однозначности которых подобны» [9]).

1.3.2. Измерения для идентификации характеристик

Испытания и исследования двигателей, агрегатов и их элементов (на стендах: моторных и безмоторных — продувочных, проливочных и т. п.), планирование и обработка измерений показателей процессов в объектах также основаны на анализе размерностей и теории подобия.

Заметим, что измерения (при исследованиях и испытаниях тепловых двигателей и их агрегатов) проводятся на объектах, выполненных в натуральную величину. Объясняется это непрактичностью их моделирования в масштабе и/или невозможностью выполнить все условия подобия при физическом моделировании РП двигателей и агрегатов.

Как правило, на стендах измеряют показатели работы двигателей (а также их агрегатов и элементов) на установившихся режимах. Так получают экспериментальные данные о *характеристиках* этих объектов, т. е. о зависимостях их показателей от параметров, характеризующих режимы работы объектов. Обработка этих данных позволяет, в частности, идентифицировать модели (двигателей, агрегатов и элементов) в параметрах подобия по режимам, т. е. получать и строить их *универсальные* (в указанном смысле) характеристики. Этот подход, основанный на анализе размерностей, отвечает требованию к моделям двигателей, их агрегатов и элементов быть *универсальными* по меньшей мере по параметрам режима (т. е. *адекватными* для разных значений параметров режима работы объекта).

Для надежной идентификации таких моделей данные измерений должны быть достаточно точными и, вообще говоря, полными. Идентификация выполняется, как правило, посредством ПИ (т. е. подбора внутренних параметров моделей). В этой связи под адекватностью такой модели нужно понимать высокую точность определения показателей соответствующего объекта (во всем диапазоне режимов его работы) по модели после ее ПИ (причем, как по полным, так и по неполным экспериментальным данным).

Примеры моделей, идентифицируемых по данным с безмоторных стендов, — модели стационарного течения через органы газообмена или лопаточные машины (компрессорные и турбинные ступени агрегатов наддува ДВС). Заметим: проектировочные расчеты указанных агрегатов и элементов ПЧ ГВТ ДВС ведутся в настоящее время по *3-D* моделям. И все же измерения при продувках полноразмерных агрегатов (или их физических моделей в масштабе) сохраняют значение — хо-

тя бы для *валидации*, и далее — для идентификации (калибровки) самих *3-D* моделей.

К точности измерений предъявляются высокие требования.

Однако, кроме возможных систематических и случайных погрешностей измерений, адекватность моделей снижают принятые для них допущения:

1) исходные гипотезы — допущения, позволившие понизить размерность уравнений модели по независимым переменным \mathbf{r} и t ;

2) дополнительные (замыкающие) гипотезы — допущения, позволившие замкнуть модель, пренебрегая отдельными эффектами (или учитывая их приближенно).

Так, классические модели органов газообмена и ступеней агрегатов наддува основаны на допущениях о свойствах РТ как идеального совершенного газа, т. е. модели не учитывают возможную неидеальность РТ ($p = z\rho RT$, $z \neq 1$), а также зависимость c_p или c_v в элементе ПЧ хотя бы от T . Другое допущение — об адиабатности течения через элемент ПЧ — упрощает модель ($q_w = 0$) и позволяет не учитывать в ней температурный фактор $\theta = T_w/T$.

В принимаемых допущениях определяющими величинами в моделях *универсальных характеристик*, например, органов газообмена, выступают числа подобия M , Re и $\gamma = c_p/c_v$. Соответственно, критериями подобия полей течения в элементе ПЧ будут условия $M = idem$, $Re = idem$ и $\gamma = idem$ (по скорости потока, параметрам состояния и параметрам УС РТ, например, в сечении на входе).

Поскольку модель элемента ПЧ содержит функциональные связи определяемых величин с рядом определяющих величин — параметров режима течения и свойств РТ, то и в данных эксперимента (натурного или «вычислительного» — в *3-D*) для идентификации модели определяющие величины должны изменяться в интересующих диапазонах. Т. е. план эксперимента должен предусматривать изменение определяющих и измерение определяемых размерных величин в диапазоне режимов, необходимом для идентификации модели. Так, при продувке местного сопротивления или его масштабной модели газом с требуемым отношением теплоемкостей ($\gamma = idem$) достаточно измерять на каждом режиме четыре размерные величины (например, G , p_1^* , T_1^* , p_2), чтобы с учетом масштаба модели (и величин R для газа в объекте и при продувке его модели) идентифицировать подмодель $\sigma(M, Re)$. Полученную модель

можно привлекать к описанию течения через элемент с геометрически подобными очертаниями.

Подход распространяется и на органы газообмена ДВС (клапаны и окна). Можно (как часто и поступают) пренебречь влиянием числа Re ; тогда, учитывая в модели величину $\bar{h}_{кл} = h_{кл}/d_{кл}$ (для клапана), по результатам продувок идентифицируют подмодель характеристики вида $\sigma(M, \bar{h}_{кл})$ или вида $C_d(p_2/p_1^*, \bar{h}_{кл})$, где C_d — коэффициент расхода.

Заметим, что для масштабной физической модели идентификация подмоделей вида $\sigma(M, Re, \dots)$ затруднена, что связано с невыполнимостью одновременно условий $M = idem$ и $Re = idem$ для конкретного газа. Т.е. план эксперимента, покрывающий диапазон возможного изменения величины Re при покрытии диапазона M , не реализуем.

В этой связи часто пренебрегают Re как параметром режима течения (принимая допущение об автомодельности течения по Re). При необходимости все же учесть Re как фактор в процессе часто «исследуют влияние только M , а влияние Re оценивают отдельно, косвенно» [9]. Т.е. в таких моделях влияние Re (а также и θ) может учитываться отдельным уравнением регрессии.

Итак, на практике, когда затруднено точное физическое моделирование течений (даже стационарных, но осложненных физическими эффектами), отдельные числа подобия (характеризующие режим или свойства РТ) или не учитывают, или делают это приближенно. Подход обеспечивает моделирование с соблюдением приближенного подобия [9].

Таким образом, физическое моделирование (в науке и технике) позволяет идентифицировать эмпирические и полуэмпирические модели.

В энергетическом машиностроении ПИ моделей универсальных характеристик агрегатов (и др. связей в параметрах подобия) составляет основу калибровки⁶ моделей двигателей и ЭУ по характеристикам, снятым на моторных стендах.

⁶Т.е. рационально калибровать модели двигателей, их агрегатов и элементов корректируя идентифицированные модели характеристик в их составе. Характеристики двигателя или агрегата «универсальны» в поле режимов их работы, т.к. связывают приведенные параметры режима и показатели (в «параметрах подобия»). Процедуры ПИ характеристик агрегатов автоматически подбирают их внутренние «константы» по соответствию измерениям на безмоторных стендах. Модели двигателей поэтому калибруют подбором поправочных множителей к величинам, определяемым характеристиками агрегатов, по соответствию показателям двигателей, измеренным на моторных стендах. Для множителей (в поле режимов) могут, в принципе, вводиться *уравнения регрессии*.

Нужно подчеркнуть, что модели процессов содержат дифференциальные уравнения, которые отвечают за описание аспекта динамики в ходе процесса. Однако они замыкаются подмоделями, представленными лишь функциональными связями. Это обстоятельство — следствие принятых для замыкания моделей допущений о квазистатическом (т. е. квазиравновесном) протекании процесса в описываемом элементе системы или в физическом взаимодействии.

Такие замыкающие модели в общем случае содержат уравнения, выражающие функциональные связи как полученные на основе лишь теории, так и связи чисто эмпирического происхождения. Последние суть не что иное, как уравнения регрессии, вид и параметры которых в конечном счете установлены (идентифицированы) по соответствию тем или иным экспериментальным данным.

Такой состав моделей сложных процессов способствует построению моделей, обладающих известной универсальностью даже при невысокой размерности по НП: \mathbf{r} и t . Такие модели потенциально наиболее полезны для прогнозирования показателей объектов. Выполнив идентификацию, можно получить модель, адекватную для конкретного объекта.

В этом смысле можно сказать, что математическое и физическое моделирование («теория» и «эксперимент») дополняют друг друга, особенно если модель построена на основе гипотетико-дедуктивного подхода и при этом рационально применены *анализ размерностей* и *регрессионный анализ*.

1.4. Аналоговое моделирование

Данный вид предметного моделирования основан на аналогии (изоморфизме) явлений различной физической природы. Имеется в виду описание процессов в физических системах уравнениями, совпадающими с точностью до обозначений величин. Использование изоморфизма в предметном моделировании состоит в изучении характеристик объекта на модели иной физической природы — более простой для построения или исследования.

Если процесс описывается той же по форме системой уравнений, что и моделируемый процесс, но второй нелегко воспроизвести физически, то воспроизводят первый — в модельной установке, обеспечивающей структурную и/или функциональную *аналогию*. Подбором величин параметров процесса в модельной установке обеспечивают *условия*

аналогии процессов в ней и в объекте. Обработывая результаты эксперимента на установке («аналогичном объекте» [16, с. 86]), по измеренным показателям процесса в ней вычисляют показатели процесса в объекте — через коэффициенты аналогии.

Так, плоские акустические волны и колебания струны описываются одним и тем же уравнением в частных производных. А уравнение Лапласа $\nabla^2\varphi = 0$ применимо как к стационарному полю температуры ($T \rightleftharpoons \varphi$), так и к распределению потенциала скорости φ в стационарном же безвихревом течении идеальной несжимаемой жидкости.

Известны аналогии для многих пар физических полей/систем — они так и называются: электротепловая, гидротепловая, мембранная аналогия (в теории упругости). Последняя позволяет, например, найти напряженно-деформированное состояние в задачах кручения бруса со сложной формой поперечного сечения. Исследование температурных полей возможно на основе электротепловой или гидротепловой аналогий. В первом случае аналог температуры T — потенциал электрического поля φ , теплоемкости c — емкость конденсаторов C , теплопроводности κ — сопротивление R . При гидротепловой аналогии поле T строится по уровню жидкости в мерных трубках, c — задается сечением трубок модельной гидравлической сети. Эти аналогии в свое время использовались в двигателестроении для прогнозирования теплового состояния деталей цилиндрической поршневой группы ДВС.

Аналоговое моделирование широко применялось до появления быстродействующих цифровых ЭВМ. Тогда это был практичный путь решения задач расчета физических полей и систем. В наше время этот вид моделирования потерял свое значение.

Подробнее об аналоговом моделировании (а также об идентификации моделей и вообще о применении математического моделирования в САПР двигателей) можно прочесть в [16].

Вопросы для самоконтроля

1. Расскажите о математическом моделировании физических процессов как о методологии, соответствующей научному методу. Нарисуйте блок-схему.

2. Для чего служат исходные гипотезы? Приведите примеры систем исходных уравнений, справедливых для целых классов моделей. Какие

общие законы для описываемых ими процессов они выражают? Для чего служат эти уравнения?

3. Для чего привлекаются дополнительные (закрывающие) гипотезы? Приведите примеры замкнутых уравнений математических моделей процессов, раскрыв роль такого рода гипотез.

4. Расскажите о роли задач и о задании условий однозначности задач. Приведите примеры.

5. Что представляет собой точное решение задачи и ее численное решение? Как они взаимосвязаны?

6. Охарактеризуйте параметрический анализ процессов в объекте как поверочный расчет.

7. Охарактеризуйте параметрический синтез объекта как обратную задачу — проектировочный расчет (или его оптимизацию).

8. Охарактеризуйте параметрическую идентификацию как этап построения прикладной модели.

2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПРОЦЕССОВ

В главе рассмотрены математические модели процессов.

На примерах элементарных моделей физических систем и классических моделей МЖГ показано, как формулируются уравнения моделей.

Основной методологический подход — формулирование *исходных гипотез* и следующих из них исходных уравнений модели, выражающих *законы сохранения* в ходе процесса, получение из них замкнутых систем уравнений конкретной модели физической системы (или ее элемента) с привлечением моделей, основанных на дополнительных *замыкающих гипотезах* (допущениях).

Подход применим для описания моделями в виде систем дифференциальных уравнений как процессов в условно декомпозированных на элементы системах, так и для полей физических величин в (\mathbf{r}, t) .

2.1. Исходные гипотезы и уравнения моделей процессов

В этом п. получим дифференциальные уравнения, следующие лишь из исходных гипотез, принимаемых за основу при описании математическими моделями процессов в физических и технических системах.

Эти уравнения будут формально выражать условия сохранения (точнее — изменения в ходе процессов) фундаментальных (сохраняющихся) величин — массы, количества движения (КД) и энергии.

Полученные на этом этапе уравнения, выражающие *законы сохранения* (ЗС), не замкнуты. Чтобы получить замкнутые системы уравнений моделей, привлекают конкретные подмодели. Замкнутые конкретные модели процессов обсуждаются в следующем п. (см. с. 49).

2.1.1. Поступательное движение

Покажем вначале получение исходных уравнений моделей поступательного движения тел — из соответствующих исходных гипотез.

Так, примем за исходные следующие гипотезы: о справедливости классической (ньютоновской) динамики и о несущественности вращательной составляющей движения тела. На этом основании поступательное движение тела может быть описано уравнением второго закона Ньютона

$$\frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \sum_{j=1}^J \mathbf{P}_j. \quad (2.1)$$

Уравнение (2.1) выражает изменение КД (импульса) тела постоянной массы m в поступательном движении под действием векторной суммы сил \mathbf{P}_j , $j = 1, \dots, J$, приложенных к центру масс (ЦМ) тела.

В (2.1) текущая величина скорости связана с положением центра масс тела на траектории движения кинематическим условием $d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v}$; величину \mathbf{P}_j в (2.1) можно определять с учетом *зависимых переменных* и времени t (*независимой переменной*). Из сказанного следует, что записанное в векторной форме уравнение (2.1) можно переписать в проекциях на оси x , y и z как шесть обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) первого порядка, разрешенных относительно производных:

$$\frac{dx_i}{dt} = v_i = \frac{(mv_i)}{m}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.2)$$

$$\frac{d(mv_i)}{dt} = \sum_{j=1}^J (P_i)_j (mv_1, mv_2, mv_3, x_1, x_2, x_3, t), \quad (2.3)$$

по которым, если задать определяющие \mathbf{P}_j модели, а также *начальные условия* (НУ) $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}(t_0)$ и $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_0)$ (т. е. при $t = t_0$), то можно рассчитать движение — определить траекторию $\mathbf{r}(t)$ ЦМ тела как решение дифференциальных уравнений (2.2) и (2.3) *модели*.

Заметим, что уравнения (2.2), (2.3) моделей поступательного движения не замкнуты, если не конкретизированы модели, задающие \mathbf{P}_j .

Заметим, что (2.1) или (2.3) — уравнение движения — выражает ЗС КД как условие баланса величины КД, которым обладает в каждый момент движущееся тело. При этом $\sum \mathbf{P}_j$ имеет простой смысл интенсивности *потока* КД к телу из внешней (по отношению к телу) среды.

Заметим еще, что такого класса системы уравнений (ОДУ первого порядка, разрешенных относительно производных) лежат в основе моделей процессов в элементах систем. Такие ОДУ удобно¹ представлять в компактной векторной форме:

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} = \mathbf{S}, \quad (2.4)$$

где \mathbf{U} — вектор неизвестных, от англ. *unknown*; $\mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathbf{U}, t)$ — вектор правых частей системы ОДУ, определяющих быстроту изменения \mathbf{U} .

¹«Векторные» обозначения систем ОДУ и УЧП удобны для компактной записи как уравнений моделей, так и формул численных методов, применяемых для их решения.

Зависимые переменные \mathbf{U} в системах ОДУ (и УЧП) моделей называют еще *консервативными* («сохраняющимися») *переменными*, от англ. *conservative variables*. «Источниковые» члены ОДУ (и УЧП) — от англ. *source terms* — задают (в функции \mathbf{U} и независимой переменной t) быстроту приращения \mathbf{U} , определяемую (для элементов систем) как внутренними *источниками*, так и *потоками* сохраняющихся величин из внешней среды (в случае ОДУ). Так, для уравнений модели динамики поступательного движения в форме (2.4) имеем $\mathbf{U} = [x, y, z, mv_x, mv_y, mv_z]^T$, а вектор источниковых членов (правых частей ОДУ) —

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathbf{U}, t) = \left[v_x, v_y, v_z, \sum_{j=1}^J (P_x)_j, \sum_{j=1}^J (P_y)_j, \sum_{j=1}^J (P_z)_j \right]^T.$$

Для записи уравнений моделей и численных методов их решения далее используется форма (2.4) и ее обобщение на случай моделей с УЧП. Однако задаются в НУ, непосредственно участвуют в расчете \mathbf{S} и выводятся в качестве численного решения отличные от \mathbf{U} зависимые переменные \mathbf{p} , называемые *первичными* (от англ. *primitive variables*). Так, для модели (2.2), (2.3) имеем $\mathbf{p} = [x, y, z, v_x, v_y, v_z]^T$. Преобразование $\mathbf{U} = \mathbf{U}(\mathbf{p})$, как и обратное ему «декодирование» — $\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{U})$, нужны для численного расчета по модели и должны приводиться в ее описании; в модели (2.2), (2.3) такое «декодирование» почти тривиально —

$$x = U_1, \quad y = U_2, \quad z = U_3, \quad v_x = U_4/m, \quad v_y = U_5/m, \quad v_z = U_6/m.$$

Сделанные замечания сохраняют значение для моделей процессов также иной физической природы, рассматриваемых далее.

2.1.2. Процесс в открытой термодинамической системе

Теперь выведем уравнения модели термодинамической системы (рис. 2.1), которая имеет переменный объем $V = V(t)$ и обменивается с внешней средой энергией (в форме теплоты и работы), а также массой и энергией — с потоками вещества, пересекающими контрольный объем — границу этой системы с внешней средой.

Как исходные гипотезы примем допущения, что в каждый момент t :

- 1) характеристики среды распределены в объеме однородно (т. е. зависят только от времени t) — гипотеза об однородности распределений; среду в объеме при этом считаем неподвижной ($\mathbf{v} = 0$);

- 2) процесс описывается как происходящий с частицами (объемами) сплошной среды; это *гипотеза сплошности* [11], позволяющая исключить из рассмотрения отдельные молекулы;
- 3) характеристики среды (кроме скорости \mathbf{v} , равной нулю) — $p = p(t), T = T(t), \dots$ — параметры термодинамического состояния; связи между ними имеют смысл уравнений состояния (УС), адекватных для условий термодинамического равновесия; допущение о термодинамической равновесности состояния частиц среды в процессе — гипотеза термодинамического равновесия (включая, для многофазной среды, равновесие фаз).

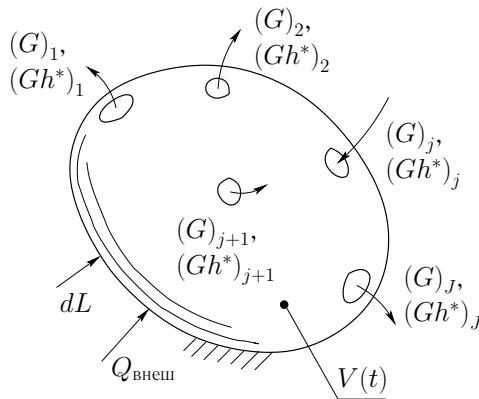


Рис. 2.1. К выводу исходных уравнений в рамках гипотезы об однородной открытой термодинамической системе

В рамках данных гипотез можно сформулировать дифференциальные уравнения, выражающие ЗС массы и энергии, а точнее — быстроту их изменения в такого рода элементе системы в ходе процесса:

$$\frac{dm}{dt} = \sum_{j=1}^J G_j, \quad (2.5)$$

$$\frac{d(me)}{dt} = \sum_{j=1}^J (Gh^*)_j - p \frac{dV}{dt} + Q_{\text{внеш}}, \quad (2.6)$$

где $\rho = m/V$ — плотность среды (газа или жидкости), p — давление, e — удельная внутренняя энергия, Дж/кг, $h^* = e + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2$ — удель-

ная полная энтальпия, Дж/кг; v_j — среднее значение скорости в потоке на j -й границе объема V , м/с.

Уравнения (2.5), (2.6), как и уравнения (2.1), (2.2), не образуют замкнутой системы, т. к. нужно еще ряд величин в них выразить замыкающими моделями.

Так, модель термодинамических свойств среды выражается конкретными УС. Известно [5], что для однородной по составу среды можно записать ее УС в общем виде как

$$F\left(p, v = \frac{1}{\rho}, T\right) = 0. \quad (2.7)$$

Для численных расчетов по моделям термо- и гидрогазодинамических процессов удобно включать в состав модели специального вида уравнения состояния среды, основанные на (2.7):

$$p = p(\rho, T), \quad (2.8)$$

$$e = e(\rho, T), \quad (2.9)$$

первое из которых (термическое УС) служит для исключения величины p , а второе (калорическое УС) — для исключения величины e из числа неизвестных в (2.5), (2.6).

При переменном составе среды нужно использовать в уравнениях модели УС более общего вида, в которых, наряду с ρ и T , массовые доли веществ $Y_k = \rho_k/\rho$ (где $\rho_k = m_k/V$, $\rho = \sum \rho_k$, $k = 1, \dots, K$ и где K — число веществ) — определяющие параметры состояния:

$$p = p(\rho, T, Y_1, \dots, Y_{K-1}), \quad (2.10)$$

$$e = e(\rho, T, Y_1, \dots, Y_{K-1}). \quad (2.11)$$

Изменение массы m_k каждого из K веществ (компонентов смеси) нужно выражать отдельным дифференциальным уравнением. Для общности можно в ЗС массы учесть $\omega_k \Sigma$ — количество вещества k , образующегося в химических реакциях в единице объема за единицу времени.

Тогда уравнения модели, более общие, чем (2.5) и (2.6), примут вид:

$$\frac{dm_k}{dt} = \sum_{j=1}^J (GY_k)_j + VW_k \omega_{k\Sigma}, \quad k = 1, \dots, K, \quad (2.12)$$

$$\frac{d(me)}{dt} = \sum_{j=1}^J (Gh^*)_j - p \frac{dV}{dt} + Q_{\text{внеш}}, \quad (2.13)$$

где W_k — мольная масса компонента, кг/моль; $\omega_{k\Sigma} = \omega_{k\Sigma}(\rho, T, Y_1, \dots)$.

Уравнения (2.12) и (2.13) можно представить как (2.4), где

$$\mathbf{U} = \begin{Bmatrix} m_1 \\ \dots \\ m_K \\ me \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{Bmatrix} \sum_{j=1}^J (GY_1)_j + VW_1 \omega_{1\Sigma} \\ \dots \\ \sum_{j=1}^J (GY_K)_j + VW_K \omega_{K\Sigma} \\ \sum_{j=1}^J (Gh^*)_j - p \frac{dV}{dt} + Q_{\text{внеш}} \end{Bmatrix}.$$

Заметим, что при $K = 1$ уравнения (2.12) переходят в (2.5), т. е. полученное ранее (2.5) — частный случай. При выводе уравнений конкретных моделей, напротив, удобно исходить из ЗС, описывающих достаточно широкий класс явлений, и двигаться от общего к частному (от общих исходных предпосылок через частные предположения к конкретным моделям), т. е. применять дедуктивный подход. Противоположный — индуктивный — подход при выводе и изложении математических моделей методологически неверен и непродуктивен, т. к. приводит к ошибкам, как показывает практика. (Здесь индуктивное изложение допущено в порядке исключения, в учебных целях².)

2.1.3. Нестационарное течение в канале

Получим исходные уравнения модели течения многокомпонентной смеси по протяженному каналу. Уравнения, выведенные из соответствующих исходных гипотез, послужат основой моделей неустановившихся (во времени t) течений рабочих тел с одной пространственной координатой x .

Эти модели будут учитывать изменение геометрических характеристик — площади $F = F(x)$, периметра $\Pi = \Pi(x)$ и других величин

²Во всем п. 2.1 показан (также от простого к сложному, в учебных целях) вывод выражающих ЗС исходных уравнений моделей.

по длине канала, отсчитываемой по x . В таких моделях (описывающих реальное течение как квазиодномерное) характеристики среды в канале (рис. 2.2) — искомые функции, т. е. зависимые переменные в пространстве двух независимых переменных — x и t .

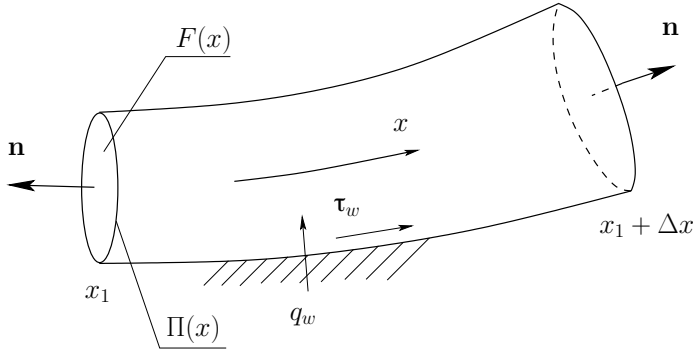


Рис. 2.2. К выводу исходных уравнений квазиодномерной модели течения

В качестве исходных гипотез обычно принимаются:

- 1) *гипотеза квазиодномерности* течения, которая позволяет считать, что характеристики среды однородно распределены в каждом сечении канала (т. е., что $\rho_1, \dots, \rho_k, \rho, u, e, p, T, \dots$ зависят лишь от x и t) и что касательное напряжение $\tau_w = \tau_w(x, t)$ и плотность потока теплоты $q_w = q(x, t)$ — средние по периметру плотности потоков сохраняющихся величин на стенке — мгновенно воздействуют на среду в элементарном объеме $dV = F dx$ (как и нормальное напряжение, равное давлению p), а потоки КД по x от действия τ_w и p равны $\tau_w \Pi dx$ и $p(dF/dx) dx = p dF$;
- 2) *гипотеза сплошности*, позволяющая описать динамику процесса для микрообъемов ($\Delta V \rightarrow dV = F dx$) сплошной среды [11];
- 3) *гипотеза ЛТР*, придающая смысл параметров состояния величинам $p = p(x, t), T = T(x, t), Y_k = Y_k(x, t), \dots$ и позволяющая выражать их взаимосвязь посредством УС (2.10) и (2.11);
- 4) допущение о возможности пренебречь эффектами диффузии, вязкости и теплопроводности (как молекулярными, так и «турбулентными») для описания переноса в продольном (т. е. по координате x)

направлении; гипотеза эта позволяет учитывать перенос каждого k -го компонента лишь конвекцией — перемещением всей смеси со скоростью $u = u(x, t)$.

Тогда условия сохранения (баланса) массы компонентов не реагирующей ($\omega_{k\Sigma} = 0$) смеси, а также количества движения и энергии смеси для контрольного объема на рис. 2.2 (см. также [11]) можно записать как

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_1+\Delta x} \rho Y_k F dx = - [(\rho u Y_k) F]_{x_1}^{x_1+\Delta x}, \quad k = 1, \dots, K, \quad (2.14)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_1+\Delta x} \rho u F dx = - [(\rho u^2 + p) F]_{x_1}^{x_1+\Delta x} + \int_{x_1}^{x_1+\Delta x} \left(p \frac{dF}{dx} + \tau_w \Pi \right) dx, \quad (2.15)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_1+\Delta x} \rho E F dx = - [(\rho u E + p u) F]_{x_1}^{x_1+\Delta x} + \int_{x_1}^{x_1+\Delta x} q_w \Pi dx, \quad (2.16)$$

где $E = e + \frac{1}{2}u^2$ — удельная полная энергия, Дж/кг.

Уравнения (2.14)–(2.16) выражают ЗС для контрольного объема на рис. 2.2 в рамках принятых исходных гипотез даже если искомые функции терпят разрыв в интересующей подобласти в (x, t) .

Если же искомые функции гладкие (в смысле дифференцируемости по x и t), то переход к пределу $\Delta x = dx \rightarrow 0$ дает уравнения с частными производными (УЧП). Действительно, из (2.14)–(2.16), представленных как

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_1+\Delta x} \mathbf{U} F dx = - (\mathbf{F}_x F)_{x_1}^{x_1+\Delta x} + \int_{x_1}^{x_1+\Delta x} \mathbf{S} F dx, \quad (2.17)$$

где $\mathbf{U} = [\rho_1, \dots, \rho_K, \rho u, \rho E]^\top$, $\mathbf{F}_x = [\rho_1 u, \dots, \rho_K u, \rho u^2 + p, \rho u h^*]^\top$ и $\mathbf{S} = [0, \dots, 0, \frac{p}{F} \cdot \frac{dF}{dx} + \tau_w \frac{\Pi}{F}, q_w \frac{\Pi}{F}]^\top$, в пределе $\Delta x = dx \rightarrow 0$ получаются $\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_1+\Delta x} \mathbf{U} F dx \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{U} F)$, а также $(\mathbf{F}_x F)_{x_1}^{x_1+\Delta x} \rightarrow d(\mathbf{F}_x F)$. Поэтому УЧП, эквивалентные (в подобластях гладкости \mathbf{U}) исходным ЗС (2.14)–(2.16), имеют вид:

$$\frac{\partial \mathbf{U} F}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_x F}{\partial x} = \mathbf{S} F, \quad (2.18)$$

где \mathbf{U} — вектор консервативных переменных и \mathbf{F}_x — вектор плотностей их потоков, а \mathbf{S} — вектор объемных плотностей их «источников»; форма (2.18) — обобщение на случай УЧП формы (2.4), введенной для краткой записи ОДУ моделей. В развернутом виде:

$$\frac{\partial \rho_k F}{\partial t} + \frac{\partial \rho_k u F}{\partial x} = 0, \quad k = 1, \dots, K, \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial \rho u F}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^2 + p) F}{\partial x} = p \frac{dF}{dx} + \tau_w \Pi, \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial \rho E F}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u E + p u) F}{\partial x} = q_w \Pi. \quad (2.21)$$

Форма, в которой записаны УЧП (2.19)–(2.21), называется *дивергентной* (см. с. 46). В этой форме зависимые переменные УЧП — те же, что в (2.14)–(2.16), т. е. в выражениях ЗС вида балансовых соотношений с «потоками» и «источниками» массы, КД и энергии в потоке среды по каналу. Для записанных в обеих формах уравнений моделей естественно получают методы численного решения, обладающие свойством *консервативности*.

Приведенные уравнения не замкнуты: число зависимых переменных в них превышает число уравнений. Замкнутые системы уравнений конкретных моделей, построенных на их основе, должны включать подмодели, описывающие:

- геометрические и другие характеристики стенки канала (от x);
- термодинамические свойства среды — УС вида (2.10) и (2.11);
- потоки через стенку вследствие трения и теплоотдачи — модели, определяющие τ_w и q_w (см. с. 65).

Вводя ограничения (частные предположения), можно получать упрощенные формы приведенных выше уравнений, в том числе «модельные» уравнения, полезные при изучении численных методов. Например, выражения трех ЗС в плоском движении газа (в общем случае — с разрывами искомых функций) получаются из (2.14)–(2.16) при $K = 1$, $F = \text{const}$, $\tau_w = 0$ и $q_w = 0$ в виде

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_1 + \Delta x} \mathbf{U} dx + (\mathbf{F}_x)|_{x_1}^{x_1 + \Delta x} = 0, \quad (2.22)$$

где $\mathbf{U} = [\rho, \rho u, \rho E]^T$, $\mathbf{F}_x = [\rho u, \rho u^2 + p, \rho u h^* = \rho u E + pu]^T$, а при отсутствии разрывов — те же три условия выражает система из трех УЧП:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_x}{\partial x} = 0. \quad (2.23)$$

Для замыкания уравнений модели (2.22) или (2.23) можно привлекать конкретные модели УС общего вида (2.8) и (2.9). Полезный частный случай — УС идеального совершенного газа [11]:

$$p = p(\rho, T) \rightarrow \rho RT, \quad R = \text{const}_1, \quad (2.24)$$

$$e = e(\rho, T) \rightarrow c_v T, \quad c_v = \text{const}_2. \quad (2.25)$$

Из (2.23) также получают исходные уравнения более простых моделей; так, приведением (2.23) к характеристической форме [11, с. 81] и затем линеаризацией получают уравнения акустики.

2.1.4. Пространственное течение смеси

Получим теперь исходные уравнения моделей, описывающих зависящее от времени пространственное течение. Как и в предыдущем пп., рассмотрим неустановившееся течение реагирующей смеси. Искомые величины — зависимые переменные в задачах о трехмерном течении — функции четырех независимых переменных: x, y, z и t .

Рассмотрим течение такой смеси, полностью охватывающее произвольный воображаемый контрольный объем (рис. 2.3).

В качестве исходных гипотез примем (см. также [12, с. 75]):

- 1) гипотезу сплошности (см. с. 38);
- 2) гипотезу ЛТР, позволяющую привлекать УС (2.10), (2.11) и др.;
- 3) допущение о возможности пренебречь скоростью молекулярной диффузии при описании переноса КД смеси и кинетической энергии ее компонентов (при этом диффузионные потоки массы и энтальпии компонентов в соответствующих ЗС будут учтены).

Учтем также локальную объемную производительность химического источника массы k -го компонента, а в ЗС энергии смеси — «источниковым» членом Q_r (объемная мощность; Вт/м³) — текущий баланс электромагнитной энергии, излучаемой и поглощаемой частицами среды.

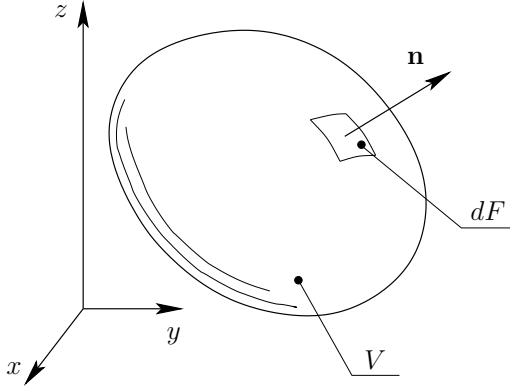


Рис. 2.3. К выводу исходных уравнений модели трехмерного течения

Применительно к объему V с поверхностью F на рис. 2.3 и в рамках принятых гипотез исходные уравнения моделей трехмерных течений, выражающие ЗС массы компонентов, КД и энергии смеси, примут вид

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho_k dV = - \int_F [\rho_k \mathbf{v}_k] \cdot \mathbf{n} dF + \int_V W_k \omega_{k\Sigma} dV, \quad k = 1, \dots, K, \quad (2.26)$$

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{v} dV = - \int_F [\rho u_i u_j + \delta_{ij} p - \Pi''_{ij}] \cdot \mathbf{n} dF + \int_V \sum_{k=1}^K (\rho_k \mathbf{a}_k) dV, \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \rho E dV = & - \int_F \left[\rho \mathbf{v} \left(h + \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} \right) + \sum_{k=1}^K \rho_k \mathbf{v}_{k\perp} h_k^* + \mathbf{q} - \mathbf{v} \cdot \Pi''_{ij} \right] \times \\ & \times \mathbf{n} dF + \int_V \left[\sum_{k=1}^K \rho_k (\mathbf{v}_k \cdot \mathbf{a}_k) + Q_r \right] dV. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Уравнения (2.26)–(2.28) выражают законы сохранения в «интегральной» (балансовой) форме. Физический смысл подынтегральных выражений в них — тот же, что и в (2.14)–(2.16): объемные плотности сохраняющихся величин \mathbf{U} внутри V , поверхностные плотности их потоков (обозначим $\mathbf{F}_x \mathbf{i} + \mathbf{F}_y \mathbf{j} + \mathbf{F}_z \mathbf{k}$ как $\bar{\mathbf{F}}$) на границе F и объемные плотности «источников» \mathbf{S} тех же сохраняющихся величин \mathbf{U} .

В этих символических обозначениях уравнения (2.26)–(2.28) запишутся в одну строку — сравн. с (2.22) на с. 43:

$$\frac{d}{dt} \int_V \mathbf{U} dV = - \int_F \overline{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{n} dF + \int_V \mathbf{S} dV. \quad (2.29)$$

Уравнения моделей течений, записанные в форме балансовых соотношений (2.29), удобно и излагать, и решать численно, применяя методы конечных объемов (МКО).

Численные методы, построенные как методы конечных разностей (МКР), выводят чаще для дифференциальных форм³ уравнений, т. е. УЧП, выражающих те же ЗС. Во введенных выше обозначениях:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{F}_z}{\partial z} = \mathbf{S}. \quad (2.30)$$

При переходе⁴ к пределу $dV = dx dy dz \rightarrow 0$ для получения (2.30) выраженные интегралами по F потоки преобразуются в интегралы по V по формуле Остроградского – Гаусса; так,

$$\int_F \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} dF = \int_V \text{div } \mathbf{a} dV,$$

где

$$\text{div } \mathbf{a} = \frac{\partial(\mathbf{a})_x}{\partial x} + \frac{\partial(\mathbf{a})_y}{\partial y} + \frac{\partial(\mathbf{a})_z}{\partial z} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial(\mathbf{a})_j}{\partial x_j}$$

есть определение оператора дивергенции *вектора* (напр., $\mathbf{a} = \rho_k \mathbf{v}_k$) или

$$\int_F \Pi_{ij} \cdot \mathbf{n} dF = \int_V \text{Div } \Pi_{ij} dV,$$

где дивергенция *тензора* (здесь: $\Pi_{ij} = \rho u_i u_j + \delta_{ij} p - \Pi''_{ij}$) —

$$\text{Div } \Pi_{ij} = \left\{ \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \Pi_{j1}}{\partial x_j}, \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \Pi_{j2}}{\partial x_j}, \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \Pi_{j3}}{\partial x_j} \right\}^T,$$

³ Форму, в которой записаны (2.30), называют *дивергентной*.

⁴ Для чего требуется неразрывность (дифференцируемость) искомого функций.

из чего следует (при неразрывности искомых функций) эквивалентность (2.29) и (2.30); подробнее см. в [12].

Приведем для справки взятые из [12, с. 79–84] УЧП вида (2.30):

$$\frac{\partial \rho Y_k}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_k Y_k}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_k Y_k}{\partial y} + \frac{\partial \rho w_k Y_k}{\partial z} = W_k \omega_{k\Sigma}, \quad k = 1, \dots, K, \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2 + p) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v u) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w u) = \\ = \frac{\partial \Pi''_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \Pi''_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \Pi''_{zx}}{\partial z} + \rho g_x, \end{aligned} \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u v) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v^2 + p) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w v) = \\ = \frac{\partial \Pi''_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \Pi''_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \Pi''_{zy}}{\partial z} + \rho g_y, \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u w) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v w) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w^2 + p) = \\ = \frac{\partial \Pi''_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \Pi''_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \Pi''_{zz}}{\partial z} + \rho g_z, \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho u h^* + \sum_{k=1}^K \rho_k u_{k\text{д}} h_k^* + q_x - u \Pi''_{xx} - v \Pi''_{yx} - w \Pi''_{zx} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho v h^* + \sum_{k=1}^K \rho_k v_{k\text{д}} h_k^* + q_y - u \Pi''_{xy} - v \Pi''_{yy} - w \Pi''_{zy} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho w h^* + \sum_{k=1}^K \rho_k w_{k\text{д}} h_k^* + q_z - u \Pi''_{xz} - v \Pi''_{yz} - w \Pi''_{zz} \right) = \\ = \rho (u g_x + v g_y + w g_z) + Q_r, \end{aligned} \quad (2.35)$$

где принято, что $\mathbf{a}_k = \mathbf{g}$ (т. е. «объемные» силы действуют на массу).

В уравнениях (2.31)–(2.35) число зависимых переменных (ЗП) превышает число УЧП. Последнее равно $K + 4$, где K — число учитываемых компонентов смеси. Замкнутые системы уравнений конкретных

моделей получают, привлекая (в рамках дополнительных гипотез) под-
 модели, что позволяет выразить в УЧП одни ЗП через другие.

Так, для описания трехмерного течения реагирующей смеси нужны
 модели, уравнения которых выражают:

- термодинамические свойства среды — УС вида (2.10) и (2.11);
- плотности потоков вследствие действия эффектов молекулярно-
 го переноса: плотности потоков массы $\rho_k \mathbf{v}_{kд}$, $k = 1, \dots, K$ (диффузия),
 потока КД Π''_{ij} (вязкость) и потока энергии \mathbf{q} (теплопроводность);
- объемную плотность «источника» массы компонентов $W_k \omega_{k\Sigma}$,
 $k = 1, \dots, K$, образующихся в химических реакциях (в основе — опре-
 деленный гипотетический механизм реакций);
- объемную плотность «источника» массовых сил, приложенных
 к частицам среды, движущимся в поле сил гравитации $\mathbf{g}(\mathbf{r}, t)$ и/или
 сил инерции (учитываемых при относительном движении);
- объемную плотность «источника» Q_r , учитывающего эффекты
 излучения и поглощения энергии.

В качестве УС, связывающих между собой параметры состояния
 однородной среды, могут привлекаться разные модели частного вида —
 от модели несжимаемой жидкости и совершенного газа и до модели, за-
 дающей УС конкретной многофазной среды (в состоянии ЛТР и локаль-
 ного фазового равновесия).

Распространенные модели молекулярного переноса основаны
 на «градиентных» замыкающих гипотезах; в них локальные плотности
 потоков $\rho_k \mathbf{v}_{kд}$ и \mathbf{q} вычисляются умножением локальных значений ко-
 эффициентов переноса на локальные градиенты полей соответствующих
 параметров состояния: Y_k и T (подробнее — в [12, с. 20]).

Многообразии гипотез (и моделей) для замыкания исходных урав-
 нений дает многообразие моделей движения сред. Так, из (2.31)–(2.35)
 при $K = 1$ получаются известные модели течения жидкостей и газов: при
 замыкании членов Π''_{ij} и \mathbf{q} на основе гипотез Ньютона и Фурье — урав-
 нения Навье – Стокса, а при $\Pi''_{ij} = 0$ и $\mathbf{q} = 0$ — уравнения Эйлера.

В замкнутой системе УЧП на основе (2.31)–(2.35) искомы-
 ми можно считать, например, следующий набор первичных ЗП —
 $\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{r}, t) = [p, T, u, v, w, Y_1, \dots, Y_{K-1}]^T$.

Указанные ЗП наиболее применимы в инженерных расчетах — как
 при постановке задач (включая задание НУ и ГУ), так и при интерпре-
 тации решений этих задач. Заметим, что число первичных ЗП равно чис-

лу консервативных ЗП $\mathbf{U} = \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) = [\rho Y_1, \dots, \rho Y_K, \rho u, \rho v, \rho w, \rho E]^T$ и равно числу УЧП в системе, здесь: $K + 4 = 5 + (K - 1)$.

УЧП вида (2.31)–(2.35), замкнутые адекватными моделями элементарных эффектов, применимы для непосредственного расчета ламинарных и турбулентных течений с химическими реакциями. Они же положены в основу прикладных моделей турбулентных течений [13], применяемых в инженерных расчетах.

2.2. Примеры математических моделей процессов

Предыдущий п. посвящен общего вида исходным уравнениям моделей различных процессов. Эти уравнения выражают ЗС в рамках тех или иных исходных гипотез. Однако для того чтобы пользоваться в качестве модели какого-либо процесса, подобные системы ОДУ или УЧП должны быть еще замкнуты конкретными «подмоделями», которые вводятся в рамках дополнительных (замыкающих) гипотез.

Данный п. посвящен примерам вывода таким способом замкнутых математических моделей процессов в конкретных (часто весьма элементарных) системах. Примеры разбираются на занятиях курса ОМПДЭ.

2.2.1. Модель затухающих механических колебаний

Простая модель механических колебаний описывает колебания тела массой m при поступательном прямолинейном движении под действием упругой силы и силы сопротивления движению (рис. 2.4).

Систему уравнений этой модели получим рекомендуемым способом: замкнем выражения ЗС (2.1) — общего вида уравнения (2.2), (2.3) динамики поступательного движения — конкретными моделями на основе дополнительных гипотез. Допущение об одномерном характере колебательного движения — дополнительная гипотеза, принятая в данной модели; ту же роль играют и допущения о линейной зависимости упругой силы от x (координаты), а силы сопротивления — от v_x (скорости).

Тогда можно переписать (2.2), (2.3) в проекции на ось x в виде замкнутой системы из двух ОДУ:

$$\frac{dx}{dt} = v_x, \quad (2.36)$$

$$\frac{d(mv_x)}{dt} = -k[(x - x_1) - L] - cv_x. \quad (2.37)$$

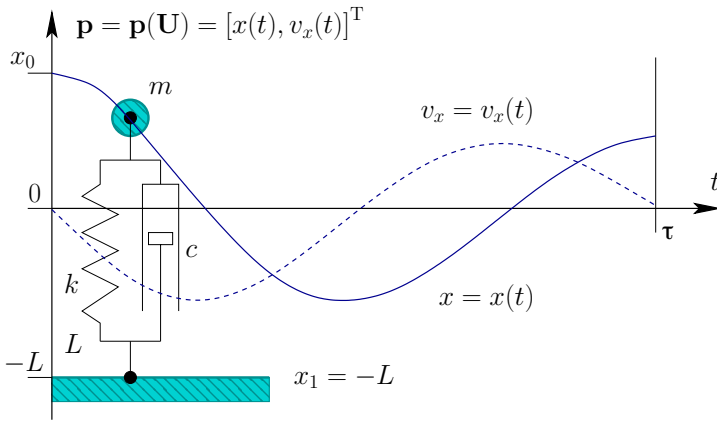


Рис. 2.4. Расчетная схема модели колебаний массы

Модель (2.36), (2.37) содержит три параметра, которые можно отнести к конструктивным параметрам системы (рис. 2.4) — массу m колеблющегося тела, длину L пружины в свободном состоянии и координату точки крепления x_1 , а также коэффициенты жесткости k и вязкого трения c , которые полностью (в данной модели!) задают свойства инертного тела и невесомых связей данного тела с телами внешней среды.

Модели (2.36), (2.37), описывающей механический осциллятор с линейным затуханием, дадим условное наименование ОСЦИЛЛЯТОР (см. вопрос на с. 70).

З а д а ч а. Конкретные значения параметров m, k, c, L и x_1 , а также параметров для постановки НУ $x_0 = x(t = 0)$ и $(v_x)_0 = v_x(t = 0)$ определяют условия однозначности конкретной задачи, решаемой по уравнениям этой модели (и имеющей единственное решение).

Р е ш е н и е. Для модели (2.36), (2.37) точное решение задачи находится аналитическими методами. Так, обозначая 1-ю и 2-ю производные по t точками над x (зависимая переменная), т. е. $dx/dt = v_x = \dot{x}$ и $dv_x/dt = \ddot{x}$, а также учитывая (см. рис. 2.4), что в конкретной задаче параметры m, k, c, L и x_1 — константы, преобразуем (2.36), (2.37) в эквивалентное линейное ОДУ второго порядка:

$$\ddot{x} + \left(\frac{c}{m}\right) \dot{x} + \left(\frac{k}{m}\right) x = \left(\frac{k}{m}\right) \times (x_1 + L),$$

решение которого при конкретных m, k, c, L, x_1, x_0 и $(v_x)_0$ задает траекторию ЦМ тела, совершающего затухающие⁵ колебания.

Так, для частного случая $x_1 = -L$ точное решение есть

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_0 t} \cdot (C_1 \cos \omega_d t + C_2 \sin \omega_d t), \quad v_x(t) = dx(t)/dt. \quad (2.38)$$

В (2.38) $\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}}$ — коэффициент затухания; $\omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2}$ и $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ — угловые частоты соответственно затухающих и свободных колебаний; $C_1 = x_0$ и $C_2 = [(v_x)_0 + C_1 \zeta \omega_0] / \omega_d$ — постоянные интегрирования.

Исходные уравнения (2.36), (2.37) данной модели компактно представляются в векторной форме (2.4), где

$$\mathbf{U} = \left\{ \begin{array}{c} x \\ mv_x \end{array} \right\}, \quad \mathbf{S} = \left\{ \begin{array}{c} v_x \\ (P_x)_{\text{пр}} + (P_x)_{\text{д}} \end{array} \right\},$$

где, в свою очередь, текущая сила сжатия связи-«пружины» —

$$(P_x)_{\text{пр}} = P_{\text{пр}} = -k [(x - x_1) - L],$$

а сила сопротивления, развиваемая в связи-«демпфере» —

$$(P_x)_{\text{д}} = P_{\text{д}} = -cv_x.$$

Заметим, что приведенная форма раскрывает иерархию модели. Так, два последних выражения — уравнения простых квазистатических подмоделей в составе обсуждаемой (что типично для моделей в составе модели процесса на основе системы дифференциальных уравнений). Текущие (мгновенные) величины сил $P_{\text{пр}}(\mathbf{p}, t)$ и $P_{\text{д}}(\mathbf{p}, t)$ определяются по текущим компонентам вектора состояния системы \mathbf{p} , здесь:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{U}) = \left\{ \begin{array}{c} x \\ v_x \end{array} \right\}, \quad \mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathbf{p}, t) = \mathbf{S}(\mathbf{U}, t).$$

Подчеркнем, что векторная форма (2.4) позволяет компактно и с единых позиций (и сверху вниз по иерархии модели) представлять

⁵Классическая модель механического осциллятора — с постоянными m, k и c — описывает колебательный процесс с линейной упругостью и линейным же затуханием колебаний; частному случаю равенства нулю одного лишь c соответствует осциллятор, в котором масса совершает незатухающие гармонические колебания (по синусоиде).

как простые, так и сложные модели процессов; повышается и ясность изложения численных методов (см. гл. 3), которыми реализуют вычисления по уравнениям моделей. Кроме того, векторная запись систем ОДУ (и УЧП) моделей облегчает модульную реализацию на ЭВМ модели и разных вариантов ее подмоделей. Например, могут быть отдельно реализованы и описаны модели МАССА, ПРУЖИНА и ДЕМПФЕР, основанные как на приведенных выше, так и на других уравнениях.

По указанным причинам символическая векторная форма записи математических моделей и применяется в данном пособии.

2.2.2. Модель объема жидкости переменной массы

Переходим от описания чисто механических процессов в элементарных системах к описанию термомеханических процессов.

Задачи о наполнении или опорожнении резервуара жидкостью (рис. 2.5) в общем случае также нужно решать по математической модели, в основе которой лежат законы сохранения (ЗС).

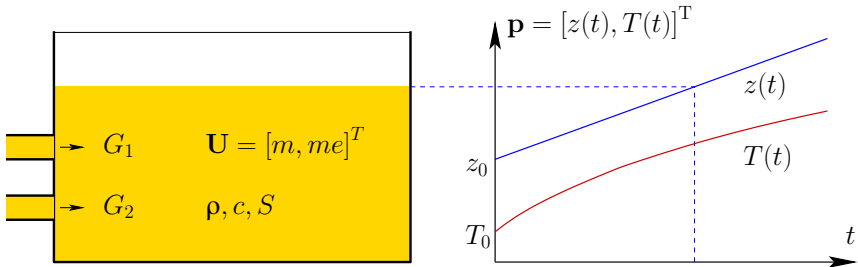


Рис. 2.5. Расчетная схема резервуара с жидкостью

В простейшем случае, когда интерес представляет лишь уровень жидкости $z(t)$, используем ЗС массы. Замыкаем уравнение (2.5), вводя допущения (гипотезы): жидкость — несжимаемая ($\rho = \text{const}_1$), форма резервуара — призматическая ($S = \text{const}_2$). Тогда наличная масса жидкости в резервуаре выражается как $m(t) = \rho V(t) = \rho S z(t)$, следовательно

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{U}, t) = \left\{ z(t) = \frac{m(t)}{\rho S} \right\},$$

а баланс массы жидкости в моделируемой физической системе можно записать как «систему» из одного ОДУ вида (2.4), где

$$\mathbf{U} = \{m = \rho S z\}, \quad \mathbf{S} = \{G_1 + G_2\}. \quad (2.39)$$

Расходы жидкости G_j считаем заданными замыкающими подмоделями: $G_j = G_j(\dots, \mathbf{p}, t)$, $j = 1, 2$.

Задачи и точные решения. Точные решения задач по данной модели интегрированием ее ОДУ (2.39) можно получить аналитически при частного вида выражениях для источника массы в \mathbf{S} . Так, обозначив НУ как $z_0 = z(t_0 = 0)$, а суммарный расход как $G = G_1 + G_2$, и учитывая, что ρS — постоянная, интегрированием (2.4) при (2.39) получим

$$z(t) - z_0 = \int_{z_0}^{z(t)} dz = \frac{1}{\rho S} \int_0^t G dt,$$

что в частном случае $G = \text{const}_3$ дает линейную зависимость от времени уровня z жидкости:

$$z(t) = z_0 + \frac{G}{\rho S} \cdot t.$$

Заметим, что подобные задачи в упрощенной постановке, позволяющей аналитически найти их точные решения, полезны в качестве тестовых — для отладки и контроля реализации моделей на ЭВМ.

Обобщение. В учебных целях показана весьма элементарная модель процесса в резервуаре. Обобщим эту модель для дополнительного учета температуры $T(t)$ жидкости, применяя тот же подход. На этот раз систему ОДУ модели составят конкретным образом замкнутые уравнения, полученные из ЗС массы (2.5) и ЗС энергии (2.6).

Однородность температуры по объему жидкости ($T(\mathbf{r}, t) \rightarrow T(t)$) следует из исходной гипотезы (называемой еще гипотезой мгновенного перемешивания), принятой при выводе выражения ЗС (2.6); не учтена там и потенциальная энергия среды.

В качестве дополнительной гипотезы примем, что для данной несжимаемой жидкости адекватно калорическое УС $e = cT$, где $c = \text{const}_4$ — постоянная удельная теплоемкость, Дж/(кг · К); данное УС есть частный случай УС (2.9). При этом если $\rho = \text{const}_1$, то $dh = de + pdv = de = cdT$, откуда $h = cT$. Пренебрегаем здесь и кинетической энергией в потоке жидкости, т. е. считаем, что $h^* \approx h$.

Тогда система из двух ОДУ вида (2.4), выражающих балансы массы и энергии жидкости в резервуаре, примет вид (сравн. с (2.39)):

$$\mathbf{U} = \left\{ \begin{array}{l} m = \rho S z \\ me = mcT \end{array} \right\}, \quad \mathbf{S} = \left\{ \begin{array}{l} G_1 + G_2 \\ G_1 cT_1 + G_2 cT_2 \end{array} \right\}. \quad (2.40)$$

В качестве НУ должны быть заданы начальные значения обеих представляющих интерес величин: z_0 и T_0 ; «декодирование» значений $\mathbf{U} \rightarrow \mathbf{p}$ (и обратно) в данной модели не представляет затруднений:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{U}) = \left\{ \begin{array}{l} z = m/(\rho S) \\ T = (me)/(\rho c S z) \end{array} \right\}.$$

Заметим, что может казаться разумным сократить 2-е уравнение системы (2.40) на $c = \text{const}_4$, однако это не так (особенно при реализации моделей в модулях прикладного ПО). Уравнения модели потеряли бы тогда и общность, и смысл балансовых соотношений, в левых частях которых — быстрота изменения по t сохраняющихся величин \mathbf{U} , а в правых — определяемые подмоделями суммарные мощности \mathbf{S} «источников» (точнее — «потоков» из внешней среды) величин \mathbf{U} .

2.2.3. Модель емкости переменного объема

В следующем примере получим математическую модель емкости переменного объема, заполненной однородным газом (или газовой смесью неизменного состава).

В принципе, расчетной схемой модели может служить схема, показанная на рис. 2.1. Получим, однако, замкнутую модель ресивера для конкретной расчетной схемы на рис. 2.6 (сравни с рис. 2.5).

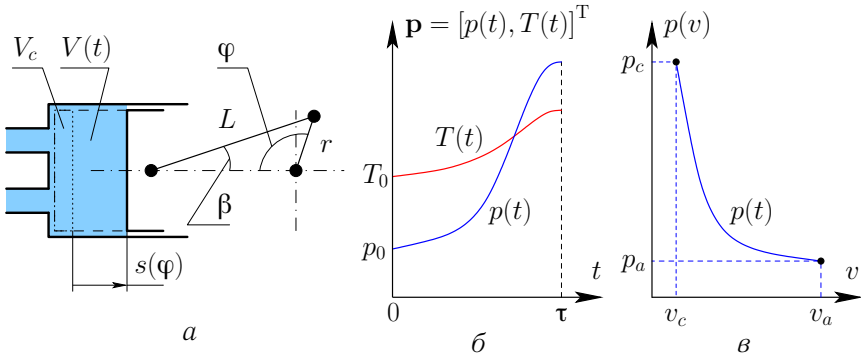


Рис. 2.6. Расчетная схема (а) и решения задач (б, в) по модели РЕСИВЕР

Будем моделировать объем, обменивающийся с внешней средой потоками массы и энергии газа через $J = 2$ «органа газообмена», а также потоками энергии через стенку (в форме работы и теплоты).

Исходные уравнения модели примем в виде (2.5) и (2.6), а связь между параметрами состояния ρ , T , p и e (опять же, в общем виде) зададим уравнениями состояния (2.8) и (2.9).

Чтобы получить замкнутые ОДУ модели процесса в такой емкости («ресивере») на основе (2.5) и (2.6), необходимо привлечь конкретные модели, выражающие изменение $V(t)$ по времени и поток теплоты $Q_{\text{внеш}}$ от стенок, а также конкретизировать УС.

Модель. Система уравнений модели РЕСИВЕР в форме (2.4) выражает ЗС массы и энергии для объема газа; векторы сохраняющихся величин и правых частей ОДУ модели примут вид

$$\mathbf{U} = \left\{ \begin{array}{c} m \\ me \end{array} \right\}, \quad \mathbf{S} = \left\{ \begin{array}{c} G_1 + G_2 \\ G_1 h_1^* + G_2 h_2^* - p \frac{dV}{dt} + Q_{\text{внеш}} \end{array} \right\}, \quad (2.41)$$

где $m = \rho V$ — масса газа в емкости (ресивере), кг; me — внутренняя энергия этого газа, Дж; G_1 и G_2 — мгновенные значения потоков массы газа из внешней среды (через границу объема V), кг/с; h_1^* и h_2^* — среднерасходные величины удельной полной энтальпии газа в потоках, Дж/кг.

Замкнутая система уравнений модели (2.41) получится после привлечения замыкающих математических моделей.

Замкнутая модель позволит приближенно описать процесс, например, в ступени поршневого насоса или сходном элементе газовоздушного тракта двигателя или ЭУ. При этом *всасывание*, *сжатие* и *подача* воздуха из объема будут описаны как периоды единого процесса.

Здесь остановимся на следующих вариантах замыкающих моделей.

Модель термодинамических свойств газа. Требуется модель, характеризующая термодинамические (и теплофизические) свойства рабочего тела (РТ). Модель эта должна применяться глобально — чтобы последовательно описать свойства РТ в единой модели процесса в системе из подобных ресиверу элементов.

Здесь примем модель идеального совершенного газа, т. е. РТ с уравнениями состояния (2.24) и (2.25):

$$p = \rho RT, \quad e = c_v T \quad (2.42)$$

и присвоим здесь *параметрам* R и $\gamma = c_p/c_v$ конкретные значения: $R = 287,10$ Дж/(кг·К) (соответствует воздуху) и $\gamma = 1,40$. Тогда $c_v = 717,75$ Дж/(кг·К) и $c_p = R + c_v = 1004,85$ Дж/(кг·К). Данные

значения R и γ близки к действительным для воздуха при температурах, близких к нормальной.

Модель изменения объема. Текущий объем ресивера (как и его производную по t) можно задать множеством способов; выберем связь $V(t)$ с кинематикой простого кривошипно-шатунного механизма, показанного на рис. 2.6, а:

$$V(t) = V_c + \frac{\pi d_{\text{ц}}^2}{4} \cdot s_x(t), \quad (2.43)$$

где V_c — минимальный объем, м^3 ; $s_x(t)$ — текущее расстояние поршня от ВМТ, м :

$$s_x(t) = r \cdot (1 - \cos \varphi) + L_{\text{ш}} \cdot (1 - \cos \beta), \quad (2.44)$$

где $r = S/2$ — радиус кривошипа, м ; S — ход поршня, м ; $L_{\text{ш}}$ — длина шатуна, м ; $\beta = \arcsin(\lambda \sin \varphi)$ — угол отклонения шатуна (см. рис. 2.6, а) от оси; $\lambda = r/L_{\text{ш}}$; $\varphi = \varphi_0 + \Delta\varphi$ — угол поворота кривошипа (в радианах). Для частного случая постоянной частоты вращения n и угловой частоты $\omega = \pi n/30$: $\Delta\varphi = \varphi - \varphi_0 = \omega \cdot (t - t_0)$.

Производная $dV(t)/dt$ от (2.43), взятая аналитически или численным дифференцированием, позволит в (2.41) вычислить $(-p \frac{dV}{dt})$ — мгновенный поток энергии (в Дж/с) от внешней среды к газу в ресивере, соответствующей мощности работы изменения его объема V .

Модель внешнего газообмена. Текущие значения потоков массы G_j и энергии $(Gh^*)_j$ через органы газообмена (приуроченные к границе объема V) считаем заданными моделями, учитывающими конструкцию и работу соответствующих клапанов.

Модель внешней теплоотдачи. Мгновенный поток энергии $Q_{\text{внеш}}$ (в Дж/с) выразим в (2.41) традиционно для моделей теплоотдачи:

$$Q_{\text{внеш}} = \alpha_{\Sigma} \cdot (T_w - T) \cdot F_w, \quad (2.45)$$

где α_{Σ} — средний (эквивалентный) коэффициент теплоотдачи; в (2.45) величины температуры T_w и площади F_w стенок также имеют смысл эквивалентных и могут задаваться соответствующими моделями. Заметим, что (2.45) — по существу, определение величины α_{Σ} .

Вычислять же текущее значение α_{Σ} (размерность — $\text{Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$) рационально по моделям, определяющим зависимость числа Нуссельта (безразмерного коэффициента теплоотдачи) от ряда факторов.

Ограничимся определением $Nu = \alpha_{\Sigma} d_{\text{ц}} / \kappa$ и присвоением ему постоянного значения ($Nu = Nu_0$), т. е. примем простейшую⁶ модель, не учитывающую такие факторы, как гидродинамический режим течения в емкости (безразмерные параметры режима: Re, θ, \dots), теплофизические свойства газа (безразмерные величины: Pr, γ, \dots) и конструктивное исполнение ресивера.

Начальные условия. Для решения задач по описанной выше модели РЕСИВЕР (2.41) необходимо задать в качестве НУ начальные (при $t_0 = 0$) значения двух (по числу ОДУ в системе) зависимых переменных — например, p_0 и T_0 (см. рис. 2.6, б).

«Специализация». Описанную модель (2.41) процесса в ресивере далее не обобщаем, а, наоборот, приводим к специальному (частному) виду, т. е. упрощаем модель. Так, положим в ней равными нулю потоки массы РТ через «органы газообмена» ($G_1 = 0$ и $G_2 = 0$) и суммарный поток теплоты из внешней среды через стенки: $Q_{\text{внеш}} = 0$ (здесь: задав $Nu_0 = 0$).

В такой модели (в которой $m = \text{const}$) нетривиальным остается второе ОДУ (2.41) — уравнение энергии. После сокращения на dt и на m (при $Q_{\text{внеш}} dt / m = dq_{\text{внеш}} = dq = 0$, Дж/кг) оно принимает вид

$$de = -pdv \quad (2.46)$$

и описывает адиабатный обратимый (т. е. изоэнтروпический) процесс сжатия или расширения, изучаемый в технической термодинамике [5]. Для заданной уравнением (2.46) модели можно ставить конкретные задачи о сжатии или расширении (при $s = \text{const}$) заданной массы, в частности, совершенного газа ($\gamma = c_p / c_v = \text{const}$).

Задача и точное решение. Решения задач этого класса находят-ся аналитически — интегрированием (2.46), и выражаются уравнением изоэнтропической адиабаты Пуассона: $pv^\gamma = \text{const}$. Решение конкретной задачи о сжатии (или расширении) газа с отношением теплоемкостей γ от начальных давления p_a и удельного объема v_a выразится как $p(v) = p_a \left(\frac{v_a}{v}\right)^\gamma$ или (для конечной точки процесса) $p_c = p(v_c) = p_a \varepsilon^\gamma$, где $\varepsilon = v_a / v_c$ — степень сжатия (см. рис. 2.6, в).

Так, при $\varepsilon = 8,0$ и $\gamma = 1,40$ значение $p_c / p_a = \bar{p}_c = \varepsilon^\gamma \approx 18,3792$.

⁶Утверждение $Nu = Nu(Re, \theta, Pr, \gamma, \dots) \rightarrow Nu_0$ формально выражает допущения (гипотезы), принятые в изложенной модели теплоотдачи (в составе модели РЕСИВЕР).

Заметим еще раз, что точные решения задач для специальных упрощенных моделей (решения, которые могут быть найдены аналитически) полезны для тестов программных модулей (см. п. 4.1), реализующих более общие и сложные модели процессов в элементах систем.

2.2.4. Модель процессов в рабочей камере ДВС

Построим модель процессов в РК поршневого ДВС; примем простейшие представления: однозонное для объема РК $V(t) = V(\varphi(t))$ и двухкомпонентное для представления теплофизических свойств уравнениями состояния модели рабочего тела. Это уже позволит описать преобразование в РК свежего заряда (СЗ) в продукты сгорания (ПС).

Для вывода исходных уравнений модели за основу примем систему (2.12), (2.13), сделав следующие изменения. Учтем, что $K = 2$ компонента РТ в объеме (единственной в РК) зоны составляют гомогенную смесь лишь формально. Темп преобразования СЗ в ПС определит модель сгорания, учитывающая не только (и не столько) кинетику реакций. Поэтому применим обозначения $(dm_1/dt)_{\text{сг}}$ и $(dm_2/dt)_{\text{сг}}$ вместо $VW_1\omega_{1\Sigma}$ и $VW_2\omega_{2\Sigma}$. Кроме того, учтем мгновенный (текущий) расход $G_{\text{топл}}$ — поток массы топлива, подаваемого в РК (при внутреннем смесеобразовании). Поток энергии с топливом учтем как $(Gh^*)_{\text{топл}}$.

Модель. При таких гипотезах уравнения модели процесса в РК (далее — модели ЦИЛИНДР) ДВС примут вид:

$$\frac{dm_1}{dt} = \sum_{j=1}^J (GY_1)_j + (dm_1/dt)_{\text{сг}}, \quad (2.47)$$

$$\frac{dm_2}{dt} = \sum_{j=1}^J (GY_2)_j + (dm_2/dt)_{\text{сг}}, \quad (2.48)$$

$$\frac{d(me)}{dt} = \sum_{j=1}^J (Gh^*)_j + (Gh^*)_{\text{топл}} - p \frac{dV}{dt} + Q_{\text{внеш}}, \quad (2.49)$$

где $m_1 = \rho V(t)Y_1$ — масса СЗ, кг (в ДВС с внешним смесеобразованием — масса горючей смеси); $m_2 = \rho V(t)Y_2$ — масса ПС, кг; $m = m_1 + m_2$ — масса РТ в объеме РК; $Y_1 = m_1/m$, $Y_2 = m_2/m$ — массовые доли этих компонентов и ρ — плотность РТ, кг/м³; $(GY_1)_j$, $(GY_2)_j$ — потоки масс СЗ и ПС, кг/с; а $(Gh^*)_j$ — потоки энергии РТ,

поступающей в РК через j -й орган газообмена, Дж/с; $(Gh^*)_{\text{топл}}$ — поток энергии топлива, подаваемого в РК при внутреннем смесеобразовании), Дж/с; $Q_{\text{внеш}}$ — поток теплоты, подводимой через стенки РК, Дж/с; $p = p(\rho, T, Y_1, Y_2)$ — текущее давление в РК, Па; $e = e(\rho, T, Y_1, Y_2)$ — удельная внутренняя энергия, Дж/кг.

Модель ЦИЛИНДР (2.47)–(2.49) может быть записана как система ОДУ (2.4), в данном случае вектор сохраняющихся величин и вектор правых частей примут вид:

$$\mathbf{U} = \begin{Bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ me \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{Bmatrix} \sum_{j=1}^J (GY_1)_j + (dm_1/dt)_{\text{ср}} \\ \sum_{j=1}^J (GY_2)_j + (dm_2/dt)_{\text{ср}} \\ \sum_{j=1}^J (Gh^*)_j + (Gh^*)_{\text{топл}} - p \frac{dV}{dt} + Q_{\text{внеш}} \end{Bmatrix}.$$

Исходные уравнения модели (2.47)–(2.49) выражают ЗС массы СЗ, массы ПС и энергии РТ в объеме $V(t)$ рабочей камеры.

Из сравнения (2.47)–(2.49) с уравнениями (2.41) на с. 55 очевидно, что данная модель ЦИЛИНДР — обобщение модели РЕСИВЕР. Модель ЦИЛИНДР можно обобщить, перейдя с одно- на двух- или многозонное представление характеристик РТ в объеме РК, а также с двух- на многокомпонентное представление состава РТ.

Описываемая модель ЦИЛИНДР позволяет определить давление $p(t)$ в РК, температуру $T(t)$ и массовые доли $\mathbf{Y}(t) = [Y_1, Y_2]^T$ двух ($K = 2$) компонентов РТ. Замкнутая система уравнений (2.47)–(2.49) позволит рассчитать изменение указанных параметров состояния РТ во все периоды процесса в РК — как при открытых органах газообмена, так и в периоды сжатия, сгорания и расширения. Для этого модель ЦИЛИНДР компонуется с моделями смежных участков ГВТ ДВС и моделями граничных сечений в *единую* модель процесса в ГВТ, и применяется конкретный алгоритм расчета течения РТ во всем ГВТ как *единой* расчетной области.

Теперь, чтобы завершить описание модели ЦИЛИНДР, нужно указать конкретные подмодели, уравнениями которых будут замкнуты ее уравнения. Не повторяя изложение *модели изменения объема* и *модели теплоотдачи* (см. пп. 2.2.3), сосредоточимся на следующих двух моделях.

Модель термодинамических свойств РТ. Изложим модель, определяющую УС рабочего тела ДВС для нашей модели ЦИЛИНДР,

и моделей сопряженных элементов ГВТ. Как дополнительные гипотезы принимаем допущения об идеально-газовых свойствах РТ ДВС как смеси СЗ и ПС (описываемых также моделью идеального газа). Однако не предполагаем, что теплоемкости компонентов РТ постоянные. Пренебрегаем все же термической диссоциацией. Т. е. считаем, что состав «чистых» ПС определяется расчетом по заданным элементному составу топлива, окислителя и коэффициенту α , а также считаем, что такая смесь (с добавлением не сгоревших топлива и окислителя) образует ПС, учитываемые как $k = 2$ -й компонент РТ.

Получаем частного вида уравнения состояния для замыкания системы ОДУ (2.47)–(2.49):

$$p = p(p, T, Y_1) = pRT, \quad (2.50)$$

где $R = R(Y_1) = \sum_{k=1}^2 Y_k R_k = Y_1 R_1 + Y_2 R_2$ — удельная газовая постоянная РТ как смеси СЗ и ПС, Дж/(кг · К), $Y_2 = 1 - Y_1$ и

$$e = e(T, Y_1) = \sum_{k=1}^2 Y_k e_k(T) = Y_1 e_1(T) + Y_2 e_2(T), \quad (2.51)$$

где $e_1(T)$ и $e_2(T)$ — удельная внутренняя энергия СЗ и ПС, Дж/кг.

Зависимости для e_1 и e_2 строятся на представлении полиномами от T зависимостей $H_k(T)$ для индивидуальных газообразных компонентов РТ (здесь $k = \text{O}_2, \text{N}_2, \text{CH}_4, \text{CO}_2, \text{H}_2\text{O}$ и др.) с учетом их энтальпий образования.

Заметим, что данная модель РТ — модель более общая, чем заданная уравнениями состояния (2.42) на с. 55.

Модель сгорания. Выразить члены $(dm_1/dt)_{\text{ср}}$ и $(dm_2/dt)_{\text{ср}}$ уравнений (2.47) и (2.48) модели ЦИЛИНДР позволяют модели динамики выгорания СЗ и топлива в объеме РК; в общем виде:

$$(dm_1/dt)_{\text{ср}} = f_{1\text{ср}}(p, T, Y_1, \dots, t),$$

$$(dm_2/dt)_{\text{ср}} = f_{2\text{ср}}(p, T, Y_1, \dots, t).$$

Для частного вида моделей сгорания (при закрытых органах газообмена и без учета утечек РТ) изменение массы СЗ Δm_1 и массы ПС Δm_2 за время, протекшее с момента t_y начала видимого сгорания,

может быть выражено как

$$m_1(t) - m_1(t_y) = \int_{t_y}^t (dm_1/dt)_{\text{сг}} dt,$$

$$m_2(t) - m_2(t_y) = \int_{t_y}^t (dm_2/dt)_{\text{сг}} dt,$$

т. е. по ним непосредственно определяется решение для $m_1(t)$, $m_2(t)$. Модели сгорания, позволяющие сделать это, названы интегральными.

Опишем простейшую интегральную модель. Пусть:

– режим ДВС — установившийся, т. е. постоянна частота n вращения вала и выполняется простое соответствие времени t и угла ПКВ:

$$\varphi = \varphi(t) = \varphi_0 + \omega \cdot (t - t_0), \text{ где } \omega = \frac{\pi n}{30},$$

причем постоянна и $\alpha = \alpha_c \eta_{\text{и}}$ — в силу постоянства нагрузки и показателей газообмена η_V и $\eta_{\text{и}}$ на установившемся режиме;

– сгорание происходит при закрытых органах газообмена;

– утечки РТ за этот период несущественны;

– принята гипотеза, идеализирующая описание топливоподачи для ДВС с внутренним С/О, где $dm_2 = dm_1 + dm_{\text{топл}}$:

$$dm_{\text{топл}} = G_{\text{топл}} dt = -\frac{dm_1}{\alpha l_0},$$

где $G_{\text{топл}}(t)$ — текущий расход подаваемого в РК топлива, $\alpha = \text{const}$.

Кроме того, согласно модели РТ (см. выше) в состав ПС включены (помимо «чистых» ПС) также массы не прореагировавших окислителя и топлива (входящего в состав горючей смеси или впрыснутого в РК).

Тогда (в рамках сделанных выше допущений) в процессе *видимого* сгорания (т. е. при $\varphi_y < \varphi \leq \varphi_z$) масса СЗ $m_1(\varphi)$ выражается как

$$m_1(\varphi) = m_1(\varphi_y) - m_1(\varphi) \cdot \frac{x}{x_z} = m_1(\varphi_y) \cdot \left[1 - \frac{x}{x_z} \right], \quad (2.52)$$

где $x = x(\bar{\varphi}, \dots)$ — текущая доля цикловой массы СЗ $m_1(\varphi_y)$, преобразованной в «чистые» ПС; $x_z = x(\bar{\varphi}_z, \dots) = 0,95 \dots 0,999$ — коэффициент полноты сгорания; $\bar{\varphi} = (\varphi - \varphi_y)/\Delta\varphi_{yz}$ — безразмерный угол ПКВ;

φ_y — угол начала видимого сгорания, °ПКВ; $\Delta\varphi_{yz}$ — продолжительность видимого сгорания, °ПКВ (рис. 2.7).

Таким образом, интегральные модели учитывают «физическую» неполноту сгорания параметром x_z , а параметры φ_y и $\Delta\varphi_{yz}$ определяют начало и длительность этого периода процесса в РК.

В двигателе с внутренним С/О масса ПС m_2 возрастает в процессе *видимого* сгорания ($\varphi_y < \varphi \leq \varphi_z$) за счет как выгорающего СЗ $m_1(\varphi)$ ($[dm_1/d\varphi]_{\text{сг}} < 1$), так и топлива $m_{\text{топл ц}}$ (φ). В модели принимается, что топливо подается по мере выгорания СЗ (см. рис. 2.7, б):

$$m_2(\varphi) = m_2(\varphi_y) + [m_1(\varphi_y) + m_{\text{топл ц}}] \cdot \frac{x}{x_z}, \quad (2.53)$$

где $m_{\text{топл ц}} = \frac{m_1(\varphi_y)}{aI_0}$ — масса топлива, подаваемого в РК за цикл.

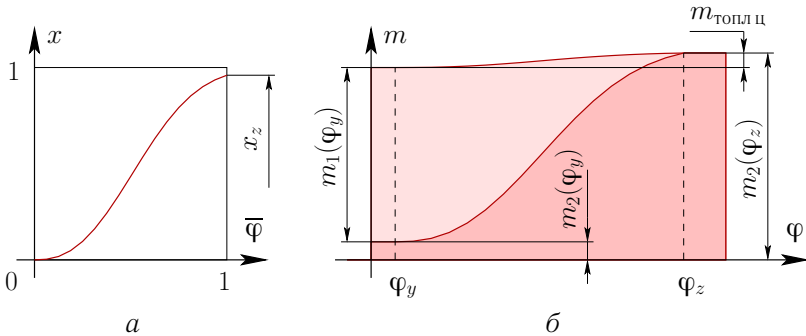


Рис. 2.7. Характеристики по углу ПКВ: а) выгорания; б) массы СЗ и ПС

В двигателе с внешним С/О масса ПС возрастает строго за счет массы СЗ — горючей смеси, и в (2.53) слагаемое $m_{\text{топл ц}} = 0$, т. к. топливо в РК не подается, и поэтому также $(Gh^*)_{\text{топл}} = 0$ в (2.49).

И, как следует из (2.52) и (2.53), при любом типе смесеобразования после окончания *видимого* сгорания в РК остаются лишь ПС — до начала продувки РК при газообмене (рис. 2.7, б).

Характеристику выгорания СЗ $x = x(\bar{\varphi}, \dots)$ можно задавать разными моделями. В качестве интегральной (и в основе дифференциальной) модели сгорания применима зависимость И. И. Вибе [2]:

$$x(\bar{\varphi}, x_z, \varphi_y, \Delta\varphi_{yz}, m) = 1 - \exp \left[C \cdot \left(\bar{\varphi} = \frac{\varphi - \varphi_y}{\Delta\varphi_{yz}} \right)^{m+1} \right], \quad (2.54)$$

где $C = \ln(1 - x_z)$; m — параметр формы характеристики, принимающий обычно значения от минус 0,25 до плюс 4,0 [3].

Графики «закона» И. И. Вибе (2.54) и производной $dx/d\varphi$ (для значений параметров: $\varphi_y = +0,653^\circ$ ПКВ, $\Delta\varphi_{yz} = 58,882^\circ$ ПКВ и т. д.) приведены на рис. 2.8.

Таким образом, определяемое (2.54) семейство «законов» выгорания (при фиксированных параметрах x_z , φ_y , $\Delta\varphi_{yz}$ любой интегральной модели сгорания в РК) — однопараметрическое (m — параметр формы).

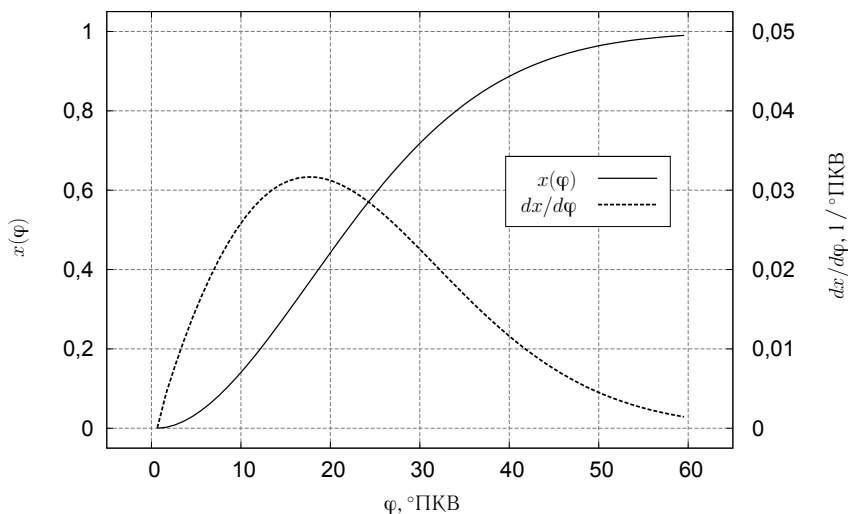


Рис. 2.8. Зависимости Вибе $x(\varphi, \dots)$ и $dx/d\varphi$ при $x_z = 0,99$; $m = 0,8549$

Выделяемая при сгорании химическая энергия автоматически учитывается в (2.47)–(2.49), т. к. энтальпии образования компонентов РТ учтены в калорическом УС горючей смеси (при внешнем С/О). При внутреннем С/О $h_{\text{топл}}^*$ в (2.49) также задается по $h_{\text{топл}}$ с учетом его энтальпии образования. Для видов топлива сложного состава (при любом типе С/О) $h_{\text{топл}}$ берется с учетом его низшей теплоты сгорания H_u .

2.2.5. Модель неустановившегося течения в канале

Построим модель течения РТ на протяженном участке газоздушного тракта (ГВТ) ДВС. Модель должна описывать (в квазиодномерном приближении) нестационарное движение двухкомпонентного РТ

ДВС по такому каналу — «трубке» (рис. 2.2) с переменной по оси x площадью сечения $F = F(x)$. Модель позволит определять изменение (по координате x вдоль оси канала и по времени t) давления $p(x, t)$, температуры $T(x, t)$ и скорости $u(x, t)$ движения РТ, а также параметров, определяющих состав РТ (здесь: массовых долей СЗ и ПС — $Y_1(x, t)$ и $Y_2(x, t) = 1 - Y_1$).

Уравнения (здесь и далее — модели ТРУБКА) запишем как конкретный вариант (для протяженного канала как подобласти ПЧ ГВТ) уравнений *единой* модели РП ДВС. Потребуем непрерывного (без скачков площади сечения F и ее производной dF/dx) изменения профиля сечения; считаем, что по длине «трубки» задана также другая макрогеометрическая величина — периметр $\Pi = \Pi(x)$, а также эквивалентная шероховатость $\Delta = \Delta(x)$ и температура стенок $T_w = T_w(x)$.

Исходными послужат уравнения вида (2.17), в интегральной форме выражающие ЗС для такого течения (в рамках принятых гипотез). Как и в модели ЦИЛИНДР (см. пп. 2.2.4), примем двухкомпонентное ($K = 2$) приближение в описании РТ и запишем систему уравнений модели ТРУБКА в виде (2.17), где $\mathbf{U} = [\rho_1, \rho_2, \rho u, \rho E]^T$, $\mathbf{F}_x = [\rho_1 u, \rho_2 u, \rho u^2 + p, \rho u h^*]^T$ и $\mathbf{S} = [0, 0, p \frac{dF}{dx} + \tau_w \frac{\Pi}{F}, q_w \frac{\Pi}{F}]^T$. Интегралы в левых частях (2.17) выражают текущие массы СЗ и ПС — $m_1 = \int_V \rho_1 dV$ и $m_2 = \int_V \rho_2 dV$ (где $\rho_1 = \rho Y_1$, $\rho_2 = \rho Y_2$ и $dV = F dx$), а также КД (mu) = $\int_V \rho u dV$ и энергию (mE) = $\int_V \rho E dV$ в контрольном объеме $V = \int_V dV$ (рис. 2.2). В развернутом (не векторном) виде уравнения модели ТРУБКА (с учетом того, что $K = 2$) записываются: в *интегральной* форме — как (2.14)–(2.16), в *дифференциальной* (дивергентной) форме — как (2.19)–(2.21).

Модель ТРУБКА может компоноваться с другими моделями ТРУБКА, а также с моделями ЦИЛИНДР, РЕСИВЕР и АТМОСФЕРА в *единую* модель и в ее составе участвовать в расчете РП ДВС как течения в *единой* области (проточной части ГВТ) и по *единому* алгоритму. Для описания течения РТ через границы элементов ПЧ (на скачках площади сечения ГВТ) привлекаются квазистатические модели течения.

Алгоритм, реализующий метод расчета по модели течения РТ в ГВТ (на участках каналов — по модели ТРУБКА, см. пп. 3.3.4), должен обеспечивать корректное сопряжение модели ТРУБКА с моделями других элементов ПЧ ГВТ с применением процедур вычислений по уравнениям моделей границ.

Необходимо теперь указать конкретные подмодели, с привлечением которых получается замкнутая система уравнений модели ТРУБКА (2.14)–(2.16) или (2.19)–(2.21) при $K = 2$.

Модель термодинамических свойств РТ — модель, определяющая УС рабочего тела «глобально» (т. е. на всех участках ПЧ ГВТ). Примем ту же модель смеси идеальных газов с зависящими от T теплоемкостями (см. пп. 2.2.4). Данная модель определит уравнениями (2.50) и (2.51) конкретные зависимости вида $p(\rho, T, Y_1)$ и $e(\rho, T, Y_1)$, что позволит исключить ρ и e из числа неизвестных, связав их с $p(x, t)$, $T(x, t)$ и $Y_1(x, t)$.

Кроме того, нужны модели эффектов трения и теплоотдачи, чтобы выразить $\tau_w(x, t)$ и $q_w(x, t)$, т. е. исключить их из числа неизвестных с учетом следующих теплофизических характеристик РТ:

- μ — коэффициента вязкости;
- κ — коэффициента теплопроводности.

Зададим в нашей модели термодинамических (теплофизических) свойств РТ эти коэффициенты зависимостями

$$\mu = \mu(T, Y_1) = \sum_{k=1}^2 Y_k \cdot \mu_k(T) = Y_1 \cdot \mu_1(T) + (1 - Y_1) \cdot \mu_2(T), \quad (2.55)$$

$$\kappa = \kappa(T, Y_1) = \sum_{k=1}^2 Y_k \cdot \kappa_k(T) = Y_1 \cdot \kappa_1(T) + (1 - Y_1) \cdot \kappa_2(T), \quad (2.56)$$

где $\mu_1(T)$ и $\mu_2(T)$, а также $\kappa_1(T)$ и $\kappa_2(T)$ — температурные зависимости для коэффициентов вязкости и теплопроводности СЗ и ПС (представляются полиномами от T).

Уравнениями (2.55) и (2.56) обсуждаемые два коэффициента молекулярного переноса задаются по аналогии с (2.51) по зависимостям от T для СЗ и ПС, с Y_1 и Y_2 в качестве весовых коэффициентов⁷.

Отметим, что (2.55) и (2.56) служат определению μ и κ как средних по сечению канала — так же, как (2.50) и (2.51) оперируют средними по сечению p, ρ, T, e, Y_1 и Y_2 (способ осреднения здесь не обсуждаем).

Модель трения. Необходимо исключить текущее локальное (среднее по периметру сечения Π) касательное напряжение на стенке

⁷Такое описание обоснованно, т. к. СЗ и ПС близки по теплофизическим свойствам: большая доля ($\approx 70\%$) в составе обоих компонентов РТ ДВС принадлежит азоту N_2 .

$\tau_w(x, t)$ из числа неизвестных в (2.15) или (2.20). Примем, что можно выражать τ_w через текущие (средние по сечению) характеристики потока РТ, а также геометрические и другие характеристики сечения — уравнениями, задающими функциональную связь, общий вид которой —

$$\tau_w = \tau_w(p, T, u, Y_1, c_p, c_v, \mu, \kappa, F, \Pi, \Delta, T_w).$$

Далее упрощенно учтем теплофизические свойства РТ моделью совершенного газа заданного состава (т. е. зафиксируем Y_1, R и c_p , откуда $c_v = c_p - R = \text{idem}$ и $\gamma = c_p/c_v = \text{idem}$) и получим общий вид функциональной связи:

$$\tau_w = \tau_w(p, T, u, \mu, \kappa, F, \Pi, \Delta, T_w). \quad (2.57)$$

В безразмерных переменных (анализ размерностей см. в [9, 12]) эта связь примет, например, следующий вид:

$$\lambda = \lambda(M, \text{Re}, \theta, \text{Pr}, \overline{\Delta}),$$

где $M = u/c$ — число Маха, $\text{Re} = \rho u d_3 / \mu$ — число Рейнольдса⁸, $\theta = T_w/T$ — температурный фактор, $\text{Pr} = \mu c_p / \kappa$ — число Прандтля, $\overline{\Delta} = \Delta/d_3$ — параметр относительной эквивалентной шероховатости.

Определяют коэффициент потерь на трение λ величины, выражающие режимные (M, Re, θ) и другие факторы: Pr — теплофизические свойства, $\overline{\Delta}$ — микрогеометрию (шероховатость).

Определяемая из этой зависимости величина λ имеет смысл безразмерного касательного напряжения. В модели трения (2.57) τ_w определяется из уравнения, которое вводит формальное определение величины λ :

$$\tau_w = \frac{dp}{dx} \cdot \frac{F}{\Pi} = -\lambda \frac{\rho u |u|}{2d_3} \cdot \frac{F}{\Pi} = -\lambda \frac{\rho u |u|}{8}, \quad (2.58)$$

где $d_3 = \frac{4F}{\Pi}$ — эквивалентный диаметр сечения, $\frac{dp}{dx}$ — градиент давления, измеряемый в экспериментах по определению τ_w (или λ) для идентификации модели.

Так, если идентифицировать уравнение $\lambda = \lambda(\dots)$ модели по данным экспериментов с изотермическими течениями жидкости с $\rho = \text{const}_1$

⁸Скорость звука и плотность выражаются из УС: $\rho = p/(RT)$ и $c = \sqrt{\gamma RT}$, где R и γ приняты постоянными.

и $\mu = \text{const}_2$, то факторы, выражаемые величинами M , θ и Pr , в модели представлены не будут. Примем, однако, данное упрощение в модели ТРУБКА, что позволит использовать надежные данные о потерях на трение в трубах для всех возможных в практике значений Re и $\overline{\Delta}$, т. е.:

$$\lambda = \lambda(\text{Re}, \overline{\Delta}). \quad (2.59)$$

Описанная выше модель (2.57)–(2.59) для учета потерь на трение в модели ТРУБКА содержит несколько уравнений, лишь вводящих определения ряда величин: λ , Re , $\overline{\Delta}$, d_3 . Замыкают же модель трения конкретные уравнения (модели) для представления (2.59); это — полуэмпирические уравнения, представляющие собой в конечном счете *уравнения регрессии*.

Модель теплоотдачи. Необходимо также исключить текущую локальную (и среднюю по периметру Π сечения) плотность теплового потока от стенки $q_w(x, t)$ из числа неизвестных в (2.16) или (2.21). Приняв те же допущения, что и в модели трения (см. выше), получим общий вид модели теплоотдачи как функциональной связи q_w с текущими локальными значениями характеристик РТ — аналогично (2.57):

$$q_w = q_w(p, T, u, \mu, \kappa, F, \Pi, \Delta, T_w). \quad (2.60)$$

В безразмерных переменных эта связь примет, например, вид:

$$\text{Nu} = \text{Nu}(M, \text{Re}, \theta, \text{Pr}, \overline{\Delta}),$$

где определяющие величины соответствуют данным выше определениям и где определяемая величина $\text{Nu} = \alpha d_3 / \kappa$ — число Нуссельта — безразмерный коэффициент теплоотдачи.

Локальное значение числа Nu вычисляется по конкретной зависимости вида $\text{Nu} = \text{Nu}(\dots)$. Найденный по Nu коэффициент теплоотдачи $\alpha = \text{Nu} \cdot \kappa / d_3$ определяет q_w в модели (2.60) по уравнению⁹

$$q_w = \alpha \cdot (T_w - T).$$

Для описания течения РТ ДВС по каналам число факторов в $\text{Nu} = \text{Nu}(\dots)$ можно сократить, приняв в модели ТРУБКА

$$\text{Nu} = \text{Nu}(\text{Re}, \theta, \overline{\Delta}), \quad (2.61)$$

⁹Которое служит определением коэффициента теплоотдачи: $\alpha = q_w / (T_w - T)$.

и тем самым пренебречь величинами M и Pr (отражающими влияние на Nu факторов сжимаемости Pr и изменения соотношения теплофизических характеристик μ , c_p и κ). Тогда для замыкания (2.61) можно привлекать (независимо от модели трения) регрессионные уравнения, идентифицированные по данным измерений, где широко варьировались факторы, учитываемые определяющими величинами Re , θ и $\overline{\Delta}$.

Другой способ замыкания модели теплоотдачи (2.60) — в обход эмпирической модели вида (2.61); выразим в модели ТРУБКА:

$$q_w = \left(\alpha = -\frac{\tau_w}{u} \cdot c_p \right) \cdot (T_w - T) = \frac{\lambda}{8} \cdot \rho \cdot |u| \cdot c_p \cdot (T_w - T), \quad (2.62)$$

где τ_w — касательное напряжение на стенке (точнее, плотность потока КД от стенки к газу) по модели трения (2.57), Па.

Основание для (2.62) дает *аналогия Рейнольдса* — качественная (и приближенная количественная) аналогия процессов переноса (в поперечном направлении) в сдвиговом статистически стационарном турбулентном течении. Аналогия Рейнольдса позволяет связать осредненные потоки КД и энергии; в ее основе — допущение (приблизительно верное для течений газа в каналах) о том, что в сечениях канала на любом радиусе r выполняется равенство $Pr = Pr_r = Pr_{эфф} = 1$, т. е. что безразмерные профили $(u(r) - 0)/(u - 0)$ и $(T(r) - T_w)/(T - T_w)$ совпадают. Тогда из условий $q_w = \kappa \cdot (dT(r)/dr)_w$ и $\tau_w = \mu \cdot (du(r)/dr)_w$ получаем (2.62).

Подчеркнем, что в этом случае, используя аналогию процессов переноса КД и теплоты в турбулентном потоке и значение τ_w по эмпирической модели (2.59), модель теплоотдачи приближенно определяет (2.60) с учетом T и T_w без обращения к эмпирической модели (2.61).

Заметим, что описанные модели плотностей потоков КД τ_w (2.57) и энергии q_w (2.60) в составе модели ТРУБКА аналогичны и в том, что определяют искомые величины в квазистатическом приближении. Во-первых, их уравнения определяют τ_w и q_w через текущие локальные характеристики течения, во-вторых, модели идентифицированы по измерениям в установившихся течениях. Однако служат модели для замыкания модели неустановившегося течения — модели ТРУБКА.

Модели процессов, в частности, в РК ДВС, подробно обсуждаются в [4]. В учебном пособии [13] обсуждаются подобные (2.31)–(2.35) 3-D модели течения и расчеты по ним в пакете *AVL FIRE* (см. с. 123).

2.2.6. Модель затухающих электрических колебаний

В заключение главы о математических моделях процессов опишем модель колебаний в электрическом контуре, обладающую аналогией (см. п. 1.4) с моделью затухающих механических колебаний (см. пп. 2.2.1).

Простая модель электрических колебаний описывает аналогичные колебания тока $i(t)$ и напряжения $u(t)$ в замкнутом контуре (рис. 2.9).

Дифференциальное уравнение модели $\frac{dq}{dt} = -i$ выражает ЗС электрического заряда, учитывая ток в контуре $i = i(t)$. Учитывая также, что $\Delta u_C = \frac{q}{C}$, $\Delta u_R = -iR$, $\Delta u_L = -L \frac{di}{dt}$ и $\Delta u_C + \Delta u_R + \Delta u_L = 0$, получим систему ОДУ модели, например, в виде:

$$\frac{dCu}{dt} = -i, \quad \frac{di}{dt} = \frac{1}{L}u - \frac{R}{L}i. \quad (2.63)$$

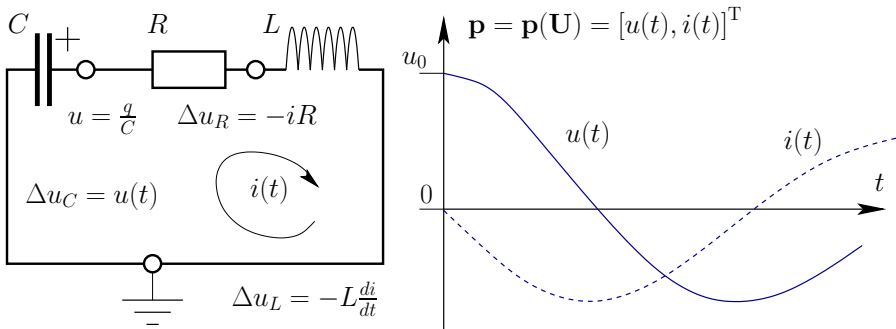


Рис. 2.9. Схема к модели электрических колебаний в контуре

Контур (на рис. 2.9) представляет собой *схему замещения* реальных компонентов электрических сетей (здесь: конденсатора, резистора и катушки) их предельно идеализированными моделями — электрическая ЕМКОСТЬ (с параметром C), электрические СОПРОТИВЛЕНИЕ (R) и ИНДУКТИВНОСТЬ (L).

Существуют также и учитывающие разного рода нелинейности и потери модели реальных (электрических, электромагнитных, электрохимических и электромеханических) компонентов. Они позволяют рассчитывать данные аспекты процессов в технических системах.

Вопросы для самоконтроля

1. Выведите модель конкретного процесса (в элементе физической системы или в системе) в виде системы ОДУ (на примере модели ОСЦИЛЛЯТОР, БАССЕЙН, РЕСИВЕР, ЦИЛИНДР и т. п.).

2. Выведите модель конкретного процесса в виде системы УЧП (на примере уравнений Навье – Стокса, уравнений квазиодномерной модели ТРУБКА течения газа или смеси газов в канале, уравнения теплопроводности и т. п.).

3. Покажите аналогию между системами уравнений двух конкретных моделей процессов разной природы (на примере электромеханической аналогии и т. п.).

4. Изложите вариант классификации моделей рабочих процессов систем двигателей по числу независимых переменных (на примере процессов в проточной части тепловых двигателей).

3. МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

В главе приведены необходимые сведения о *методах* численного решения задач по дифференциальным уравнениям (ОДУ и УЧП) моделей процессов, а также о методах решения задач оптимизации.

Вначале вводятся понятия, связанные с постановкой *задачи*, а затем и с дискретизацией (и декомпозицией) моделируемой системы, т. е. с введением расчетной сетки в пространстве независимых переменных модели процесса. Указывается на необходимость *аппроксимации* численным методом производных в ОДУ и УЧП по величинам в узлах (или ячейках) сетки и *устойчивости* алгоритма счета по нему для данной задачи и сетки — для сходимости численного решения к точному.

Показаны (на примерах изложенных в гл. 2 моделей) методы Эйлера и Рунге — Кутты для решения систем ОДУ. Показаны также классические (явные и неявные) методы решения систем УЧП на примерах простых одномерных уравнений: теплопроводности и волновых (1-го порядка по x), а также метод распада разрыва для уравнений ГД в $I-D$.

Обсуждаются (в п. 3.4) задачи многопараметрической однокритериальной оптимизации. В п. 3.5 приводится краткая характеристика аналитических и численных (итерационных) методов минимизации функций, применимых к решению таких задач.

В конце главы приведены вопросы для самоконтроля (с. 116).

3.1. Задачи анализа процессов

В гл. 1 указывалось, что математическое моделирование по сути — решение математических задач, т. е. отыскание единственных (точных) решений, соответствующих конкретным: *а*) постановке *задачи*; *б*) математической *модели*.

В расчетах процессов по нелинейным ОДУ моделей элементов систем приходится находить решения *численными* (а не *аналитическими*) методами, используя дискретное представление моделируемой (физической: природной или технической) системы. Процессы рассчитывают на ЭВМ по алгоритмам вычисления зависимых переменных в узлах (или ячейках) расч. сетки по уравнениям его модели и численного метода.

Для расчетов важны (с. 74) точная *аппроксимация* уравнений и *устойчивость* алгоритмов вычислений по методам численного решения систем ОДУ (п. 3.2) или УЧП (п. 3.3) моделей процессов.

На основе задач расчета процессов (решаемых в ходе *поверочных* расчетов при проектировании систем) решаются задачи *проектировочных* расчетов систем. Постановки их (как задач оптимизации параметров) см. в п. 3.4, а методы их решения — в п. 3.5.

3.1.1. Задачи и условия их однозначности

Начнем с задачи о *процессе* (как непрерывном изменении во времени *состояния*) в элементарном объекте — элементе, выделенном из системы при ее декомпозиции. Такая задача — прямая задача *анализа* процесса; задача с начальными данными, или *задача Коши* (фр. *Cauchy*) — ставится для математической модели, заданной системой ОДУ вида (2.4).

Решения этих задач — функции времени $\mathbf{U}(t)$ или $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}(\mathbf{U})$ (и др.); общее число ЗП не меньше «размерности» \mathbf{U} или \mathbf{p} , т. е. числа ОДУ в системе уравнений модели (рис. 3.1).

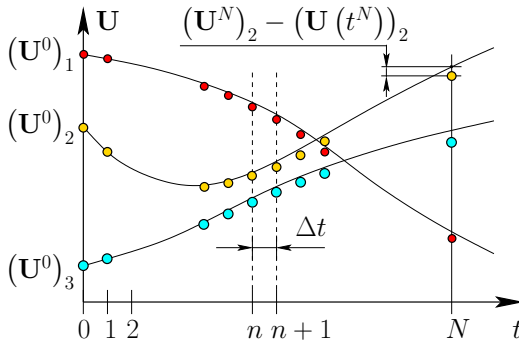


Рис. 3.1. К задаче для системы ОДУ и методам ее решения

Так, решение уравнений (2.2), (2.3) модели динамики, т. е. траекторию центра масс тела при поступательном движении в пространстве, составляют шесть искомых функций — «первичных» ЗП:

$$\mathbf{p} = [x, y, z, v_x, v_y, v_z]^T.$$

Постановку конкретной задачи определяют, задавая *условия однозначности*. Обязательно (так или иначе) задаются *начальные условия* (НУ) — известные на начальный момент $t = t_0$ процесса значения зависимых переменных $\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}(t_0)$. Так, для расчета траектории дви-

жения по модели (2.2), (2.3) в качестве начальных условий (при $t = t_0$) задаются компоненты векторов \mathbf{r}_0 и \mathbf{v}_0 .

Кроме того, в условия однозначности задачи входят (и должны быть заданы) конкретные значения параметров задачи и модели; обозначим наборы таких параметров как $\mathbf{a} = [a_1, \dots]^T$.

Общие вопросы численного решения задач (рис. 3.1) по ОДУ, описывающим процессы в элементах систем, обсуждаются далее в пп. 3.1.2.

Модели в виде систем УЧП описывают распределения (в пространстве и по времени) физических характеристик тел и сред. Тогда как модели в виде систем ОДУ описывают процессы грубее — как изменение по времени этих же величин, сосредоточенных (точнее, равномерно распределенных) внутри элементов систем.

Применительно к УЧП сказанное выше об условиях однозначности задач (включая НУ) дополняется необходимостью постановки также *граничных условий* (ГУ) — условий, ограничивающих поведение искомых функций на границах системы (расчетной области). Решения \mathbf{p} задач, решаемых по системам УЧП, — конкретные зависимости от времени и других независимых переменных. Например, для трехмерных по пространственным координатам задач и моделей $\mathbf{p} = \mathbf{p}(x, y, z, t)$. Простейшие численные методы решения систем УЧП изложены в п. 3.3.

3.1.2. Точные и численные решения задач

Корректно поставленная задача с начальными данными (задача Коши) для системы ОДУ вида (2.4) при заданных НУ \mathbf{p}_0 (или \mathbf{U}_0) всегда имеет единственное решение — частное решение системы ОДУ для конкретных НУ. Будем называть его *точным* (в отличие от *численного*, которое всегда является приближенным).

Точные решения некоторых задач (редко представляющих практический интерес) могут быть найдены аналитическими методами и выражены зависимостями, явными или неявными по отношению к \mathbf{p} или \mathbf{U} :

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(t), \mathbf{U} = \mathbf{U}(t), \mathbf{F}(\mathbf{p}, t) = 0 \text{ или } \mathbf{F}(\mathbf{U}, t) = 0. \quad (3.1)$$

В общем же случае требуется численное интегрирование системы ОДУ, для чего необходима *дискретизация* по времени, т. е. представление *процесса* в расчете как последовательности *состояний*, разделенных конечными временными интервалами $\Delta t^n = t^{n+1} - t^n$. В простейшем случае $\Delta t^n = (t^{n+1} - t^n)/N = \text{const}$ имеем равномерную по t

сетку узловых точек (рис. 3.1). При численном решении ОДУ отыскиваются не непрерывные функции вида (3.1), а функции *сеточные*, т. е. определяемые в узловых точках и ячейках *расчетной сетки*.

Численное решение (интегрирование) уравнений модели процесса должно давать численные решения (сеточные функции), аппроксимирующие точные решения задач. Более того, должна обеспечиваться *сходимость* — численное решение должно равномерно стремиться к точному решению (3.1) задачи по ОДУ модели: $\mathbf{p}^n \rightarrow \mathbf{p}(t^n)$ в пределе при $\Delta t \rightarrow 0$, т. е. при неограниченном уменьшении шага узлов сетки по независимой переменной t . Действительно, в качестве (и вместо) точного принимают численное решение задачи, полученное расчетом на достаточно мелкой (для данной модели и метода) расчетной сетке.

Условие сходимости численных решений к точным — *аппроксимация* (т. е. приближенное выражение) производных в уравнениях системы ОДУ модели в формулах численного метода (ЧМ) через величины в узлах сетки. Это необходимое, но не достаточное для сходимости условие. Достаточное условие — *устойчивость* алгоритма вычисления решения по формулам ЧМ и уравнениям модели для данной задачи (включая ее НУ и ГУ) и сетки. Т. е. «из аппроксимации и устойчивости следует сходимость» [10, с. 232].

Сказанное выше о решениях задач по ОДУ относится и к случаю, когда модель процесса — система УЧП, а точное решение задачи — $\mathbf{p} = \mathbf{p}(x, t)$ или $\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{r}, t)$. При этом формулами ЧМ аппроксимируются производные в УЧП по всем независимым переменным: x, \dots, t .

3.2. Методы решения систем дифференциальных уравнений

3.2.1. Метод Эйлера

Выражая производные в ОДУ (2.4) в узле сетки t^n (рис. 3.1) формулой

$$\left(\frac{d\mathbf{U}}{dt}\right)^n = \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\Delta t} + O(\Delta t), \quad (3.2)$$

т. е. через конечные разности $\Delta\mathbf{U}^n = \mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n$ («вперед» по времени t), и определяя правые части системы ОДУ в том же узле сетки t^n , приходим к формулам *метода Эйлера*:

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^n + \Delta t \cdot \mathbf{S}(\mathbf{U}^n, t^n), \quad (3.3)$$

$$t^{n+1} = t^n + \Delta t. \quad (3.4)$$

В данном методе искомые величины \mathbf{U}^{n+1} вычисляются по (3.3) — явной формуле, выражающей эти неизвестные величины (при обновлении на шаге от t^n до t^{n+1}) через уже известные \mathbf{U}^n . Такие методы интегрирования систем ОДУ (и систем УЧП) называются *явными*.

Формула (3.3) метода Эйлера не учитывает погрешности аппроксимации производных в (2.4), обозначенной в (3.2) как $O(\Delta t)$. Эта погрешность накапливается на каждом шаге от t^n до $t^{n+1} = t^n + \Delta t$. Из чего следует, что отклонения численного решения по (3.3) и (3.4) от точного $\mathbf{U}^n - \mathbf{U}(t^n)$ или $\mathbf{p}^n - \mathbf{p}(t^n)$ для «гладкого», т. е. мало изменяющегося на шаге решения (см. рис. 3.1) будут также порядка $O(\Delta t)$, следовательно, будут приближенно равны $\Delta t \cdot \mathbf{C}^n$, где \mathbf{C}^n — наперед не известные постоянные. В практике расчетов *сходимость* решения по этому методу к точному решению задачи на сетках¹ с разным шагом Δt действительно характеризуется зависимостью $\mathbf{U}^n - \mathbf{U}(t^n) \approx \Delta t \cdot \mathbf{C}^n$. Таким образом, явный одноэтапный метод Эйлера *аппроксимирует* точные решения задач для ОДУ (2.4) с 1-м порядком по Δt .

Для обновления от \mathbf{U}^n до \mathbf{U}^{n+1} по (3.3) правые части ОДУ вычисляются на шаге однократно. Расчету процесса данным методом соответствует блок-схема на рис. 3.2. Вводятся параметры условий однозначности задачи — параметры \mathbf{a} системы (и модели) и параметры НУ: t_0 и \mathbf{p}_0 . Ставятся НУ для НП: $t^0 = t_0$, а по первичным ЗП $\mathbf{p}^0 = \mathbf{p}_0$ (при $t = t^0$) ставятся НУ для консервативных ЗП: $\mathbf{U}^0 = \mathbf{U}(\mathbf{p}^0)$. Далее в цикле N раз обновляются t и все ЗП, для чего на шаге вычисляются: \mathbf{S}^n — по \mathbf{U}^n (или \mathbf{p}^n) и t^n ; \mathbf{U}^{n+1} — по (3.3); $\mathbf{p}^{n+1} = \mathbf{p}(\mathbf{U}^{n+1})$ и $t^{n+1} = t^n + \Delta t$ — по (3.4). После этого на каждом шаге могут быть выведены обновленные значения t^{n+1} и \mathbf{p}^{n+1} .

Пример. Получить методом Эйлера численное решение задачи Коши по уравнениям модели ОСЦИЛЛЯТОР (2.36) и (2.37) для следующих значений параметров физической системы (рис. 2.4): $m = 1$ кг; $L = 0$ м (в связи с чем и $x_1 = 0$); $k = 1$ Н/м; $c = 0,2$ Н/(м/с); параметров НУ: $x_0 = x(t_0 = 0) = x_{\max} = 0,1$ м и $(v_x)_0 = 0$ м/с, в интервале времени, равном $M = 3$ периодам затухающих колебаний на равномерной сетке с числом шагов $N = 300$.

Построить графики численного $(x^n, v_x^n, n = 0, \dots, N)$ и точного $x(t^n), v_x(t^n)$ решений и найти отклонения $\mathbf{p}^N - \mathbf{p}(t^N)$.

¹Параметром Δt (или числом шагов N) задается шаг равномерной сетки узлов по t .

Р е ш е н и е. Выполним действия по алгоритму (рис. 3.2):

1. Задаем НУ для НП $t^0 = t_0 = 0$, первичных ЗП $\mathbf{p}^0 = [x^0, v_x^0]^T$ и консервативных ЗП — $\mathbf{U}^0 = \mathbf{U}(\mathbf{p}^0) = [x^0, (mv_x)^0]^T$.

2. Вычисляем $t^N = M \cdot \frac{2\pi}{\omega_d} = 18,9445$ с, где $M = 3$, а $\frac{2\pi}{\omega_d}$ — период колебания из точного решения (2.38).

3. Вычисляем шаг по времени: $\Delta t = \frac{t^N - t^0}{N=300} = 0,0631484$ с.

4. В цикле N раз обновляем НП t и все ЗП по (3.3) и (3.4):

$$x^{n+1} = x^n + \Delta t \cdot v_x^n,$$

$$mv_x^{n+1} = mv_x^n + \Delta t \cdot [(P_x)_{\text{пр}}^n + (P_x)_{\text{д}}^n],$$

где

$$(P_x)_{\text{пр}}^n = -k [(x^n - x_1) - L], \quad (P_x)_{\text{д}}^n = -cv_x^n,$$

а обновленную скорость вычисляем, «декодируя» $(\mathbf{U}^{n+1})_2 = (mv_x)^{n+1}$:

$$v_x^{n+1} = (\mathbf{U}^{n+1})_2/m = (mv_x)^{n+1}/m,$$

после чего выводим обновленные на шаге t^{n+1} , $\mathbf{p}^{n+1} = [x^{n+1}, v_x^{n+1}]^T$, а также точные значения — $\mathbf{p}(t^{n+1}) = [x(t^{n+1}), v_x(t^{n+1})]^T$, вычисленные по формулам (2.38) точного решения.

5. Численное и точное решения выводим на графики (рис. 3.3). Из графиков видно, что численное решение значительно отклоняется от точного при числе шагов $N = 300$. Увеличивая этот параметр, лишь при $N \approx 3000$ добиваемся, чтобы отклонения уменьшились на порядок и решения на графиках практически совпали (метод Эйлера редко применяется для расчетов ввиду его неэффективности).

6. Вычисляем отклонения $\mathbf{p}^N - \mathbf{p}(t^N)$ численного решения от точного (для $t = t^{N=300}$):

$$x^N - x(t^N) \approx 0,0122972 \text{ м},$$

$$v_x^N - v_x(t^N) \approx -0,00258142 \text{ м/с}.$$

Исходный код программы приведен в прил. А на с. 130.

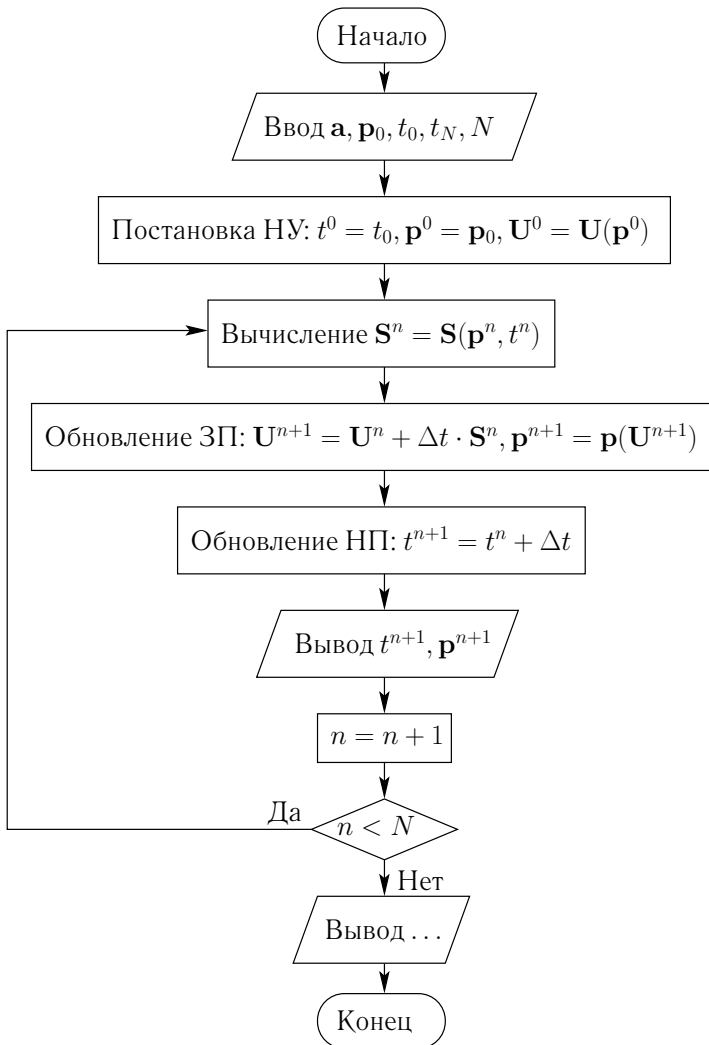


Рис. 3.2. Алгоритм расчета методом Эйлера (3.3), (3.4)

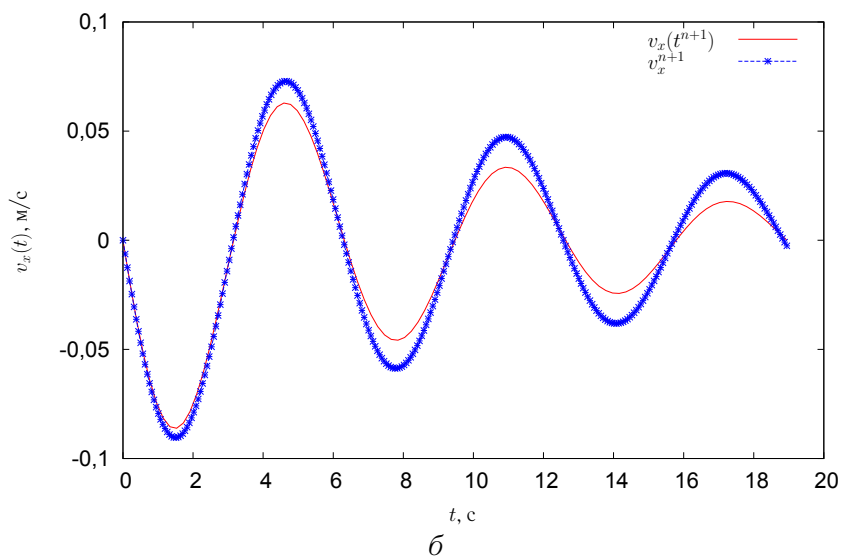
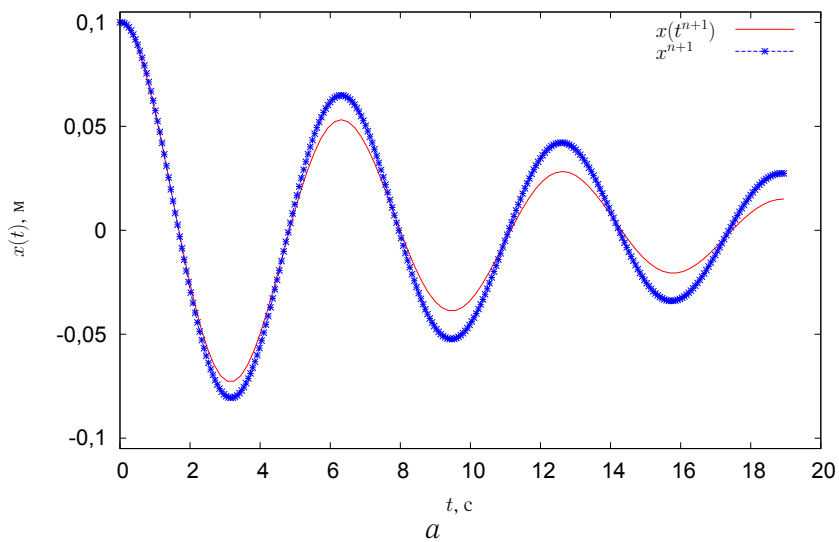


Рис. 3.3. Численное (по методу Эйлера) и точное ($x(t^{n+1})$, $v_x(t^{n+1})$) решения задачи по модели (2.36), (2.37)

3.2.2. Модификации метода Эйлера

Получим модифицированный метод Эйлера с пересчетом [10, с. 206], применив формулу (3.3) для оценки \mathbf{U}^{n+1} лишь в первом приближении: $\mathbf{U}^{n+1(1)}$. Обозначим эту величину просто как $\mathbf{U}^{(1)}$, т. е.

$$\mathbf{U}^{(1)} = \mathbf{U}^n + \Delta t \cdot \mathbf{S}^n. \quad (3.5)$$

Используем для оценки средних (в интервале $[t^n, t^{n+1}]$) величин правых частей ОДУ средние арифметические: $\frac{1}{2}(\mathbf{S}^n + \mathbf{S}^{(1)})$, где по-прежнему $\mathbf{S}^n = \mathbf{S}(\mathbf{U}^n, t^n)$ или $\mathbf{S}^n = \mathbf{S}(\mathbf{p}^n, t^n)$, а $\mathbf{S}^{(1)} = \mathbf{S}(\mathbf{U}^{(1)}, t^{(1)})$ или $\mathbf{S}^{(1)} = \mathbf{S}(\mathbf{p}^{(1)}, t^{(1)})$, причем $t^{(1)} = t^n + \Delta t$.

Тогда $\mathbf{U}^{n+1(2)}$ (во 2-м приближении) определится как

$$\mathbf{U}^{(2)} = \mathbf{U}^n + \Delta t \cdot \frac{1}{2}(\mathbf{S}^n + \mathbf{S}^{(1)}). \quad (3.6)$$

Подставим в (3.6) правые части $\mathbf{S}^n = (\mathbf{U}^{(1)} - \mathbf{U}^n)/\Delta t$, выраженные из (3.5), и ограничимся 2-м приближением ($\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^{(2)}$):

$$\mathbf{U}^{n+1} = \frac{1}{2}\mathbf{U}^n + \frac{1}{2}\mathbf{U}^{(1)} + \frac{1}{2}\Delta t \cdot \mathbf{S}^{(1)}.$$

Получается явный двухэтапный метод обновления \mathbf{U}^n до \mathbf{U}^{n+1} . Формулы данного метода Эйлера с пересчетом приведем ниже в тех же обозначениях, что и формулы (3.3), (3.4). Так, на первом (предварительном) этапе метода:

$$\mathbf{U}^{(1)} = \mathbf{U}^n + \Delta t \cdot \mathbf{S}(\mathbf{U}^n, t^n), \quad (3.7)$$

$$t^{(1)} = t^n + \Delta t, \quad (3.8)$$

а на втором (окончательном) его этапе —

$$\mathbf{U}^{n+1} = \frac{1}{2}\mathbf{U}^n + \frac{1}{2}\mathbf{U}^{(1)} + \frac{1}{2}\Delta t \cdot \mathbf{S}(\mathbf{U}^{(1)}, t^{(1)}), \quad (3.9)$$

$$t^{n+1} = t^{(1)}. \quad (3.10)$$

Порядок аппроксимации метода (3.7)–(3.10) — второй: $O(\Delta t^2)$, т. е. отклонения от точных решений систем ОДУ на достаточно мелких сетках будут составлять $\mathbf{U}^n - \mathbf{U}(t^n) \approx \Delta t^p \cdot \mathbf{C}^n$, где $p = 2$.

Наглядное объяснение 2-го порядка модифицированного метода — применение в нем не кусочно-постоянной (как в методе Эйлера, рис. 3.4, а), а кусочно-линейной реконструкции $\mathbf{S}^n(t)$ в интервале $[t^n, t^{n+1}]$ (рис. 3.4, б).

Метод Эйлера с пересчетом (3.7)–(3.10) для численного интегрирования ОДУ аналогичен методу трапеций для приближенного вычисления определенного интеграла заданной функции, а метод Эйлера (3.3), (3.4) — методу прямоугольников 1-го порядка аппроксимации [10].

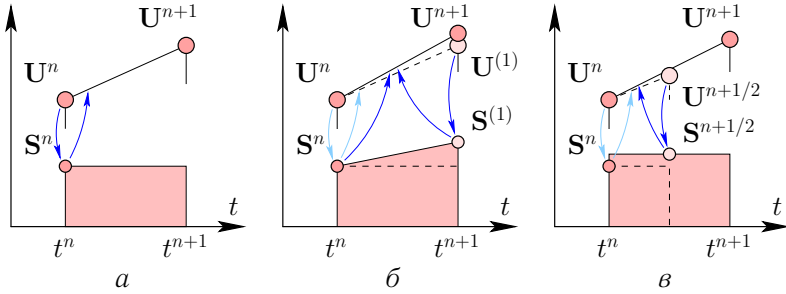


Рис. 3.4. Вычисления на шаге: а) метода Эйлера (3.3), (3.4); б) метода Эйлера с пересчетом (3.7)–(3.10); в) метода (3.11)–(3.14)

Можно построить второй модифицированный метод (также двух-этапный, но аналогичный методу прямоугольников 2-го порядка — см. рис. 3.4, в). В этом методе по значениям $\mathbf{U}^{n+1/2}$ и $t^{n+1/2}$ «на полушаге» по времени, получаемым на первом этапе метода:

$$\mathbf{U}^{n+1/2} = \mathbf{U}^n + \frac{1}{2}\Delta t \cdot \mathbf{S}(\mathbf{U}^n, t^n), \quad (3.11)$$

$$t^{n+1/2} = t^n + \frac{1}{2}\Delta t, \quad (3.12)$$

на втором этапе вычисляются правые части системы ОДУ $\mathbf{S}^{n+1/2}$ — как средние в интервале $[t^n, t^{n+1}]$:

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^n + \Delta t \cdot \mathbf{S}(\mathbf{U}^{n+1/2}, t^{n+1/2}), \quad (3.13)$$

$$t^{n+1} = t^n + \Delta t. \quad (3.14)$$

В обоих модифицированных методах 2-го порядка требуется дважды на расчетном шаге вычислять правые части системы ОДУ модели.

Как метод (3.7)–(3.10), так и метод (3.11)–(3.14) обеспечивают лучшую сходимость к точным решениям при измельчении шага Δt расчетной сетки, чем метод Эйлера (3.3), (3.4), т. е. эти методы существенно эффективнее в вычислительном плане.

Пример 1. Получить численное решение задачи Коши из примера на с. 75 методом Эйлера с пересчетом (3.7)–(3.10) с $N = 100$ и сравнить его с точным и с полученным методом Эйлера (с $N = 300$).

Решение. Выполним действия по алгоритму, отличающемуся от алгоритма метода Эйлера (рис. 3.2) лишь удвоением вычислений в цикле (численное решения обновляется на шаге в два этапа).

1–3 шага совпадают с таковыми из примера на с. 75.

4. В цикле N раз обновляем НП t и все ЗП, на первом этапе — по (3.7) и (3.8):

$$\begin{aligned}x^{(1)} &= x^n + \Delta t \cdot v_x^n, \\mv_x^{(1)} &= mv_x^n + \Delta t \cdot [(P_x)_{\text{пр}}^n + (P_x)_{\text{д}}^n], \\t^{(1)} &= t^n + \Delta t,\end{aligned}$$

где

$$(P_x)_{\text{пр}}^n = -k[(x^n - x_1) - L], \quad (P_x)_{\text{д}}^n = -cv_x^n,$$

и вычисляем обновленную скорость: $v_x^{(1)} = (\mathbf{U}^{(1)})_2/m = (mv_x)^{(1)}/m$, затем (на 2-м этапе метода методом Эйлера с пересчетом) обновляем НП t и все ЗП по (3.9) и (3.10):

$$\begin{aligned}x^{n+1} &= \frac{1}{2}x^n + \frac{1}{2}x^{(1)} + \frac{1}{2}\Delta t \cdot v_x^{(1)}, \\mv_x^{n+1} &= \frac{1}{2}mv_x^n + \frac{1}{2}mv_x^{(1)} + \frac{1}{2}\Delta t \cdot [(P_x)_{\text{пр}}^{(1)} + (P_x)_{\text{д}}^{(1)}], \\t^{n+1} &= t^{(1)},\end{aligned}$$

где

$$(P_x)_{\text{пр}}^{(1)} = -k[(x^{(1)} - x_1) - L], \quad (P_x)_{\text{д}}^{(1)} = -cv_x^{(1)},$$

и вычисляем обновленную скорость: $v_x^{n+1} = (\mathbf{U}^{n+1})_2/m = (mv_x)^{n+1}/m$, после чего выводим обновленные на шаге значения t^{n+1} , x^{n+1} , v_x^{n+1} и точные значения $x(t^{n+1})$ и $v_x(t^{n+1})$ — по формулам (2.38).

5. Численное и точное решения выводим на графики (рис. 3.5). Видно, что численное решение по методу Эйлера с пересчетом на сетке

с $N = 100$ значительно ближе к точному, чем решение по методу Эйлера (рис. 2.4) на сетке с меньшим (в 3 раза, с $N = 300$) шагом по t .

6. Увеличив шаг Δt вдвое (изменив $N = 100$ на $N = 50$), значения двух отклонений $\Delta v_x^N = v_x^N - v_x(t^N)$ численного решения от точного решения задачи по (2.38) сведем в табл. 3.1.

Таблица 3.1

Зависимость отклонения Δv_x^N от шага по времени Δt

i	N	Δt , с	Δv_x^N , м/с
1	50	0,378890	$6,740407 \cdot 10^{-3}$
2	100	0,189445	$1,680278 \cdot 10^{-3}$

Предполагая зависимость $\Delta v_x^N = \Delta t^p \cdot C^N$, свяжем отношения отклонений $\Delta v_{x1}^N / \Delta v_{x2}^N$ и шагов по времени $\Delta t_1 / \Delta t_2$; логарифмируя, выразим параметр p и убедимся, что порядок метода — второй:

$$p = \frac{\ln(\Delta v_{x1}^N / \Delta v_{x2}^N)}{\ln(\Delta t_1 / \Delta t_2)} = \frac{\ln(6,740407 / 1,680278)}{\ln 2} = 2,0041 \approx 2.$$

Фрагмент кода программы на С приведен в прил. Б на с. 134.

Пример 2. Покажем алгоритм расчета методом Эйлера с пересчетом (3.7)–(3.10) по модели ЦИЛИНДР (2.47)–(2.49).

Совершенно аналогично алгоритму обновления по модели ОС-ЦИЛЛЯТОР выполняется обновление НП t и всех ЗП модели ЦИЛИНДР на шаге 2-этапного метода Эйлера с пересчетом.

На 1-м этапе консервативные ЗП обновляются по формуле (3.7):

$$m_1^{(1)} = m_1^n + \Delta t \cdot \left[\sum_{j=1}^J (GY_1)_j + (dm_1/dt)_{\text{ср}} \right]^n,$$

$$m_2^{(1)} = m_2^n + \Delta t \cdot \left[\sum_{j=1}^J (GY_2)_j + (dm_2/dt)_{\text{ср}} \right]^n,$$

$$(me)^{(1)} = (me)^n + \Delta t \cdot \left[\sum_{j=1}^J (Gh^*)_j + (Gh^*)_{\text{топл}} - p \frac{dV}{dt} + Q_{\text{внеш}} \right]^n.$$

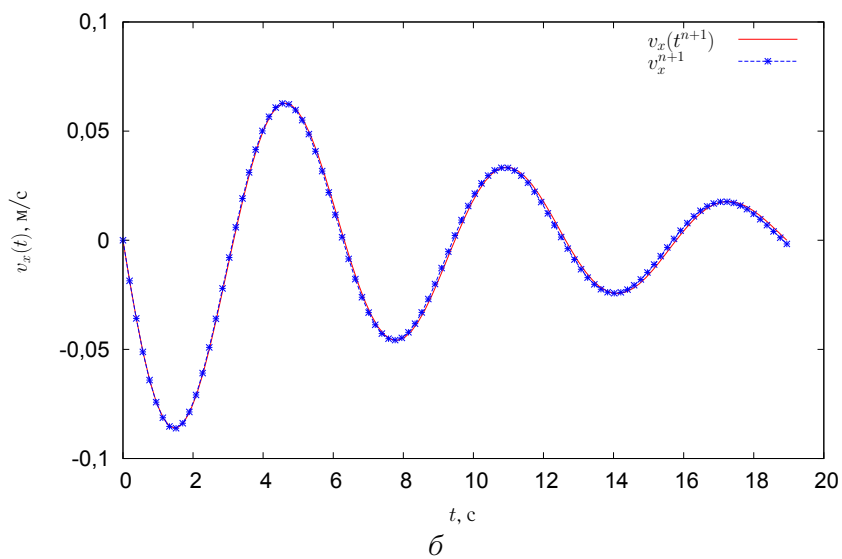
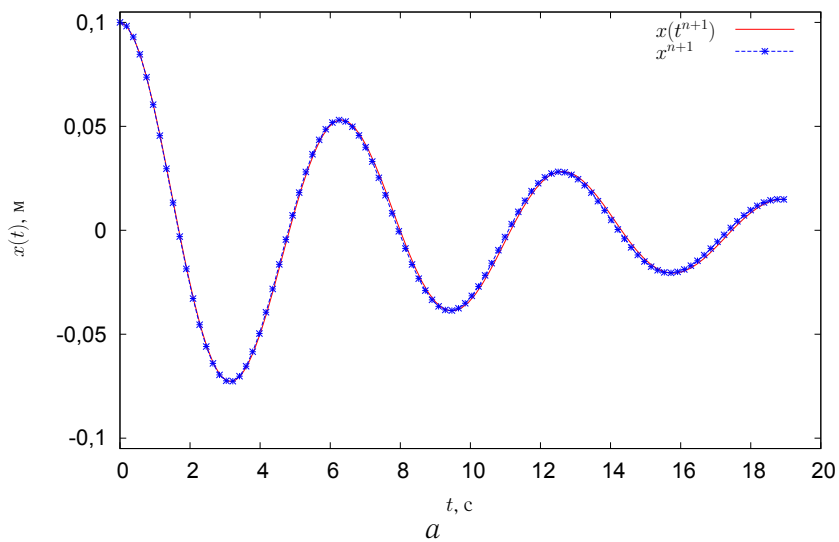


Рис. 3.5. Численное (по методу Эйлера с пересчетом) и точное (2.38) решения задачи по модели ОСЦИЛЛЯТОР (2.36) и (2.37)

На 2-м этапе — по формуле (3.9):

$$m_1^{n+1} = \frac{1}{2}m_1^n + \frac{1}{2}m_1^{(1)} + \frac{1}{2}\Delta t \cdot \left[\sum_{j=1}^J (GY_1)_j + (dm_1/dt)_{\text{cr}} \right]^{(1)},$$

$$m_2^{n+1} = \frac{1}{2}m_2^n + \frac{1}{2}m_2^{(1)} + \frac{1}{2}\Delta t \cdot \left[\sum_{j=1}^J (GY_2)_j + (dm_2/dt)_{\text{cr}} \right]^{(1)},$$

$$(me)^{n+1} = \frac{1}{2}(me)^n + \frac{1}{2}(me)^{(1)} + \frac{1}{2}\Delta t \cdot \left[\sum_{j=1}^J (Gh^*)_j - p \frac{dV}{dt} + \dots \right]^{(1)},$$

причем для вычисления «правых частей» системы ОДУ (2.47)–(2.49): $\mathbf{S}(\mathbf{p}^n, t^n)$ на 1-м этапе и $\mathbf{S}(\mathbf{p}^{(1)}, t^{(1)})$ на 2-м — подставляются соответственно t^n и $t^{(1)} = t_n + \Delta t$, а также \mathbf{p}^n и $\mathbf{p}^{(1)}$, полученные «декодированием» \mathbf{U}^n и $\mathbf{U}^{(1)}$ соответственно — после их обновления.

Так, по обновленному \mathbf{U}^{n+1} вычисляются масса рабочего тела (РТ) как смеси $m^{n+1} = m_1^{n+1} + m_2^{n+1}$, его плотность $\rho^{n+1} = m^{n+1}/V(t^{n+1})$, массовая доля свежего заряда $Y_1^{n+1} = m_1^{n+1}/m^{n+1}$ и удельная внутренняя энергия РТ $e^{n+1} = (me)^{n+1}/m^{n+1}$. Далее вычисляется температура РТ T^{n+1} как корень калорического УС смеси (2.51) $e^{n+1} = e(\rho^{n+1}, T^{n+1}, Y_1^{n+1}, \dots)$, а по термическому УС (2.50) вычисляется давление: $p^{n+1} = p(\rho^{n+1}, T^{n+1}, Y_1^{n+1}, \dots)$.

Обновленные величины \mathbf{p}^{n+1} первичных переменных (здесь: $\mathbf{p} = [p, T, Y_1, \dots]^T$) необходимы для следующего шага (1-го его этапа) метода (3.7)–(3.10) или любого (одно- и многоэтапного) метода решения систем ОДУ. Вычисленные значения t^{n+1} и \mathbf{p}^{n+1} — численное решение в узле сетки по t ; оно может быть выведено в любой приемник данных (поток байт, файл, таблицу и т. п.) для последующей обработки («пост-процессинга»: англ. *post-processing*).

Когда исходные уравнения модели выражают ЗС как условия баланса количеств массы, КД и энергии, разумно вычислять интегральные величины (например, индикаторную работу цикла L_i) суммированием «поточковых» величин по ходу численного расчета. Так, $[-p(dV/dt)]$ есть текущий поток энергии, соответствующий мощности работы изменения объема, передаваемой к РТ (и отбираемой от поршня). Подобные «ба-

лансовые» соотношения будут выполняться при любом шаге Δt . Например, вычислять индикаторную работу ($L_i = \sum_N \Delta L^n$) нужно, суммируя «потокосые» величины $-p(dV/dt)$ в правой части ОДУ энергии (2.49) на всех этапах метода; в случае метода Эйлера с пересчетом — на этапах (3.7) и (3.9) метода: $\Delta L^n = \frac{1}{2}\Delta t \cdot [p^n(dV/dt)^n + p^{(1)}(dV/dt)^{(1)}]$, т. е. с весовыми коэффициентами, равными $\frac{1}{2}$.

3.2.3. Методы Рунге – Кутты

Существуют другие явные многоэтапные методы более высоких порядков. Так, метод Эйлера (3.3), (3.4) 1-го порядка и двухэтапные методы (3.7)–(3.10) и (3.11)–(3.14) 2-го порядка — представители класса явных многоэтапных методов Рунге – Кутты [10, с. 207]. В них для вычисления \mathbf{U}^{n+1} на шаге правые части \mathbf{S} системы ОДУ вычисляются для нескольких специально выбранных значений $t \in [t^n, t^{n+1}]$ и \mathbf{U} . В итоге численное интегрирование системы ОДУ (2.4) методами этого класса сводится к приближенному вычислению на каждом шаге (на окончательном его этапе) интегралов

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^n + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{S}(t)dt$$

по точкам (выстраиваемых на этапах метода) кусочно-полиномиальных реконструкций $\mathbf{S}(t)$, $t \in [t^n, t^{n+1}]$.

Приведем (без вывода) формулы одного трехэтапного метода Рунге – Кутты 3-го порядка аппроксимации; вычисление на 1-м этапе совпадает с (3.7) и (3.8):

$$\mathbf{U}^{(1)} = \mathbf{U}^n + \Delta t \cdot \mathbf{S}(\mathbf{U}^n, t^n), \quad (3.15)$$

$$t^{(1)} = t^n + \Delta t, \quad (3.16)$$

на 2-м этапе — имеет вид

$$\mathbf{U}^{(2)} = \frac{3}{4}\mathbf{U}^n + \frac{1}{4}\mathbf{U}^{(1)} + \frac{1}{4}\Delta t \cdot \mathbf{S}(\mathbf{U}^{(1)}, t^{(1)}), \quad (3.17)$$

$$t^{(2)} = t^n + \frac{1}{2}\Delta t, \quad (3.18)$$

на 3-м (окончательном) этапе —

$$\mathbf{U}^{n+1} = \frac{1}{3}\mathbf{U}^n + \frac{2}{3}\mathbf{U}^{(2)} + \frac{2}{3}\Delta t \cdot \mathbf{S}(\mathbf{U}^{(2)}, t^{(2)}), \quad (3.19)$$

$$t^{n+1} = t^n + \Delta t = t^{(1)}. \quad (3.20)$$

В методе (3.15)–(3.20) 3-го порядка правые части системы (2.4) вычисляются на шаге трижды — в «старом» узле сетки (при $t = t^n$), в новом узле (при $t = t^{(1)} = t^{n+1}$) и в промежуточной точке (при $t = t^{(2)} = t^n + \frac{1}{2}\Delta t$). Весовые коэффициенты правых частей \mathbf{S}^n , $\mathbf{S}^{(1)}$ и $\mathbf{S}^{(2)}$ в (3.19) равны соответственно $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{6}$ и $\frac{4}{6}$, что рекомендуется самостоятельно проверить; также это нужно учитывать, если требуется самостоятельно вычислять интегральные суммы, решая задачи Коши данным методом.

Широко применяется вариант метода Рунге – Кутты 4-го порядка (см. [10, с. 208]). Формула этапа окончательного обновления этого метода в применяемых здесь обозначениях записывается как

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^n + \Delta t \cdot \frac{1}{6} \left(\mathbf{S}^n + 2\mathbf{S}^{(1)} + 2\mathbf{S}^{(2)} + \mathbf{S}^{(3)} \right).$$

Методы Рунге – Кутты — многоэтапные явные методы, их порядок равен числу этапов, или вычислений правых частей системы (2.4). Методы высоких порядков значительно эффективнее методов низких порядков: они позволяют точнее вычислять решения задач на более грубых сетках. Получаемые на той же сетке решения по методам высоких порядков существенно («на порядки») точнее.

Существуют другие численные методы для решения задач Коши по системам ОДУ (2.4) — разных порядков неявные методы Рунге – Кутты, многоэтапные явные методы Адамса – Башфорта, метод Гира и другие — более эффективные, особенно для решения так называемых жестких систем ОДУ. Здесь они не рассматриваются.

3.3. Методы решения уравнений с частными производными

Далее показаны простые методы численного решения УЧП: методы решения простых одномерных уравнений и метод распада разрыва для системы (2.22), (2.24) и (2.25) уравнений газовой динамики в I - D .

3.3.1. Методы для уравнения теплопроводности

В этом пп. показаны простейшие явный и неявные методы для одномерного уравнения теплопроводности.

Получим такое уравнение теплопроводности как частный случай уравнения энергии (2.35) для неподвижной среды с постоянными параметрами УС. Примем, что $\rho = \text{const}_1$ и $\mathbf{v} = 0$, в этом случае $E = e + |\mathbf{v}|^2/2 = e = e(T)$, и получим уравнение сохранения энергии

(при переносе теплопроводностью) в твердом теле:

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} = 0.$$

Выразим в этом уравнении компоненты вектора потока теплоты моделью на основе гипотезы Фурье ($\mathbf{q} = -\kappa \text{grad } T$) и получим:

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial z} \right).$$

Допущение о том, что $e = e(T) = cT$ (где $c = \text{const}_2$ — постоянная удельная теплоемкость) дает УЧП, описывающее поле $T(\mathbf{r}, t)$ в твердом теле с указанными свойствами:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial z} \right).$$

Для частного случая постоянного коэффициента теплопроводности ($\kappa = \text{const}_3$) уравнение теплопроводности приводится к виду

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right), \quad (3.21)$$

где $a = \kappa / (\rho c) = \text{const}_4$ — постоянный коэффициент температуропроводности, $\text{м}^2/\text{с}$.

Для описания одномерного по координате x поля $T = T(x, t)$ вместо (3.21) можно брать уравнение

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \quad (3.22)$$

Заметим, что (3.21) записано в недивергентной форме; в дивергентной форме оно может быть записано как

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_x}{\partial x} = 0, \quad (3.23)$$

где $\mathbf{U} = \{T\} = [T]^T$, $\mathbf{F}_x = \mathbf{F}_x(\mathbf{U}'_x, \mathbf{U}) = \mathbf{F}_x(\mathbf{U}'_x) = \{-a \frac{\partial T}{\partial x}\} = [-a \frac{\partial T}{\partial x}]^T$.

Если же определить векторы консервативных и потоковых ЗП как $\mathbf{U} = [\rho c T]^T$ и $\mathbf{F}_x = [-\kappa \frac{\partial T}{\partial x}]^T$, то (3.23) будет выражать явно ЗС энергии, позволяя учесть теплоемкость и теплопроводность тела конкретными моделями; т. е. можно будет задать (при $\rho = \text{const}_1$) зависимости от T

для $e = e(T)$ (т. е., учесть $c \neq \text{const}$), а также принять $\kappa = \kappa(T)$, т. е. применить более общую модель среды (материала).

Однако модель, где $c = \text{const}_2$ и $\kappa = \text{const}_3$ — наиболее простая, а ее запись (3.22) — наиболее распространенная, и численные методы ниже будут приводиться именно для нее. При записи (3.22) в дивергентной форме учтем, что (3.22) — одиночное УЧП, т. е. векторная запись вида (3.23) избыточна. Поэтому используем вместо (3.23) форму

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad (3.24)$$

где $f = f(u'_x) = -a \frac{\partial u}{\partial x}$, $a = \text{const}_4$; здесь ЗП (температура) обозначена как u , что удобно при изложении методов численного решения «модельных» УЧП.

Заметим еще, что УЧП (3.24) имеет смысл в тех подобластях, где $u(x, t)$ — гладкая (дифференцируемая) функция; для разрывных же функций за основу следует брать интегральную форму

$$\frac{d}{dt} \int_x^{x+\Delta x} u \, dx = -f(u'_x, u, \dots)|_x^{x+\Delta x} \quad (3.25)$$

закона сохранения (3.24).

Простой явный метод. Получим формулу простейшего метода для численного решения (3.22) на простейшего вида сетке в (x, t) с узлами $x_{i+1} = x_i + \Delta x$ и $t^{n+1} = t^n + \Delta t$ (рис. 3.6, а).

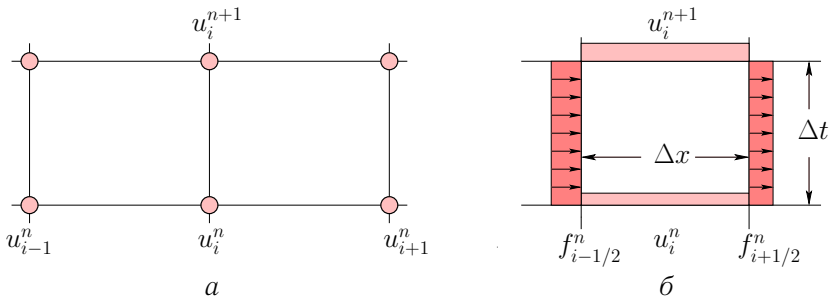


Рис. 3.6. К выводу численных методов для (3.22) как а) МКР или б) МКО

Выразим производные (3.22) или (3.24) в узле сетки — в точке (x_i, t^n) — через конечные разности:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i^n = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + O(\Delta t),$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i^n = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2).$$

Подставляя эти формулы в (3.22) и явно выражая неизвестную u_i^{n+1} (здесь: температура), получим формулу для обновления ее значения в узле с $x = x_i$ на шаге по t от t^n до t^{n+1} :

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta t \cdot a \cdot \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2}. \quad (3.26)$$

Метод (3.26) позволяет обновить неизвестную u_i^{n+1} по формуле, явно выражающей ее значение через уже известные; такие методы, как мы помним, называют *явными*. Метод одноэтапный, его формула аналогична (3.3), а порядок аппроксимации — 1-й по t и 2-й по x , символически: $O(\Delta x^2, \Delta t)$.

Заметим, что явный метод (3.26), аппроксимирующий уравнение (3.22) или (3.24) на сетке узлов (x_i, t^n) , может быть отнесен к *методам конечных разностей* (МКР). Получим другую формулировку этого же метода, позволяющую интерпретировать его и как *метод конечных объемов* (МКО).

Зададимся кусочно-постоянными (рис. 3.6, б) реконструкциями величин в ячейках и на границах. Тогда $u^n(x)$ в каждой ячейке на каждом «слое» по времени ($x \in [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$) — постоянная, равная u_i^n как среднеинтегральному значению. Также зависимость $f_{i-1/2}(t)$ на каждой $i - 1/2$ -й границе (где $x = x_{i-1/2}$) — постоянная (в интервале $t \in [t^n, t^{n+1}]$) величина, определяемая по значениям u^n в двух смежных ячейках, т. е. как $f_{i-1/2}^n = f(u_{i-1}^n, u_i^n)$.

Тогда, взяв за основу интегральную форму (3.25) уравнения теплопроводности, выражаем в нем ЗП согласно принятым реконструкциям и получаем:

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta t \cdot \left(\frac{f_{i-1/2}^n - f_{i+1/2}^n}{\Delta x} \right), \quad (3.27)$$

где по (3.24) $f = f(u'_x) = -a \frac{\partial u}{\partial x}$ и $a = \text{const}_4$; если и далее действовать в духе методов МКО и принять для $u^n(x)$ кусочно-линейную реконструкцию по u^n_{i-1} и u^n_i в двух смежных ячейках ($x \in [x_{i-3/2}, x_{i+1/2}]$), можно приближенно выразить поток на их границе $f^n_{i-1/2}$ как

$$f^n_{i-1/2} = a \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i-1/2}^n \approx f(u^n_{i-1}, u^n_i) = -a \cdot \frac{u^n_i - u^n_{i-1}}{\Delta x},$$

а поток $f^n_{i+1/2}$ на следующей (по x) границе как

$$f^n_{i+1/2} = a \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i+1/2}^n \approx f(u^n_i, u^n_{i+1}) = -a \cdot \frac{u^n_{i+1} - u^n_i}{\Delta x}.$$

Подставив выражения потоков в (3.27), получим формулу, тождественную (3.26), т. е. метод (3.26) — МКР, в котором u^n_i интерпретируются как значения в узлах сетки, и метод (3.27) — МКО, где u^n_i — средние значения в ячейках (конечных объемах) сетки, представляют собой один и тот же простейший одноэтапный явный метод.

Величина шага Δt расчета этим методом ограничена условием устойчивости (без доказательства) —

$$\Delta t \leq \Delta t_{\max} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta x^2}{a}. \quad (3.28)$$

Уравнение (3.22) в выражении для потоковой функции f содержит производную от искомой функции $u(x, t)$, что характерно для УЧП так называемого параболического типа. Допустимая по условию (3.28) величина шага по t простым явным методом быстро (по квадратичной зависимости) убывает с измельчением сетки по x , и на мелкой сетке метод становится неэффективным.

Решать задачи (как тестовые — по упрощенным УЧП, так и практические — по системам УЧП реальных многомерных моделей), используя разумные шаги по t , позволяют неявные методы.

Неявные методы для уравнения теплопроводности. Получим формулу неявного метода, аппроксимируя $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ в (3.22) или $f = f(u'_x)$ в (3.24) не на «нижнем» (при $t = t^n$), а на «верхнем» (при $t = t^{n+1}$) временном слое (рис. 3.6) узлов или ячеек сетки:

$$\frac{u^{n+1}_i - u^n_i}{\Delta t} = a \cdot \frac{u^{n+1}_{i+1} - 2u^{n+1}_i + u^{n+1}_{i-1}}{\Delta x^2}. \quad (3.29)$$

Из (3.29) уже нельзя выразить неизвестную u_i^{n+1} явной формулой, подобной (3.26), т. к. в (3.29) три неизвестные (u_i^{n+1} , u_i^{n+1} и u_i^{n+1}), и нужно решать систему уравнений. Для линейного УЧП (3.22) с $a = \text{const}$ система уравнений (3.29) — линейная (с «трехдиагональной» матрицей) и решается прямым методом прогонки [10]; в общем случае для нелинейных УЧП и их систем нужны более сложные итерационные методы.

Заметим, что неявный метод (3.29) для (3.22) безусловно устойчив, т. е. величина шага Δt в (3.29) не ограничена. Другой неявный метод —

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = a \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} \right), \quad (3.30)$$

который получается, если выразить $(\frac{\partial u}{\partial t})_i^{n+1/2}$ как среднее арифметическое $(\frac{\partial u}{\partial t})_i^{n+1}$ и $(\frac{\partial u}{\partial t})_i^n$, также не имеет ограничения на Δt по критерию устойчивости. Это метод Кранка — Николсон для (3.22).

Порядок аппроксимации (3.30) — второй: $O(\Delta x^2, \Delta t^2)$, тогда как у методов (3.26) и (3.29) — лишь первый по t и второй по x , т. е. $O(\Delta x^2, \Delta t)$. Очевидно, что метод (3.30) — линейная комбинация двух других (с весовыми коэффициентами, равными $\frac{1}{2}$).

Уравнение теплопроводности — в форме (3.22), (3.24) или (3.25) — служит простым («модельным») уравнением, позволяющим теоретически изучить методы решения уравнений, содержащих так называемые градиентные члены (например, уравнений МЖГ, учитывающих молекулярный и турбулентный перенос).

3.3.2. Методы для модельных волновых уравнений

Получим теперь модельные одномерные УЧП, имеющие ряд особенностей уравнений динамики невязкого газа (нелинейность; в линеаризованном варианте — конвективный перенос, описываемый системой УЧП моделей МЖГ или уравнений акустики). Покажем далее простейшие методы их численного решения.

Модельное нелинейное уравнение. Построим модельное УЧП также с одной пространственной переменной x , взяв за основу систему ЗС (2.14)–(2.16) и предельно упростив ее. Так, оставим лишь уравнение (2.15), выражающее ЗС КД при течении по каналу, и упростим его, пренебрегая следующим: 1) «путевыми потерями» в канале, т. е. примем $\tau_w(x, t) = 0$ и $q_w(x, t) = 0$; 2) изменением площади сече-

ния F , т. е. примем $F(x) = F_0 = \text{const}_1$ и разделим на F_0 ; 3) изменением плотности ρ , т. е. примем $\rho(x, t) = \rho_0 = \text{const}_2$ и разделим на ρ_0 и 4) давлением p , т. е. примем $p(x, t) = 0$. Уравнение примет частный по отношению к (2.17) и даже к (3.25) вид:

$$\frac{d}{dt} \int_x^{x+\Delta x} u \, dx = -f(u)|_x^{x+\Delta x}, \quad (3.31)$$

где в данном случае $f(u) = u^2$ — потоковая функция; вводим далее произвольно множитель $\frac{1}{2}$ в $f(u)$ и получаем $f(u) = u^2/2$.

Тогда (в пределе при $\Delta x \rightarrow 0$) уравнению (3.31) в подобластях гладкости $u(x, t)$ будет эквивалентно УЧП

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0 \quad (3.32)$$

с потоковой функцией $f(u) = u^2/2$ — уравнение Бюргера (англ. *Burger's equation*). Подставляя $d(u^2/2) = u \, du$, получим недивергентную форму (3.32):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (3.33)$$

которая также является его характеристической формой². Так, в силу (3.33) значения $u(x, t)$ постоянны вдоль характеристических кривых, задаваемых уравнением $\frac{dx}{dt} = u$. Наклон $\frac{dx}{dt} = u = u(x, t)$ характеристической кривой в (x, t) изменяется в силу нелинейности вторых членов уравнений (3.32) или (3.33). Соответствующие члены уравнений газовой динамики описывают нелинейный эффект упругих возмущений (волн конечной амплитуды) в сжимаемой жидкости.

Модельное линейное уравнение. Линеаризуем уравнение (3.33), полагая в нем коэффициент перед $\frac{\partial u}{\partial x}$ постоянным ($u \rightarrow c = \text{const} \neq 0$):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (3.34)$$

Характеристические кривые полученного уравнения (3.34) — линии с постоянным в (x, t) наклоном $\frac{dx}{dt} = c$, м/с. Точное решение (3.34) при $t > t_0$ поэтому есть $u(x, t) = u(x - c(t - t_0), t_0)$, т. е. получается смещением заданного в НУ профиля $u(x, t_0)$ со скоростью c .

²О характеристической форме системы УЧП газовой динамики в I - D см. в [11].

Уравнение (3.34) с параметром $c = \text{const} > 0$ — простейшего вида УЧП так называемого гиперболического типа. Интегральная и дивергентная его формы — (3.31) и (3.32) соответственно, с потоковой функцией $f(u) = cu$. Второй член уравнения (3.34) аналогичен конвективным членам уравнений моделей МЖГ, описывающим эффект адвекции — переноса с движущейся жидкостью некоторой ее характеристики (температуры, массовой доли примеси и т. п.) отдельно от эффектов переноса упругими волнами и диффузионных явлений.

Простой явный метод. Получим формулу простейшего явного метода решения (3.34) на введенной в (x, t) равномерной (рис. 3.6, а) сетке узлов $x_{i+1} = x_i + \Delta x$ и $t^{n+1} = t^n + \Delta t$.

Для определенности примем, что $c > 0$. Выразим производные в (3.34) в узле сетки $x = x_i$ и $t = t^n$ через конечные разности. Причем производную по x аппроксимируем односторонней «разностью назад»:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i^n = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + O(\Delta t), \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i^n = \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} + O(\Delta x).$$

Подставляя эти формулы в (3.34), получим формулу МКР для обновления на шаге по t искомого значения в узле с $x = x_i$:

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta t \cdot c \cdot \frac{u_{i-1}^n - u_i^n}{\Delta x}. \quad (3.35)$$

Формулу МКР также вида (3.35) получим, взяв за основу уравнение (3.31) с $f = cu$ и задавшись кусочно-постоянными распределениями (рис. 3.6, б): $u_i(x, t^n) = u_i^n$ и $u_i(x, t^{n+1}) = u_i^{n+1}$ (в ячейке, при $x \in [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$), а также $f_{i-1/2}(t) = f_{i-1/2}^n$ и $f_{i+1/2}(t) = f_{i+1/2}^n$ (на ее границах, в пределах расчетного шага $t \in [t^n, t^{n+1}]$); так вначале получим формулу, идентичную (3.27):

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta t \cdot \left(\frac{f_{i-1/2}^n - f_{i+1/2}^n}{\Delta x} \right), \quad (3.36)$$

в которой определим $f_{i-1/2}^n$ и $f_{i+1/2}^n$ на границах по $f = cu$, взяв ЗП из ячейки *слева* от каждой границы (т. к. $c > 0$). После подстановки $f_{i-1/2}^n = cu_{i-1}^n$ и $f_{i+1/2}^n = cu_i^n$ в (3.36) получим формулу (3.35), которую легко преобразовать к виду

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{c\Delta t}{\Delta x} (u_{i-1}^n - u_i^n) = \frac{c\Delta t}{\Delta x} u_{i-1}^n + \left(1 - \frac{c\Delta t}{\Delta x}\right) u_i^n. \quad (3.37)$$

Метод (3.35) или (3.37) получил название метода донорской ячейки (рис. 3.7).

Действительно, кусочно-постоянное распределение на «старом» слое по t сдвигается за шаг по времени Δt на $c\Delta t$, т. е. в каждую ячейку из ячейки слева (при $c > 0$) вступит «простая волна», несущая значение u из соответствующей ячейки. В результате значение u_i^{n+1} по (3.35) или (3.37) определится как бы осреднением точного (разрывного) распределения $u(x, t \rightarrow t^n - 0)$ в ячейке (которое есть точное решение задачи с разрывными НУ, найденное на данном шаге). В результате такого осреднения некоторое количество u попадет в правую часть данной ячейки из ячейки слева от нее (если $c > 0$), что противоречит описанию явления в УЧП (3.34).

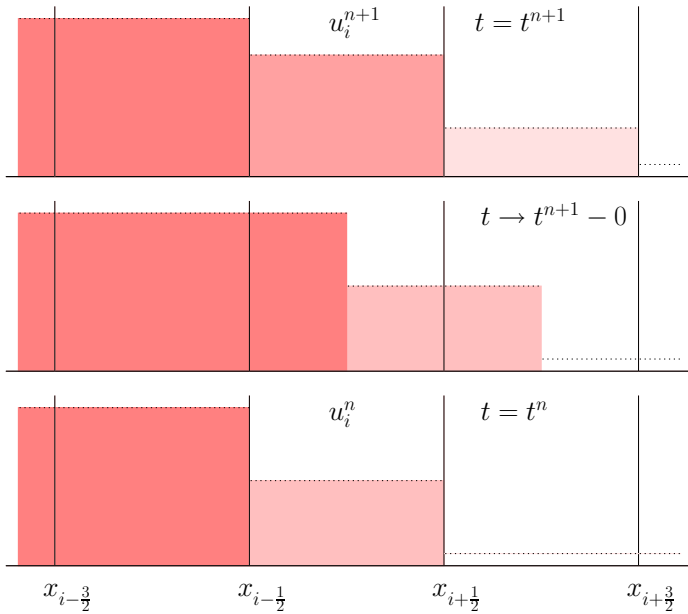


Рис. 3.7. К объяснению эффекта численной (сеточной) диффузии на примере метода донорской ячейки (3.35) или (3.37)

В численных решениях, полученных такими методами, области резкого изменения ЗП (в пределе — разрывы ЗП) сглаживаются на интервалах в несколько ячеек. Можно сказать, что таким методам присуще свойство численной (или сеточной) диффузии, которое проявляется

в численных решениях сглаживанием полей ЗП, аналогичным сглаживанию от физических эффектов (диффузия, вязкость, теплопроводность), за описание которых отвечают соответствующие члены УЧП моделей.

Условие устойчивости простого явного метода (3.35) для решения УЧП (3.34) — ограничение на шаг по t :

$$\Delta t \leq \Delta t_{\max} = \frac{\Delta x}{c}. \quad (3.38)$$

Интерпретация условия (3.38) проста: шаг по времени Δt не должен превысить значения Δt_{\max} , за которое характеристические прямые (при $c = \text{const}$), а также фронты простых волн (рис. 3.7), движущиеся со скоростью c , проходят расстояние, равное размеру Δx ячейки. Действительно, эквивалентная (3.35) формула (3.37) дает адекватное «осреднение» по ячейке именно при $0 < \Delta t \leq \Delta t_{\max}$.

Условие устойчивости (3.38) называют *условием Куранта*, в англоязычной литературе — *CFL stability condition* (от *Courant, Friedrichs, Lewy*); также используют форму записи

$$\Delta t = CFL \cdot \frac{\Delta x}{c}, \quad (3.39)$$

где $CFL = \Delta t / \Delta t_{\max}$ — *число Куранта* (англ. *CFL number*) — безразмерный шаг по времени. Допустимый интервал CFL при решении (3.34) методом (3.35): $0 < CFL \leq 1$. Для разных значений CFL *численная диффузия* (рис. 3.7) проявляется в разной степени (вплоть до исчезновения при $CFL = 1$). При $CFL > 1$ алгоритм счета по (3.35) неустойчив — в численном решении u_i^n возникают осцилляции и решение расходится.

Условия устойчивости, подобные (3.39), присущи явным методам решения УЧП так называемого гиперболического типа, например: система УЧП Эйлера или УЧП (2.19)–(2.21) I - D модели течения в канале. Так, соответствующий рассмотренному метод решения нелинейного уравнения Бюргера — (3.36), где $f_{i-1/2}^n = (u_{i-1}^n)^2/2$ и $f_{i+1/2}^n = (u_i^n)^2/2$, при условии, что $u_i^n \geq 0, i = 1, \dots, I$. Здесь в условии устойчивости вида (3.39) подставляют $\max(u_i^n)$ — характеристическую скорость в самой «критичной» ячейке, т. е. нужно, чтобы

$$\Delta t = CFL \cdot \frac{\Delta x}{\max(u_i^n)}, \quad (3.40)$$

и здесь (и при решении явными методами других нелинейных гиперболических УЧП и их систем) безразмерный шаг по времени CFL был меньше 1, т. е. удовлетворял критерию Куранта с запасом (который должен быть бóльшим для пространственных задач).

Все рассмотренные явные методы для УЧП могут быть записаны как (3.27) или (3.36). Порядок аппроксимации по t в них — первый, т. к. производные $\frac{\partial u}{\partial t}$ аппроксимированы в них простейшими «разностями вперед» — как в методе Эйлера для ОДУ (3.3). Методы первого порядка по t неэффективны для расчетов процессов в системах как по ОДУ, так и по УЧП. Кроме того, 1-й порядок метода по x , как в (3.35), вынуждает использовать довольно мелкие сетки для подавления численной диффузии. Это неэффективно уже для расчетов процессов в $1-D$, а для трехмерных ($3-D$) по пространству задач — тем более.

Для неявных методов ограничения на шаг по устойчивости не столь строгие (т. е. обычно не требуется $CFL < 1$). Все же следование рекомендациям по CFL облегчает выбор разумного шага Δt , позволяя соотносить шаг с размером ячейки сетки и с характерной скоростью (например, скоростью $|\mathbf{v}|$ движения вещества) для повышения точности расчетов неустановившихся течений по моделям МЖГ.

Пример. Получить и сравнить численное (по методу донорской ячейки) и точное решения задачи в $x \in [0, x_{\max}]$ для $t = t_{\max}$ (при $t_0 = 0$) по уравнению (3.31) с потоковой функцией $f(u) = cu$, где $c = \text{const} > 0$, в недивергентной форме (3.34).

Условия однозначности:

- $c = 6$ м/с, $l = 0,6$ м, $x_{\max} = 1,0$ м, $t_{\max} = l/c = 0,1$ с;
- НУ: $u(x, 0) = 1$ при $0,1 < x < 0,3$, иначе $u(x, t_0) = 0$;
- ГУ: $u(0, t) = 0$ (на левой границе, при $x = 0$).

Расчетная сетка: $N_x = 100$ ячеек по x , $N = 80$ шагов по t .

Решение. Выполним действия:

1. Вычислим $\Delta x = (x_{\max} - 0)/I = 1,0/100 = 0,01$ м.
2. Вычислим шаг по t : $\Delta t = (t_{\max} - 0)/N = 0,1/80 = 0,00125$ с.
3. Проверим по (3.39): $CFL = \frac{c\Delta t}{\Delta x} = 0,75 < 1$, допустимо.
4. Рассчитаем по (3.36) при $f_{i-1/2}^n = cu_{i-1}^n$, выведем на рис. 3.8.

Из рис. 3.8 видно, что отклонение численного решения от точного обусловлено значительным влиянием *численной диффузии*.

Исходный код программы приведен в прил. В на с. 136.

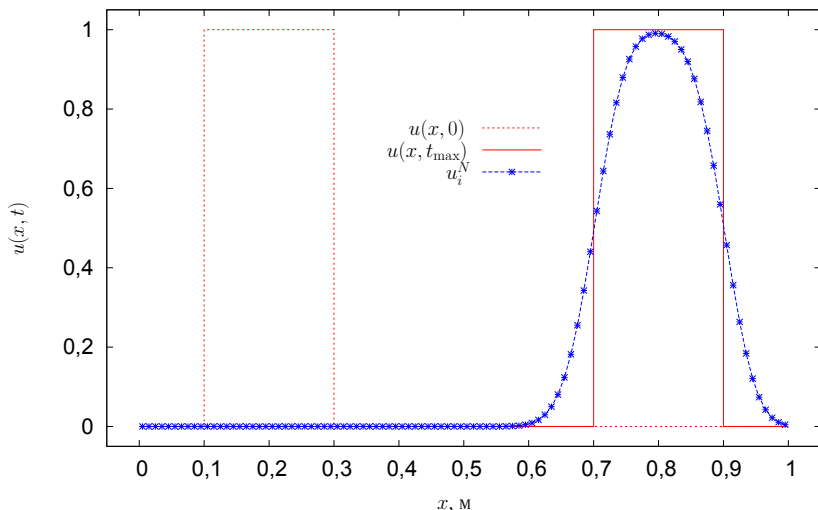


Рис. 3.8. Начальное условие $u(x, 0)$, точное $u(x, t_{\max})$ и численное u_i^N решения задачи методом донорской ячейки — (3.35) или (3.37)

3.3.3. Метод распада разрыва С. К. Годунова

Явный метод распада разрыва³ — консервативный и монотонный численный метод для нахождения решений задач газовой динамики (ГД), включая решения с разрывами искомых функций. Метод имеет 1-й порядок аппроксимации для «гладких» (без разрывов) решений.

Покажем метод распада разрыва на примере системы уравнений ГД в интегральной форме (2.22), т. е. для простейшей модели плоского (в $1-D$) движения газа. Замкнув (2.22) уравнениями состояния (2.24) и (2.25), получим замкнутую модель движения совершенного газа с разрывами искомых функций $p(x, t)$, $T(x, t)$, $u(x, t)$ и т. д.

Аналогичную (3.36) формулу метода распада разрыва как МКО получим из (2.22), если также зададимся кусочно-постоянными распределениями консервативных переменных \mathbf{U} в ячейках и потоковых пере-

³Предложен С. К. Годуновым и носит его имя.

менных \mathbf{F}_x на границах ячеек на шаге Δt ; имеем:

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n + \Delta t \cdot \left(\frac{(\mathbf{F}_x)_{i-1/2}^n - (\mathbf{F}_x)_{i+1/2}^n}{\Delta x} \right). \quad (3.41)$$

Таким образом, метод распада разрыва (метод С. К. Годунова) — своего рода обобщение метода донорской ячейки, записанного в форме (3.36) для одиночного нелинейного УЧП. Обобщение состоит в том, что (2.22) образуют уже *систему* нелинейных уравнений ГД; из-за этого вычисление потоков на границе ячейки

$$(\mathbf{F}_x)_{i-1/2}^n = \mathbf{F}_x(\mathbf{U}_{i-1}^n, \mathbf{U}_i^n)$$

выполняется не копированием величин из расположенной «выше по потоку» ячейки, как в (3.35), а требует решения *задачи о распаде разрыва* (рис. 3.9). Указанная задача — о течении после распада начального разрыва на границе ячеек — решается на каждой границе в начале каждого шага [11].

Решение задач по уравнениям модели (2.22), (2.24) и (2.25) имеет вид функций ЗП от НП (т. е. от x и t) — например, «первичных» переменных $\mathbf{p} = p(x, t)$, где $\mathbf{p} = [p, T, u]^T$, т. е. $p(x, t)$, $T(x, t)$, $u(x, t)$. Для получения численных решений в области (x, t) вводится сетка ячеек или узлов, для прямоугольной области и в простейшем случае — равномерная, с постоянными шагами ($\Delta x = (x_{\max} - x_{\min})/N_x$ по x и Δt — по t).

В ячейки (или узлы) сетки заносят НУ $\mathbf{p}_0 = p(x, t_0)$. Так, если применяется метод распада разрыва (3.41), то в ячейки (конечные объемы, а не узлы) заносят начальные значения $\mathbf{U}_i^0 = \mathbf{U}(\mathbf{p}_i^0)$ по выражениям для «кодирования» \mathbf{p} в \mathbf{U} . В данном примере ($i = 1, \dots, N_x$):

$$\rho_i^0 = \frac{p_i^0}{RT_i^0}, \quad (\rho u)_i^0 = \rho_i^0 \cdot u_i^0, \quad (\rho E)_i^0 = \rho_i^0 \cdot E_i^0, \quad E_i^0 = e_i^0 + \frac{(u_i^0)^2}{2},$$

$$e_i^0 = c_v T_i^0, \quad p_i^0 = p(x_i, t^0), \quad T_i^0 = T(x_i, t^0), \quad u_i^0 = u(x_i, t^0),$$

т. е. согласно НУ и с учетом УС (2.24) и (2.25).

На основе обновленных по (3.41) на шаге от \mathbf{U}_i^n до \mathbf{U}_i^{n+1} ($n = 0, \dots, N - 1$) по тем же уравнениям модели теперь вычисляются первичные ЗП посредством «декодирования»⁴ обновленных \mathbf{U}_i^{n+1}

⁴В обозначениях для сеточных функций — из $\mathbf{U}_i^{n+1} = [\rho_i^{n+1}, (\rho u)_i^{n+1}, (\rho E)_i^{n+1}]^T$ в $\mathbf{p}_i^{n+1} = [p_i^{n+1}, T_i^{n+1}, u_i^{n+1}]^T$.

В \mathbf{p}_i^{n+1} —

$$u_i^{n+1} = \frac{(\rho u)_i^{n+1}}{\rho_i^{n+1}}, \quad E_i^{n+1} = \frac{(\rho E)_i^{n+1}}{\rho_i^{n+1}},$$

$$e_i^{n+1} = E_i^{n+1} - \frac{(u_i^{n+1})^2}{2}, \quad T_i^{n+1} = \frac{e_i^{n+1}}{c_v}, \quad p_i^{n+1} = \rho_i^{n+1} R T_i^{n+1}.$$

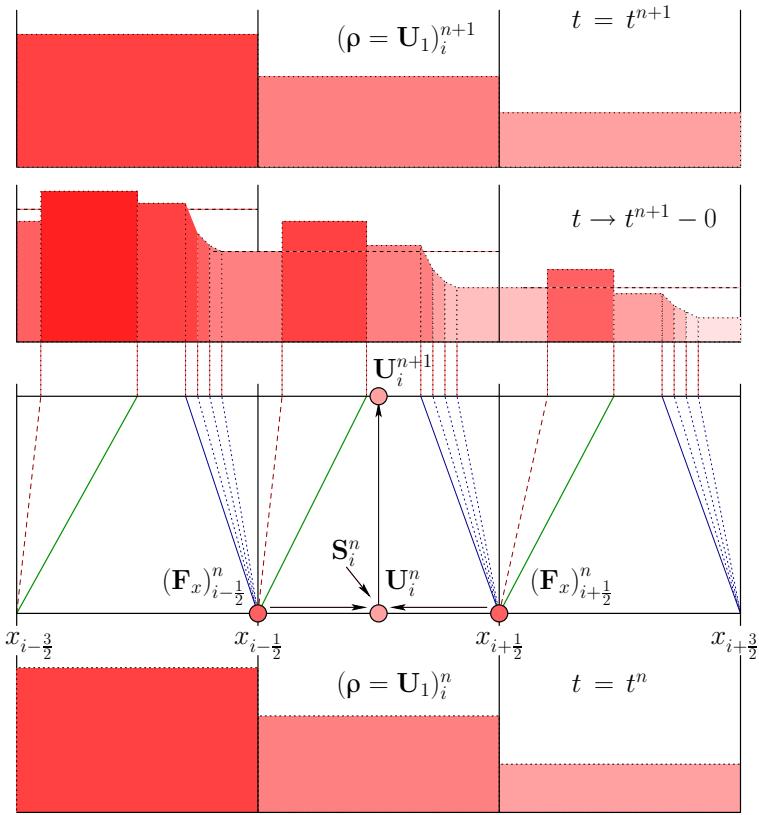


Рис. 3.9. Схема обновления решения в ячейках по методу распада разрыва; профили решения характерны для плотности $\rho = \mathbf{U}_1$ (ср. с рис. 3.7)

Устойчивость метода распада разрыва ограничена условием

$$\Delta t = CFL \cdot \frac{\Delta x}{\max(c_i^n + |u_i^n|)},$$

где CFL обычно принимается с запасом, т. е. несколько менее 1; очевидно, это обобщение условия (3.40), где в знаменателе также фигурирует характеристическая скорость в самой «критичной» ячейке; c_i^n — локальная (в ячейке) скорость звука [11]. В данном случае, т. е. для газа с УС (2.24), она определяется как $c = \sqrt{\gamma RT}$, где $\gamma = c_p/c_v = \text{const}$.

Описанный метод (как и метод донорской ячейки) характеризуется формально 1-м порядком аппроксимации по x и по t . Степенной зависимостью от Δx и Δt (с показателем, близким к 1) должны характеризоваться отклонения численных решений, полученных на сетках с достаточно малыми параметрами Δx и Δt , от точных решений задач без разрывов ЗП.

Для решения задач ГД на практике методы первого порядка обычно не используют. Существуют явные и неявные консервативные монотонные методы повышенной точности, полученные путем обобщения метода распада разрыва на кусочно-полиномиальные (более высоких порядков) аппроксимации («реконструкции») решения в ячейках и на их границах. Такие методы решения уравнений моделей движения газа (как в 1-D, так и в 3-D) показаны в [12].

Пример. Получить по методу распада разрыва численное решение задачи о распаде разрыва заданных в НУ (при $t_0 = 0$) параметров состояния (\bar{p}_L — слева и \bar{p}_R — справа от точки $0,5x_{\max}$) неподвижного ($u_L = u_R = 0$) газа с параметрами УС: $\gamma = 1,4$; $R = 287,1$ Дж/(кг · К); $c_v = R/(\gamma - 1) = 717,75$ Дж/(кг · К), по модели (2.22), (2.24) и (2.25), и сравнить его с точным решением — в области $x \in [x_{\min} = 0, x_{\max}]$, при $t = t_{\max}$.

Параметры условий однозначности:

- $t_{\max} = 0,08$ с;
- $x_{\max} = 100$ м;
- НУ: $p_L = 200000$ Па; $p_R = 100000$ Па; $T_L = T_R = 300$ К;
- ГУ: условия отражения — на левой и на правой границах.

Параметры сетки: $N_x = 100$ ячеек по x , $N = 80$ шагов по t .

Решение. Численное решение получено программой для ЭВМ, в которой реализован метод распада разрыва.

(Сокращенный исходный текст ее приведен в прил. Г на с. 138).

Графики плотности (из численного и точного решений задачи) показаны на рис. 3.10.

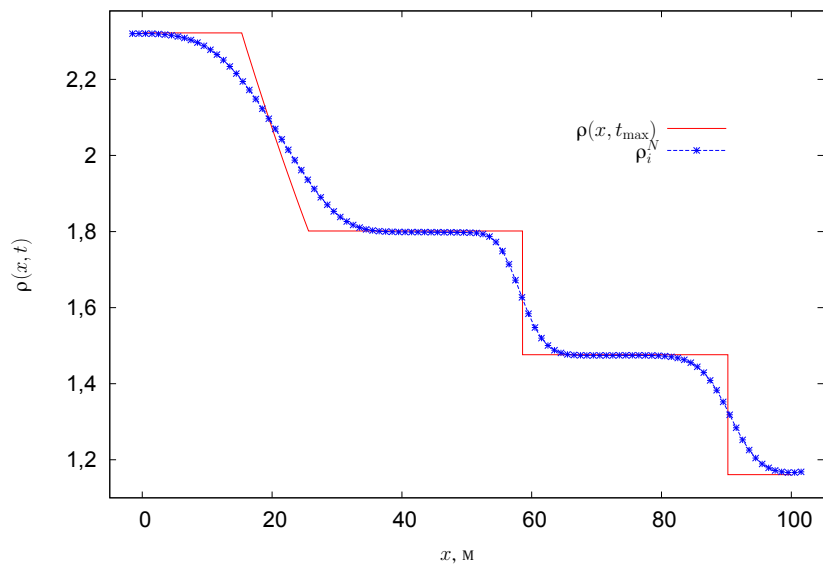


Рис. 3.10. Численное решение ρ_i^N задачи, полученное методом распада разрыва и точное решение $\rho(x_i, t^N = t_{\max})$

3.3.4. Метод решения уравнений модели ТРУБКА

Этот метод (модель ТРУБКА описана в пп. 2.2.5) получается как обобщение метода распада разрыва (пп. 3.3.3). Обобщение связано с учетом в модели ТРУБКА двух ($K = 2$) компонентов смеси, трения (τ_w), теплоотдачи (q_w) и переменного сечения $F = F(x)$.

Одноэтапный вариант метода для уравнений модели ТРУБКА вида (2.17), в которых $\mathbf{S}F = [0, 0, p \frac{dF}{dx} + \tau_w \Pi, q_w \Pi]^T$, а также

$$\mathbf{U}F = \begin{Bmatrix} \rho_1 F \\ \rho_2 F \\ \rho u F \\ \rho E F \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{F}_x F = \begin{Bmatrix} \rho_1 u F = \rho Y_1 u F = GY_1 \\ \rho_2 u F = \rho Y_2 u F = GY_2 \\ (\rho u^2 + p)F = Gu + pF \\ (\rho u E + pu)F = Gh^* \end{Bmatrix},$$

получим как аналог метода распада разрыва (3.41) для системы (2.22). Для этого также зададимся кусочно-постоянными распределениями зависимых переменных $\mathbf{U}F$ и $\mathbf{S}F$ в пределах ячеек, а $\mathbf{F}_x F$ — на границах ячеек (в пределах шага по времени Δt). Как следствие, получим (сравн. с (3.41)):

$$(\mathbf{U}F)_i^{n+1} = (\mathbf{U}F)_i^n + \Delta t \cdot \left[\frac{(\mathbf{F}_x F)_{i-1/2}^n - (\mathbf{F}_x F)_{i+1/2}^n}{\Delta x} + (\mathbf{S}F)_i^n \right], \quad (3.42)$$

где $F_i = F(x_i)$ и $F_{i\pm 1/2} = F(x_{i\pm 1/2})$ — площади сечения в центре и на границах ячейки как конечного объема; профиль сечения задан как $F(x)$, по нему определена производная $(\frac{dF}{dx})_i$; заданы также периметры Π_i и другие величины (Δ_i и T_{wi}) для расчета $(\mathbf{S})_i^n$.

Тогда, определив объем ячейки (в данном случае как $V_i = F_i \Delta x$) и обозначив дифференциальный разностный оператор как

$$\mathbf{L}_i^n = \left[\frac{(\mathbf{F}_x F)_{i-1/2}^n - (\mathbf{F}_x F)_{i+1/2}^n}{\Delta V_i} + \mathbf{S}_i^n \right],$$

где $(\mathbf{F}_x F)_{i-1/2}^n$ — потоки на границе, возможно, вычисленные с учетом (средних по объему ячеек) параметров состояния и скорости $\mathbf{p} = [p, T, u, Y_1]^T$, а также сечений F в ряде смежных ячеек, т. е.

$$(\mathbf{F}_x F)_{i-1/2}^n = (\mathbf{F}_x F)_{i-1/2}^n ((\mathbf{U}F)_{i-2}^n, (\mathbf{U}F)_{i-1}^n, (\mathbf{U}F)_i^n, (\mathbf{U}F)_{i+1}^n),$$

можно написать формулы методов обновления характеристик РТ в ячейках от \mathbf{U}_i^n до \mathbf{U}_i^{n+1} (например, явных многоэтапных методов).

Так, формула обновления по методу Эйлера (3.3) —

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n + \Delta t \mathbf{L}_i^n,$$

по методу Эйлера с пересчетом (3.7), (3.9) —

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_i^{(1)} &= \mathbf{U}_i^n + \Delta t \mathbf{L}_i^n, \\ \mathbf{U}_i^{n+1} &= \frac{1}{2} \mathbf{U}_i^n + \frac{1}{2} \mathbf{U}_i^{(1)} + \frac{1}{2} \Delta t \mathbf{L}_i^{(1)}, \end{aligned}$$

а по методу Рунге – Кутты (3.15), (3.17) и (3.19) —

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_i^{(1)} &= \mathbf{U}_i^n + \Delta t \mathbf{L}_i^n, \\ \mathbf{U}_i^{(2)} &= \frac{3}{4} \mathbf{U}_i^n + \frac{1}{4} \mathbf{U}_i^{(1)} + \frac{1}{4} \Delta t \mathbf{L}_i^{(1)}, \\ \mathbf{U}_i^{n+1} &= \frac{1}{3} \mathbf{U}_i^n + \frac{2}{3} \mathbf{U}_i^{(2)} + \frac{2}{3} \Delta t \mathbf{L}_i^{(2)}. \end{aligned}$$

Легко видеть, что уравнения модели ТРУБКА можно численно решать по времени методами Рунге – Кутты для массива ячеек (учтено в реализующем модель ТРУБКА модуле для пакета ALLBEA [14]).

Газодинамические потоки $(\mathbf{F}_x F)_i^n$ на границах ячеек в описанном методе (классе методов) могут вычисляться с повышенным (выше первого) порядком аппроксимации по x (подробнее см. в [12]).

Источниковые члены должны вычисляться на каждом этапе обновления по подмоделям модели ТРУБКА на основе текущих значений характеристик РТ в ячейке. Так, на первых этапах методов:

$$(\mathbf{S}F)_i^n = \left[0, 0, p_i^n \times \left(\frac{dF}{dx} \right)_i + \tau_{wi}^n \times \Pi_i, q_{wi}^n \times \Pi_i \right]^T,$$

где τ_{wi}^n — касательное напряжение на стенке, а q_{wi}^n — плотность теплового потока, вычисленные по (2.57) и (2.60) соответственно (на основе текущих локальных значений p_i^n , T_i^n , u_i^n и т. д.).

Векторы консервативных ЗП (после обновления на каждом из этапов метода) должны пересчитываться в обновленные векторы первичных ЗП, т. е. в характеристики РТ в ячейках. Например, на заключительном этапе каждого метода на основе обновленных значений \mathbf{U}_i^{n+1}

по уравнениям модели ТРУБКА обновляются \mathbf{p}_i^{n+1} :

$$\rho_i^{n+1} = \rho_{1i}^{n+1} + \rho_{2i}^{n+1}, \quad Y_{1i}^{n+1} = \frac{\rho_{1i}^{n+1}}{\rho_i^{n+1}}, \quad Y_{2i}^{n+1} = 1 - Y_{1i}^{n+1},$$

$$u_i^{n+1} = \frac{(\rho u)_i^{n+1}}{\rho_i^{n+1}}, \quad E_i^{n+1} = \frac{(\rho E)_i^{n+1}}{\rho_i^{n+1}}, \quad e_i^{n+1} = E_i^{n+1} - \frac{(u_i^{n+1})^2}{2},$$

и, наконец, из замыкающего модель ТРУБКА калорического УС РТ ДВС (2.51) вычисляется T_i^{n+1} — как корень уравнения

$$e_i^{n+1} = e(T_i^{n+1}, Y_{1i}^{n+1}),$$

а из термического УС РТ ДВС (2.50) — обновленное давление p_i^{n+1} в ячейке:

$$p_i^{n+1} = p(\rho_i^{n+1}, T_i^{n+1}, Y_{1i}^{n+1}) = \rho_i^{n+1} R_i^{n+1} T_i^{n+1},$$

где $R_i^{n+1} = R_1 Y_{1i}^{n+1} + R_2 Y_{2i}^{n+1}$ — удельная газовая постоянная РТ (как смеси СЗ и ПС) в ячейке.

Все рассмотренные методы решения УЧП и систем УЧП обладают свойством *консервативности* (англ. *conservation* — сохранение). Потоки на границах ячеек \mathbf{F}_x (для систем УЧП; для одиночного УЧП — f) и члены-«источники» \mathbf{S} (в объемах ячеек) сохраняющихся величин \mathbf{U} (в одиночном УЧП: u) полностью определяют в таких методах обновление значений \mathbf{U}_i^n до \mathbf{U}_i^{n+1} . Формулы таких МКО или МКР *аппроксимируют* соответствующие УЧП (из интегральных и дивергентных форм которых они выводятся), методы эти *устойчивы*, а следовательно (см. с. 74), решения по ним *сходятся* к точным решениям задач для уравнений, выражающих ЗС (причем в интегральной, т. е. наиболее общей, форме).

Другое свойство рассмотренных методов (и решений по ним) — *монотонность*, т. е. отсутствие в численных решениях осцилляций — «нефизических» (точнее, не адекватных принятым УЧП модели) всплесков сеточных значений искомым функций. Можно считать, что присущая этим методам численная диффузия как раз предохраняет численные решения от осцилляций. Т. е. этот эффект сглаживает численные решения, перераспределяя (именно таким образом) ошибки аппроксимации.

Для численных расчетов процессов по УЧП желательно применять консервативные и монотонные методы повышенных порядков аппроксимации. Такие методы (для уравнений газовой динамики в $1-D$ и $3-D$) описаны в [12], в данном же учебном пособии они не рассматриваются.

3.4. Задачи оптимизации

Под *оптимизацией* понимают «процесс выбора наилучшего⁵ варианта из всех возможных» [10, с. 160].

При проектировании изделия стремятся выбрать (синтезировать) вариант с наилучшим соответствием показателям и ограничениям, которые задаются адекватно требованиям задания на проектирование. Инженерный расчет (инженерный анализ) процессов в изделии нацелен как раз на оценку соответствия заданным там показателям изделия. Причем *синтез* структуры изделия и значений его конструктивных параметров — задача, обратная задаче *анализа* (т. е. расчета по однозначным условиям прямой задачи). Такая обратная задача — *задача оптимизации*, которая может ставиться, в принципе, в довольно общем виде (т. е. как расчетный синтез целого *объекта* любого класса) и решаться по соответствующим моделям и методам. Но объективные факторы — невозможность формализовать все требования и ограничения, недостатки моделей, методов анализа и синтеза, функционала ПО и мощности ЭВМ — затрудняют расчетную оптимизацию сложных изделий (например, тепловых двигателей и энергоустановок). В частности, поэтому при проектировании необходимо разумно сочетать математическое моделирование с физическим моделированием (см. с. 27).

В этой же связи *объекты* (двигатели и энергоустановки, их агрегаты и элементы, но также и *модели* этих объектов) оптимизируют расчетом, решая задачи оптимизации в довольно частных постановках. Чаще всего ставятся задачи подбора (по заданному критерию оптимальности) значений *параметров* объекта при заданной его *структуре*.

Ограничимся здесь также лишь задачами оптимизации параметров объекта (или его модели), причем такими, где задана целевая функция (ЦФ, англ. *objective function*) вида

$$f = f(a_1, \dots, a_n, \dots, a_N) = f(\mathbf{a}), \quad (3.43)$$

⁵Поэтому говорить «наиболее оптимальный» — ошибка, т. к. «оптимальный» и означает «наилучший» (в смысле, определенном условиями задачи оптимизации).

т. е. единственный (и однозначный) критерий оптимальности, где \mathbf{a} — массив (оптимизируемых; по [10]: проектных) параметров объекта; N — число таких параметров (размерность массива \mathbf{a}).

Если в постановку задачи оптимизации параметров, помимо (3.43), входят дополнительные условия (ограничения), то это задача условной оптимизации (или задача с ограничениями)⁶.

Такие ограничения, выраженные равенствами, здесь не рассматриваем (см. [10]). Ограничения, выраженные неравенствами — с функциями от параметров \mathbf{a} в левой части, в общем виде

$$\mathbf{g}(\mathbf{a}) \leq 0, \quad (3.44)$$

ограничивают области допустимых значений (ОДЗ) параметров \mathbf{a} . Можно наложить ограничения и на значение ЦФ:

$$\mathbf{g}(f, \mathbf{a}) \leq 0,$$

однако условие это сводится формально к (3.44), т. к. $f = f(\mathbf{a})$ — в силу (3.43). Решение задачи — координаты \mathbf{a} точки экстремума f , т. е. максимума или минимума ЦФ (с учетом ограничений).

Задачи оптимизации объектов — как правило, задачи с ограничениями. Параметры конструкции (проектные), а также другие параметры часто имеют ограниченные ОДЗ. Решением задачи с ограничениями может быть локальный экстремум ЦФ в ограниченной ОДЗ \mathbf{a} или ее значение на границе ОДЗ \mathbf{a} [10, с. 161].

Как правило, при постановке задач оптимизации параметров в качестве решения (экстремума f , т. е. точки в пространстве a_1, \dots, a_N) указывают именно *минимум* ЦФ. Причем для поиска минимумов ЦФ — решений разных задач оптимизации — нужны достаточно универсальные методы «минимизации» ЦФ, позволяющие учесть самые разные ограничения вида (3.44). На практике удобен подход к учету ограничений на ОДЗ \mathbf{a} и f , называемый *методом штрафных функций*. При его применении нарушение ограничений (3.44) величинами $\mathbf{a} = [a_1, \dots, a_N]^T$ или f приводит к тому, что специальная величина — «штрафная функция» — складывается с «нормальной» ЦФ или просто передается в качестве значения ЦФ алгоритму, реализующему метод минимизации ЦФ. Применяя метод штрафных функций, можно приспособо-

⁶В противном случае это задача безусловной оптимизации (задача без ограничений).

бить универсальные (для задач безусловной оптимизации) методы минимизации ЦФ к задачам оптимизации с ограничениями [10, с. 178].

Подчеркнем, что (3.43) лишь в общем виде указывает, что показатель качества f функционально зависит от параметров \mathbf{a} . В общем случае речь идет не о формуле, явно выражающей f ; величина f обычно вычисляется обработкой результатов поверочного расчета — решения прямой задачи о процессах в функционирующем изделии (объекте).

Заметим также, что *объектом* в задаче оптимизации параметров может быть и сама *модель*. Оптимизация ее параметров определяется как параметрическая идентификация (ПИ) модели (см. с. 22). Цель ПИ модели процесса — повышение ее адекватности, т. е. уточнение (калибровка) модели для выбранного объекта и задачи. В качестве ЦФ для ПИ модели берут определенную меру отклонения решения прямой задачи по модели от экспериментальных данных. Подбор параметров модели дает решение обратной задачи, соответствующее минимуму ЦФ, т. е. минимальному отклонению расчетных показателей от измеренных (на натурном объекте в заданных условиях прямой задачи; например, показателей ДВС на режиме или по характеристике). Подходы и методы решения задач оптимизации параметров применимы и к задачам ПИ.

Методы решения задач оптимизации параметров, т. е. нахождения экстремумов (минимумов) ЦФ вида (3.43), разбираются в следующем п. (с примерами постановок и решений задач).

Нужно отметить, что все они — методы *однокритериальной* оптимизации. Постановки и методы решения *многокритериальных* задач оптимизации в данном пособии не рассматриваются.

3.5. Методы минимизации функций

В данном п. приведен обзор методов минимизации функций нескольких действительных переменных (3.43).

По аналогии с методами решения прямых задач⁷ методы решения обратных задач (здесь — задач оптимизации параметров модели или объекта) можно грубо разделить на *аналитические* и *численные* (итерационные) методы.

Разберем эти методы, двигаясь от простого к сложному.

⁷ От расчета величин (показателей объектов) по формулам и до их расчета путем обработки решений задач Коши.

3.5.1. Аналитические методы

В некоторых (весьма простых) случаях решения задач оптимизации параметров получаются аналитическими методами. Проиллюстрируем сказанное простыми примерами.

Пример 1. Найти для сосуда в форме цилиндра объемом V (без крышки; рис. 3.11) оптимальный в смысле $S \rightarrow \min$ диаметр d .

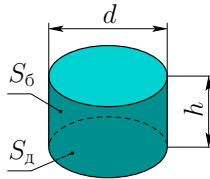


Рис. 3.11. Площади боковой поверхности S_6 и дна S_d

Решение. Выразим площадь поверхности S , которую нужно минимизировать:

$$S = S_6 + S_d = \pi dh + \frac{\pi}{4}d^2.$$

При этом объем $V = \frac{\pi}{4}d^2h$, откуда $h = \frac{4V}{\pi d^2}$, и тогда

$$S(d) = \frac{4V}{d} + \frac{\pi}{4}d^2.$$

Условие экстремума (при $d > 0$, очевидно, минимума) этой ЦФ

$$S'_d = -\frac{4V}{d^2} + \frac{\pi d}{2} = 0,$$

откуда, умножив на $d^2 \neq 0$, получим:

$$\frac{\pi d^3}{2} = 4V, \text{ или } d = \sqrt[3]{\frac{8V}{\pi}}.$$

Так, при $V = 0,1 \text{ м}^3$ оптимальный (в смысле $S \rightarrow \min$) диаметр: $d = \sqrt[3]{8 \cdot 0,1/\pi} \approx 0,634 \text{ м}$, а $h = \frac{4V}{\pi d^2}$, откуда $h \approx 0,317 \text{ м}$.

Метод наименьших квадратов. Пусть имеются данные (например, результаты измерений) о зависимости величины y от вектора \mathbf{x} независимых переменных в виде таблицы $\{y, x_1, \dots\}_i$, где $i = 1, \dots, I$.

Тогда, приняв для выражения связи y с \mathbf{x} определенную зависимость $\varphi(\mathbf{a}, \mathbf{x}_i)$, т. е. *регрессионное уравнение* с более или менее обоснованной структурой, можно параметры $\mathbf{a} = [a_1, \dots, a_n, \dots, a_N]^T$ этого уравнения идентифицировать, например, методом наименьших квадратов (МНК, англ. *least squares fitting; Ordinary Least Squares, OLS*).

В классическом варианте МНК мерой отклонения величин по уравнению регрессии $\varphi_i = \varphi(\mathbf{a}, \mathbf{x}_i)$ от табличных данных y_i служит неотрицательная ЦФ — сумма квадратов разностей⁸

$$f(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^I (\varphi_i - y_i)^2. \quad (3.45)$$

Покажем, как по МНК определить параметры a_1 , a_2 и a_3 полинома второй степени с независимой переменной x_1 (далее — просто x):

$$\varphi(a_1, a_2, a_3, x) = a_1 + a_2x + a_3x^2. \quad (3.46)$$

Глобальный минимум ЦФ (3.45) достигается для (3.46) в точке (a_1, a_2, a_3) , в которой выполняются условия

$$\frac{\partial f}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial a_2} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial a_3} = 0.$$

Возьмем первое из условий:

$$\frac{\partial f}{\partial a_1} = \frac{\partial}{\partial a_1} \left[\sum_{i=1}^I (a_1 + a_2x_i + a_3x_i^2 - y_i)^2 \right] = 0.$$

Преобразуем производную суммы в сумму производных —

$$\sum_{i=1}^I \left\{ \frac{\partial}{\partial a_1} \left[(a_1 + a_2x_i + a_3x_i^2 - y_i)^2 \right] \right\} = 0.$$

Продифференцируем сложную функцию в квадратных скобках:

$$\sum_{i=1}^I \left\{ 2 \cdot (a_1 + a_2x_i + a_3x_i^2 - y_i) \cdot [(a_1 + \dots)'_{a_1} = 1] \right\} = 0,$$

⁸Минимизация данной ЦФ — задача безусловной оптимизации (без ограничений).

разделим на 2 и получим (записывая $\sum_{i=1}^I$ как \sum)

$$\left(\sum 1\right) \cdot a_1 + \left(\sum x_i\right) \cdot a_2 + \left(\sum x_i^2\right) \cdot a_3 = \left(\sum y_i\right),$$

т. е. условие в виде линейного уравнения с неизвестными a_1 , a_2 и a_3 .

Преобразуя так же и другие два условия, получим связывающую все три параметра (3.46) систему линейных уравнений

$$\begin{pmatrix} \sum x_i^0 & \sum x_i^1 & \sum x_i^2 \\ \sum x_i^1 & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum y_i x_i^0 \\ \sum y_i x_i^1 \\ \sum y_i x_i^2 \end{Bmatrix},$$

которая решается, например, методом Гаусса [10].

П р и м е р 2. Найти по МНК параметры уравнения вида (3.46), аппроксимирующего табл. 3.2 зависимости η_V от частоты вращения n .

Таблица 3.2

Зависимость коэффициента наполнения η_V от n

i	1	2	3	...	9	10	11
n	900	1000	1100	...	1700	1800	1900
η_V	0,8445	0,8633	0,8726	...	0,8672	0,8635	0,8562

Р е ш е н и е. Разработана программа на языке С, в которой применен МНК, реализованный в библиотеке *numeric*; получены параметры (3.46) и график (рис. 3.12). Исходный код программы см. в прил. Д.

Отметим еще раз, что *аналитические* методы минимизации функций применимы лишь к весьма простым задачам.

Так, в первом примере (с. 108) решена простая задача оптимизации *геометрической* характеристики простого объекта: минимум ЦФ (площади поверхности S цилиндра) удалось найти аналитически.

Во втором примере выполнена обработка экспериментальных данных по МНК — данные аппроксимированы регрессионным уравнением. Использованы полученные аналитически условия минимума ЦФ в виде системы линейных уравнений. Корни системы — решение задачи ПИ уравнения регрессии, т. е. эмпирической модели. Решена задача, обратная задаче вычисления величины, определяемой этим уравнением.

Когда в проектировочных расчетах значение ЦФ вычисляется на основе численного решения *прямых* задач динамики процессов

(т. е. задач Коши), решения *обратных* задач аналитическими методами минимизации ЦФ получить, разумеется, невозможно.

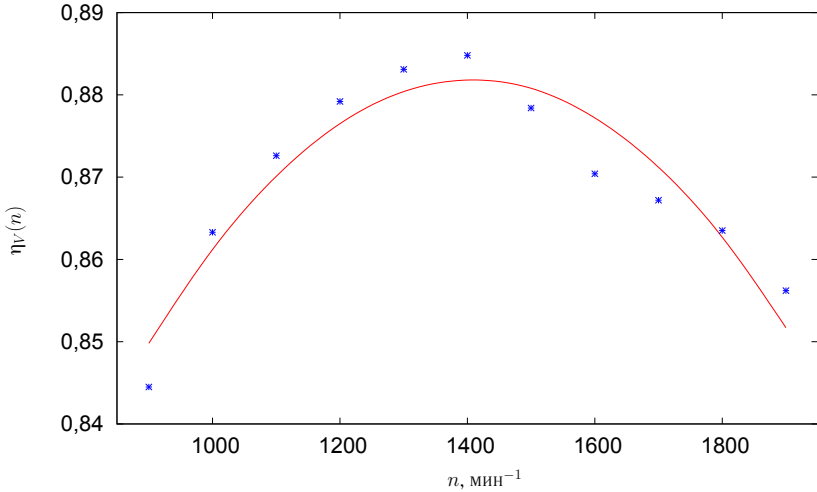


Рис. 3.12. Точки табличной и график регрессионной зависимостей

Таким образом, для практически важных задач оптимизировать параметры (модели или объекта) можно, применяя только численные (итерационные) методы, которые и рассмотрены далее.

3.5.2. Градиентные методы поиска экстремумов

К группе «градиентных» методов отнесем те итерационные методы поиска экстремумов ЦФ, в которых (локально) оценивается направление и быстрота изменения поверхности отклика (3.43) в пространстве параметров a_1, \dots, a_N . Сделанная оценка используется на итерации для уточнения их искомым значений (т. е. перехода от \mathbf{a}^i к \mathbf{a}^{i+1}).

Таким образом, градиентные методы явно или неявно оценивают локальный градиент $\text{grad } f$ (вектор, указывающий направление скорейшего возрастания f) для движения в пространстве параметров \mathbf{a} в противоположном направлении, т. е. к *локальному* минимуму ЦФ. Поэтому эти методы находят тот локальный минимум, к которому из исходной точки ведет линия, ортогональная к линиям (или поверхностям) уровня ЦФ. Чтобы повысить вероятность отыскания *глобального* миниму-

ма ЦФ (с учетом ограничений на ОДЗ параметров \mathbf{a}), поиск многократно повторяют, выбирая случайные координаты начальных точек.

Наиболее известные и применяемые методы этой группы:

- 1) метод градиентного спуска;
 - 2) метод наискорейшего спуска;
 - 3) метод Нелдера — Мида (метод деформируемого многогранника).
- Охарактеризуем кратко эти методы.

Метод градиентного спуска. Из курса математики известно, что

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial a_1} \cdot \mathbf{e}_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial a_n} \cdot \mathbf{e}_n + \dots + \frac{\partial f}{\partial a_N} \cdot \mathbf{e}_N, \quad (3.47)$$

где $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n, \dots, \mathbf{e}_N$ — единичные векторы (орты) в направлении координатных осей $a_1, \dots, a_n, \dots, a_N$.

На итерации метода градиентного спуска точка минимума f вида (3.43) уточняется поэтому как

$$\mathbf{a}^{i+1} = \mathbf{a}^i - \alpha^i \cdot (\text{grad } f)^i,$$

или, в проекциях на координатные оси a_1, a_2, \dots :

$$a_n^{i+1} = a_n^i - \alpha^i \cdot \frac{(\text{grad } f)_n^i}{|(\text{grad } f)^i|}, \quad n = 1, \dots, N,$$

где α^i — шаг в пространстве параметров, принятый на i -й итерации.

Минимизация ЦФ данным методом наглядно (при $N = 2$) показана на рис. 3.13, а.

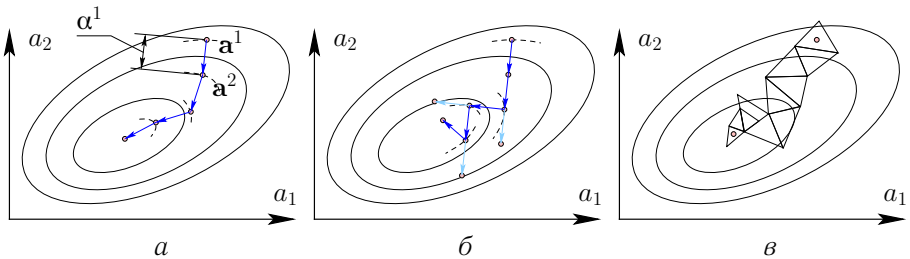


Рис. 3.13. Градиентные методы минимизации $f(\mathbf{a})$

Частные производные f по a_n ($n = 1, \dots, N$) — компоненты вектора-градиента (3.47). Они могут вычисляться аналитически, если ЦФ $f = f(\mathbf{a})$ задана явной формулой. В общем же случае⁹ применимо численное дифференцирование.

Так, по формуле центральных разностей:

$$(\text{grad } f)_n^i = \frac{1}{2\Delta a_n^i} [f(\dots, a_n^i + \Delta a_n^i, \dots) - f(\dots, a_n^i - \Delta a_n^i, \dots)],$$

при этом поверхность отклика ЦФ должна быть достаточно гладкой (что определяется технологией ее вычисления), а разности Δa_n^i — не превышать существенно α^i .

Описанный метод градиентного спуска эффективен для уточнения оптимальных параметров, если ЦФ гладкая и начальное приближение задано вблизи искомого решения.

Метод наискорейшего спуска. Отличается от предыдущего метода тем, что частные производные (компоненты $\text{grad } f$) вычисляются не на каждой итерации метода, а как показано на рис. 3.13, б.

Увеличенный шаг α^i на начальных итерациях обоих методов позволяет резко сократить число итераций, а его уменьшение на завершающих итерациях — быстро достичь минимума ЦФ с заданной точностью.

Недостатки методов, оценивающих $\text{grad } f$ — требовательность к гладкости поверхности отклика ЦФ и низкая эффективность, если гладкая ЦФ имеет все же «овражистый» вид (преодолеть это затруднение помогает *нормирование* параметров оптимизационной задачи). Но при негладкой ЦФ («шум», скачки значений) методы неэффективны.

Метод Нелдера — Мида. Известен также как метод деформируемого многогранника. Это еще один метод безусловной минимизации функции нескольких переменных.

Поиск минимума в методе Нелдера — Мида основан на вычислении не градиента, а значений ЦФ в $N + 1$ в вершинах *симплекса* — многогранника с минимальным числом вершин в N -мерном пространстве параметров \mathbf{a} ; так, при $N = 2$ симплекс — треугольник (см. рис. 3.13, в).

Поиск в пространстве параметров \mathbf{a} идет путем *отражения* симплекса от самой нижней грани (наглядно при $N = 2$; см. рис. 3.13, в); минимум уточняется (до заданной величины отклонения) путем *редукции* симплекса.

⁹Когда ЦФ определяется из численного расчета, например, во внешней программе.

Данный метод формально относится к методам минимизации для задач без ограничений. Приспособить метод к задачам оптимизации с ограничениями на ОДЗ параметров можно, например, если при нарушении ОДЗ возвращать из процедуры расчета ЦФ «штрафное» значение ЦФ (на порядки превышающее нормальные значения ЦФ).

Поскольку в методе Нелдера — Мида не вычисляются частные производные $\partial f / \partial a_n$, он эффективнее метода градиентного спуска в применении к «зашумленным» (получаемым из численных расчетов) и негладким ЦФ. Последнее делает метод Нелдера — Мида эффективнее, если для ограничения ОДЗ аргументов или значения ЦФ применяется возврат «штрафного» значения из процедуры расчета ЦФ.

Метод Нелдера — Мида применим (и эффективен), в частности, для поиска оптимальных сочетаний параметров ГВТ ДВС и т. п.

Метод, однако, имеет недостаток (присущий всем градиентным методам) — при достижении *локального* минимума он «застрянет» в нем; вероятность достижения именно *глобального* минимума повышают, многократно повторяя поиск от начальных точек с выбранными случайно координатами в пространстве **a**.

Общие недостатки группы градиентных методов:

1) представляют собой по сути методы минимизации ЦФ с неограниченной ОДЗ (а ограничение ОДЗ аргументов ЦФ по методу штрафных функций снижает эффективность поиска минимума);

2) гарантируют достижение лишь *локального* минимума ЦФ (а для гарантии достижения *глобального* минимума нужно применять методы этой группы на итерациях метода статических испытаний);

3) оперируют с параметрами ЦФ как с величинами, изменяемыми непрерывно (а в реальных задачах параметры часто принимают дискретные значения).

Этих недостатков практически лишены эволюционные методы.

3.5.3. Эволюционные методы поиска экстремумов

Эволюционные методы, называемые еще генетическими алгоритмами (ГА), отыскивают глобальный экстремум ЦФ, не оценивая наклон поверхности отклика $f(a_1, \dots, a_N)$. Поиск по ГА основан на эволюционном улучшении *популяции* — набора вариантов (экземпляров) исполнения объекта. Описание экземпляра задается простым блоком данных (из нулей и единиц), образующим его *генотип*. Величина ЦФ для

экземпляра вычисляется как обычно — решением прямой задачи (или серии задач) при параметрах \mathbf{a} , закодированных в генотипе.

На каждой итерации ГА (как численного метода) выполняются операции над генотипами текущей популяции, имитирующие *эволюцию* (точнее, искусственно ускоряемую *селекцию*) — наследование, мутации, скрещивание (простое или близкородственное), отбор с возможным сохранением «элитных производителей». При этом задействованы случайные числа¹⁰, как в методах статистических испытаний. Все это ведет к накоплению в популяции экземпляров с повышенными значениями ЦФ, т. е. показателями «приспособленности» (англ. *fitness*), и к устойчивому улучшению генофонда популяции при смене «поколений».

Сходимость ГА к точному решению задачи оптимизации параметров — глобальному экстремуму ЦФ в ОДЗ параметров — оценивается статистически: как удержание рекордного значения ЦФ в заданном числе поколений (критерий сходимости итераций метода).

Заметим, что в ГА параметры представляются величинами дискретными (а не непрерывными, как в градиентных методах). Т. е. как раз непрерывное изменение параметра в ГА нужно имитировать; для этого достаточно задать большое число уровней варьирования параметра (например, 2^{10} , что составляет 10 битов двоичного «генотипа» объекта).

Применяя ГА, легко наложить ограничения на ОДЗ параметров; простейший прием — возврат «штрафного» значения из процедуры вычисления ЦФ (при нарушении ОДЗ) — не снижает эффективности ГА.

ГА не предъявляют особых требований к гладкости ЦФ и числу параметров. В силу этого ГА практически гарантируют нахождение глобальных экстремумов довольно сложных и многопараметрических ЦФ. ГА могут применяться для решения разных обратных задач оптимизации параметров (и/или структуры — объекта и/или модели).

Как для любого итерационного метода поиска экстремума ЦФ, вычисление должно быть оформлено процедурой, выполняющей:

- 1) подстановку значений переменных параметров *прямой* задачи;
- 2) вызов расчетной процедуры (или программы) для ее решения;
- 3) последующую обработку решения для вычисления ЦФ.

¹⁰Именно это обеспечивает и ускоренный перебор вариантов из заданного множества, и сходимость к решению — *глобальному* экстремуму ЦФ в области допустимых значений ее параметров a_1, \dots, a_N .

Применимы ГА, в частности, для подбора оптимальных сочетаний параметров ГВТ ДВС [15]. Так, расчет показателей 4-тактного ДВС с волновым наддувом на установившемся режиме по $I-D$ модели требует расчета процесса в ГВТ в течение порядка 10 рабочих циклов (для достижения регулярного решения). Шаг по времени в численном расчете может составлять $0,5^\circ\text{ПКВ}$ (для сходимости решения по методу 2-го порядка к точному решению по уравнениям модели — с отклонением не более $0,2\%$). При указанной дискретности сетки по t или же по φ (т. е. при величине шага $\Delta\varphi = 0,5^\circ\text{ПКВ}$) расчет указанной прямой задачи требует единиц секунд работы одного ядра современного процессора.

При большом числе «экземпляров» в «поколении» оценивать ЦФ под управлением ГА лучше *параллельно* на нескольких ядрах процессора (или на нескольких многоядерных процессорах многопроцессорной вычислительной системы). Применение параллельного ГА существенно ускорит решение задачи оптимизации параметров большой размерности (т. е. с большим числом параметров, варьируемых на большом числе уровней). В равной мере сказанное применимо к задачам параметрической идентификации (ПИ) моделей.

Отлаженная технология решения на ЭВМ *прямых задач* и доступные реализации итерационных методов минимизации функций позволяют легко запрограммировать решение на ЭВМ *обратных задач* — задач оптимизации параметров объектов и задач ПИ моделей.

Рассмотрена наиболее простая постановка задач оптимизации (подбор параметров по одному критерию) и лишь некоторые методы решения. Подробнее подходы к оптимальному проектированию изделий ЭМ (*многокритериальная оптимизация* и практические аспекты) изложены в [16] и (применительно к РП ДВС и топливоподаче) в [17].

В [18] также описаны задачи оптимизации, методы и инструменты.

Вопросы для самоконтроля

1. Охарактеризуйте задачи, решаемые по ОДУ или УЧП моделей как задачи *анализа* процесса (прямые задачи).

2. Опишите общий алгоритм решения прямой задачи расчета процесса. Нарисуйте блок-схему.

3. Расскажите об *аппроксимации* производных в ОДУ или УЧП моделей в численном методе и *устойчивости* алгоритма (при конкрет-

ных условиях задачи и сетке) как условиях *сходимости* численного решения к точному.

4. Напишите формулу *метода Эйлера* для системы ОДУ. Приведите пример решения этим методом уравнений модели из гл. 2.

5. Напишите формулы явного и неявного методов решения «модельного» УЧП теплопроводности.

6. Напишите формулу *метода донорской ячейки* для линейного УЧП переноса.

7. Расскажите о градиентных методах минимизации функций для решения задач оптимизации параметров и приведите пример метода.

8. Расскажите об эволюционных методах решения задач оптимизации параметров.

4. ПРОГРАММНЫЕ МОДУЛИ, ПРОГРАММЫ, ПАКЕТЫ

В этой главе обсуждаются программные модули, программы и пакеты программ, реализующие модели процессов. Рассмотрены вопросы численных расчетов на ЭВМ и анализа (интерпретации) их результатов.

Обсуждаются программные модули как форма реализации математических моделей (и алгоритмов вычислений по ним) на ЭВМ. Особое внимание обращается на единство и иерархичность модели и, как следствие, на продуктивность модульного принципа в ее реализации (для независимой разработки, тестирования и интеграции модулей в программную систему моделирования).

В п. 4.2 обсуждается расчетная программа как основной инструмент решения на ЭВМ задач поверочных и проектировочных расчетов (с. 120). Указывается на возможность реализации процедур *анализа* и *синтеза* (оптимизации) в расчетной программе для ЭВМ или же с применением программных инструментов — как внешних, так и встроенных в применяемые пользователями (расчетчиками) пакеты прикладных программ (ППП).

Далее (в п. 4.3) рассматриваются ППП как развитые инструменты для моделирования процессов (с. 122). Перечисляются основные требования и определяемая ими «архитектура», состав и возможности ППП. Дается краткая характеристика пакетов (общего и специального назначения) для расчета на ЭВМ процессов в двигателях и энергоустановках.

В конце главы приведены вопросы для самоконтроля (с. 123).

4.1. Программные модули и библиотеки моделей

Математические модели (гл. 2) и алгоритмы численных методов (гл. 3) для вычислений на ЭВМ должны быть реализованы программно. Реализуются вычисления по уравнениям моделей на языках программирования (ЯП).

Эффективность вычислений достигается применением ЯП невысокого уровня и трансляцией исходного кода на нем в машинный (исполняемый) код для выполнения процессором целевой ЭВМ.

Эффективности реализации на ЯП моделей и алгоритмов программистом способствует применение *модульного принципа* проектирования (здесь: программных) систем, в основе которого — абстрагирование частей и уровней единой модели друг от друга, а модели — от алгоритма.

Возможно то и другое — благодаря иерархичности, присущей и единой модели, и реализующему ее алгоритму.

Программным модулем, вообще говоря, считается уже отдельное вычисление, оформленное в функцию (процедуру) ЯП. На практике функции группируются по назначению в отдельных файлах исходного текста на ЯП для трансляции в машинный (объектный) и далее в исполняемый код. Такие (более крупные) программные компоненты и будут именоваться ниже *модулями*.

Рассмотрим программы и ППП, для которых реализованы модели процессов невысокой размерности в пространстве НП. В них техническая (или природная) система представляется структурно как совокупность *элементов*, соединенных *связями* (рис. 4.1).

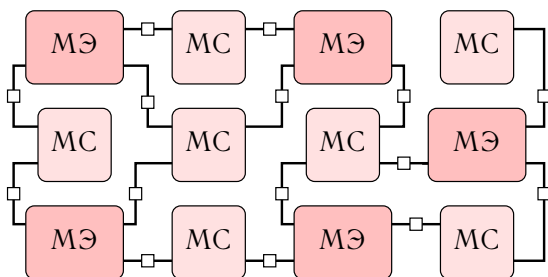


Рис. 4.1. Структурная схема модели (совокупность элементов и связей)

Единая математическая модель процессов при такой декомпозиции системы конкретизируется для каждого элемента и каждой связи тем или иным вариантом модели (и вариантами подмоделей). При этом *модели элементов* (МЭ) описывают процессы в них дифференциальными уравнениями (обыкновенными или с частными производными), а *модели связей* (МС) — текущие взаимодействия элементов.

Структурная схема модели (в терминологии ППП ALLBEA — «сборка», см. рис. 4.1) и есть результат *декомпозиции* системы на элементы. Это своего рода расчетная сетка первого уровня (функцию ячеек выполняют элементы, границ — связи). Сетки могут вводиться и далее для *дискретизации*, на уровне отдельных элементов. Так, сетка (по x) вводится, например, для расчета по МЭ ТРУБКА (с. 63).

Для программ и ППП, реализующих пространственные модели процессов, также актуальны и дискретизация, и декомпозиция систем.

Первая имеет место всегда, т. к. для решения задачи о процессе в заданной области необходима расчетная сетка с большим числом ячеек. Развитые ППП позволяют решать трехмерные задачи и как сопряженные, где процессы в граничащих подобластях (например, в твердом теле, омываемом жидкостью) описаны разными моделями; здесь моделируемая система (единая *расчетная область*) декомпозируется на *подобласти*. Модульность при реализации трехмерных моделей также желательна; она возможна в силу того, что имеются варианты подмоделей, т. е. моделей, замыкающих исходные уравнения единой *3-D* модели (причем на разных уровнях ее иерархии).

Итак, вычисления по уравнениям конкретных моделей (и их подмоделей) реализуют в отдельных модулях, выделенных в результате продуманной декомпозиции предметной области, ее моделей и соответствующих алгоритмов. Модульность способствует ясности кода и корректности реализации вычислений. Но достаточно высокая надежность в этом плане достижима, если разработка и реализация модели ведутся через тестирование, т. е. если имеется тестовый модуль, компонуемый с тестируемым модулем в тестовую (диагностическую) программу, решающую ряд тестовых задач.

Так создаются программные модули, реализующие полезные прикладные модели процессов в системах и их элементах. Поддержка модулей — их изменение (для исправления и развития) и документирование — управляемый производственный процесс. Модули при этом целесообразно группировать в библиотеки моделей. Последнее нужно для интеграции моделей и алгоритмов в те или иные программы и специальные ППП.

4.2. Программы для моделирования процессов

Программа, позволяющая численно решать задачи расчета процессов в системах — солвер (от англ. *solver*, т. е. «решатель»).

Решение уже *прямой задачи* требует компоновки с прикладными модулями и наличия в солвере программной реализации алгоритма вычислений по ним. Такая архитектура солвера типична как для тестовых и исследовательских программ, так и для солверов, входящих в состав развитых ППП (см. п. 4.3).

В солвере развитого ППП имеется управляющий модуль (подпрограмма), выполняющий функцию его «ядра». На это «ядро» возложено

управление данными и вызовы вычислительных процедур библиотек моделей. В любом случае требуется корректная работа алгоритма вычислений по методу решения систем ОДУ и УЧП единой модели.

Так, на рис. 4.2 показан порядок вычислений по МС и МЭ при обновлении на шаге по методу Эйлера (блок-схема — на рис. 3.2) для модели, использующей декомпозицию системы на элементы.

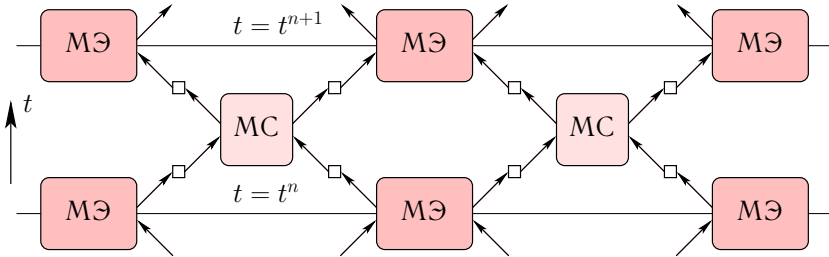


Рис. 4.2. Схема вычислений в «сборке» на шаге метода Эйлера

В солвере, в дополнение к решению прямых задач расчетного анализа, может быть реализовано и решение обратных задач — ПИ и оптимизации. Впрочем, солверы обычно специализируются на решении прямой задачи; решение обратных задач может обеспечить внешняя программа, реализующая метод оптимизации и для вычисления ЦФ многократно вызывающая солвер как отдельную программу.

В солвере можно реализовать алгоритм параллельного вычисления решения прямой задачи (на нескольких ядрах процессора или многоядерных процессорах многопроцессорной ЭВМ). Так, в состав ППП для трехмерных расчетов входят именно такие (параллельные) солверы. Параллелизм присущ и методам оптимизации. Поэтому реализующая параллельный алгоритм оптимизации программа, вызывая (даже «последовательный») солвер для вычисления ЦФ, сможет эффективно использовать ресурсы многопроцессорной ЭВМ.

Для конфигурации постановок задач нужна программа (или программы) с графическим интерфейсом хотя бы к исходным данным соответствующих расчетов. Кроме того, удобный интерфейс нужен для запуска программ для решения поставленных прямых и обратных задач, а также для программ, позволяющих обрабатывать и наглядно

(графически) представлять (или как-то еще интерпретировать) решения этих задач.

Продуктивно группировать (интегрировать) программы в единую программную систему — пакет прикладных программ. Интеграция программ в специальный ППП необходима для их эффективной совместной работы. В этом суть требований к ППП, приведенных в начале следующего п.

4.3. Пакеты прикладных программ

Пакеты прикладных программ для моделирования процессов объединяют модели и алгоритмы вычислений по их уравнениям (и другие методы обработки и представления данных). Развитые ППП предоставляют интегрированную среду, чем достигается эффективность, гибкость и удобство решения расчетных задач в разных постановках.

Основные требования к ППП как программной системе:

- 1) **полнота** библиотек математических моделей;
- 2) **расширяемость** — возможность подключать пользовательские модели, добавлять новые модели в имеющиеся библиотеки, а также новые библиотеки моделей;
- 3) **вычислительная эффективность** — эффективное использование располагаемых ресурсов ЭВМ для численного решения прямых и обратных задач методами с высокими показателями по аппроксимации, устойчивости и сходимости к решениям задач;
- 4) **переносимость (платформонезависимость)** — полноценная работа на основных программно-аппаратных платформах;
- 5) **гибкость применения** — возможность настройки различных постановок задач и представления их решений, автоматизация расчетов при параметрическом анализе и синтезе, возможность работы в удаленном и распределенном режимах и т. д.;
- 6) **удобство и эргономичность**, достижимые, как минимум, при наличии единообразного и продуманного графического интерфейса пользователя.

Нас здесь интересуют ППП (как общего назначения, так и специальные), позволяющие моделировать РП ТД, в основном — РП поршневых и комбинированных ДВС.

Сразу выделим ППП *общего назначения* — не предназначенные специально для расчета процессов в проточной части (ПЧ) ГВТ ДВС. К ним отнесем и *MS Excel* и, например, *Matlab*; последний весьма мощен (в т. ч. благодаря тому, что для него имеются библиотеки моделей, описывающих всевозможные предметные области).

Среди *специальных* ППП выделим пакеты, в которых реализованы модели и методы трехмерной ($3-D$) вычислительной гидрогазодинамики (англ. *computational fluid dynamics, CFD*). Развитые ППП этого класса позволяют моделировать рабочий процесс ДВС как турбулентное течение двухфазного рабочего тела с химическими реакциями в пространственной ($3-D$) нестационарной постановке. Примеры: *STAR-CD*, *STAR-CCM+*, *ANSYS Fluent*, *AVL FIRE*.

Далее следуют *специальные* ППП, в которых реализованы одномерные, нульмерные, а также квазистатические модели течения в ПЧ ДВС. Примеры ППП, в которых процесс в ГВТ рассчитывается как течение РТ по одномерной ($1-D$) модели: *GT-SUITE*, *Ricardo WAVE*, *AVL BOOST*, СИМ «Альбея», ALLBEA [14].

Упомянем и такие ППП, в которых реализован ряд библиотек моделей по физическим аспектам процессов (механика, гидромеханика, термогазодинамика, электромагнетизм). Наиболее развитые пакеты допускают многодисциплинарные постановки задач, причем как по одно-, так и по многомерным моделям. Область применения таких ППП (в силу этих возможностей) не ограничена тепловыми двигателями. Примеры: *LMS AMESim* и ALLBEA (реализованы $1-D$ модели).

В [7] описан ряд специальных ППП для расчета процессов в ДВС.

Вопросы для самоконтроля

1. Расскажите, что представляет собой программная реализация модели (программный модуль, тестовый модуль, тестовая программа и тестовая задача).

2. Охарактеризуйте пакеты программ общего назначения для моделирования процессов. Приведите пример конкретного пакета.

3. Охарактеризуйте специальные ППП для расчетов на ЭВМ процессов в системах двигателей и ЭУ по моделям неполной размерности ($1-D$ и $0-D$) по координатам. Приведите пример конкретного пакета.

4. То же, для ППП для расчетов течений газов и жидкостей в $3-D$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В учебном пособии раскрыты основы методологии моделирования процессов в объектах¹. Рассмотрена связь моделирования на ЭВМ процессов с научным методом, на примерах показаны формулирование моделей процессов и некоторые базовые методы решения их дифференциальных уравнений, а также методы оптимизации параметров. Кратко освещены вопросы реализации моделей процессов на ЭВМ и перечислены наиболее распространенные пакеты прикладных программ.

Остались не рассмотренными подробно некоторые темы, понимание которых важно для моделирования на ЭВМ процессов в проточных частях (ПЧ) и рабочих процессах других систем тепловых двигателей (ТД):

- 1) методы анализа размерностей и подобия;
- 2) методы идентификации параметров математических моделей;
- 3) модели агрегатов и элементов ПЧ и других систем ТД;
- 4) модели для инженерного анализа трехмерных течений в ПЧ ТД.

Указанные темы, лишь затронутые в данном пособии, подробнее (применительно к поршневым и комбинированным ДВС) раскрываются в курсе (и [конспекте](#)) лекций по дисциплине «Моделирование рабочих процессов энергетических машин» (МРПЭМ). Указанная дисциплина преподается студентам, которые обучаются по программе подготовки магистров по направлению 13.04.03 – «Энергетическое машиностроение» на [кафедре ДВС](#) Уфимского государственного авиационного технического университета ([УГАТУ](#)).

¹ Изложенная методология, строго говоря, не является *имитационным моделированием* (в том смысле, который в это понятие вкладывали авторы [20, 21]).

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- адекватность, 12, 21, 22, 24, 27, 29
адиабата Пуассона, 57
алгоритм, 71
алгоритмы генетические, 114, 116
анализ, 11, 14, 105, 118
анализ параметрический, 8, 25, 34
анализ размерностей, 8, 10, 28, 29, 32, 124
анализ регрессионный, 32
аналогия, 14, 32, 33, 68–70
аналогия Рейнольдса, 68
аппроксимация, 71, 74, 104, 116
- библиотека моделей, 120
- валидация, 7, 11, 15, 17, 22, 24, 30
вектор, 18, 46, 111, 113
второй закон Ньютона, 35
вязкость, 48, 95
- газ идеальный, 44, 60
газ совершенный, 44, 48, 55, 66, 97
гипотеза, 12, 22, 30
гипотеза ЛТР, 17, 18, 41, 44
гипотеза сплошности, 17, 38, 41, 44
гипотезы замыкающие, 34, 35
гипотезы исходные, 8, 33, 35
- декомпозиция, 71, 119, 121
диаметр эквивалентный, 66
дивергенция, 46
динамика газовая, 86, 97
дискретизация, 71, 73, 119
диффузия, 48, 95
диффузия численная, 94–96
- жидкость несжимаемая, 48, 52
- задача, 7, 19, 71, 105, 118
задача Коши, 72, 73, 107, 134
задача обратная, 25, 116
задача оптимизации, 106, 116
задача прямая, 25, 116
законы сохранения, 7, 8, 35
- идентификация, 28, 32
идентификация параметрическая, 8, 23, 25, 26, 34, 107, 116, 124
интерфейс графический, 121, 122
- количество движения, 35, 42, 45
консервативность, 43, 104, 105
коэффициент вязкости, 4, 65
коэффициент температуропроводности, 4
коэффициент теплоотдачи, 56, 67
коэффициент теплопроводности, 4, 65, 87
коэффициенты переноса, 48
критерии подобия, 28
критерий Куранта, 96
- масса, 35, 42, 45, 53
метод градиентного спуска, 112
метод донорской ячейки, 94, 97, 136
метод Кранка – Николсон, 91
метод Нелдера – Мида, 113
метод наименьших квадратов, 109, 110
метод распада разрыва, 97–102, 138
метод штрафных функций, 106

метод Эйлера, 74, 78, 117, 130
метод Эйлера с пересчетом, 79–82, 85
методы аналитические, 11, 21, 50, 71, 107
методы конечных объемов, 46
методы конечных разностей, 46
методы неявные, 90, 96, 117
методы оптимизации, 9, 121
методы Рунге – Кутты, 85, 103
методы численные, 11, 16, 21, 71, 107
методы эволюционные, 114
методы явные, 75, 88–90, 93, 96, 117
моделирование, 11, 13, 27
моделирование аналоговое, 14, 32, 33
моделирование знаковое, 14
моделирование имитационное, 10, 124
моделирование математическое, 7, 14, 15
моделирование предметное, 13, 32
моделирование физическое, 13, 27
модель, 12–14, 22
модель замыкающая, 39
модель математическая, 11, 35, 119
модель связи, 119
модель физическая, 27
модель элемента, 119
модель эмпирическая, 110
модуль программный, 119
монотонность, 104
научный метод, 15–17, 21–23, 124
неустойчивость, 95
область расчетная, 20
объект, 7, 25, 105
объем контрольный, 44
оптимизация, 25, 71, 105
оптимизация многокритериальная, 116
оптимизация параметров, 25, 116
оригинал, 12, 13, 22, 28
параметр, 11, 17, 19, 23, 50, 55, 62, 63, 73, 75, 105
параметры состояния, 39, 41
переменные зависимые, 7, 17, 21, 36, 41, 44, 47, 72
переменные зависимые консервативные, 37, 82, 97
переменные зависимые первичные, 37, 84, 98
переменные независимые, 7, 17, 21, 36, 41, 44, 70, 74
перенос молекулярный, 48, 65
подобие, 28
подобие приближенное, 31
подобия критерии, 30
поток теплоты, 4, 55, 59, 87
потребитель, 26
практика, 22
процесс, 7, 9, 13, 14, 24, 28
процесс изоэнтропический, 57
процесс рабочий, 5, 10, 20, 24, 70, 123
радиан, 5, 56
расчет поверочный, 7, 25, 34, 72
расчет проектировочный, 7, 25, 26, 34, 72
режим установившийся, 61
решение точное, 15, 16, 34, 74

решение численное, 7, 16, 21, 34, 74
 связь, 19, 50, 119
 сгорание, 58, 59
 сетка расчетная, 21, 71, 74
 синтез, 14, 25–27, 105, 118
 синтез параметрический, 8, 11, 25, 34
 система, 19, 35, 37, 119
 смесь горючая, 61, 62
 сопротивление местное, 19
 среда внешняя, 36, 37, 50, 54, 55
 среда сплошная, 38, 41
 степень сжатия, 5, 57
 структура, 11, 12, 105
 сходимость, 16, 21, 74, 104, 117
 тензор, 18, 46
 теория, 16, 22, 28, 32
 теория подобия, 8, 10, 28, 29
 теплопроводность, 48, 95
 теплота сгорания, 63
 течение неустановившееся, 40, 44, 63, 68, 96
 течение установившееся, 68
 универсальность, 16, 22, 23, 27, 29, 32
 уравнение Бюргерса, 92, 95
 уравнение Лапласа, 33
 уравнение регрессии, 23, 31, 32, 67, 109, 110
 уравнение состояния, 38, 39, 60
 уравнение теплопроводности, 70, 86
 уравнения, 7, 11, 14, 17, 35, 71
 уравнения акустики, 91
 уравнения газовой динамики, 92
 уравнения дифференциальные
 обыкновенные, 9, 18, 36, 43, 49, 70
 уравнения Навье – Стокса, 18, 20, 48, 70
 уравнения с частными производными, 9, 18, 37, 42, 71, 86
 уравнения Эйлера, 48
 условия граничные, 20, 73
 условия начальные, 19, 36
 условия однозначности, 7, 19, 28, 34, 50, 72
 устойчивость, 71, 74, 90, 95, 104, 116
 форма дивергентная, 43, 46, 64
 форма интегральная, 64
 форма характеристическая, 44
 функция целевая, 23, 105, 109, 114
 характеристика, 24, 29
 характеристика универсальная, 29–31
 числа подобия, 28, 30
 число Куранта, 95
 число Маха, 66
 число Нуссельта, 56, 67
 число Прандтля, 57, 66
 число Рейнольдса, 57, 66
 элемент, 18–20, 35, 37, 55, 119
 энергия, 35, 42, 45, 53
 энергия внутренняя, 4, 38, 55, 84
 энергия полная, 4, 42
 энергия потенциальная, 53
 энтальпия, 4, 39, 55
 энтальпия образования, 60, 63
 энтальпия полная, 4, 39, 55

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Большая советская энциклопедия: в 30 т. Т. 16: Мезия – Моршанск. М.: Советская энциклопедия, 1974. 615 с.
2. Вибе И. И. Новое о рабочем цикле двигателя. Скорость сгорания и рабочий цикл двигателя. М.: Машгиз, 1962. 269 с.
3. Двигатели внутреннего сгорания. Теория поршневых и комбинированных двигателей / под ред. А. С. Орлина и М. Г. Круглова. М.: Машиностроение, 1983. 372 с.
4. Кавтарадзе Р.З. Теория поршневых двигателей. Специальные главы: учебник для вузов. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2008. 720 с.
5. Кириллин В. А., Сычев В. В., Шейндлин А. Е. Техническая термодинамика: учебник для вузов. М.: Изд. дом МЭИ, 2008. 496 с.
6. Рудой Б. П. Прикладная нестационарная гидрогазодинамика: учеб. пособие. Уфа: УАИ, 1988. 184 с.
7. Рудой И. Б., Черноусов А. А. Системы имитационного моделирования ДВС: учеб. пособие. Уфа: УГАТУ, 2008. 128 с.
8. Самарский А. А., Михайлов А. П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. М.: Физматлит, 2005. 320 с.
9. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1977. 440 с.
10. Турчак Л. И., Плотников П. В. Основы численных методов: учеб. пособие. М.: Физматлит, 2003. 304 с.
11. Черноусов А. А. Основы механики жидкости и газа. Исходные гипотезы и уравнения: учеб. пособие. Уфа: УГАТУ, 2013. 1 электрон. опт. диск (CD-ROM).
URL: http://dvs.ugatu.ac.ru/images/files/mjg/fluidmech_basic_2013.pdf
(дата обращения: 17.10.2019).
12. Черноусов А. А. Основы численного моделирования рабочих процессов тепловых дв-лей: учеб. пособие. Уфа: УГАТУ, 2008. 265 с.
URL: http://dvs.ugatu.ac.ru/images/files/mrpm/modeling_2008.pdf
(дата обращения: 17.10.2019).
13. Кавтарадзе Р.З., Онищенко Д. О., Зеленцов А. А. Трехмерное моделирование нестационарных теплофизических процессов в поршневых двигателях: учеб. пособие. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2012. 85 с.

14. Еникеев Р. Д., Черноусов А. А. Проектирование и реализация пакета прикладных программ для анализа и синтеза сложных технических объектов // Вестник УГАТУ. 2012. Т. 16, № 5. С. 60–68.

URL: <http://journal.ugatu.ac.ru/index.php/Vestnik/article/view/639/480>

(дата обращения: 17.10.2019).

15. Черноусов А. А. Оптимальные по наполнению параметры газозвоздушного тракта четырехтактного ДВС // Вестник УГАТУ. 2013. Т. 17, № 3. С. 239–245.

URL: <http://journal.ugatu.ac.ru/index.php/Vestnik/article/view/1612/1469>

(дата обращения: 17.10.2019).

16. Чуян Р. К. Методы математического моделирования двигателей летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1988. 288 с.

17. Кулешов А. С., Грехов Л. В. Математическое моделирование и компьютерная оптимизация топливоподдачи и рабочих процессов двигателей внутреннего сгорания. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2000. 64 с.

18. Rao S. Engineering optimization: theory and practice. John Wiley and Sons, 2009. 813 p.

19. ГОСТ Р 57188-2016. Численное моделирование физических процессов. Термины и определения. М.: Стандартинформ, 2016. 12 с.

20. Шеннон Р. Имитационное моделирование — искусство и наука / под ред. Е. К. Масловского. М.: Мир, 1978. 418 с.

21. Кельтон В., Лоу А. Имитационное моделирование. 2004. 847 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ А. МЕТОД ЭЙЛЕРА

Текст программы на языке C для численного решения задачи по модели ОСЦИЛЛЯТОР (2.36) и (2.37) методом Эйлера (3.3) и (3.4):

```
// oscillator.c: расчет методом Эйлера

// заголовочные файлы стандартной библиотеки C
#include <stdio.h> // printf()
#include <math.h> // M_PI, sqrt(), cos(), sin()

// вспомогательный макрос
#define TRACE(name, val) printf("# %s=%g\n", name, val)

// инициализированные параметры и данные:
// задачи
double g_m; // масса
double g_k; // коэффициент жесткости
double g_c; // коэффициент сопротивления
// численного решения по модели
double x, v_x; // вектор первичных ЗП
double U[2]; // вектор консервативных ЗП
// точного аналитического решения по модели
double zeta, omega_0, omega_d, C1, C2;
double oscillator_get_omega_d() { return omega_d; }

//— вспомогательные функции; объявления
void oscillator_initialize(double, double,
double, double, double);
void oscillator_update(double, double);
void oscillator_output(double t); // время $t^n$

//— главная функция
int main()
{
    // параметры расчетной области и сетки
    const int N = 300; // число шагов по времени
    double t_0, t_N; // границы по времени t
    double delta_t; // шаг по времени t
    // рабочие переменные метода
    double t; // время t
    int n; // счетчик шагов

    // инициализация независимой переменной
    t_0 = 0.; // НУ: начальный момент $t_0$
```

```

// инициализация зависимых переменных: x_0, v_x_0, ...
oscillator_initialize(
    1., // масса $m$
    1.0, // коэффициент жесткости $k$
    0.2, // коэффициент сопротивления $c$
    0.1, 0.); // НУ: координата $x_0$ и скорость $v_{x\,0}$

// инициализация сетки:
// конечный момент времени $t_N$
t_N = 3. * (2. * M_PI)
    / oscillator_get_omega_d(); TRACE("t_N", t_N);
// шаг по времени
delta_t = (t_N - t_0)
    / (double)N; TRACE("N", (double)N);
    TRACE("delta_t", delta_t);

// вывод на старте $t^0$, $x^0$, ...
oscillator_output(t);

// цикл шагов по времени
for (n = 0; n < N; n++) {

    // обновление ЗП на шаге
    oscillator_update(t, delta_t);

    // обновление НП на шаге от $t^{\{n\}}$ до $t^{\{n+1\}}$
    t += delta_t;

    // вывод на шаге $t^{\{n+1\}}$, $x^{\{n+1\}}$, ...
    oscillator_output(t);
}

// TODO: вывод <...>

return 0; // завершение без ошибок
} // end of main()

//— вспомогательные функции; определения

// инициализация на старте
void oscillator_initialize(
    double m, // масса
    double k, // коэффициент жесткости
    double c, // коэффициент сопротивления
    double x_0, // начальная координата в НУ

```

```

    double v_x_0) // начальная скорость в НУ
{
    // параметры задачи
    g_m = m;
    g_k = k;
    g_c = c;

    // НУ: первичные зависимые переменные
    x = x_0; // координата
    v_x = v_x_0; // скорость

    // НУ: консервативные зависимые переменные
    U[0] = x; // координата
    U[1] = m * v_x; // КД

    // параметры формул аналитического решения:
    // для режима со слабым затуханием; не аperiodического!
    zeta = c / (2. * sqrt(k * m)); // коэффициент затухания
    omega_0 = sqrt(k / m); // угловая частота: собственная и
    omega_d = omega_0 * sqrt(1. - zeta * zeta); // затухающих кол.
    C1 = x_0; // постоянные интегрирования
    C2 = (v_x_0 + C1 * zeta * omega_0) / omega_d;
}

// обновление численного решения на расчетном шаге
void oscillator_update(
    double t, // время
    double delta_t) // шаг по времени
{
    // вектор правых частей системы ОДУ; вычисление:
    double S[2];

    // первая производная координаты
    S[0] = v_x; // скорость

    // первая производная КД – сумма сил
    S[1] = - g_k * x // сила упругости пружины
           - g_c * v_x; // сила сопротивления демпфера

    // обновление консервативных зависимых переменных
    U[0] += delta_t * S[0];
    U[1] += delta_t * S[1];

    // обновление первичных зависимых переменных
    // как декодирование  $\mathbf{U} \rightarrow \mathbf{p}$ 
    x = U[0];

```

```

v_x = U[1] / g_m;
} // end oscillator_update()

// вывод времени, численного и точного решений
void oscillator_output(double t) // время $t^n$
{
    // используются формулы  $x(t)$  и  $v_x(t)=x'(t)$  решения
    // уравнения
    //  $x'' + (c/m) * x' + (k/m) * x = 0$ ,
    // по этим формулам и параметрам задачи
    // {m, k, c, x_0, v_x_0}
    // вычисляются точные  $x(t^n)$  и скорость  $v_x(t^n)$ 
    // для сравнения с численным решением

    // точное решение  $x(t^n)$  для  $t^n$ 
    double x_a = exp(- zeta * omega_0 * t)
        * ( C1 * cos(omega_d * t)
            + C2 * sin(omega_d * t) );

    // точное решение  $v_x(t^n)$  для  $t^n$ 
    double v_x_a = exp(- zeta * omega_0 * t)
        * ( (C2 * omega_d - C1 * zeta * omega_0)
            * cos(omega_d * t)
            - (C1 * omega_d + C2 * zeta * omega_0)
            * sin(omega_d * t) );

    // вывод численного и точного решений
    printf("%1.10f %1.10f %1.10f %1.10f %1.10f\n",
        t, // время $t^n$
        x, v_x, // численное решение  $x^n$ ,  $v_x^n$ 
        x_a, v_x_a); // точное решение  $x(t^n)$ ,  $v_x(t^n)$ 
} // end of main()

// end of oscillator.c

```

ПРИЛОЖЕНИЕ Б. МЕТОД ЭЙЛЕРА С ПЕРЕСЧЕТОМ

Фрагменты текста программы на языке C для численного решения задачи Коши по модели (2.36) и (2.37) методом Эйлера с пересчетом (3.7)–(3.10):

```
// oscillator2_part_main.c:

// цикл шагов по времени
for (n = 0; n < N; n++) {

    // обновление ЗП на 1 этапе: от  $p^{n}$  до  $p^{(1)}$ 
    oscillator_update(t, delta_t, 1);

    // обновление НП на 1 этапе: от  $t^{n}$  до  $t^{(1)}$ 
    t += delta_t;

    // обновление ЗП на 2 этапе: от  $p^{(1)}$  до  $p^{n+1}$ 
    oscillator_update(t, delta_t, 2);

    // обновление НП на 2 этапе: от  $t^{(1)}$  до  $t^{n+1}$ 
    t = t;

    // вывод на шаге:  $t^{n+1}$ ,  $x^{n+1}$ , ...
    oscillator_output(t);
}

// oscillator2_part_update.c:

// обновление численного решения на расчетном шаге
void oscillator_update(
    double t, // время
    double delta_t, // шаг по времени
    int stage) // номер этапа метода: 1 или 2
{
    // вектор правых частей системы ОДУ
    double S[2];

    double *pU; // указатель на нужный массив

    // 1) вычисление правых частей

    // производная координаты (x) – скорость
    S[0] = v_x;

    // производная КД (m vx) – сумма сил:
```

```

S[1] = - g_k * x      // сила упругости пружины
        - g_c * v_x; // сила сопротивления демпфера

// 2) обновление консервативных зависимых переменных

if (1 == stage) { // на 1 этапе
    Up[0] = U[0] + delta_t * S[0];
    Up[1] = U[1] + delta_t * S[1];
    pU = Up;
}
else { // на 2 этапе
    U[0] = 0.5 * (U[0] + Up[0] + delta_t * S[0]);
    U[1] = 0.5 * (U[1] + Up[1] + delta_t * S[1]);
    pU = U;
}

// 3) обновление первичных зависимых переменных –
// как декодирование  $\mathbf{U}$  to  $\mathbf{p}$ 
x = pU[0];
v_x = pU[1] / g_m;
} // end oscillator_update()

```

Текст остальных частей программы идентичен приведенному в прил. А на с. 130.

ПРИЛОЖЕНИЕ В. МЕТОД ДОНОРСКОЙ ЯЧЕЙКИ

Текст программы на языке C для численного решения задачи на с. 96 по методу донорской ячейки:

```
// donor_cell.c: расчет методом донорской ячейки

#include <stdio.h>

int main()
{
    const double c = 6.; // параметр в УЧП

    const int Nx = 100; // число ячеек
    const int N = 80; // число шагов по времени

    const double x_max = 1.0; // длина расчетной области, м
    const double t_max = 0.1; // время процесса, с

    double delta_x = (x_max - 0.) / (double)Nx; // ячейка, м
    double delta_t = (t_max - 0.) / (double)N; // шаг, с

    // массив  $u^{\{n\}}$  в ячейках (с двумя фиктивными яч.)
    double u[Nx+2];

    // массив  $f^{\{n\}}$  на границах ячеек
    double f[Nx+1];

    double x;
    int i, n; // номер ячейки и номер шага

    // начальные условия, НУ
    for (i = 1; i <= Nx; i++) {
        x = delta_x * (i - 0.5);
        u[i] = (0.1 < x && x < 0.3)? 1.: 0.;
    }

    // цикл шагов расчета по времени
    for (n = 1; n <= N; n++) {

        // граничные условия, ГУ
        u[0] = 0.; // ГУ  $u(0, t)$ 
        // u[Nx+1] = u[1]; // ГУ  $u(x_{\max}, t)$  - не нужно

        // расчет плотностей потоков
        for (i = 0; i <= Nx; i++) {
```



```

// для линейного уравнения
f[i] = c * u[i]; // flux_func(u[i], u[i+1]);

// для уравнения Бюргерса
//f[i] = u * u / 2.; // flux_func(u[i], u[i+1]);
}

// обновление величин ЗП в ячейках с учетом потоков
for (i = 1; i <= Nx; i++) {
    u[i] += delta_t * (f[i-1] - f[i]) / delta_x;
}

// вывод численного решения при $t=t^N=t_max$
for (i = 1; i <= Nx; i++) {
    // координата центра ячейки $x_i$ и $u_i^n$
    printf("%.15f %.18f\n", delta_x * (i - 0.5), u[i]);
}

// завершение без ошибок
return 0;
} // end of main()

// end of donor_cell.c

/*
static double flux_func( // потоковая f()
    double u_L, // $u^n$ слева от границы
    double u_R) // $u^n$ справа от границы – не нужно
{
    static const double c = 6.; // > 0!

    // для линейного уравнения
    return c * u_L;

    // для уравнения Бюргерса
    //return u * u / 2.;

}
*/

```

ПРИЛОЖЕНИЕ Г. МЕТОД РАСПАДА РАЗРЫВА

Главный модуль программы на C++, реализующей численное решение тестовой задачи о распаде начального разрыва параметров газа по I - D модели из уравнений (2.22), (2.24) и (2.25) методом распада разрыва С. К. Годунова (с. 98):

```
// godunov.cpp: расчет методом распада разрыва Годунова

#include <iostream> // классы библиотеки потоков ввода и вывода

using namespace std;

#include "riemann.h" // процедура расчета РПП
#include "properties.h" // параметры свойств газа

void encode(double [3], double&, double&, double&);
void decode(double [3], double&, double&, double&);
void flux (double [3], double [3], double [3]);

int main()
{
    const int NX = 100; // число реальных ячеек; еще 2 фиктивные
    const int N = 80; // число шагов по времени

    const double dt = 0.001; // шаг по времени, с
    const double dx = 1.; // размер ячейки, м

    int n, ix, k; // номер шага, ячейки и уравнения

    // массивы
    double U[NX+2][3]; // консервативных ЗП
    double F[NX+1][3]; // плотностей потоков на границах

    // параметры состояния и скорость
    double rho, T, e, E, p, u = 0.;

    // начальные условия: НУ
    for (ix = 1; ix <= NX; ix++) { // переменные:

        if (ix <= NX / 2) { p = 200000., rho = 2.0; } // первичные
        else { p = 100000., rho = 1.0; }

        encode(U[ix], rho, u, p); // консервативные
    }
}
```

```

// цикл шагов расчета по времени
for (n = 1; n <= N; n++) {

    // вывод номера текущего шага
    cerr << n << '\n';

    // граничные условия отражения
    U[0][0] = U[1][0]; U[NX+1][0] = U[NX][0];
    U[0][1] = - U[1][1]; U[NX+1][1] = - U[NX][1];
    U[0][2] = U[1][2]; U[NX+1][2] = U[NX][2];

    // расчет плотностей потоков
    for (ix = 0; ix <= NX; ix++)
        flux(U[ix], U[ix+1], F[ix]);

    // обновление параметров в ячейках с учетом потоков
    for (ix = 1; ix <= NX; ix++)
        for (k = 0; k < 3; k++)
            U[ix][k] += dt * (F[ix-1][k] - F[ix][k]) / dx;
}

// вывод численного решения в ячейках
for (ix = 1; ix <= NX; ix++) {
    decode(U[ix], rho, u, p);
    cout << fixed << dx * (ix - 0.5) << ' '
         << fixed << p << ' ' << fixed << rho << ' '
         << fixed << u << ' ' << endl;
}

return 0; // OK!
}

inline void encode(
    double U[3],
    double &rho, double &u, double &p)
{
    static double T, e, E;

    // уравнения состояния
    T = p / (rho * R_GAS);
    e = cv * T;
    E = e + 0.5 * u * u;

    // консервативные переменные
    U[0] = rho;
    U[1] = rho * u;

```

```

    U[2] = rho * E;
}

inline void decode(
    double U[3],
    double &rho, double &u, double &p)
{
    static double E, e, T;

    // консервативные переменные
    rho = U[0];
    u   = U[1] / rho;
    E   = U[2] / rho;

    // уравнения состояния
    e   = E - 0.5 * u * u;
    T   = e / cv;
    p   = rho * R_GAS * T;
}

inline void flux(double U_L[3], double U_R[3], double F[3])
{
    static double rho_L, u_L, p_L;
    static double rho_R, u_R, p_R;
    static double rho, u, p, T, e, E;

    // параметры в ячейке:
    decode(U_L, rho_L, u_L, p_L); // слева от границы
    decode(U_R, rho_R, u_R, p_R); // справа от границы

    // решение задачи о РИП
    riemann_problem(rho_L, u_L, p_L, rho_R, u_R, p_R,
                   &rho, &u, &p);

    // T, e — из уравнения состояния; E — уд. полная энергия
    T = p / (rho * R_GAS);
    e = cv * T;
    E = e + 0.5 * u * u;

    // плотности потоков:
    F[0] = rho * u; // массы
    F[1] = rho * u * u + p; // КД
    F[2] = rho * u * E + p * u; // энергии
}

// end of godunov.cpp

```

ПРИЛОЖЕНИЕ Д. МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Программа на С для аппроксимации табличных данных квадратичной зависимостью по МНК (с. 110):

```
// least_squares.c
//
// Программа аппроксимации данных по МНК полиномом с p=2
//
// стандартная библиотека языка С
#include <stdlib.h>
#include <stdio.h>

// библиотека numeric
#include <numeric/approx_poly.h> // аппроксимация полиномами

// главная функция
int main()
{
    // табличные данные {n, eta_V}_i
    double x[] = { 900., 1000., 1100., 1200.,
                  1300., 1400., 1500., 1600.,
                  1700., 1800., 1900.,          };
    double y[] = { 0.8445, 0.8633, 0.8726, 0.8792,
                  0.8831, 0.8848, 0.8784, 0.8704,
                  0.8672, 0.8635, 0.8562,          };

    int num_elems = (int)(sizeof x / sizeof x[0]);

    int i, ierror = 0;

    double a[3]; // параметры квадратичной зависимости

    // ПИ: расчет параметров a[3] квадратичной зависимости
    numeric_approx_poly_init(x, y, num_elems, a, 2, &ierror);

    if (ierror) {
        fprintf(stderr, "ERROR: "
            "Function numeric_approx_poly_init() failed: "
            "Error code %d\n", ierror);
        return EXIT_FAILURE;
    }

    // вывод вычисленных параметров a[3]
    printf("// least_squares.out:\n"
```

```

    " // \n // a1=%g, a2=%g, a3=%g \n // \n",
    a[0], a[1], a[2]);

// вывод:
for (i = 0; i < num_elems; i++) {

    printf("%4g %6.4f %6.4f \n",
        // вывод табличных данных
        x[i], y[i],
        // вывод величин 'y' по квадратичной зависимости
        numeric_approx_poly_eval(x[i], a, 2, &ierror));

    if (ierror) {
        fprintf(stderr, "ERROR: "
            "Function numeric_approx_poly_eval() failed: "
            "Error code %d \n", ierror);
        return EXIT_FAILURE;
    }
}

return EXIT_SUCCESS;

} // end main()

// end least_squares.c

// least_squares.out:
//
// a1=0.635297, a2=0.000350292, a3=-1.24429e-07
//
900 0.8445 0.8498
1000 0.8633 0.8612
1100 0.8726 0.8701
1200 0.8792 0.8765
1300 0.8831 0.8804
1400 0.8848 0.8818
1500 0.8784 0.8808
1600 0.8704 0.8772
1700 0.8672 0.8712
1800 0.8635 0.8627
1900 0.8562 0.8517

```